PROPOSITION XI.

To investigate the Velocity which the Flame of the Gunpowder acquires, by expanding itself, supposing it to be fired in a given Piece of Artillery without either a Bullet or any other Body before it.

If the whole substance of the powder was converted into an into an elastic fluid at the instant of the explosion : then, from the known elasticity of this fluid assigned by our theory, and its known density, we could easily determine the velocity with which it would begin to expand, and could thence, trace out its future augmentations in its progress through the barrel; but as we have shewn that the elastic fluid, in which the activity of the gunpowder consists, is only $\frac{3}{10}$ of the substance of the powder ; the remaining $\frac{7}{10}$ will in the explosion be mixed with the elastic part, and will by its weight retard the activity of the explosion; and yet they will not be so completely united as to move with move with one continued motion, but the unelastic part will be less accelerated than the rest; and some of it will not even be carried out of the barrel, as it appears by the considerable quantity of unctuous matter which adheres to the inside of firearms, after they have been used.

These inequalities in the expansive motion of the flame oblige us to recur to experiments for its accurate determination.

The experiments, made use of for this purpose, were of two kinds: the first was made by charging the barrel A with l2dw. of powder, and a small wad of tow only ; and then placing its mouth 19 inches from the centre of the pendulum, mentioned in the seventh ·proposition ; on firing it in this situation, the impulse of the flame on the pendulum made it ascend through an arch, whose chord was 13,7 inches; whence, if the whole substance of the powder was supposed to strike against the pendulum, and each part to strike with the same velocity, that common velocity must have been at a rate of about 2650 feet in 1". This, then, is the least velocity, which the powder could be supposed to acquire in its expansion ; for if we suppose the elastic part to acquire a greater velocity in the expansion than the other gross vapour, (which it undoubtedly does) this common velocity here assigned must be augmented for the elastic fluid, and diminished for the grosser substance of the powder. As some part of the velocity of the flame was lost in passing through 19 inches of air, I made the remaining experiments on this subject in a manner not liable to that inconvenience.

I fixed the barrel A on the pendulum, so that its axis might be both horizontal and also perpendicular to the plane IIK; or, which is the same thing, that it might be in the plane of the pendulum's vibration ; the height of the axis of the piece above the centre of the pendulum was six inches, and the weight of the piece, and of the iron that fastened it, &c. was 11 lb $\frac{1}{2}$. The barrel in this situation being charged with 12 dw. of powder, without either a ball or wad, the powder only put together with the rammer, on the discharge of the pendulum ascended through an arch, whose chord 10 inches, or reduced to an equivalent blow in the centre of the pendulum, supposing the barrel away, it would be 14,4 inches nearly.

The same experiment repeated again, the chord of the ascending arch was 10,1 inches, which reduced to the centre, is 14,6 inches.

To determine what difference of velocity there was in the different parts of the vapour, I loaded the piece again with 12 dw. of powder, and rammed it down with a wad of tow weighing 1 dw. Now I conceived, that this wad, being very light, would presently acquire that velocity, with which the elastic part of the fluid would expand itself when uncompressed ; and I accordingly found that the chord of the ascending arch, was by this means augmented to 12 inches, or at the centre to 17,3 : whence, as the medium of the two experiments is 14,5, the pendulum ascended through an arch 2, 8 inches longer, by the additional motion of l dw. of matter moving with the velocity of the swiftest part of the vapour, with which this l dw. of matter moved, was that of about7000 feet in I".

It will, perhaps, be objected to this determination; that the augmentation of the arch, through which the pendulum vibrated in this case, was not all of it owing to the quantity of motion given to the wad, but part of it was produced by the confinement of the powder, and the greater quantity thereby fired. But if it were true that a part only of the powder fired, when there was no wad, it would happen, that in firing different quantities of powder without a wad, the chord of the ascending arch would increase and decrease nearly in the ratio of those quantities, which yet I have found it to do; for with 9 dw. that chord was 7, 3 inches, which with 12 dw. we have seen was but 10, and 10,1 ; and even with 3dw. the chord was 2 inches; deficient from this proportion by ,5 only; for which defect too, other valid reasons are to be assigned.

And there is still a more convincing proof, that all the powder is fired, although no wad be placed before the charge ; which is, that the part of the recoil arising from the expansion of the powder alone, is found to be no greater when it impels a leaden bullet. before it, than when the same quantity is fired without any wad to confine it. We have seen that the chord of the arch, through which the pendulum rose. from the expansion force of the powder alone, is 10, or 10,1 and the chord of that arch when the piece was charged in the customary manner with a bullet and wad, I found to be the first time $22\frac{1}{4}$, and the second time $22\frac{7}{8}$; or at a medium 22,56. Now the impulse of the ball and wad, if they were supposed to strike the pendulum in the same place in which the barrel was suspended; with the velocity they had acquired at the mouth of the piece, would drive it through an arch whose chord would be about 12,3, as is known from the weight of the pendulum, the weight and position of the barrel, and the velocity of the bullet, determined by our former experiments; whence, subtracting this number l2,3 from 22,56, the remainder 10,26, as nearly the chord of the arch, which the pendulum would have ascended through, from the expansion of the powder alone ; when fired with a bullet. before it ; and this number 10,26 differs very little from 10,1, which we have found to be the chord of the ascending arch, when the same quantity of powder expanded itself freely, without either bullet or wad before it.

Again, that this velocity of 7000 feet in 1" is not much beyond what the most active part of the flame acquires in expanding, is evinced from hence, that we have above, in the 38th experiment, an instance of a ball actually discharged with a velocity of 2400 in 1" , and yet it appeared not that the action of the powder on this bullet, was at all diminished on account of this immense celerity ; consequently, the degree of swiftness with which in this instance the powder followed the ball ; without losing any part of its pressure, must have been much short of what the powder alone would have expanded with, had not the ball been there.

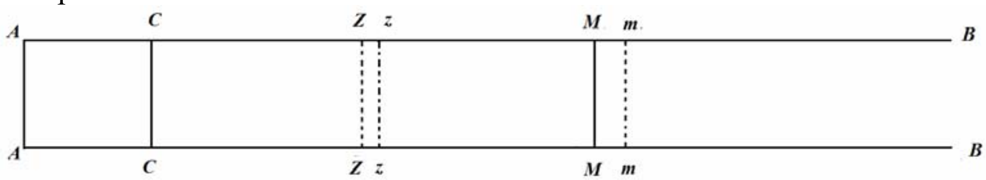
And it is this prodigious celerity of the expansion of the flame of fired powder, that is its peculiar excellence ; and the circumstance in that it so eminently surpasses all other inventions, either ancient or modem, for the purpose of military projections : for as to the quantity of motion of these projectiles only, many of the warlike machines of the ancients produced this in a degree far surpassing that of our heaviest cannon-shot or shells; but the great celerity given to these bodies, cannot be in the least approached by any other means than by the flame of powder. The reason of this difference is, that the ancients could by weights, or the elasticity of springs and stretched cords, augment their powers to any degree desired; but then each addition of power brought with it a proportional addition of matter to be moved ; so that as the power increased, these parts of the machine which were to communicate motion to the projectile, and were consequently to move with it, were likewise increased; and thence it necessarily happened, that the action of the power was not solely employed in giving motion to the impelled body, but much the greatest part of it was spent in accelerating those parts of the machine in which the power resided to enable them to pursue the body to be projected with a perpetual impulse, during its whole passage through the extent of their activity. Hence then, it came to pass, that though these ancient machines could throw enormous weights, they could project them but with small degrees of celerity, compared with what we can communicate to our cannon and musket- shot : whence, in all operations, where these great velocities are useful, our machines are infinitely superior to those of antiquity : although in more confined and shorter projections, these last have some advantages, which may yet render them worthy of the attention of those military geniuses, who have capacity enough to consider each part of their profession according to its true and genuine value, independent of the partial estimation of the times they live in.
From the determinations contained in this proposition, the force of petards may be deduced, since their action solely depends on the impulse of the flame: and it appeared, that a quantity of powder, properly disposed in such a machine, may produce as violent an effort as a bullet of twice its weight, moving with a velocity of 14 or 1500 feet in 1".

FIRST REMARK

We have noted already above that the speed with which the ball will be forced out of the muzzle by the powder, not only comes from its force of expansion, but also that the speed with which the flame itself follows the ball in the muzzle must be taken into consideration. For it is clear that however great the force of the power may be considered to be, always the velocity of the ball still could have no greater degree impressed on it than that which with which the flame of the powder itself spreads, if no ball were present before it. Now this level of speed can never be communicated to the ball in so far as by the powder acting on the ball, as it progresses even slower than the flame progresses, if the ball should not be present at the same moment. Since the ball itself resists the movement, by virtue of its inertia, and also again many more exterior obstacles are to be overcome, it is easy to see that the ball can never achieve the degree of velocity with which the flame itself expands. From this also one can see that the highest level of speed that can be imparted to a ball by the powder, at least is needed consistently to be much smaller than that which can achieved by the naked flame, for the heavier the ball is itself, so the greater the external resistance to overcome. On this account, therefore the question which the author raises in the current proposition, is of the greatest importance, in as much as before it can be discussed, it is impossible to determine the true speed of the ball from the strength of the powder. The author indeed sees the resolution of this question considered by itself to be very easy, and finds only an undertaking so great in the mixture of heterogeneous parts into which the powder is liberated by the ignition, that he sets aside the theory completely, and takes recourse to experiments alone. Nevertheless, though we do not in any way doubt the skill of the author in resolving such questions, we believe that this question to be quite independent of the circumstances of the heterogeneous parts, and that no great difficult would have been found there. For this question affords the deepest insight into the nature and the laws of motion of fluids, and it has not been long since one has been able to perform such tasks with the help of calculation.

We have to thank both the two famous men Johan and Daniel Bernoulli for this important extension of the mathematical sciences, of whom the latter first resolved this matter in his incomparable works on hydrodynamics, and for the most part founded the whole work on the conservation of the so-called living forces. His father, Prof. Johan Bernoulli in Basel had also shed much light on the nature of these motions, to which he had made a most ingenious application from the first principles of the Mechanics, which one can be located for the former, in volume IX of the memoirs of the Imperial Academy of St. Petersburg, and as appeared for the latter a few years ago in Lausanne in the collected works of this great man. Since at the time when he wrote his work, most of these important discoveries were unknown to our author, so it is not difficult to believe that he would have had trouble resolving this question ; although he seemed to think it would be very easily to do so. There however, the one greatest difficulty may not be present in the inhomogeneous parts, into which the powder is freed by the ignition that have produced the unequal movements : for even if this in homogeneity were not present, the determination of the various forces which act on each particle in particular would be far harder to find. But if one pays special attention to any state the air generated from the powder may be in during the expansion, not all parts can have an equal degree of elasticity, and hence not an equal degree of density, then the calculation would be so complicated, that one would be at great pains to overcome all the difficulties, even on employing the Bernoullis' methods. From that, as we have seen already above, the motion of each particle, will increase consistently as long as the expansion lasts, just as each particle of the hindmost parts must be more compressed than the foremost parts : therefore the rear elastic force always must be much greater than the front force due to the increased compression. Thus if a ball is placed before the powder, so after the ignition must the same always be pushed forwards by the smallest force, with which the foremost parts of the flame are endowed, because only the most forward part with its elasticity acts on it. But because the particles of this elastic matter formed from the powder are so small, and also would require a very small force to establish the motion of the same particles, so the inequality in the elasticity cannot be very noticeable, therefore we can say ourselves that we are not far from the truth, if we suppose that the same elasticity is generated in an instant throughout the whole subtle matter. In this way the greatest difficulties have been resolved in this manner, and the question can yet be resolved by the method to be considered in the following manner.

Because one can view the subtle matter generated from the powder through the ignition as air compressed together very strongly, so we will put in place, that in the first instant after the ignition, in the hollow cylinder *AABB* the space *AACC* to be filled with such a compressed air.



Now let the length of the whole cylinder be $AB = a$; the width itself $= cc$, and the length $AC = b$; but the air in this space *AC* to be compressed to become *m* times denser, than ordinary air, so also from the common rule the elasticity itself will be *m* time greater than the elasticity of natural air. If also we put the height of mercury in the barometer to be $= h$, whose weight is equal to the weight of ordinary air, so the elasticity of ordinary air will be able to be expressed by the height of an air column, whose height $= 12000h$, [recall that the air density is around $\frac{1}{800}$ th that of water, while that of mercury is 13.6 times as great, so the weight of the equivalent air column is ~11000*h*] therefore the elasticity of the compressed air in the space *AC*, will equal the pressure of a column of natural air which has a height of 12000*mh.* Let us now put in place, that this air itself after a little time has extended again by *MM*, and take the length of this space $AM = x$; so the air density through this expanded space itself will be in the ratio to the initial density at *AC*, as *AC* to *AM,* that is, as *b* to *x,* and so itself to be still $\frac{mb}{x}$ times greater, than the density of the ordinary air and the elasticity of which will be the weight of a natural air column, whose height is

$$= \frac{12000mbh}{x}$$

If we now assume, that this air expanded through the whole length by its force, and neither ball nor wad should stand in its way here, so the speed with which the expansion can happen, at each single instant and place also can be determined.. Let $\sqrt{v}$ be the speed, with which the foremost plane *MM* continues to move away from *BB*, in such a way that *v* indicates the height, by which a heavy body falling receives that speed exactly, with which the plane *MM* advances. Since now we assume that the expanding compressed air itself always expands uniformly, so another plane *ZZ* would move away so much slower, because this plane is itself nearer the bottom *AA*. Also if we put this distance $AZ = z$, so the speed at *ZZ* will become $= \frac{z\sqrt{v}}{x}$ and while the foremost plane

MM moves forward through an infinitely small distance $Nm = dx$, so the planar disc *ZZ* advances through a distance $= \frac{zdx}{x}$. But since the speed shall be increasing, so we must use the rule from differential calculus, that while *MM* moves through *Mm*, the height *v* will increase by about *dv* or the speed itself $\sqrt{v}$ will increase by $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$; as in the same time the speed of the plane disc *ZZ* increases by $\frac{zdv}{2x\sqrt{v}}$ and the height $\frac{zzv}{xx}$ [*i.e.* proportional to the square of the speed] from which the speed will be increased, can be assumed to be as $\frac{zzdv}{xx}$. Now we will give the plane disc *ZZ* a thickness $Zz = dz$, so that its volume takes the form $= ccdz$, and since the air in this situation is $\frac{mb}{x}$ more dense than ordinary air, so the disc *ZZzz* will be regarding its mass, equal to a cylinder of ordinary air of the same base, for which the height $= \frac{mbdz}{x}$. Now since the motion of this disc will increase, but no such acceleration can be undertaken without a force, so we must put the force in place, by which the speed of the disc *ZZzz* will increase, that will be the weight of a natural air column of equal thickness, of which the height $= 12000p$. Because we see now, that while this disc has been moved forwards the distance $\frac{zdx}{x}$, the speed determined from its height $\frac{zzv}{xx}$ shall have increased by $\frac{zzdv}{xx}$, so must this increase $\frac{zzdv}{xx}$ itself follow from the laws of mechanics according to the proportional increase in the distance $\frac{zdx}{x}$, as the forwards moving force 12000*ccp* to the weight [i.e. mass] of the disc $\frac{mbccdz}{x}$, that is :

$$\frac{zzdv}{xx} : \frac{zdx}{x} = 12000ccp : \frac{mbccdz}{x},$$

[the left hand side of the equation is a ratio for the acceleration, assuming a formula of the form $v^2 = 2ax$, for which $vdv = adx$ or $a = v\frac{dv}{dx}$, where the *z:x* proportion is taken in addition], from which one can determine the [incremental] magnitude of this forwards moving force acting on the [incremental] disc :

$$12000ccp = \frac{mbcczdzdv}{xxdx} = \frac{mbccdv}{xxdx} \cdot zdz.$$

Since now the indefinitely small disc *ZZzz* will require so much force, so will the integral of the formula found, namely

$$\frac{mbccdv}{xxdx}\cdot\frac{zz}{2}$$

is seen to be the force, which is required for the air situated in the volume *AAZZ*, and when we now put $z = x$, so the whole force arises, from which the acceleration of all the air confined in the volume *AAMM* is derived, and will be

$$=\frac{mbccdv}{2dx}.$$

Now this force must be, if no resistance be present, the elastic force bestowed by which the air has been compressed, which to be equal to the weight of a whole air column, of which the height $=\frac{12000mbh}{x}$ and with the thickness $x = cc$; therefore we come upon this equation :

$$\frac{dv}{2dx}=\frac{12000h}{x} \text{ or } dv=\frac{24000hdx}{x},$$

from which the integral gives $v = 24000hl\frac{x}{b}$. Now if we put $AB = a$ for *x*, so we arrive at the height, from which a body must fall to generate the same speed, from which the air compressed in our hollow cylinder will escape from the opening *BB* ; and this height is also $= 24000hl\frac{a}{b}$. Where it is to be noted, that here one cannot take ordinary logarithms for $l\frac{a}{b}$, as one must make use of the so called hyperbolic logarithms. But if one wants to use the common logarithms, the same must be multiplied by this number 2,30258509, or one gets

$$v = 55261hl\frac{a}{b}.$$

But one must know, how many feet are traversed in one second, so one must write the express the length *h* in thousands of Rhenish feet, and the square root of *v* divided by 4. If now $h = 30$ were in English inches, this same quantity expressed in thousandths of Rhenish feet will be $h = 2425$, and the speed sought amounts to

$$\frac{1}{4}\sqrt{55261}\cdot 2425l\frac{a}{b}$$

Rh. ft. in one second. In the example first shown by the author, there was

$$a = 45 \text{ and } b = 2\tfrac{5}{8} \text{ therefore } \frac{a}{b} = \frac{360}{21} = \frac{120}{7},$$

from which in the first case, if neither ball nor wadding shall loaded before the powder, and hardly any other resistance were present, the flame can be seen to project itself from the barrel with a speed $\frac{1}{4}\sqrt{55261 \cdot 2425 \cdot 1,23408}$ ft per second. Since now

$$\begin{aligned} l55261 &= 4,7424187 \\ l2425 &= 3,3847117 \\ l1,23408 &= \underline{0,0913435} \\ & \quad 8,21847404 \end{aligned}$$

taking the half

$$\begin{aligned} & \quad 4,1092370 \\ \text{subtr. } l4 &= \underline{0,6020600} \\ & \quad 3,5071770, \end{aligned}$$

so this speed amounts to as much as 3215 ft. in a second. Which number is less than a half that reported by the author in his experiments, in spite of the fact that here we have considered neither the air pressure nor the resistance itself, which both must diminish the speed still more. Because, since the air pressure is equal to the weight of quicksilver in the barometer, and therefore to an air column 12000*h* high, the resistance is equal to the an air column, of which the height $= v$, so will the whole resistance $= (12000h + v)c^2$, which in the above calculation must be removed from the forwards moving force

$$\frac{12000mbcch}{x}.$$

Therefore we obtain this equation :

$$\frac{mbdv}{2dx} = \frac{12000mbh}{x} - 12000h - v,$$

which will be changed into this :

$$dv + \frac{2vdx}{mb} = \frac{24000hdx}{x} - \frac{24000hdx}{mb}.$$

This equation will be integrable, if we multiply it by $e^{\frac{2x}{mb}}$, were e means the number, of which the hyperbolic logarithm is equal to 1, or it is given by $e = 2,718281828$; but the integral itself will become :

$$e^{\frac{2x}{mb}}v = 24000h\int\frac{e^{\frac{2x}{mb}}dx}{x} - 12000he^{\frac{2x}{mb}}.$$

If now *m* means a number so great, that the fraction $\frac{2x}{mb}$ will be very small, so that there becomes approximately

$$e^{\frac{2x}{mb}} = 1 + \frac{2x}{mb}$$

and therefore

$$\int\frac{e^{\frac{2x}{mb}}dx}{x} = l\frac{x}{b} + \frac{2x}{mb} - \frac{2}{m},$$

because of this, the integral must vanish when $x = b$. From this one obtains :

$$\left(1 + \frac{2x}{mb}\right)v = 24000hl\frac{x}{b} + \frac{24000hx}{mb} - \frac{24000h}{m}.$$

Multiplying throughout by $\frac{1}{1+\frac{2x}{mb}}$ or by $1 - \frac{2x}{mb}$ so there becomes

$$v = 24000h\left(1 - \frac{2x}{mb}\right)l\frac{x}{b} + \frac{24000hx}{mb} - \frac{24000h}{m},$$

if one neglects the terms namely, which become too small. Now in order that the speed can be obtained, with which the flame breaks out through the muzzle *BB*, so putting $x = a$, and from that the common logarithm itself can be used, by multiplying the logarithm found by 2,30258509, from which there emerges

$$v = 55261h\left(1 - \frac{2a}{mb}\right)l\frac{a}{b} + \frac{24000ha}{mb} - \frac{24000h}{m}.$$

Here, as we have seen above, $h = 2425$ thousandth part of a Rhenish ft., and if we assume with the author $m = 1000$, and for the last case $\frac{a}{b} = \frac{120}{7} = 17{,}1428$, so $l\frac{a}{b} = 1{,}2340832$ and also $v = 160646077$; and the speed will work out to be 3168 ft. per second : which is not much smaller, than that, which we had found before without considering the air resistance.

SECOND REMARK

If now the author's experiments and the conclusions drawn from them are correct, so the speed which we have found here from theory is much too small. But the same would be found out to be still much smaller, if we had drawn the true conclusions in the considerations, that not all the powder had itself ignited in the first instant, and further the larger parts of powder would have a still more marked effect in reducing the speed. These circumstances presume, as well as to suppose, that the speed in the given example cannot amount to much over 2000 ft. per second, so also no ball could be driven out with so great a speed, as has been found in the experiments of the author. Yet if we want to add so much, that all the powder ignites at once, and that also the greater parts of powder do not hinder the more subtle parts, yet the speed of the ball would emerge much slower, as such in fact is found.

In order that these can be seen more clearly, as we are allowed to include now in the above calculation also the part due to the compressed air pushing a ball along with the motion, which may hinder the motion. Let us also put in place, that before the compressed air itself a ball may be found at *MM*, the weight of which shall be equal to an air column, of which the thickness $=cc$ and the height $=k$. Now because this ball has the same motion with the foremost disc *MM*, if we assume, that the same will be driven away by a single force, which is equal to a column of natural air, as high as $=P$, so we obtain this equality for the speed from the principles of mechanics: $kdv = Pdx$, and hence

$$P = \frac{kdv}{dx}.$$

This force must be added to that one, which itself gives rise to the acceleration of the flame, namely

$$\frac{mbccdv}{2dx},$$

and thus one obtains the required complete force for the acceleration

$$= \frac{mbccdv}{2dx} + \frac{kccdv}{dx},$$

which must be equal to the elasticity, through which the motion will be continued in that action, namely if we ignore the resistance of the air, which can be done without appreciable error. In this manner we obtain this equation, after which we divide throughout by *cc*,

$$\frac{mbdv}{2dx} + \frac{kdv}{dx} = \frac{12000mbh}{x}$$

and therefore

$$v = \frac{24000mbh}{mb+2k} l \frac{x}{b}$$

From this it appears, that the speed of the bullet is far less always than the speed of the naked flame, which was expressed by this equation $v = 24000hl\frac{x}{b}$. The ratio itself of the speed of the bullet to the speed of the naked flame, which itself has increased in the same circumstances, as $\sqrt{mb}$ to $\sqrt{(mb+2k)}$ which is as 1 to

$$\sqrt{\left(1+\frac{2k}{mb}\right)}.$$

Now since in the former example presented the speed of the naked flame was worked out to be 3168 ft. per second, so the speed of the ball, as enclosed herein under the same conditions, to be discharged only

$$\frac{3168}{\sqrt{\left(1+\frac{2k}{mb}\right)}}$$

ft. per second. But here there is $m = 1000$, $b = 2\frac{5}{8}$ inches, and since the ball is to be made of lead, so $k = 4900$ inches ; therefore there arises

$$\sqrt{\left(1+\frac{2k}{mb}\right)} = \sqrt{\frac{12425}{2625}},$$

and also the required speed of the speed of the ball of 1456 ft. per second can be obtained, which speed is far smaller, even than the trials given have found in that case. But likewise these would be obtained still much smaller from this, if we had taken the grosser parts of the powder into consideration as well as the fact that not all the powder ignites at once.

Now from all this it is quite apparent, that the theory of the force of the gunpowder as specified by the author is impossible to be consistent with his actual experiments, and that a far greater force must lie hidden in the powder than the author believes. So we embrace more and more the opinions of the erudite Daniel Bernoulli, who asserts in his *Hydrodynamics,* that the initial elasticity which is contained in the subtle material of the powder, to be around 10000 greater than that of ordinary air.

[If we consider say an ounce of saltpeter *i.e.* potassium nitrate, in the gunpowder charge, this is around 40 grams, and since the gm.mol.wt of KNO_3 is 100 g. approximately, then ignoring the effects of the added sulphur and carbon, half a gm. mole would produce more than 20 litres of hot gas, depending on the actual chemical reactions, a number of around the magnitude asserted by Bernoulli. The actual reactions between the components is quite complex and not very well defined ; however, the basic reaction is sometime written in the form : $2\ KNO_3 + S + 3\ C \rightarrow K_2S + N_2 + 3\ CO_2$.]

Since now the powder itself is not 1000 more heavy than the air, and from that only $\frac{3}{10}$ has made the compressed air, so it follows necessarily from this, that in so very great a compression the elasticity of the air itself will be from a greater proportion than from its density. [For the gas laws at the time were not understood completely, especially the effect of temperature on the pressure for constant volume.] Then if one cannot allow these forces, then it is impossible to find these forces in the powder, which really still are present in the experiment. The author's principles would be of such a form, which even already we have admitted to doubt, namely that the elasticity of the air always would be proportional to its density, to be entirely overturned : and this case cannot be held to be different than if the air were not all compressed together. The basic principles, which the author has advanced, only apply in this case as we have noted above. Therefore there must be another way to make the actions of the powder clear, a completely different way to be taken to aid understanding the nature of air. To this end, there is now no easier theory of air other than that, which I have given in the 2nd part of the Commentaries of the Academy of St. Petersburg [E7 in this series of translations], which I have founded on the idea of the structure of the air particles, for it is itself clear that these particles cannot be allowed to be pressed together indefinitely far; therefore there must be a degree of density given, which one cannot exceed in the compression of the air. Let the highest degree of density of the air be q times greater than the natural density ; and if one can assume this number q as known, I have found that the elasticity of the natural air itself, to the elasticity of an air, which is m times more dense, must behave to the natural air itself as

$$\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2} \text{ to } \sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}.$$

Since now the elasticity of the natural air will be compressed together by a cylinder of quicksilver, of which the height $= h$, , so will the elasticity of the air, if the same is m times denser, become indicated by a cylinder of quicksilver, of which the height

$$\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}}h.$$

But because q is a very large number, and everything indicated after is always a greater number than m can be, so our intention will be accurate enough,

$$\sqrt[3]{(q-1)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{q^2}}-\frac{1}{9q\sqrt[3]{q^2}}$$

and

$$\sqrt[3]{(q-m)^2} = \sqrt[3]{q^2} - \frac{2m}{3\sqrt[3]{q^2}} - \frac{mm}{9q\sqrt[3]{q^2}}.$$

On that account the elasticity of the air, if it is *m* times denser, than natural air, also can be expressed :

$$\frac{6mq+mm}{6q+1}h = \left(m + \frac{m(m-1)}{6q}\right)h,$$

or the elasticity of natural air will itself behave to the elasticity of an air, which is *m* times denser, than the natural air, as 1 to

$$m + \frac{m(m-1)}{6q}.$$

From which formula at the same time the common rule emerges, that if *m* is not so large a number, the elasticity always shall be quite exactly proportional to the density. But if the number *m* begins to become so large that the fraction $\frac{m(m-1)}{6q}$ can no longer be ignored, so must the discrepancy of the common rule from the truth become evident. But these are based on the size of the number *q*, which is unknown to us; but we would be able to assume the same, if we can find out in a single case, how much the actual rule deviates from the truth. Since we now see clearly from the principles brought forwards, that, if the natural air were compressed in a volume 244 times smaller, then in which case the powder finds itself, its elasticity must become many times greater, without considering that increase which is derived from the powder igniting : so it follows that the number 6*q* must be much smaller than $244 \cdot 243$. Should the elasticity of the noted compressed air be more than 300 times greater then the natural kind so there becomes $56 = \frac{244 \cdot 243}{6q}$ and hence $q = \frac{244 \cdot 243}{336}$ and so smaller than 244, which further runs against our fixed ideas. But it is to be observed, that if the number *m* is not so small, that *q* cannot be found from the above approximation ; therefore in such cases it is necessary to make use of the following rule. Namely, the elasticity of normal air must itself behave to the elasticity of an air *m* times denser, as

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{q^2}} + \frac{1}{9q\sqrt[3]{q^2}} \text{ is to } \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2},$$

that is, as

$$6q+1 \text{ is to } 9qq - 9q\sqrt[3]{q(q-m)^2}.$$

If one has $m = 244$, then the increase in the elasticity cannot be greater than if $q = 244$ as well. In this case thus the elasticity of the air which is compressed together in the powder will be $\frac{9qq}{6q+1}$, that is 366 times q bigger, than the elasticity of air in its normal circumstances. [Recall that at this time the basic ideas of chemical reactions were lacking, and it was thought that air was trapped in very fine pores within the powder, which was suddenly released in the explosion.] And if the heat arises from that, as our author has determined likewise, so that the elasticity of the air which was released from the powder by ignition and heated would be 1500 times greater than ordinary air. Regardless of our concerns, this would seem to be the greatest force which can be appropriated to the powder, so that one can see easily, that likewise it still would not be sufficient to explain the effects determined by experiment.

THIRD REMARK

Hence in order to have a more correct understanding of the force to be attained that is contained in the powder, thus in the first place one has to recall, that the air held in the powder, after which this with any natural degree of the density accepted, fills a space 244 times greater, than before the whole substance of the powder had been kept ; the compressed air in the powder only amounts to about the third part of the powder before the ignition. Therefore the air trapped in the powder must be increased by around three times, or following the author $\frac{10}{3}$ times more to be compressed together, and therefore to have become 813 more dense than natural air. From that the air in the saltpeter finds itself is such a great state of compression, and since the above value of the letter q cannot be taken smaller than this number 813, so it appears accordingly that the true value to be q is equal to 813 or for a round number $q = 800$. Then because this degree of the density of the air in all saltpeter is found to be consistent, so it is supposed now that these also to be the greatest possible degree of compression. Now from this it is easy to consider, how tremendous forces must be required in the production of saltpeter, and since such forces actually are found in nature, so it is very probable, that through that the air would be compressed together in the saltpeter to the highest possible degree, and that now based on the same principles the diverse parts of saltpeter are the same. Thus, if we put in place that the greatest density, to which the air can be brought by compression, to be 800 times more dense than ordinary air, in which circumstance therefore the air would become even as dense as water, which equality seems to do little to confirm this hypothesis : so we are able to give a complete theory of the various degrees of elasticity, which can be found in the air after the various degrees of density have been found. Then if we assign the elasticity of normal air by 1, thus the elasticity of an air which is *m* times greater than normal air will be expressed by

$$\left(1200-3\sqrt[3]{100(800-m)^2}\right)\left(1-\frac{1}{4800}\right),$$

from which the following conclusions can be drawn.

In the first place, if *m* is a very much smaller number, so that the elasticity becomes $=m+\frac{m(m-1)}{4800}$. From which when *m* is a fraction, which appears if the air is not compressed, but rather will be rarefied, thus so that the elasticity always is proportional to the density, as the common rule itself provides, and also all experiments testify, which have been conducted on rarefied air.

In the second place, if the air were forced into a volume 16 times smaller, which is the highest order of compression humanly possible with forces in experiments, so the elasticity already becomes $16\frac{1}{20}$ times greater than the elasticity of normal air. Now since this difference is barely noticeable, it is little wonder that besides, the inaccuracy of the common rule has not yet been uncovered by experiment.

In the third place, if *m* is a number much greater than 16, so the deviation of the common rule will be more noticeable. But because in this case the formula $m+\frac{m(m-1)}{4800}$ has already started to depart from the truth, so one must use the first formula, namely

$$\left(1200-3\sqrt[3]{100(800-m)^2}\right)\left(1-\frac{1}{4800}\right).$$

Thus if there is put $m=100$, thus the elasticity becomes

$$=\left(1200-3\sqrt[3]{49000000}\right)\left(1-\frac{1}{4800}\right)=102,19.$$

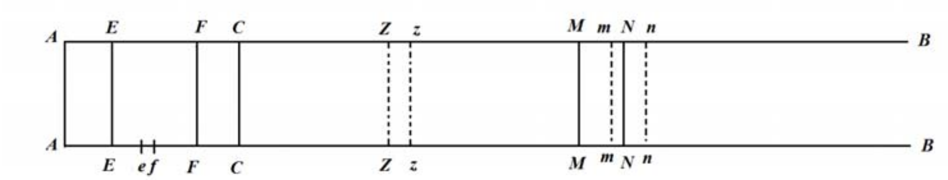
But if one puts in place $m=300$, the elasticity will be

$$=\left(1200-3\sqrt[3]{25000000}\right)\left(1-\frac{1}{4800}\right)=322,73.$$

But in the fourth place if one puts $m=800$, as actually happens in saltpeter and powder, so the elasticity will be $=1200$. Now if still to that the heat of the flame be added, so the same can become around 5 times greater, and thus it becomes over 5000 times greater than the elasticity of normal air. We have thus come upon a force, which is 5 times greater than those, which the author has indicated, and which therefore will be able to bring forth an action, after all considerations, removing all these greatest obstacles reported, which gives us in hand all the effects of the powder. How far therefore this theory agrees with experience, we will see in the next remark examined.

FOURTH REMARK

Let us thus put in place again, that in the hollow cylinder *AABB* the space *AACC* again be filled with powder. Now since the compressed air shall make up



a $\frac{3}{10}$ th part of the whole weight of the powder, thus three kinds of matter are found : In the first place the compressed air, which, as it has been see, is 800 times denser than ordinary air; secondly, the coarse parts, from which the powder has been made, and thirdly the ordinary air, which is itself found between the powder grains. These three materials fill the space *AACC,* and it seems that we are not far from the truth, if we assume, that the ordinary air takes up $\frac{1}{4}$ of the space *AACC,* the compressed air also $\frac{1}{4}$, and the coarse materials take up $\frac{2}{4}$. Thus as soon as the compressed air will be freed from its confinement by the ignition, so by mixing with the ordinary air, and therefore taking up a space twice as great than before, in such a way, that the same will be not more than 400 times as dense as ordinary air. The remaining half of the space *AACC* stays filled with the coarser matter. But now because neither will this material wholly be thrust forwards following the complete spreading of the air in the first disc *CC*, nor still to remain fully behind at the base *AA*, so we come close to the truth if we consider that one half of the coarser material remains behind at the base *AA*, but the other half will be pushed out by the air. Thus, in the first instant, after the powder itself ignites, which, as the author wants, once it should be shot, so the space *AACC* will be filled in such a way, that the first quarter part *AAEE* contains half of the coarser matter of the powder, the last quarter *CCFF* the other half of the powder, and the middle two quarters *EEFF* the compressed air, which is 400 times denser than ordinary air. Thus if the length of the space were put $AC = b$, thus there is

$$AE = \tfrac{1}{4}b,\ \ \mathrm{C}F = \tfrac{1}{4}b \ \text{ and }\ EF = \tfrac{1}{2}b.$$

Now because the coarser parts of the powder are heavier than water, so we will put in place, that the coarser matter which is contained in *CCFF* is equal to an equally wide air column, of which the height $= 1000CF = 250b$. But so that our calculations are not to be restricted based on this hypothesis, regarding which one can have still some doubt, so we will put in place a more general condition :

$$EF = \tfrac{1}{\alpha}b, \quad AE = CF = \tfrac{\alpha-1}{2\alpha}b$$

and which in *EEFF* the air contained shall be m times denser than ordinary air ; but the coarser matter in *CCFF* will have become n times more dense than the common air ; whence if one may put in place $\alpha = 2,\ m = 400$ and $n = 1000$, so the former determinations can be herewith put in place. Now further let us consider that after some passage of time, in which the compressed air *EEFF* likewise has spread out into *EEMM*, and the coarser matter contained in *FFCC* it has been forced as far as *MMNN*, in such a manner, that $MN = FC = \frac{\alpha-1}{2\alpha}b,$ so if we put $EM = x$, the density of the air situated in *EEMM* will be $\frac{mb}{\alpha x}$ times greater than ordinary air. Thus if h were assumed for the height of an air column, of which the weight is equal to the elasticity of natural air, so approximately $h = 29100$ Rh. ft. and the elasticity of the enclosed air in *EEMM* will be equal to that weight of a natural air column, of which the height

$$= \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{\left(q - \frac{mb}{\alpha x}\right)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}} h = \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} h,$$

where q implies the number 800. But we wish to retain the letter q generally, so that if we would like all cases to be found from another value, the calculation would still remain the same. But in this calculation, the formula still does not give rise to the heat, by which the author was able to make the elasticity 4 times greater. But because sometimes the same can be greater, at other times smaller, so we want to use the letter β instead of the number 4, therefore the elasticity sought will become

$$= \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} \beta h,$$

Further $\sqrt{v}$ is to be the speed, with which furthest disc *MM* and thus also the coarser matter *MMNN* will be forced forwards, where v, as already has become known, indicates the height, from which a heavy body by falling obtains the same speed ; but likewise the disc *MM* advances through $Mm = dx$, so must the above height v be increased by dv. Now from this the force itself easily can be found, which will be required to bring about such an acceleration in the coarser matter *MMNN*. Then, since the material is equal to an air column, of which the height $= \frac{\alpha-1}{2\alpha} nb$, thus the force will require the weight of an air column of an equal width, of which the height $= \frac{\alpha-1}{2\alpha} \cdot \frac{nbdv}{dx}$. If now in addition to these a ball should be pushed forwards, of which the weight were equal to an air column, of which the height $=k$, so the forwards motion of this ball would require a force to be expressed by an air column, of which the height $=\frac{kdv}{dx}$.

But regarding the force to be determined, which will be capable of accelerating the compressed air in *EEMM*, of which the density itself will be in the ratio to the ordinary air itself, as $\frac{mb}{\alpha x}$ to 1, so we would wish to consider a disc *ZZ* thereof, and the distance put to be $EZ=z$. The speed of this disc now will be $=\frac{z\sqrt{v}}{x}$, as we have seen above, and likewise as the foremost disc advances through *dx*, so this disc will proceed through $\frac{zdx}{x}$ and meanwhile the height $\frac{zzv}{xx}$, which determines its speed, increases by $\frac{zzdv}{xx}$. Now if we give this disc a thickness $Zz=dz$, so the same will be equal to an air column of which the height $=\dfrac{mbdz}{\alpha x}$, which multiplied by $\frac{zzdv}{xx}:\frac{zdx}{x}$ or by $\dfrac{zdv}{xdx}$, which height indicates an air column, of which the weight is equal to the force capable of producing the acceleration required. Therefore this force will be

$$=\frac{mbzdzdv}{\alpha xxdx}=\frac{mbdv}{\alpha xxdx}\cdot zdz,$$

from which the integral

$$\frac{mbdv}{\alpha xxdx}\cdot\frac{zz}{2}$$

expresses the force, which will be required for the acceleration of the air situated in *EEZZ*, and if one puts $z=x$, so one finds the force $=\dfrac{mbdv}{2\alpha dx}$, which will be required for the acceleration of the whole air, so trapped in *EEMM*.

Now in the first place we will assume that no ball is present before the powder, but it will be naked powder alone without any discharge suggested; and since in this case the whole applied force becomes

$$=\frac{mbdv}{2\alpha dx}+\frac{\alpha-1}{2\alpha}\cdot\frac{nbdv}{dx}=\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bdv}{2\alpha dx},$$

which must be equal to the actual driving force whatever the resistance. But now the forwards driving force is equal to the elasticity, and thus

$$=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\beta h.$$

But the resistance consists in the first place of the counter pressure the ordinary air expresses, which will be indicated by *h*, and then of the resistance which is equal to an air column, whose height $=v$, therefore we have this equation

$$\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bdv}{2\alpha dx}=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\beta h-h-v.$$

But because we have seen before, that the resistance of the air in this case does not amount to much, so we can omit the smallest last term *v* itself to lighten the calculation, and since we find

$$\frac{\left(1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}\right)\left(m+(\alpha-1)n\right)}{2\alpha}bdv=\left(1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}\right)\beta hdx-\left(1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}\right)hdx.$$

In order to integrate this equation, it is to be noted, that

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}=1-\frac{2}{3q}-\frac{1}{9qq}-\frac{4}{81q^3}-\frac{7}{243q^4}-\text{etc.}$$

and

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}=1-\frac{2mb}{3\alpha qx}-\frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x^2}-\frac{4m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^3}-\frac{7m^4b^4}{243\alpha^4q^4x^4}-\text{etc.}$$

Then the integration must also use the fact that if $x=EF=\frac{b}{\alpha}$,
the speed or *v* will be zero. Therefore one obtains

$$\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bdv}{2\alpha dx}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9q^2}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc}\right)$$
$$=\beta h\left(\frac{2mb}{3\alpha q}l\frac{\alpha x}{b}-\frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x}+\frac{m^3b}{9\alpha q^2}-\frac{2m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^3}+\frac{2m^3b}{81\alpha q^3}-\text{etc.}\right)$$
$$-hx\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\text{etc.}\right)+\frac{hb}{\alpha}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\text{etc.}\right).$$

But while the fractions $\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc.}$ are so very small, thus one can ignore the same, and there one has

$$\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bv}{2\alpha}=\beta h\left(\frac{mb}{\alpha}l\frac{\alpha x}{b}+\frac{m^2b}{6\alpha q}-\frac{m^3b^2}{6\alpha^2qx}\right)+\frac{hb}{\alpha}-hx.$$

Now putting in place the length $EB=a$, and making $x=a$, thus the speed arises from this, with which the flame is driven out from the mouth *BB*,

$$v=\frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}\left(l\frac{\alpha a}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6\alpha qa}\right)-\frac{2h(\alpha a-b)}{\left(m+(\alpha-1)n\right)b},$$

for which one can take this equation, with nothing appreciable lacking,

$$v=\frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}l\frac{\alpha a}{b}.$$

If now we put for the letters $\alpha,\ \beta,\ m,\ n$ and h the values indicated above, namely $\alpha=2,\ \beta=4,\ m=400,\ n=1000$ and $h=29100$ Rh. ft, so there arises

$$v=\frac{16}{7}hl\frac{2a}{b}.$$

After this let us calculate the above example cited, where $b=2\frac{5}{8}$ English inches, and $a=45-\frac{21}{32}$. Therefore we have

$$2a=90-\tfrac{21}{16}\ \text{ and }\ \frac{2a}{b}=\tfrac{1419}{42}=33{,}8,$$

then $l\frac{2a}{b}=1{,}528917$, which still must be multiplied by the number 2,30258509. But there is :

$$l1,528917 = 0,184383$$
$$l2,302585 = 0,362215$$
$$l\tfrac{16}{7} = \underline{0,359021}$$
$$0,905619.$$

To this must be added the log. of h in 1000th parts of Rh. ft.

$$lh = \underline{7,463893}$$

there is also $\quad lv = 8,369512$

and $\quad l\sqrt{v} = 4,184756$

therefore

$$\sqrt{v} = 15302.$$

The quarter of this [see remark 1], 3825 indicates the speed sought worked out in ft. per second. This not altogether much greater an increase in the speed, than the 3215 ft. we have found, in spite of having considered a much bigger force, that comes mainly from the larger parts of the powder here, the help of which must be driven out before the compressed air. But if we had put in place, that the coarser matter stays behind mainly at the base of the part *AA*, so the term in which *n* is present would be dropped , and thus this equation

$$v = 2\beta hl\frac{\alpha a}{b} \quad \text{or} \quad v = 8hl\frac{2a}{b}$$

would come out here, from which a speed $\sqrt{\tfrac{7}{2}}$ times greater, that is of 7157 ft. per second arises, which from taking the resistance of the air, might still works out at 7000 ft., which action came to match very accurately the speculation of the author, which he drew from his experiments. Then he concluded from the same, that, if the motion of the flame were not inhibited by the greater particles of the powder, these in the present case were ejected from the barrel with a speed of 7000 ft. It also serves in particular to the confirmation of our thoughts that the force of the powder, that speed which has been found by us to be somewhat greater than the experiments indicate, because of the gradual ignition of the powder something still must be taken away.

If a ball is located before the powder, thus in this case the last calculation also can easily be arranged. Then if *k* indicates the height of an air column, of which the weight of the disc of the ball is equal, thus forthwith appears the sum of the forces, which will be necessary for the acceleration,

$$= \frac{mbdv}{2\alpha dx} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha}\cdot\frac{nbdv}{dx} + \frac{kdv}{dx} = \left(mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k\right)\frac{dv}{2\alpha dx},$$

which force, since no ball were there, became

$$=\left(m+(\alpha-1)n\right)\frac{bdv}{2\alpha dx}.$$

Now we must also, instead of

$$m+(\alpha-1)n$$

in the last calculation, put

$$m+(\alpha-1)n+\frac{2\alpha k}{b},$$

thus we obtain the speed with which the ball will be forced out , determined by this equation:

$$v=\frac{2\beta mbh}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}\left(l\frac{\alpha a}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6\alpha qa}\right)-\frac{2h(\alpha a-b)}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}.$$

If now from the foregoing explanation we put
$\alpha=2,\ \beta=4,\ m=400,\ n=1000,\ q=800$ and $h=29100$ Rh. ft., so we obtain

$$v=\frac{h}{700b+2k}\left(1600bl\frac{2a}{b}+(2a-b)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)\right)$$

or

$$v=\frac{h}{700+2k:b}\left(1600l\frac{2a}{b}+\left(\frac{2a}{b}-1\right)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)\right).$$

Now in order that this calculation can be applied to the author's first case, thus there will be $b=2\frac{5}{8},\ a=44\frac{11}{32}$ and $k=4900$ English inches. Therefore $\frac{2a}{b}=33,8$ and the hyperbolic logarithm of $\frac{2a}{b}=3,52045$. Further,

$\frac{200b}{3a}=3,94$ and $\frac{2k}{b}=3733.$ From this there arises

$$1600l\frac{2a}{b}=5632,72$$

$$\left(\frac{2a}{b}-1\right)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)=\frac{96,43}{5729,15}.$$

Therefore we have :

$$v = \frac{5729{,}15h}{4433}.$$

Now on which account to find how many ft. per second with this speed it is possible to travel through from this height, since h must be expressed in thousandth parts of Rh. ft., then we have $h = 29100000$ and as then the square root of v must be divided by 4. To calculate with logarithms, thus there becomes :

$$\begin{aligned} lh &= 7{,}463893 \\ l5729{,}15 &= \underline{3{,}758090} \\ & \quad 11{,}221983 \\ l4433 &= 3{,}646698 \\ lv &= 7{,}575285 \\ l\sqrt{v} &= 3{,}787642 \\ l4 &= \underline{0{,}602060} \\ & \quad 3{,}185582 \end{aligned}$$

From that we have the number

$$1533.$$

Therefore the ball must be driven out with a speed of 1533 Rh. ft. per second, which number amounts to 1580 English feet. This speed, which it is still necessary to diminish because of the successive nature of the ignition, and the loss of force which thus has gone off through the play space [around the ball] and the ignition hole, is still much less than that which the experiments have reported for the same case. The cause thereof seems to be but this, that from the ignition we have only assumed half of the space *AACC* to be filled with air ; but it is very probable, that the coarse matter of the powder does not take up such a large part of the space : whereby to note, that a smaller difference in this part causes a more marked difference in the speed. Then, if we assume, that the coarser matter from the ignition fills yet only a third part of the space *AACC*, thus there will be $\frac{b}{\alpha} = \frac{2}{3}b$ and $\alpha = \frac{3}{2}$; therefore the equation found above in terms of these will be changed into :

$$v = \frac{2h}{900b + 3k}\left(1600bl\frac{3a}{2b} + \left(\frac{3}{2}a - b\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right)$$

or

$$v = \frac{2h}{900 + 3k:b}\left(1600l\frac{3a}{2b} + \left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right).$$

Now putting, there shall become $b = 2\frac{5}{8}$, $a = 45 - \frac{7}{16}$ and $k = 4900$ English inches, so there becomes

$$\frac{3a}{2b} = 25,46, \quad \frac{800b}{9a} = 5,23, \text{ and } \frac{3a}{2b} = 3,23710.$$

Thus there is :

$$1600l\frac{3a}{2b} = 5179,36$$

$$\left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right) = \frac{103,46}{5282,82.}$$

From this

$$\frac{3k}{b} = 5600 \text{ and } \frac{900 + 3k : b}{2} = 3250,$$

therefore

$$v = \frac{5283h}{3250},$$

from which a speed arises, which works out to be 1720 Rh. ft. per second, or 1773 English ft. This speed is now far greater than that, which was found by experiment, and it appears, that after all subtractions have been made a full agreement would be reached, therefore we approve this last expression, since $\alpha = \frac{3}{2}$ is put in place, to be considered as coming close to the true value.

FIFTH REMARK

We can hence, both from the knowledge of the nature of the powder, as well as by making favorable use of the same, draw very useful conclusions which can perhaps add no small improvement to artillery..

In the first place, since the amount of the coarser and mundane materials, which is contained in the powder, contributes so much to the speed of the ball, likewise the same will be driven away more quickly or slower, more noticeably, if less or more such like coarser matter is mixed with the powder ; as one can see easily that the variable quality of the powder is based mainly on the amount of coarser matter which it mixed with that. Then, since to all appearances, the air situated therein in the saltpeter is about 800 times more dense than ordinary air, while that is the highest order of density to which the air through compression can be brought : so also would all powder be seen to be endowed with a strength of a single kind, if within itself only a single proportion should be present between this compressed air and the coarser matter ; where namely the mixing is provided thus only, in order that the ignition will not be prevented. Therefore the powder is so much the better and stronger, the less the gross matter contained within it. But since the ignition itself is based on this coarse matter, so the main roughness remains in the preparation of the powder carried out therein, that one meets in such a proportion between the saltpeter and the material to be burned away, as through that, as well as speeding up the ignition also at the same time always as little as possible of that material will be mixed with it. The first precaution arises from the purification of the saltpeter, as by this means the gross and common parts become separated out as much as possible. Then since these parts not only contribute nothing to the rapid ignition, but also hinder the same, thus diminishing the ignition and on that account the strength of the powder, through which the whole of the gross elements will be increased in an unnecessary way ; which circumstance, since the powder will be prepared in the greater part from saltpeter, will be much more determined . The good quality and strength of powder thus depends on these two main principles : in the first place that the same ignites all at once, and that in the second place the whole and gross material to become mixed with that always as little as possible. From which if one wants to work at an improvement of the powder, so one has to consider these two points besides: firstly, whether or not one is able to find a new mixture, where a faster and more sudden ignition may be introduced ; and secondly, whether or not the whole bulk of the grosser material, which will be required for the ignition, can be diminished?

From this the shortcomings of any kind of powder are allowed to be estimated easily. Then all, which either block the ignition or increase the grosser material, the same also diminish the strength of the same. From the first principle the powder is weakened by mixing with moisture, because by that either more parts hardly catch alight, or yet a longer ignition itself takes place. From the other principle such powder, which either will be prepared from impure saltpeter, or far too much sulphur and carbon, or some other suchlike reason: the material held within itself must be weaker, because in the ignition too many ordinary parts must be brought into the motion. Thus if for the best powder, in the above equation in which the letter α will be expressed by $\frac{3}{2}$, so must a smaller value be given for the weaker powder itself. Thus the equation by which one has determined the speed of the ball will be applicable to all kinds of powder. But because we have assumed therein, that all the powder itself ignited in the first instant from a single ignition, but that does not happen in this case, so from this principle the speed found must be assumed somewhat smaller : but just as this can be accounted for, we will undertake this a little later.

In the third place, let it also be determined from this, how much powder one must charge a given barrel, so that from that the ball may be shot out with the greatest speed. Because one sees at once, that through the strengthening of the powder the speed cannot be made to increase beyond a known degree. In order to see this, one must only picture, that the whole barrel be filled with powder. For since in this case the ball is driven out after the first impressed force, and as then the forwards driving force because of the spreading in the outer air has, for the most parts come to an end, so the motion impressed on the bullet must be very small. [This is of course absolute nonsense in practice, as the barrel would rupture like a small bomb, as in fact often was the case in practice, as Robins indictes later.] Now since such a far too strong charge of the ball imparts a smaller speed than a small one, but still a far too small charge brings forth a smaller action : so it must necessarily in a certain case give rise to such a charge, by which the bullet will be forced out with the greatest speed, in such a way, that if one wanted to use more or less powder, the ball would receive a lesser motion. But one sees clearly, that the science of these steps of charge is the great interest of the artillery. For through that one will be able not only to put in place, the ball with the greatest possible degree of speed to be driven away, as one can also by that in many cases save much powder, namely if one knows, that the ball with a smaller charge can be forced forwards just as quick, and perhaps still faster. In order to determine the greatest strength of this charge, so we need only be allowed to differentiate the expression found above for the speed of the ball, and only the quantity *b* to be considered as the variable [which expresses the length of the space occupied by the powder], and supposing next this differential $=0$. To this end we wish, from that with our definition including all cases, namely the general expression, which is :

$$\frac{v}{2h}=\frac{\beta mb}{mb+(\alpha-1)nb+2ak}\,l\,\frac{\alpha a}{b}+\frac{(\alpha a-b)(\beta m^2b-6\alpha qa)}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)6\alpha qa}.$$

Herewith the differential of the kind noted is taken :

$$\frac{2\alpha\beta mkdb\cdot l(\alpha a:b)}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)^2}-\frac{\beta mdb}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}$$
$$+\frac{-(mb+(\alpha-1)n)(\beta m^2b^2-6\alpha^2qa^2))db-4\alpha\beta m^2bkdb+2\alpha^2ak(\beta m^2+6q)db}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)^2\,6\alpha aq},$$

which is taken $=0$, this equation gives :

$$12\alpha^2\beta mqk\,l\,\frac{\alpha a}{b}=(m+(\alpha-1)n)\beta m^2b^2+6\alpha\beta mq(m+(\alpha-1)n)ab$$
$$-6a^2q(m+(\alpha-1)n)a^2+4\alpha\beta m^2bk+12a^2\beta mqak-2\alpha^2\,ß m^2ak-12a^2qak.$$

But here *k* is a very large number, the size itself expresses the height of an air column of which the weight is equal to the weight of the ball. Now if we put the diameter of the ball $=c$, so to same equals the thickness of a cylinder, of which the height $=\frac{2}{3}c$. So if the material, from which the ball is made, were *i* times heavier than the air assumed, so there arises $k=\frac{2}{3}ic$; and if the ball were made of iron, because iron is 7,820 times heavier than water, since water is around 850 times heaver than air, so there will be $i=6650$, and thus approximately, $k=4430c$. Now if we leave out the smallest terms in the above equation, thus there will be :

$$l\,\frac{\alpha a}{b}=1-\frac{m}{6q}-\frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk}+\frac{mb}{3\alpha aq}+\frac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k}+\frac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2qak}.$$

Now since all these fractions in comparison with one are very small, if we take assume e to be the number, of which the hyperbolic logarithm $=1$, so we arrive at

$$\frac{\alpha a}{b}=e^{1-\frac{m}{6q}-\frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk}}\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{mb}{3\alpha aq}+\dfrac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k}\\ +\dfrac{\left(m+(\alpha-1)n\right)mb^2}{12\alpha^2 qak}+\dfrac{mmbb}{18\alpha^2 q^2 a^2}+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

from which the value for b by approximation is not hard to find. Let us now put as above :

$$\alpha=\tfrac{3}{2},\ \beta=4,\ m=400,\ n=1000 \text{ and } q=800,$$

so there becomes

$$\frac{3a}{2b}=e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}}\left(1+\frac{b}{9a}+\frac{300b}{k}+\frac{50bb}{3ak}+\frac{bb}{162aa}\right).$$

It may be abbreviated thus:

$$\frac{3}{2}a:e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}}=A,$$

so there becomes

$$A=b+\frac{bb}{9a}+\frac{300bb}{k}+\frac{50b^3}{3ak}$$

Now if one puts

$$b=A-\mathfrak{p}A^2+\mathfrak{q}A^3,$$

so there will be

$$bb=AA-2\mathfrak{p}A^3+\mathfrak{q}A^3 \text{ and } b^3=A^3,$$

consequently,

$$\begin{aligned}A=A-\mathfrak{p}A^2&+\mathfrak{q}A^3\\ +\frac{1}{9a}A^2&-\frac{2\mathfrak{p}}{9a}A^3\\ +\frac{300}{k}A^2&-\frac{600\mathfrak{p}}{k}A^3\\ &+\frac{50}{3ak}A^3,\end{aligned}$$

therefore

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{9a} + \frac{300}{k},$$

$$\mathfrak{q} = 2\mathfrak{p}\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) - \frac{50}{3ak}.$$

We will work out the value for a half Carthaune [a kind of cannon], the length of which is 20 times longer than the caliber, or where $a = 20c$. For an iron ball also there shall be $k = 4430c$, and consequently

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{180c} + \frac{1}{15c} = \frac{1}{14c}$$

and

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{98cc} - \frac{1}{5316cc} = \frac{1}{99cc}.$$

Therefore we have

$$b = A - \frac{AA}{14c} + \frac{A^3}{99cc}.$$

But there is :

$$A = 39c : e^{1-\frac{1}{12}},$$

because the fraction $\frac{9a}{32k}$ will be very small, and since

$$e^{1-\frac{1}{12}} = e : \left(1 + \tfrac{1}{12}\right),$$

so there becomes

$$A = \frac{32,5c}{2,718} = 12c$$

approximately ; and also

$$b = 12c - \frac{72}{7}c.$$

But since here the second term is not much smaller than the first, so one can well see, that the approximation obtained in this case cannot be used. Hence we must carry out the first equation again, since

$$A = b + bb\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{3ak}\right) + \frac{50b^3}{3ak},$$

which in this case gives

$$12c = b + \frac{bb}{14c} + \frac{b^3}{5316cc},$$

in which the last term already can be omitted, and as we arrive at the quadratic equation :

$$bb + 14bc = 168cc$$

and so

$$b = -7c + \sqrt{217}cc\,,$$

or approximately

$$b = 7\tfrac{3}{4}c\,,$$

which value still because of the last terms omitted is still too big. One sees from this, that from a half Carthaune an iron ball can be sent out with the greatest speed, if the charge in the cannon occupied about $7\frac{1}{2}$ caliber. But so much powder will be about one and a half times heavier than the ball. Since now the ordinary charge will be assumed to be half the weight of the ball, thus one sees that a threefold charge gives the greatest speed of the ball, and that if one should charge still more than three times usual, the ball would be fired with a smaller speed. But in the other cases, as iron balls were shot, the strongest charge can be found in the same way in the following manner**.** Since $k = 4430c$, thus one puts $a = \theta c$, so there will be

$$A = \frac{13\theta c}{8e} = \frac{3}{5}\theta c,$$

and further

$$A = b + \frac{bb}{9\theta c} + \frac{bb}{15c},$$

consequently,

$$bb + \frac{45\theta bc}{5+3\theta} = \frac{45\theta Ac}{5+3\theta} = \frac{27\theta\theta cc}{5+3\theta}\ ;$$

and also

$$b = \frac{-45\theta c + 3\theta c\sqrt{(285+36\theta)}}{10+6\theta}.$$

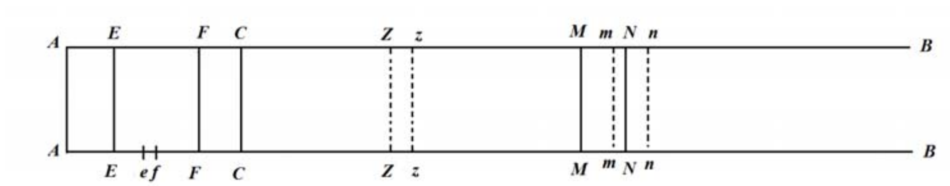
The ratio of the lengths which the powder fills to the caliber depends also on the number θ, which is indicated until the caliber is as long as the barrel. From that this table is made:

If the length of the barrel is expressed in calibers:	Thus the length of the strongest charge is expressed in calibers:
5	2,46
10	4,46
15	6,17
20	7,71
25	9,10
30	10,39
35	11,60
40	12,73
45	13,81
50	14,83

Whereby it is to be observed, that these numbers do not concur precisely but only approximately with practice, partially because not all the circumstances can be brought into the calculation, and partially because the powder itself is not all ignited at once, as has been assumed here, and also there are other causes which act together to diminish the driving force.

SIXTH REMARK

We have promised, still to undertake yet, in what manner the speeds found above would be diminished, if not all the powder were ignited at the same time.



Thus it shall be accordingly as above, the lengths of the spaces which the powder takes up initially, $AC = b$, the length of the whole cannon $AB = a$, and after a certain time the flame itself along with the ball have advanced already as far as *NN*. One puts $AN = x$, and the speed of the foremost disc *NN* as well as of the ball shall be $= \sqrt{v}$, according to that, while the ball will be driven through $Nn = dx$, the height v increases about dv. Thus if the weight of the ball were expressed by an air column, of which the length $= k$, so the accelerative force acting on the ball will be $= \frac{kdv}{dx}$.

[We have had to consider Euler's rather odd manner of tackling such problems many times ; we can get a handle on his method by starting from the well-known modern formula for a body accelerating downwards under uniform gravity : $v^2 = u^2 + 2gh$; for on setting $u = 0$ and taking $g = \frac{1}{2}$ in some units, we come upon Euler's formula, where almost perversely, the distance fallen is now given by *v*, perhaps relating to *verticalis*, or vertical, and so the velocity $V = \sqrt{v} = \sqrt{\text{distance fallen from rest}}$ or , $V = \sqrt{v}$ is taken as the conservation law; when the need arises, the formula can be scaled up to give the correct acceleration of gravity and the related speeds and heights in conventional units of some description, as we have seen in this work in previous propositions. The main reason for this approach would appear, at least to this writer, that it agreed with Leibniz's *vis viva,* the vital or living force conservation law that dominated natural philosophy at this time, though of course Newton never gave the idea a mention in the *Principia*. Thus this apparently correct conservation law can be applied initially without more concern, without our preamble, which tries to correlate the modern approach with that of Euler.

The other matter that may strike the modern reader as rather strange, is the habit of converting all masses, or weights as Euler calls them, as well as air pressures or elasticity, into equivalent air columns; this is consistent for equal areas and the proportions taken of such quantities. Thus, with Euler's equation $V = \sqrt{v}$ we find $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2V}\frac{dv}{dx}$, or the acceleration $\left[\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right] = V\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$; thus $\frac{kdv}{2dx}$ above is an expression for the accelerative force, where *k* is essentially a mass corresponding to an air column.]

But since the powder has still not all itself ignited, so we will assume, that as the part of the powder already ignited is to the total charge as *y* is to *b;* then *y* will be such a quantity put together from *x* and known numbers, which disappears, if there were put $x = b$, because in this case the ignition has only began [*i.e.* nothing has moved along the bore yet]: from which if all the powder itself has ignited, then there must become $y = b$, which should occur, if $x = a$*;* namely if we assume the length so long, that all the powder itself has time to ignite, e'er the ball be driven out. But in this time should all the powder still not have been ignited, so there cannot be put $y = b$, unless for *x* a length greater than *a* has been assigned. The same shall be $= f$, on account of which, if $x = f$ then there becomes $y = b$. From this now let a certain amount be taken, that will be provided by the expression for *y* : since the expression will be approximately

$$y = \frac{b(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}},$$

as which expression puts in place the property considered [*i.e.* when $x = f$ then $y = b$]. Further if we put in place, that from the powder already ignited, the $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ th part of the same [*i.e.* ordinary] matter is used up [recall that the $\frac{1}{\alpha}$ th fraction is the coarse matter], so from that a part of the space *AM* is to be filled up, of which the length $= \frac{(\alpha-1)y}{\alpha}$; but from this a part of the powder still not yet ignited takes up a space, of which the length $= b - y$, which taken together with the above makes $b - \frac{y}{\alpha}$. Therefore for the air a residual space remains, of which the length $= x - b + \frac{y}{\alpha}$. But if this air itself should be extended so far, until the same has achieved one and the same degree of density as ordinary air, so the same would extend to fill the barrel with the air in an equally wide space, the length of which $=244y$; consequently the same must in the current case be

$$\frac{244y}{x-b+\frac{y}{\alpha}}$$

times denser than ordinary air. We will for brevity put the letter s for this number

$$\frac{244y}{x-b+\frac{y}{\alpha}};$$

so will, as we have noted above, the elasticity of this air to be equal to an air column, the height of which

$$=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{s}{q}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\beta h=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right),$$

which approximation is sufficient to satisfy our needs. But here h signifies the height of an air column, of which the elasticity is equal to the weight of natural air, and β shows, how many times the elasticity will be increased by the ignition. Since now that air already released by the ignition is equal to an air of which the height $=244y$, so will the acceleration of the same support a force , which

$$=\frac{122ydv}{dx}.$$

This force is namely, as appears from above, only half as large as if all this air were accelerated equally. Besides that the course matter is still left to consider, it must take an equal part in the motion thereof. We will further assume as above, that part which remains behind on the base *AA* to be a half, but the other will be driven forwards with the ball: and that the same may be n times denser than ordinary air ; so this part will become

$$=\tfrac{1}{2}n(b-\tfrac{y}{\alpha}),$$

and will require a force for the acceleration , which

$$=\tfrac{1}{2}n(b-\tfrac{y}{\alpha})\frac{dv}{dx},$$

from which the whole force for driving forwards will become

$$=\frac{dv}{dx}\left(k+\tfrac{1}{2}nb-\frac{ny}{2\alpha}+122y\right),$$

which must be equal to the actual force at hand, which is,

$$\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)$$

less the counter pressure of the air h, and this decreased further still by the resistance of the air, which, because the ball is round, will be expressed by $\tfrac{1}{2}v$. From here one obtains this equation :

$$dv(2\alpha k+\ n\alpha b-ny+244\alpha y)=2\alpha\beta hdx\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)-2\alpha hdx-\alpha vdx,$$

where

$$s=\frac{244\alpha y}{\alpha(x-b)+y}\ \text{ and }\ y=\frac{b\left(x-b\right)^{\mu}}{\left(f-b\right)^{\mu}}.$$

From this there will be

$$s=\frac{244\alpha b\left(x-b\right)^{\mu-1}}{\alpha\left(f-b\right)^{\mu}+b\left(x-b\right)^{\mu-1}}.$$

Thus if the number μ were equal to 1, there will be

$$s=\frac{244\alpha b}{\alpha f-(\alpha-1)b}\ \text{ and }\ y=\frac{b\left(x-b\right)}{f-b}\ ;$$

consequently in this case the elastic force would be one and the same always. We want to retain this case because of the easing of the calculation, concerning how far the same departs from the truth, there will be

$$dv\left(\alpha\left(2k+nb\right)\left(f-b\right)+b\left(244\alpha-n\right)\left(x-b\right)\right)=\alpha dx\left(f-b\right)\left(2\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)-2h-v\right)$$

and also

$$\frac{dv}{2\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)-2h-v}=\frac{\alpha dx\left(f-b\right)}{\alpha\left(2k+nb\right)\left(f-b\right)+b\left(244\alpha-n\right)\left(x-b\right)},$$

which integrated and adjusted for the current case gives

$$l\frac{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h-v}=\frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}l\frac{\alpha(2k+nb)(f-b)+(244\alpha-n)b(x-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)},$$

For brevity one puts

$$2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h=g,\quad \frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}=\nu\ ;$$

so there becomes

$$l\frac{g}{g-v}=\nu l\frac{\nu(2k+nb)+x-b}{\nu(2k+nb)}$$

and consequently

$$\frac{g}{g-v}=\left(1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{\nu}\ ;$$

whence

$$v=g-g\left(1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{-\nu}.$$

From which equation, if one puts $x=a$, the speed, with which the ball will be driven out, is obtained from this.

In order that this expression be reduced to the often calculated case, so there shall be

$$a=\tfrac{3}{2},\ \beta=4,\ n=1000,\ a=45,\ b=2\tfrac{5}{8}\ \text{and}\ f=45,\ \text{and}\ k=4900\ \text{English inches},$$

so there will be

$$s=14{,}5,\ g=114{,}4h\ ,\ \nu=-\tfrac{1}{26}\ \text{and finally}\ v=\tfrac{10135}{24850}h,$$

[Corrected values taken from the *O.O.* edition of Euler's works.]

from where a speed will be found, which works out to be 861 Rh. ft. per second. Now without too much regarded, this speed is almost less than half than that which arises from experiments, yet the same is very large, in the consideration of the smaller force, by which the ball will be driven out than which will arise from an air, that is only 14,5 times denser than ordinary air, and also from heating the elasticity only becomes 58 times greater. We see also from this, that we have assumed too large a value for the number μ; because the greater μ will be assumed, so the smaller *s* will become, and consequently also the speed. If we put μ to be less than 1, so *s*, and also the speed as well will be greater. Thus it is allowed to put approximately $\mu=\frac{1}{2}$, in which case there will be

$$s=\frac{244\alpha b}{b+\alpha\sqrt{(f-b)(x-b)}} \text{ and } y=b\sqrt{\frac{x-b}{f-b}};$$

and since $\sqrt{(x-b)}=\frac{y}{b}\sqrt{(f-b)}$, so there becomes

$$s=\frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)y} \text{ and } dx=\frac{2(f-b)ydy}{bb}.$$

But hereby the integration accordingly has far less difficulty, if we ignore the last three terms

$$2\alpha\beta hdx\cdot\tfrac{ss}{6q}-2\alpha hdx-\alpha vdx,$$

which can happen very conveniently, since we have already seen above, that the action of the resistance $2\alpha hdx+\alpha vdx$ amounts to almost nothing, and the same still by these in the current case will be almost cancelled out by the term $\frac{\alpha\beta hssdx}{3q}$. We obtain this equation of such a form :

$$dv=\frac{2a\beta hsdx}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y}$$

Now since

$$s=\frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)y} \text{ and } dx=\frac{2(f-b)ydy}{bb},$$

so there will be

$$sdx=\frac{488\alpha(f-b)ydy}{bb+\alpha(f-b)y}$$

from whence one obtains

$$dv=\frac{976\alpha^2\beta h(f-b)ydy}{\big(bb+\alpha(f-b)y\big)\big(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y\big)}.$$

For brevity one puts

$$\frac{976\alpha^2\beta h(f-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(f-b)(2k+nb)}=A,$$

so expanding out the equation is found in this form :

$$dv=\frac{-Abbdy}{bb+\alpha(f-b)y}+\frac{A\alpha(2k+nb)dy}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y},$$

from which the integral is:

$$v=C-\frac{Abb}{\alpha(f-b)}l\left(bb+a(f-b)y\right)-\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y\right).$$

This constant quantity *C* must also be provided, so that there will be $v=0$, if $x=b$, that is, if $y=0$; whence one has

$$v=\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y}-\frac{Abb}{\alpha(f-b)}l\frac{bb+\alpha(f-b)y}{bb}.$$

Now in order to find the final speed, with which the ball will be driven out, thus one puts $x=a$; but we will assume, that also $f=a$, or that the powder itself has all ignited, likewise the ball has left the barrel ; so there will be $y=b$; and in this case also

$$A=\frac{976\alpha^2\beta h(a-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(a-b)(2k+nb)}$$

and

$$v=\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}-\frac{Abb}{\alpha(a-b)}l\frac{bb+\alpha(a-b)b}{bb},$$

or

$$v=\frac{-Abb}{\alpha(a-b)}l\left(1+\frac{\alpha(a-b)}{b}\right)-\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\left(1-\frac{(n-244\alpha)b}{\alpha(2k+nb)}\right).$$

Further, putting

$$\frac{\alpha(a-b)}{b}=\zeta \text{ and } \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b}=\eta,$$

so there becomes

$$v=-\frac{976\beta\eta bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)}l(1+\zeta)-\frac{976\beta\eta^2 bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)}l\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

Now from that, one can as well compare this case with that, since all the powder in the first instant will have been set alight, so we are allowed now to put $y = b$ in the differential equation, and if we put $x = a$, even these terms as before are omitted, so we have

$$s = \frac{244\alpha b}{\alpha x - (\alpha - 1)b}$$

and

$$dv = \frac{488\alpha^2 \beta bhdx}{\big(\alpha(2k+nb) - (n-244\alpha)b\big)\big(\alpha x - (\alpha-1)b\big)},$$

from which this integral is

$$v = \frac{488\alpha\beta bh}{\alpha(2k+nb) - (n-244\alpha)b} l\left(\frac{\alpha x - (\alpha-1)b}{b}\right);$$

and if we put $x = a$, so there is obtained :

$$v = \frac{488\alpha\beta bh}{\alpha(2k+nb) - (n-244\alpha)b} l\left(1 + \frac{\alpha(a-b)}{b}\right).$$

Now we put as before:

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta \text{ and } \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b} = \eta,$$

so we have :

$$v = \frac{488\beta\eta bh}{(\eta-1)(2k+nb)} l(1+\zeta),$$

which can readily be compared with the last expression, as that which we have found above ; as we have omitted the same terms in both cases. Because if we put the speed of the ball $= \sqrt{u}$, if the powder ignites at the same time, and the speed of the ball, if the powder as we have assumed, ignites more and more, be put $= \sqrt{v}$, thus the ratio will be

$$u : v = \frac{1}{\eta - 1} l(1+\zeta) : \frac{-2}{1+\zeta\eta} l(1+\zeta) - \frac{2\zeta\eta}{1+\zeta\eta} l\left(1 - \frac{1}{\eta}\right),$$

and since the logarithms from all the different tables have the same ratio between each other, so here its much the same, what one has used for a table.
If we now put

$$\alpha = \tfrac{3}{2},\ a = 45,\ b = 2\tfrac{5}{8},\ k = 4900 \text{ and } n = 1000,$$

so there will be

$$\zeta = 24,21,\ \eta = 5,2$$

and also

$$u : v = \frac{10}{42} l25,2 : \frac{-100}{6342} l25,2 + \frac{12580}{6342} l \frac{52}{42}$$

or

$$u : v = 1 : \frac{1258 l1,2381}{151 l25,2} - \frac{10}{151} = 1 : \frac{73,25}{151},$$

that is

$$u : v = 1 : 0,4851 \text{ and } \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,696,$$

consequently these speeds are approximately in the ratio as 10 to 7. But now the speed works out, if all the powder were ignited at once, as 1731 Rh. ft. per second, whence for the current case, since not all the powder ignites at once, here there is obtained 1212 ft. per second. Now since these progressive ignitions are based on the value from $\mu = \tfrac{1}{2}$: but as we before had put $\mu = 1$, a speed of only 877 ft. per sec. was found ; so one sees already, that if for μ one should take a fraction still smaller than $\tfrac{1}{2}$, the speed also is greater than 1212 ft. per sec., and consequently from this comes closer and closer to the true speed. But if we assumed a smaller value of μ, the powder ignites suddenly in the first instant for the one case, but remains infinitely small in the beginning for the other. Because now we are assured to know, that the equality in the first instant ignites a considerable part of the powder, so from this it follows that the speed of 1212 ft. per sec. found must be much too small: and also that our thinking, by reason of which the powder should not itself ignite in the first moment, may well be seen to be close to the truth. Because the sudden ignition gives a speed of 1795 English ft. per sec., but from the experiments only around 1650 would be perceived, so the difference of 145 ft. is large enough, that one can may conclude that it is necessary to attribute this diminution in speed to the gradual ignition. Besides, the speed of 1795 ft. found because of the term discarded $\frac{ss}{6q}$, which in this case since s is very large, can still on that account be considered somewhat small, as it delivers little more, so it can easily be understood that one can still deduct from that leakage caused by the free space and touch-hole: this same loss in a musket barrel, there because of the lining hardly any can pass through the free space, scarcely to be noticed. And further also one can find no further cause, as the case may be, to doubt the truth of the theory about the strength of the powder.

SEVENTH REMARK

But because it is so hard to bring the gradual ignition of the powder into a calculation, in order to accomplish the calculation itself, so one can put the matter itself into such a form, that if in the first instant a certain part of the powder ignites at once, but the remaining part remains completely un-ignited. For, because the powder may itself ignite at once in the reaction or not for a long time, that one always wants ignition, so it would be possible always, for a certain part to be determined, which, if it ignited in the first instant, even these effects could be produced. Whence we wish to assume in the above calculations, that this part of the powder, which itself ignites in the first instant, and by their force alone the ball is driven out, will be expressed by λb, or that the part of the powder itself to the whole charge behaves as $\lambda : 1$, the form that λ adopts to be a certain fraction, which approaches one , the more quickly the power ignites in that action. Whence if the equation found above there will be $y = \lambda b$ and

$$s = \frac{244\alpha\lambda b}{\alpha(x-b)+\lambda b} \quad \text{or} \quad s = \frac{244\alpha\lambda b}{\alpha x-(x-\lambda)b}$$

and

$$\frac{ss}{6q} \quad \text{or} \quad \frac{ss}{4800} = \frac{12,4\alpha^2\lambda^2 b^2}{\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right)^2}.$$

Now because

$$dv\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b\right) = 2\alpha\beta h dx\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2\alpha h dx-\alpha v dx,$$

thus by integration it is found :

$$v\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b\right) = 488\alpha\beta\lambda bhl\,\frac{\alpha(x-b)x+\lambda b}{\lambda b}$$
$$-\frac{24,8\alpha^2\beta\lambda^2 b^2 h}{\alpha x-(x-\lambda)b}+24,8\alpha^2\beta\lambda bh-2\alpha hx+2\alpha bh-\alpha\int vdx.$$

But because it is assumed already, that

$$v = \frac{488\alpha\beta\lambda bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha(x-b)+\lambda b}{\lambda b},$$

thus there is :

$$\alpha\int vdx = v\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right)-\int dv\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right).$$

Whence becomes:

$$\alpha\int vdx=\frac{488\alpha\beta\lambda bh\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}l\frac{\alpha(x-b)x+\lambda b}{\lambda b}-\frac{488\alpha^2\beta\lambda bh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}.$$

now one puts for brevity,

$$\frac{2\alpha b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}=m,$$

and thus one finds :

$$v=244\beta\lambda mhl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}-\frac{12,4\alpha\beta\lambda^2 mbh}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}+12,4\alpha\beta\lambda mh-\frac{mh(x-b)}{b}$$
$$-\frac{244\beta\lambda mh\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}l\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}+\frac{244\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}$$

or

$$v=244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right)}{2\alpha b}\right)l\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}+\frac{12,4\alpha^2\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}$$
$$-\frac{mh(x-b)}{b}(1-122\beta\lambda m).$$

Now putting $x=a$, so the speed emerges with which the ball will be fired from the barrel, in which case one obtains the following equality :

$$v=244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m\left(\alpha(a-b)+\lambda b\right)}{2\alpha b}\right)l\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}+\frac{12,4\alpha^2\beta\lambda mh(a-b)}{\alpha(\alpha-b)+\lambda b}$$
$$-\frac{mh(a-b)}{b}(1-122\beta\lambda m).$$

But in order to compare the speeds with each other, which arise from this, if one initially puts in place, that all the powder itself has ignited, and after that only a part of the same has itself ignited, so it is enough, that the first term alone be taken. Whence from this the speed with which the ball will be fired will be $\sqrt{u}$, if all the powder will have ignited itself at once ; further $\sqrt{v}$ shall be the speed, with which the ball will be fired, if only a part of the powder has been assumed to be ignited at once, which itself shall behave to the whole, as λ to 1, thus one has :

$$u:v=\frac{1}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}l\frac{\alpha(a-b)+b}{b}:\frac{\lambda}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}l\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}$$

or

$$u:v=1:\frac{\alpha\lambda(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\cdot\frac{l\dfrac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}}{l\dfrac{\alpha(a-b)+b}{b}}.$$

Or more concisely, as above :

$$\frac{\alpha(a-b)}{b}=\zeta \text{ and } \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b}=\eta,$$

so there will be :

$$u:v=1:\frac{(\eta-1)\lambda}{\eta-\lambda}\cdot\frac{l(\zeta+\lambda):\lambda}{l(\zeta+1)}.$$

If now, as often found in the example, there is

$$\alpha=\tfrac{3}{2},\ a=45,\ b=2\tfrac{5}{8},\ k=4900 \text{ and } n=1000,,$$

so there becomes

$$\zeta=24,21 \text{ and } \eta=5,2\ ;$$

consequently one has the equality :

$$u:v=1:\frac{4,2\lambda}{5,2-\lambda}\cdot\frac{l\frac{24,21+\lambda}{\lambda}}{l25,21}.$$

for the example one puts $\lambda=\frac{3}{4}=0,75$, so there becomes

$$u:v=1:0,7078\cdot\frac{l33,28}{l25,21}=1:0,7687$$

and the speeds thus become in the ratio:

$$\sqrt{u}:\sqrt{v}=1:0,8767\ .$$

There also, as we have seen, the speed of the ball, since all the powder was considered to have ignited at once, works out to be about 1800 ft. per second, so the speed of the ball, if only $\frac{3}{4}$ of the powder ignites, becomes 1578 English ft. per second. But it is now probable, that one must assume to put in place a greater part than $\frac{3}{4}$ for λ. Putting in place $\lambda = \frac{7}{8}$, thus an approximate speed of 1689 ft. per second comes out, which is already greater than indicated in the experiments. Now since also very little has been taken from the driving force by the touch-hole and the free-play, thus one finds approximately, if the powder is considered good, as the author used, it is quite likely for this fraction $\frac{9}{10}$ to be taken for λ. In the current example from that this proportion is put in place :

$$u : v = 1 : 0,88\frac{l27,9}{l25,21} = 1 : 0,90765$$

and thus

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : \sqrt{0,90765}.$$

Whereby the speed of the ball now works out to be 1755 English ft. per second. If now from that 100 ft. per second were taken away on account of the free-play and the touch-hole, so the true speed arises, which would be found from this. But we can as an alternative equally assume, from the last integration for the value of u or the speed of the ball, that the ignition is instantaneous, because from that besides also the air resistance is not omitted from the attention. To this end we are allowed only to put $\lambda = 1$, and since β is such a number, that following our author, $244\beta = 1000$, thus there will be $122\beta = 500$, and $12,4\beta = 50,8$. Further, $n = 1000$, and $\alpha = \frac{3}{2}$ from which there is put in place $m = \frac{b}{k+289b}$. Further we put

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \frac{3(a-b)}{2b} = \zeta,$$

so there becomes:

$$u = 1000mh\left(1 - \frac{m(\zeta+1)}{3}\right)l(\zeta+1) + \frac{76,2\zeta mh}{\zeta+1} - \frac{2\zeta mh}{3}(1-500m).$$

In our example too, since $a = 45,\ b = 2\frac{5}{8}$ and $k = 4900,$ we have

$$\zeta = 24,2143 \text{ and } m = \frac{1}{2155,66},$$

consequently

$$u = \frac{h}{2,15566} \cdot 0,996102l25,2143 + 0,033947 \cdot h - 0,005752 \cdot h$$

or

$$u = 0,46209hl25,2143 + 0,028195 \cdot h,$$

From this, the calculation for the speed sought consequently assumes this form :

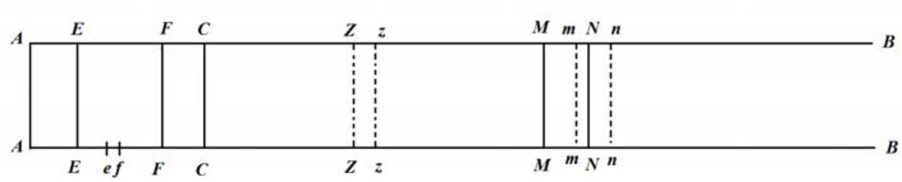
$$\begin{array}{rl}
\underline{l25,2143 = 1,401647} & \\
l1,401647 = & 0,146638 \\
l2,302581 = & 0,362215 \\
l0,46209 \;= & \underline{9,664723} \\
 & 0,173576 \\
\text{The number} = & 1,491340 \\
 & \underline{0,028195} \\
 & \underline{1,519535} \\
l1,519535 = & 0,181710 \\
lh = & \underline{7,463893} \\
 & 7,645603 \\
\text{Half} = & 3,822802 \\
l4 = & \underline{0,602060} \\
 & 3,220742
\end{array}$$

The speed becomes 1662 Rh. ft or 1711 Engl. ft. per sec.

Now since the number is almost about 100 ft. smaller than that which was found before, since we have not excluded air resistance from the motion, thus to stay only around 60 ft. left over, which decrease, as from the continual ignition of the powder and based on the touch-hole and beside the free-play, can be written down. One can now put $\lambda = \frac{9}{10}$ so this difference becomes around 40 ft., and the rest lost by other causes results in 20 ft. taken away.

EIGHTH REMARK

Since in these remarks all these circumstances being gathered together, which have a significant influence on the motion of the ball, before the same will be driven out from the cannon, only these attenuating quantities alone have be excluded, which have arisen from the known loss of the driving forces through the touch-hole and the free-play of the ball in the bore : therefore here we want to investigate how this situation can be remedied.



It will be from that, as we have put in place above, the length of the whole cannon $AB = a$, the length of the space, which had began, $AC = b$, and in order not to increase the difficulties without necessity, so we will put in place, that equally in the first instant a part of the powder, which itself for a single ignition has the ratio to the whole charges as λ to 1, and that nothing more itself ignites. Whence the un-ignited part still takes up a space, the length of which $=(1-\lambda)b$. Further to be that coarser matter from the ignited powder of the $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ th part of the same, which with the un-ignited powder will take up a space, the length of which $= b-\frac{\lambda b}{\alpha}$. Now we will put in place, that both the opening of the play-space and the touch-hole, through which from there the whole compressed air escapes, the whole to take the $\frac{1}{m}$ part of the cavity of the parts, which will be carried out insinuated through *cc*. To this end we will assume that the touch-hole *ef* as somewhat greater, with that understood to include as well the opening of the play-space, and consequently putting $ef = \frac{cc}{m}$. This put in place, thus after some time the ball should be already driven forwards as far as *MN*, calling the length $AM = x$, and the speed both of the ball as well as the foremost disc $MN = \sqrt{v}$, in such a way that likewise the bullet travels forward through $Nn = dx$, while the height *v* increases by *dv*. Thus if the weight of the ball were expressed by an air column, the height of which $= k$; so the force, which will be needed for the acceleration of the ball, is $=\frac{kdv}{dx}$. If afterwards the coarser matter were put to be *n* times denser than the ordinary air, thus the force, which will necessitate the acceleration itself becomes [see note at the beginning of the 6th Remark; Routh's *Rigid Dynamics* gives a later justification for the use of the *Vis Viva* method, in which the factor of a half makes its appearance, as needed.]

$$=\tfrac{1}{2}n\left(b-\tfrac{\lambda b}{\alpha}\right)\tfrac{dv}{dx}.$$

But since now the ball no more will be driven forwards by the whole force, which initially arose, likewise meanwhile a part of the same will have been lost through the touch-hole, so we will put in place, that this part itself lost to be to the whole in the ratio, as *z* to 1; or, that this lost to be equal to an air column, the height of which is $244\lambda bz$. Also that left in the cannon will be $=244\lambda b(1-z)$. Now since the same take up a space in the cannon, of which the length $= x-b+\frac{\lambda b}{\alpha}$, so that itself must be

$$\frac{244\lambda b(1-z)}{x-b+\frac{\lambda b}{\alpha}}$$

times more dense than ordinary air. We will for brevity put *s* for this fraction, so the elasticity of this air, as we have shown above, is equal to an air column, of which the height

$$=\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right);$$

and since for the acceleration this will necessitate a force

$$\frac{244\lambda b(1-z)dv}{dx}$$

so for the acceleration the whole force will be

$$=\frac{dv}{dx}\left(k+\tfrac{1}{2}nb\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)+122\lambda b\left(1-z\right)\right),$$

which put equal to the actual force, less the reaction of the air h and the resistance $\tfrac{1}{2}v$, gives this equation :

$$dv\left(k+\tfrac{1}{2}nb\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)+122\lambda b\left(1-z\right)\right)=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)dx-hdx-\tfrac{1}{2}vdx.$$

But now to determine the lost quantity z, so we will put the speed $=\sqrt{u}$, with which the air goes out through the touch-hole ef. Thus likewise the ball is driven through dx, thus a small cylinder of this fluid will go out through the touch-hole, of which the length $=\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ and of which the thickness $=\frac{cc}{m}$. And because this air is s times denser than ordinary air, so will this lost material deliver an air column, of which the thickness $=cc$, and of which the height$=\frac{sdx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}}$. Now since the fluid removed is from that air held in the cannon $244\lambda b(1-z)$, so there becomes

$$244\lambda bdz=\frac{sdx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}},$$

from which the integral must be taken thus so that the same vanishes, if $x=b$. Now thus it still remains, to determine the speed $\sqrt{u}$, which depends on the compression force of the fluid. Now because this force thus being equal to a column of natural air of a height $=\beta h(s+\frac{ss}{6q})$, so too can the compression be expressed by an equally dense air column and of which the height will be $=\beta h(s+\frac{s}{6q})$; whence the pressure on the touch-hole is just as great, as if a column of one and the same air were put in place, which is s times denser than ordinary air, of which the height $=\beta h(s+\frac{s}{6q})$. But in this case the air would be driven out through the touch-hole with a speed equal to that acquired by a body falling from this height, and thus it will be

$$u=\beta h\left(s+\tfrac{s}{6q}\right).$$

We can here ignore the fraction $\frac{s}{6q}$ as certainly very small, and thus obtain $u=\beta h$, and consequently

$$244\lambda bdz = \frac{sdx\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{v}}.$$

Now there is

$$s = \frac{244\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x + (\lambda - \alpha)b}$$

or, since $a > 1$ and $\lambda < 1$, furthermore

$$s = \frac{244\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b}$$

If we now put this value for *s*, so there arises :

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{\alpha dx\sqrt{\beta h}}{m\left(\alpha x - (\alpha - \lambda)b\right)\sqrt{v}}$$

But we have already found above

$$dv\left(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\alpha\lambda b(1-z)\right) = 2a\beta hdz\left(s + \tfrac{ss}{6q}\right) - 2\alpha hdx - \alpha vdx\,,$$

and if here we omit the three last terms, as which are not only very small but also almost cancel each other because of the closeness and opposite signs, thus we have :

$$dv\left(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\alpha\lambda b(1-z)\right) = \frac{488\alpha^2\beta\lambda bh(1-z)}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b}\ dx.$$

Now the above equation gives

$$\frac{\alpha dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b} = \frac{mdz\sqrt{v}}{(1-z)\sqrt{\beta h}}$$

and whence we obtain :

$$dv\left(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\alpha\lambda b(1-z)\right) = 488m\alpha\lambda bdz\sqrt{\beta hv}$$

or

$$dz + \frac{zdv}{2m\sqrt{\beta hv}} = \frac{dv\left(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)\right)}{488m\alpha\lambda b\sqrt{\beta hv}} + \frac{dv}{2m\sqrt{\beta hv}},$$

which multiplied by $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$, can be integrated, giving

$$e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}z=\left(\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244m\alpha\lambda b}+\frac{1}{m}\right)\int e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}\,\frac{dv}{2\sqrt{\beta hv}}$$

or

$$e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}z=\left(\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}+1\right)\left(e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-1\right),$$

because the quantity z, which expresses the loss in the driving force must vanish if $v=0$, as must arise in the first instant. From this we obtain

$$z=\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+488\alpha\lambda b}{244\alpha\lambda b}\left(1-e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}\right)$$

and

$$1-z=\frac{\left(2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b\right)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-2\alpha k-nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}$$

further

$$l(1-z)=l\left(\left(1+\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right).$$

Let

$$\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}=\mu\ ;$$

so that

$$l(1-z)=l\left((1+\mu)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-\mu\right)$$

and also

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}dv:2m\sqrt{\beta hv}}{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-\mu}$$

or

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(1+\mu)dv:2m\sqrt{\beta hv}}{(1+\mu)-\mu e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}}.$$

Since now above there was found

$$\frac{\alpha dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{dz}{1-z}\cdot\frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{\beta h}},$$

so there becomes

$$\frac{2\alpha\beta hdx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{(1+\mu)dv}{1+\mu-\mu e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}}.$$

But since commonly *m* is a very large number, so the fraction $\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$ becomes very small, and further fairly closely,

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}=1+\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

Now if one applies this value to the above equation, thus there will be

$$\frac{2\alpha\beta hdx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{m(1+\mu)dv\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h}-\mu\sqrt{v}},$$

or since

$$\frac{m\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h}-\mu\sqrt{v}}=1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}},$$

thus one has

$$\frac{2\alpha\beta hdx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=(1+\mu)dv+\frac{\mu(1+\mu)dv\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

From which by integration, one obtains

$$2\beta hl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)}{\lambda b}=(1+\mu)v+\frac{2\mu(1+\mu)v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}.$$

But suppose not all the force of the powder gets lost in going through the touch-hole, so that one has

$$(1+\mu)v = 2\beta hl \frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b},$$

from which it arises that the speed will be diminished in the current case. Now to determine how much diminution is carried out, where we will put the speed of the ball to be $=\sqrt{u}$, if this loss were not present ; but if the loss through the touch-hole is present, thus the speed of the ball $=\sqrt{v}$ *;* and from these the equation arises:

$$u = v + \frac{2\mu v\sqrt{v}}{2m\sqrt{\beta h}},$$

and further from that, by approximation :

$$v = u - \frac{2\mu v\sqrt{v}}{2m\sqrt{\beta h}} \text{ and } \sqrt{v} = \sqrt{u} - \frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}}.$$

Consequently there will be this ratio :

$$\sqrt{v} : \sqrt{u} = 1 - \frac{\mu\sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}} : 1$$

If now $\sqrt{u}$ were expressed by the number of feet, which the ball has been allowed to travel through in one second, thus there will be $\sqrt{\beta h} = 2700$ ft., and also

$$\sqrt{v} : \sqrt{u} = 1 - \frac{\mu\sqrt{u}}{8100m} : 1 ;$$

but

$$\mu = \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}.$$

Thus if the ball without this loss were driven out with a speed of 1700 ft. per second, so in this circumstance there must be delivered a loss of $\frac{17\mu}{81m}\cdot 1700$ ft. per second. In the above example, there will be

$$b = 2,625,\ k = 4900,\ n = 1000,\ \alpha = \tfrac{3}{2} \text{ and } \lambda = \tfrac{9}{10}$$

and

$$\mu = 18,82$$

and from that the loss amounts to

$$\frac{319{,}6}{81m}\cdot 1700\text{, that is } \frac{6714}{m}\text{ ft.}$$

Now suppose the width of the touch-hole be taken to be a one hundredth part of the width of the cannon, so this loss would become 67 ft. per second : and thus the ball instead of 1700 ft. per second, by the transmission now is only 1633 ft. per second. But it is to be noted hereby, that our expression for the loss found is altogether far too great, because we have left out certain terms in the above integration, which would have diminished this loss; and this error will become so much the greater, the larger the touch-hole, or the smaller the number *m* is ; in which case the approximation considered is only valid, if *m* stands for a very large number. This appears quite evident also from the loss $\frac{6714}{m}$; for if for the example *m* were only 3, so the loss must be worked out to be 2238 ft. per second. Now since the whole speed is only 1700 feet, thus one can well see, that the loss from the width itself must add up to much less than 1700 ft. : consequently it is clear, that if *m* is not a very large number, that the loss found in this way always must be considerably too great. Whence if in the example there were put $m = 100$, so the diminution of the speed certainly will be much smaller than 67 ft. In this case the present loss according to this principle is also too great, because we have assumed that only the compressed air alone goes through the touch-hole, since there is little doubt that some of the grosser matter also goes out with that at the same time; consequently the driving force is not diminished as much as is assumed in the calculation. Because also in that case considered, the driving force allows no coarser particle to leave, thus enabling the grosser matter to be diminished, which otherwise must be driven forwards with the ball. This last deficiency can now be readily put to rights in the formula found, if one puts the touch-hole to be a little smaller than is really the case ; from which to note, that here we understand that both the openings of the touch-hole as well as the play space are taken into account at the same time. In order to overcome this first failing, which is necessary, if *m* is not a very large number, thus one must put the value of $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$ to be expressed approximately, and since on obtains therefore :

$$1+\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{v}{2m^2\beta h}+\frac{v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{(1+\mu)dv}{1-\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}-\frac{\mu v}{2m^2\beta h}-\frac{\mu v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}-\text{etc.}}$$

or the fraction taken away

$$\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=(1+\mu)dv\left(1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{\left(\mu^2+\frac{1}{2}\mu\right)v}{2m^2\beta h}+\frac{\left(\mu^3+\mu^2+\frac{1}{6}\mu\right)v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}\right).$$

Now putting $\sqrt{u}$ for the speed, which the ball would have, if nothing were taken away from the driving force by the touch-hole, so there will be

$$u = v + \frac{2\mu v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}} + \frac{\left(2\mu^2 + \mu\right)v^2}{4m^2\beta h} + \frac{\left(6\mu^3 + 6\mu^2 + \mu\right)v^2\sqrt{v}}{15m^3\beta h\sqrt{\beta h}}$$

and this equation inverted gives

$$\sqrt{v} = \sqrt{u} - \frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}} + \left(\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu\right)\frac{u\sqrt{u}}{m^2\beta h} + \left(\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu\right)\frac{uu}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}.$$

Now because $\sqrt{\beta h}$ expresses a speed of 2700 ft. per second, if $\sqrt{u}$ is assumed in ft. per second in the same manner, and for abbreviating, the fraction $\frac{\sqrt{u}}{m\sqrt{\beta h}}$ will be called $= r$: thus one finds :

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{1}{3}\mu r + \left(\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu\right)r^2 + \left(\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu\right)r^3.$$

Since now in the above example $\mu = 18{,}82$ and $r = \frac{17}{27m}$ so there becomes

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - 3{,}950\cdot\frac{1}{m} + 2{,}968\cdot\frac{1}{m^2} + 10{,}427\cdot\frac{1}{m^3}.$$

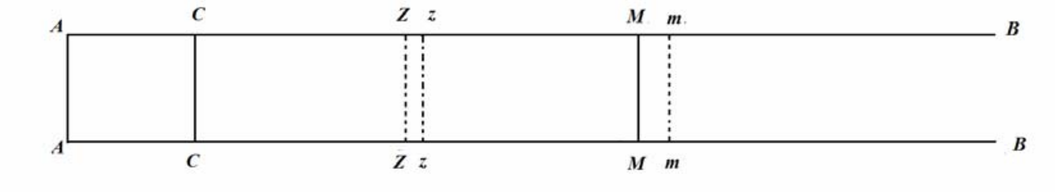
This formula now can be of service, if m is not a very large number, as if it were under 60. Then if $m = 60$, thus the third term gives $2{,}968\cdot\frac{1}{m^2}$ multiplied by $\sqrt{u} = 1700$ givesonly1,4 ft. For the example let $m = 10$, or the touch-hole, in addition to the opening of the play-space, works out to be the tenth part of the whole muzzle, so there becomes $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 0{,}64511$ and the loss in the speed amounts to 603 ft., in such a way, that the ball only obtains a speed of 1097 ft. per second. For the rest, it is still here to be noted, that, since $\mu = \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\alpha\lambda b}$, the loss in the speed will become so much greater, the heavier the ball, or the greater *k* is, and from this we can refute sufficiently one of the strongest principles held by the author, in which the assertion is advanced in his opinion, that all the powder is ignited in a single instant. Because the same author says that, if not all the powder is ignited in the first instant, two or three balls, which were charged together, by proportion must obtain a greater speed, than only one, as these themselves stay longer in the barrel, and thus endure a stronger force. But notwithstanding which it could never be found, that such predictions were confirmed through his experiments. And in fact, this conclusion would be completely accurate, and confirm the author's opinion, if this account of the touch-holes explained here were not at hand. But since according to this principle, a heavier ball endures a stronger force of departure than a lighter one, but from the above principle the play-space losses occur again [i.e. a heavier ball loses more gross matter through the touch-hole and the slackness of the ball than a lighter one as it stays longer in the barrel; yet on the other hand the heavier ball has a more complete combustion of the gunpowder due to the longer retention; thus one effect diminishes the driving force, while the other increases it]: so it can be seen easily, that these two effects oppose each other completely, or yet so nearly that the difference cannot be found by experiment. Now if one takes all these remarks together, thus one will know in any single case occurring not only the cause of all the circumstances indicated, but also the speed of the bullet can be determined in the first place from calculations.

ERSTE ANMERKUNG

Wir haben schon oben bemerket, daß die Geschwindigkeit, welche der Kugel von dem Pulver eingedruckt wird, nicht allein von desselben Ausdehnungskraft herkomme, sondern daß auch die Geschwindigkeit selbst, mit welcher die Flamme der Kugel nachfolget, in Betrachtung gezogen werden müsse. Denn es ist klar, daß, so groß auch immer die Gewalt des Pulvers angenommen wird, der Kugel dennoch von demselben kein grösserer Grad der Geschwindigkeit eingedruckt werden könne, als derjenige ist, womit sich die Flamme des Pulvers selbst, wenn keine Kugel vorhanden wäre, ausbreiten würde. Dieser Grad der Geschwindigkeit kan nun der Kugel nimmermehr mitgetheilet werden, indem das Pulver nur in so ferne auf die Kugel würket, als dieselbe noch langsamer fortgehet, als die Flamme selbst fortgehen würde, wenn die Kugel in demselben Augenblick zernichtet würde. Da nun die Kugel selbst, kraft ihrer Schwehre, der Bewegung wiederstehet, und auch über dieses noch vielerley äusserlichen Wiederstand antrift, so ist leicht zu erachten, daß dieselbe nimmer den Grad der Geschwindigkeit, womit sich die Flamme selbst ausdehnet, erreichen könne. Hieraus sieht man auch ferner, daß der höchste Grad der Geschwindigkeit, welcher einer Kugel von dem Pulver mitgetheilet werden kann, beständigum soviel kleiner seyn müsse, als derjenige ist, welchen die bloße Flamme erreichen kann, je schwerer die Kugel selbst, und je grösser der äusserliche Wiederstand ist. Um dieser Ursache willen ist also die Frage, welche der Verfasser in dem gegenwärtigen Satze aufwirft, von der grösten Wichtigkeit, indem, ehe dieselbe erörtert worden, die wahre Geschwindigkeit der Kugel aus der Gewalt des Pulvers unmöglich bestimmt werden kann. Der Autor sieht zwar die Auflösung dieser Frage an sich selbst betrachtet, als sehr leicht an, und findet nur in den ungleichen Theilen, worein das Pulver durch die Entzündung aufgelöset wird, eine so grosse Schwierigkeit, daß er die Theorie völlig bey Seite setzt, und seine Zuflucht bloß allein zu den Experimenten nimmt. Ungeachtet wir nun an der Geschicklichkeit des Verfassers, dergleichen Fragen aufzulösen, keinesweges zweifeln, so glauben wir doch, daß derselbe bey dieser Frage, wenn auch der gemeldete Umstand nicht da wäre, nicht wenig Schwierigkeit gefunden haben würde. Denn diese Frage erfordert die tiefste

Einsicht in die Natur, und die Gesetze der Bewegung flüßiger Cörper; und es ist noch nicht lange, daß man sich im Stande befindet, dergleichen Aufgaben durch Hülffe der Rechnung auszuführen. Wir haben diese wichtige Erweiterung der mathematischen Wissenschaften den beyden weit berühmten Männern JOHANNI und DANIEL BERNOULLI zu danken, von welchen der letztere diese Materie zuerst in seinem unvergleichlichen Werke von der Hydrodynamic abgehandelt, und das ganze Werk meistentheils auf die Erhaltung der sogenannten lebendigen Kräfte gegründet. Sein Herr Vater, der Hr. Prof. JOH. BERNOULLI in Basel hat hierauf die Natur dieser Bewegungen aus den ersten Grundsätzen der Mechanic auf eine sehr sinnreiche Art erkläret, welche Abhandlung sich sowohl in dem IX. Theil der Werke der Kayserl. Academie in St. Petersburg, als der vor einigen Jahren in Lausanne herausgekommenen Sammlung aller Werke dieses grossen manns, befindet. Da nun diese wichtigen Erfindungen unserm Verfasser, als er sein Werk geschrieben, noch unbekannt gewesen, so ist auch schwehr zu glauben, daß er mit der Auflösung dieser Frage so leicht würde haben zurechte kommen können; ungeachtet er dieselbe für sehr leicht zu halten scheinet. Die gröste Schwierigkeit bestehet aber gar nicht darinne, daß die ungleichen Theile, worein das Pulver durch die Entzündung aufgelöset wird, auch in eine ungleiche Bewegung gesetzet werden: sondern wenn auch diese Ungleichheit nicht vorhanden wäre, so würde doch die Bestimmung der verschiedenen Kräfte, welche auf alle Theilchen insbesondere würken, noch weit schwerer fallen. Insonderheit aber wenn man betrachtet, daß in einem jeglichen Zustand, worinn sich die aus dem Pulver erzeugte Luft während der Ausdehnung befindet, nicht alle Theile einen gleichen Grad der Elasticität, und folglich auch nicht einen gleichen Grad der Dichtigkeit, haben können; so ereignen sich in der Ausrechnung so viel Schwierigkeiten, daß auch die obgemeldeten Methoden der Herren BERNOULLI kaum hinreichend sind, dieselben zu überwinden. Denn da, wie wir schon oben erinnert haben, die Bewegung eines jeglichen Theilchens, so lange die Ausbreitung dauret, beständig vermehret wird, so muß auch ein jegliches Theilchen von hinten stärker, als von vornen gedruckt werden: folglich muß die elastische Kraft hinten immer grösser seyn, als vorne. Wenn also eine Kugel vor dem Pulver befindlich ist, so muß dieselbe nach der Entzündung immer nur von der kleinsten Kraft, womit die Theile der Flamme begabet sind, fortgestessen werden, weil darauf nur die vordersten Theile mit ihrer Elasticität würken.Weil aber die Theilchen dieser aus dem Pulver erzeugten elastischen Materie so sehr subtil sind, und also eine sehr geringe Kraft erfordert wird, um dieselben in Bewegung zu setzen, so kann auch die Ungleichheit in der Elasticität nicht merklich seyn, dahero wir uns nicht viel von der Wahrheit entfernen werden, wenn wir annehmen, daß in einem jeden Augenblick die Elasticitäb durch die ganze subtile Materie gleich zertheilet sey. Auf diese Art fallen aber die grösten Schwierigkeiten weg, und die Frage kann nach den obgemeldeten Methoden folgendergestalt aufgelöset werden.

Weil man die aus dem Pulver durch die Entzündung erzeugte subtile elastische Materie als eine sehr stark zusammengepreßte Luft ansehen kann, so wollen wir setzen, daß im ersten Augenblick nach der Entzündung in dem hohlen Cylinder *AABB* der Raum



AACC mit dergleichen zusammen gepreßten Luft erfüllet gewesen. Es sey nun die Länge dieses gantzen Cylinders $AB = a$*;* die Weite esselben $= cc,$ und die Länge $AC = b$*;* die in diesem Raum *AC* zusammen gepreßte Luft aber sey *m* mahl dichter, als die natürliche Luft, so wird auch nach der gemeinen Regel die Elasticität derselben *m* mahl grösser seyn, als die Elasticität der natürlichen Luft. Wenn wir also die Höhe des Quecksilbers in dem Barometer setzen $= h$, deren Schwehre der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist, so wird die Elasticität der natürlichen Luft durch das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= 12000h$, ausgedrucket werden, folglich wird die Elasticität der in dem Raum *AC* zusammengepreßten Luft dem Druck einer natürlichen Luft-Säule, welche $12000mh$ hoch ist, gleich seyn. Lasst uns nun setzen, daß sich diese Luft nach einiger Zeit schon bis *MM* ausgedehnet habe, und nennen die Länge dieses Raums $AM = x$*;* so wird die Dichte der durch diesen Raum ausgebreiteten Luft sich zur anfänglichen Dichte in *AC* verhalten, wie *AC* zu *AM,* das ist, wie *b* zu *x,* und also wird dieselbe noch $\frac{mb}{x}$ mahl grösser seyn, als die der natürlichen Luft, und ihre Elasticität wird dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule gleichen, deren Höhe ist

$$= \frac{12000mbh}{x}$$

Wenn wir nun annehmen, daß sich diese Luft gantz allein durch ihre Kraft ausbreite, und weder eine Kugel noch einen Pfropf vor sich her stossen müsse, so kann die Geschwindigkeit, mit welcher diese Ausdehnung geschieht, auf einen jeglichen Augenblick, und an einem jeglichen Orte, also bestimmet werden. Es sey $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich die vorderste Scheibe *MM* gegen *BB* fort beweget, dergestalt daß *v* die Höhe andeutet, aus welcher ein schwerer Körper durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erhält, mit welcher die Scheibe *MM* fortgehet. Da wir nun annehmen, daß sich die zusammengedruckte Luft beständig gleichförmig ausbreite, so wird eine jegliche andere Scheibe *ZZ* um so viel langsamer fortgehen, je näher dieselbe dem Boden *AA* ist. Wenn wir also diese Entfernung $AZ = z$ setzen, so wird die Geschwindigkeit in *ZZ* seyn $= \frac{z\sqrt{v}}{x}$ und indem die vordere Scheibe *MM* durch den unendlich kleinen Weg $Nm = dx$ fortrücket, so wird die Scheibe *ZZ* durch einen Weg, so $= \frac{zdx}{x}$ fortgehen. Da aber die Geschwindigkeit vermehret wird, so wollen wir nach den Regeln der Differential-Rechnung setzen, daß indem *M M* durch *Mm* fortgehet, die Höhe

v um dv oder die Geschwindigkeit selbst $\sqrt{v}$ um $=\frac{dv}{2\sqrt{v}}$ vermehret werde ; so wird in eben der Zeit die Geschwindigkeit der Scheibe ZZ um $\frac{zdv}{2x\sqrt{v}}$ und die Höhe $\frac{zzv}{xx}$ aus welcher diese Geschwindigkeit erlanget wird, um $\frac{zzdv}{xx}$ zunehmen. Wir wollen nun der Scheibe ZZ eine Dicke $Zz = dz$ geben, der gestalt, daß ihr Inhalt seyn soll $= ccdz$, und da die Luft in diesem Zustand $\frac{mb}{x}$ mahl dichter ist, als die natürliche, so wird die Scheibe $ZZzz$ in Ansehung der Materie, einer gleich dicken Scheibe natürlicher Luft gleichen, deren Höhe $=\frac{mbdz}{x}$. Da nun die Bewegung dieser Scheibe vermehret wird, keine solche Vermehrung aber ohne Kraft hervorgebracht werden kann, so wollen wir setzen, daß die Kraft, wodurch die Gescbwindigkeit der Scheibe $ZZzz$ vermehret wird, dem Gewicht einer natürlichen gleich dicken Luft-Säule gleiche, deren Höhe $=12000p$. Weil wir nun gesehen, daß, indem diese Scheibe durch den Weg $\frac{zdx}{x}$ fortrückt, die ihre Geschwindigkeit bestimmende x Höhe $\frac{zzv}{xx}$ um $\frac{zzdv}{xx}$ wachse, so muß sich nach den Grund-Gesetzen der Mechanic dieser Zuwachs $\frac{zzdv}{xx}$ dem Wege $\frac{zdx}{x}$ verhalten, wie die fortstossende Kraft $12000ccp$ zum Gewicht der Scheibe $\frac{mbccdz}{x}$, das ist

$$\frac{zzdv}{xx}:\frac{zdx}{x}=12000ccp:\frac{mbccdz}{x},$$

woraus man bekommt die Grösse der zur Forttreibung dieser Scheibe erforderten Kraft

$$12000ccp=\frac{mbcczdzdv}{xxdx}=\frac{mbccdv}{xxdx}\cdot zdz.$$

Da nun zu der unendlich kleinen Scheibe $ZZzz$ so viel Kraft erfordert wird, so wird das Integrale der gefundenen Formul, nehmlich

$$\frac{mbccdv}{xxdx}\cdot\frac{zz}{2}$$

die Kraft anzeigen, welche zur Acceleration der im Raum $AAZZ$ befindlichen Luft nöthig ist, und wann wir jetzt $z = x$ setzen, so kommt die gäntzliche Kraft, von welcher die Acceleration aller im Raum $AAMM$ eingeschlossenen Luft herrühret, heraus, und wird

$$=\frac{mbccdv}{2dx}.$$

Diese Kraft muß nun, wenn kein Wiederstand vorhanden, der elastischen Kraft, womit diese zusammen gedruckte Luft begabet ist, gleich seyn, welche durch das Gewicht einer natürlichen Luft-Säule, deren Höhe $=\frac{12000mbh}{x}$ und x Dicke $=cc$, ausgedruckt worden; folglich bekommen wir diese Vergleichung:

$$\frac{dv}{2dx}=\frac{12000h}{x} \text{ oder } dv=\frac{24000hdx}{x},$$

davon das Integrale gibt $v=24000hl\frac{x}{b}$. Wenn wir nun für x setzen $AB=a$, so bekommen wir die Höhe, aus welcher eben diejenige Geschwindigkeit erzeuget wird, womit die in unserm hohlen Cylinder zusammen gepreßte Luft bey der Oefnung BB herausfahren wird; und diese Höhe ist also $=24000hl\frac{a}{b}$. Wobey zu merken, daß alhier für $l\frac{a}{b}$ nicht die gewöhnlichen Logarithmi, sondern die so genannten hyperbolischen Logarithmi genommen werden müssen. Wenn man sich aber der gemeinen bedienen will, so muß man dieselben mit dieser Zahl 2,30258509 multipliciren, oder man bekommt

$$v=55261hl\frac{a}{b}.$$

Will man aber wissen, wie viel Schuhe diese Geschwindigkeit in einer Secunde betrage, so darf man nur die Länge h in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhes ausdrucken, und die Quadrat-Wurzel aus v durch 4 dividiren. Wenn nun $h=30$ Englische Zoll genommen wird, so ist nach Rheinländischem Maaß $h=2425$, und die gesuchte Geschwindigkeit beträgt

$$\frac{1}{4}\sqrt{55261}\cdot 2425l\frac{a}{b}$$

Rheinl. Schuhe in einer Secunde. In dem von dem Autore zuerst angeführten Exempel war

$$a=45 \text{ und } b=2\tfrac{5}{8} \text{ folglich } \frac{a}{b}=\frac{360}{21}=\frac{120}{7},$$

dahero mußte in diesem Fall die Flamme, wenn weder Kugel noch Vorschlag vor das Pulver geladen worden, und auch kein äusserlicher Wiederstand vorhanden wäre, aus dem Lauf mit einer Geschwindigkeit heraus fahren, womit in einer Secunde so viel

Schuhe, als diese Zahl $\frac{1}{4}\sqrt{55261 \cdot 2425 \cdot 1,23408}$ anzeigt, werden durchlaufen können. Da nun

$$\begin{aligned} l55261 &= 4,7424187 \\ l2425 &= 3,3847117 \\ l1,23408 &= \underline{0,0913435} \\ & \ 8,21847404 \end{aligned}$$

die Hälfte genommen

$$\begin{array}{lr} & 4,1092370 \\ & \underline{= 0,6020600} \\ \text{subtr. } l4 & 3,5071770, \end{array}$$

so beträgt diese Geschwindigkeit so viel Schuh 3215 in einer Secunde. Welche Zahl mehr als um die Hälfte kleiner ist, als diejenige, welche der Autor durch seine Experimenta herausgebracht, ungeachtet wir hier weder auf den Gegendruck der Luft, noch auf den Wiederstand derselben, gesehen haben, welche beyde Umstände diese Geschwindigkeit noch mehr verringern müssen. Denn, da der Gegendruck der Luft dem Gewicht des Quecksilbers im Barometer, und folglich einer Luft-Säule, so 12000*h* hoch ist, gleichet, der Wiederstand einer Luft-Säule aber, deren Höhe $= v$, gleich ist, so wird die sämtliche Resistenz $= (12000h + v)c^2$, welche in der obigen Rechnung von der fortstossenden Kraft

$$\frac{12000mbcch}{x}$$

abgezogen werden muß. Dahero wir diese Vergleichung erhalten

$$\frac{mbdv}{2dx} = \frac{12000mbh}{x} - 12000h - v,$$

welche in diese verwandelt wird

$$dv + \frac{2vdx}{mb} = \frac{24000hdx}{x} - \frac{24000hdx}{mb}.$$

Diese Aequation wird integrabel, wenn man sie mit $e^{\frac{2x}{mb}}$ multipliciret, allwo e die Zahl bedeutet, deren Logarithmus hyperbolicus gleich ist 1, oder es ist $e = 2,718281828$; das Integrale selbst aber wird:

$$e^{\frac{2x}{mb}}v = 24000h\int \frac{e^{\frac{2x}{mb}}dx}{x} - 12000he^{\frac{2x}{mb}}.$$

Wenn nun *m* eine so grosse Zahl andeutet, daß der Bruch $\frac{2x}{mb}$ sehr klein wird, so wird beynahe

$$e^{\frac{2x}{mb}}=1+\frac{2x}{mb}$$

und folglich

$$\int\frac{e^{\frac{2x}{mb}}dx}{x}=l\frac{x}{b}+\frac{2x}{mb}-\frac{2}{m},$$

weil dieses Integrale verschwinden muß, wenn $x=b$. Dahero bekommt man

$$\left(1+\frac{2x}{mb}\right)v=24000hl\frac{x}{b}+\frac{24000hx}{mb}-\frac{24000h}{m}.$$

man multiplicire durch $\frac{1}{1+\frac{2x}{mb}}$ oder durch $1-\frac{2x}{mb}$ so wird

$$v=24000h\left(1-\frac{2x}{mb}\right)l\frac{x}{b}+\frac{24000hx}{mb}-\frac{24000h}{m},$$

wenn man nehmlich die Terminos, welche allzu klein werden, auslässt. Um nun die Geschwindigkeit zu bekommen, mit welcher die Flamme bey der Mündung *BB* hervor bricht, so setze man $x = a$, und damit man sich der gemeinen Logarithmen bedienen könne, so multiplicire man den gefundenen Logarithmum mit 2,30258509, woher entspringt

$$v=55261h\left(1-\frac{2a}{mb}\right)l\frac{a}{b}+\frac{24000ha}{mb}-\frac{24000h}{m}.$$

Hier ist, wie wir vorher gesehen, $h=2425$ tausendste Theile eines Rheinländischen Schuhes, und wenn wir mit dem Autors annehmen $m=1000$, und für den vorigen Fall setzen $\frac{a}{b}=\frac{120}{7}=17,1428,$ so wird $l\frac{a}{b}=1,2340832$ und also $v=160646077$;
und die Geschwindigkeit wird in einer Secunde 3168 Schuhe betragen: welche nicht viel geringer ist, als diejenige, welche wir vorher, ohne auf die Resistentz der Luft zu sehen, heraus gebracht haben.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wenn nun des Autoris Experimente und die daraus gemachten Schlüsse ihre Richtigkeit haben, so ist diese Geschwindigkeit, welche wir hier aus der Theorie gefunden, viel zu klein. Dieselbe würde aber noch viel kleiner heraus gekommen seyn, wenn wir der Wahrheit gemäß in Betrachtung gezogen hätten, daß sich nicht alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzünde, und ferner würde noch über dieses die Betrachtung der gröbern Theilchen des Pulvers eine merkliche Verminderung in dieser Geschwindigkeit verursachet haben. Solten diese Umstände, wie wohl zu vermuthen, so viel austragen, daß die Geschwindigkeit in dem angeführten Exempel nicht viel über 2000 Schuhe in einer Secunde ausmachte, so würde auch keine Kugel mit einer so grossen Geschwindigkeit heraus getrieben werden können, als durch die Experimente des Autoris gefunden worden. Ja wenn wir so gar zugeben wollten, daß sich alles Pulver auf einmal entzünde, und daß auch die gröbern Theile die Bewegung der subtilern nicht hindern, so würde doch die Geschwindigkeit der Kugel weit kleiner heraus kommen, als solche in der That befunden wird.

Um dieses deutlicher vor Augen zu legen, so dürfen wir nur in der obigen Rechnung außer den Theilchen der zusammen gepressten Luft, welche in Bewegung gesetzt werden möchten, noch eine Kugel in Betrachtung ziehen. Laßt uns also setzen, daß sich vor der zusammen gepressten Luft in *MM* noch eine Kugel befinde, deren Gewicht einer Luft-Säule gleiche, welcher Dicke $= cc$ und Höhe $= k$, Weil nun diese Kugel mit der vordersten Scheibe *MM* einerley Bewegung hat, wenn wir annehmen, daß dieselbe von einer Kraft, welche dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule, so hoch $= P$, gleich ist, fort getrieben werde, so bekommen wir nach den Grund-Gesetzen der Bewegung diese Vergleichung: $kdv = Pdx$, und also

$$P = \frac{kdv}{dx}.$$

Diese Kraft muß zu derjenigen, welche zur Acceleration der Flamme selbst erfordert worden,

$$\frac{mbccdv}{2dx},$$

addirt werden, und da bekommt man die völlige zur Acceleration erforderte Kraft

$$= \frac{mbccdv}{2dx} + \frac{kccdv}{dx},$$

welche der Elasticität, wodurch die Bewegung in der That fortgesetzet wird, gleich seyn muß, wenn wir nehmlich, welches ohne merklichen Fehler geschehen kan, die Resistentz der Luft aus der Acht lassen. Auf diese Art erhalten wir diese Aequation, nachdem wir durch *cc* dividiret,

$$\frac{mbdv}{2dx} + \frac{kdv}{dx} = \frac{12000mbh}{x}$$

und folglich

$$v = \frac{24000mbh}{mb + 2k} l \frac{x}{b}$$

Hieraus erhellet, daß die Geschwindigkeit der Kugel immer weit kleiner seyn müsse, als die Geschwindigkeit der blossen Flamme, welche durch diese Aequation $v = 24000hl \frac{x}{b}$ ausgedruckt gefunden worden. Es wird sich also die Geschwindigkeit der Kugel verhalten zur Geschwindigkeit der blossen Flamme, welche dieselbe unter gleichen Umständen erlangt haben würde, wie $\sqrt{mb}$ zu $\sqrt{(mb + 2k)}$ der wie 1 zu

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)}.$$

Da nun in dem vorher angeführten Exempel die Geschwindigkeit der blossen Flamme 3168 Schuhe in einer Secunde betragen, so wird die Geschwindigkeit der Kugel, so unter eben denselben Umständen heraus geschossen worden, in einer Secunde nur

$$\frac{3168}{\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)}}$$

Schuhe austragen. Es ist aber hier $m = 1000$, $b = 2\frac{5}{8}$ Zoll, und da die Kugel von Bley gewesen, so wird $k = 4900$ Zoll; folglich wird

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)} = \sqrt{\frac{12425}{2625}}$$

und also die verlangte Geschwindigkeit der Kugel von 1456 Schuhe in einer Secunde gefunden werden, welche Geschwindigkeit weit kleiner ist, als die jenige, welche in eben diesem Fall die Versuche zu erkennen gegeben haben. Dieselbe würde aber noch geringer heraus gekommen seyn, wenn wir die gröberen Theile des Pulvers, und auch noch dieses in Betrachtung gezogen hätten, daß sich nicht alles Pulver auf einmal entzünde.

Aus allem diesem erhellet nun gantz deutlich, daß die von dem Autore angegebne Theorie von der Gewalt des Pulvers mit seinen eigenen Experimenten unmöglich bestehen könne, und daß eine weit grössere Kraft in dem Pulver verborgen liegen müsse, als der Autor glaubt. Wir sind also genöthiget, je länger je mehr der Meynung des tiefsinnigen Herrn DANIEL BERNOULLI beyzupflichten, welcher in seiner *Hydrodynamic* behauptet, daß die erste Elasticität der im Pulver befindlichen subtilen Materie, bey nahe 10000 mahl grösser sey, als die Elasticität der natürlichen Luft. Da nun das Pulver selbst nicht einmahl 1000 mahl schwerer ist, als die Luft, und nur $\frac{3}{10}$ davon die zusammen gedruckte Luft ausmachen, so folget hieraus nothwendig, daß in so sehr starken Zusammenpressungen der Luft die Elasticität derselben nach einer grösseren Verhältniß vermehret werde, als die Dichtigkeit. Denn wenn man dieses nicht zugeben will, so kann man in dem Pulver unmöglich diejenige Kraft finden, welche doch nach den Experimenten würklich darinne steckt. Solchergestalt wird derjenige Grundsatz des Verfassers, welchen wir schon oben in Zweifel gezogen, daß nehmlich die Elasticität der Luft immer ihrer Dichtigkeit proportional sey, gänzlich umgestossen: und dieser Satz kann nicht anders beybehalten werden, als wenn die Luft nicht allzusehr zusammen gedruckt wird. Die Beweis-Gründe, welche der Autor anführt, gehen auch nur auf diesen Fall, wie in der daselbst beygefügten Anmerkung erinnert worden. Derowegen muß, um die Würkungen des Pulvers zu erklären, eine ganz andere Lehre von der Natur der Luft zu Hülfe genommen werden. Zu diesem Ende scheinet nun keine bißher bekannte Theorie der Luft bequemer zu seyn, als diejenige, welche ich im 2ten Theil der Comment der Academie zu Pebersburg gegeben, allwo ich aus dem Begriff, den ich mir von dem Zustande der Luft formiret hatte, folgendes gefunden. Da die Luft aus Materie bestehet, so ist für sich klar, daß sich dieselbe nicht unendlich weit zusammen drucken lasse; dahero muß es einen Grad der Dichtigkeit geben, welchen man in Zusammen- pressung der Luft nicht überschreiten kann. Es sey also dieser höchste Grad der Dichtigkeit der Luft q mahl grösser, als die Dichtigkeit der natürlichen; .und wenn man diese Zahl q als bekannt annimmt, so habe ich gefunden, daß sich die Elasticität der natürlichen Luft zur Elasticität einer Luft, welche m mahl dichter ist, als die natürliche, verhalten müsse, wie

$$\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2} \text{ zu } \sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}.$$

Da nun die Elasticität der natürlichen Luft durch einen Cylinder von Quecksilber, dessen Höhe = h, ausgedrucket wird, so wird die Elasticität der Luft, wenn dieselbe m mahl dichter ist, durch einen Cylinder von Quecksilber angezeigt werden, dessen Höhe

$$\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}}h.$$

Weil aber q eine sehr grosse, und allem Ansehen nach grössere Zahl ist, als m immer seyn kann, so wird zu unserm Vorhaben genau genug sein,

$$\sqrt[3]{(q-1)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{q^2}}-\frac{1}{9q\sqrt[3]{q^2}}$$

und

$$\sqrt[3]{(q-m)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2m}{3\sqrt[3]{q^2}}-\frac{mm}{9q\sqrt[3]{q^2}}.$$

Derowegen wird die Elasticität der Luft, wenn sie *m* mahl dichter ist, als die natürliche, also ausgedruckt werden:

$$\frac{6mq+mm}{6q+1}h=\left(m+\frac{m(m-1)}{6q}\right)h\,,$$

oder die Elasticität der natürlichen Luft wird sich verhalten zur Elasticität einer Luft, welche *m* mahl dichter ist, als die natürliche, wie 1 zu

$$m+\frac{m(m-1)}{6q}.$$

Aus welcher Formel zugleich die gemeine Regel erhellet, daß wenn *m* keine allzugrosse Zahl ist, die Elasticität immer der Dichte ziemlich genau proportional sey. Wenn aber die Zahl *m* anfängt, so groß zu werden, daß der Bruch $\frac{m(m-1)}{6q}$ nicht mehr aus der Acht gelassen werden kann, so muß die Abweichung der gemeinen Regul von der Wahrheit merklich werden. Dieses beruhet aber auf der Größe der Zahl *q*, welche uns unbekannt ist; wir würden aber dieselbe bestimmen können, wenn wir nur in einem einzigen Fall wüsten, wie viel die gemeine Regel von der Wahrheit abwiche. Da wir nun aus den angeführten Gründen deutlich sehen, daß, wenn die natürliche Luft in einen 244 mahl kleinern Raum zusammengedruckt wird, als welcher Fall im Pulver statt findet, ihre Elasticität vielmehr mahle vermehrt werden müßte, ohne auf diejenige Vermehrung zu sehen, welche von der Erhitzung herrührt: so folget, daß die Zahl *6q* viel kleiner als $244\cdot 243$ seyn müßte. Sollte die Elasticität der gemeldeten zusammen gedruckten Luft 300 mahl grösser seyn, als der naturlichen, so würde $56=\frac{244\cdot 243}{6q}$ und folglich $q=\frac{244\cdot 243}{336}$ und also kleiner als 244, welches wieder unsere festgesetzten Begriffe laufft. Es ist aber zu merken, daß wenn die Zahl *m* nicht viel kleiner ist, als *q*, die obgedachte Näherung nicht statt finden könne; dahero in solchen Fällen nachfolgende Regel gebraucht werden muß. Nehmlich, die Elasticität der natürlichen Luft muß sich verhalten zur Elasticität einer *m* mahl dichtern Luft, wie

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{q^2}}+\frac{1}{9q\sqrt[3]{q^2}}\ \text{ zu }\ \sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}\,,$$

das ist, wie

$$6q+1\ \text{ zu }\ 9qq-9q\sqrt[3]{q(q-m)^2}.$$

Wenn also $m=244$, so kann die Vermehrung der Elasticität nicht grösser werden, als wenn auch $q=244$. In diesem Fall würde also die Elasticität der im Pulver zusammen gedruckten Luft $\frac{9qq}{6q+1}$ das ist 366 mahl *q* grösser seyn, als die Elasticität der Luft in ihrem natürlichen Zustande. Und wenn die Erhitzung dazu kommt, wie unser Autor dieselbe bestimmt, so würde die Elasticität der aus dem Pulver durch die Entzündung befreyten und erhitzten Luft 1500 mahl grösser seyn, als der natürlichen. Ungeachtet nun dieses die gröste Kraft zu seyn scheinet, welche dem Pulver zugeeignet werden kann, so sieht man doch leicht, daß dieselbe noch nicht hinlänglich seyn würde, die durch die Erfahrung bestimmte Würkung zu erklären.

DRITTE ANMERKUNG

Um derohalben zu einer richtigen Erkenntniß der im Pulver enthaltenen Kraft zu gelangen, so hat man erstlich zu erwegen, daß die im Pulver enthaltene Luft, nachdem dieselbe mit der natürlichen einerley Grad der Dichtigkeit angenommen, einen 244 mahl grössern Raum ausfüllt, als vorher das gantze Wesen des Pulvers eingenommen; die zusammen gepreßte Luft im Pulver aber nur ungefehr den dritten Theil desselben betrage. Dahero muß die Luft im Pulver vor der Entzündung noch ungefähr drey mahl, oder nach dem Autore $\frac{10}{3}$ mahl mehr zusammen gepreßt, und folglich 813 mahl dichter gewesen seyn, als die natürliche Luft. In einem solchen so sehr zusammen gepreßten Zustande befindet sich demnach die Luft im Salpeter verschlossen, und da der obige Werth des Buchstaben q nicht kleiner, als diese Zahl 813 angenommen werden kann, so scheinet der Wahrheit am meisten gemäß zu seyn, daß q gleich sey 813 oder nach einer graden Zahl $q = 800$. Denn weil sich dieser Grad der Dichtigkeit der Luft in allem Salpeter beständig befindet, so ist zu vermuthen, daß eben dieses auch der gröste mögliche Grad der Zusammenpressung sey. Hieraus ist nun leicht zu erachten, wie ungeheure Kräfte zu Erzeugung des Salpeters erfordert werden, und da sich solche Kräfte in der Natur würklich befinden, so ist sehr wahrscheinlich, daß dadurch die Luft in dem Salpeter auf den höchsten möglichen Grad zusammen gedruckt werde, und daß aus eben diesem Grunde die Gleichheit zwischen den verschiedenen Theilen des Salpeters beruhe. Wenn wir also setzen, daß die grösste Dichtigkeit, wozu die Luft durch die Zusammenpressung gebracht werden kann, 800 mahl grösser sey, als die natürliche, in welchem Zustand folglich die Luft eben so dicht, als das Wasser seyn würde, welche Gleichheit nicht wenig zu Bestätigung dieses Satzes beyzutragen scheinet: so sind wir im Stande, eine vollständige Theorie über die verschiedenen Grade der Elasticität, welche sich in der Luft nach den verschiedenen Graden der Dichtigkeit befindet, zu geben. Denn wenn wir die Elasticität der natürlichen Luft durch 1 anzeigen, so wird die Elasticität einer Luft, welche m mahl dichter ist, als die natürliche, durch diese Zahl

$$\left(1200-3\sqrt[3]{100\left(800-m\right)^{2}}\right)\left(1-\frac{1}{4800}\right)$$

ausgedrückt werden, woraus folgende Schlüsse gemacht werden können.

Erstlich, wenn m eine sehr kleine Zahl ist, so wird die Elasticität $=m+\frac{m(m-1)}{4800}$. Dahero wenn m ein Bruch ist, welches geschieht, wenn die Luft nicht zusammen gedruckt, sondern verdünnert wird, so ist die Elasticität immer der Dichte proportional, wie die gemeine Regel mit sich bringt, und auch alle Experimente, welche über die Verdünnerung der Luft angestellt worden, bezeugen.

Zweytens, wenn die Luft in einen 16 mahl kleinern Raum zusammen gestossen wird, welches fast der höchste Grad ist, den man durch menschliche Kräfte im Experimentiren erreichen kan, so wird die Elasticität schon $16\frac{1}{20}$ mahl grösser, als die Elasticität der natürlichen Luft. Da nun dieser Unterscheid kaum zu erkennen ist, so hat man sich nicht zu verwundern, daß bißher die Unrichtigkeit der gemeinen Regel nicht durch Versuche hat entdecket werden können.

Drittens, wenn *m* eine grössere Zahl ist, als 16, so wird die Abweichung der gemeinen Regel schon merklicher. Weil aber in diesen Fällen die Formul $= m + \frac{m(m-1)}{4800}$ schon von der Wahrheit abzugehen anfängt, so muß man sich der ersten, nehmlich

$$\left(1200 - 3\sqrt[3]{100(800-m)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4800}\right)$$

bedienen.

Wenn also gesetzet wird $m = 100$, so wird die Elasticität

$$= \left(1200 - 3\sqrt[3]{49000000}\right)\left(1 - \frac{1}{4800}\right) = 102,19.$$

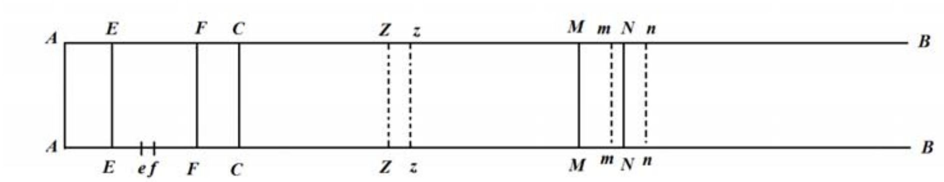
Setzt man aber $m = 300$, so wird die Elasticität

$$= \left(1200 - 3\sqrt[3]{25000000}\right)\left(1 - \frac{1}{4800}\right) = 322,73.$$

Setzt man aber viertens $m = 800$, wie in dem Salpeter und Pulver würklich geschieht, so wird die Elasticität $= 1200$. Wenn nun noch dazu die Erhitzung von der Flamme kommt, so kann dieselbe beynahe noch um 5 mahl grösser, und also über 5000 mahl grösser werden, als der natürlichen Luft. Solchergestalt bekommen wir also eine Gewalt, welche 5 mahl grösser ist, als diejenige, welche der Verfasser angiebt, und welche folglich, allem Ansehen nach, vermögend seyn wird, nach Abzug aller obgemeldeten Hindernisse diejenigen Würkungen hervor zu bringen, welche uns die Erfahrung an die Hand giebt. Wie weit also diese Lehre mit der Erfahrung übereinstimme, wollen wir in der folgenden Anmerkung untersuchen.

VIERTE ANMERKUNG

Laßt uns also wiederum setzen, daß in dem hohlen Cylinder *AABB* der Raum *AACC* mit Pulver angefüllet worden. Da nun die zusammen



gepreßte Luft $\frac{3}{10}$ Theil des ganzen Gewichts des Pulvers ausmacht, so kommen hier dreyerley Materien zu betrachten vor: Erstlich diese zusammen gepreßte Luft, welche, wie gezeiget worden, 800 mahl dichter ist, als die natürliche; zweytens die groben Theile, woraus das Pulver bestehet, und drittens die natürliche Luft, welche sich zwischen den Pulver-Körnern befindet. Diese dreyerley Materien erfüllen den Raum *AACC,* und es scheinet, daß wir uns von der Wahrheit nicht merklich entfernen, wenn wir annehmen, daß die natürliche Luft $\frac{1}{4}$ des Raums *AACC,* die zusammen gepreßte Luft auch $\frac{1}{4}$ und die gröbere Materie $\frac{2}{4}$ einnehmen. So bald also die zusammen gepreßte Luft durch die Entzündung aus ihren Behältnissen befreyet wird, so vermischet sie sich mit der natürlichen Luft, und nimmt folglich einen zweymahl grössern Raum ein, als vorher, dergestalt, daß dieselbe nunmehr nur 400 mahl dichter seyn wird, als die natürliche. Die übrige Helfte des Raums *AACC* bleibt von der gröbern Materie eingenommen. Weil nun diese weder gantz durch die folgende Ausbreitung der Luft mit der ersten Scheibe CC fortgetrieben wird, noch auch völlig bey dem Grunde *AA* zurück bleibet, so werden wir der Wahrheit am nächsten kommen, wenn wir setzen, daß eine Helfte der gröberen Materie an dem Grund *AA* zurück bleibe, die andere Helfte aber vor der Luft her getrieben werde. In dem ersten Augenblick also, nachdem sich das Pulver entzündet, welches, wie der Autor will, auf einmahl geschehen soll, so wird der Raum *AACC* dergestalt angefüllt seyn, daß der erste vierte Theil *AAEE* eine Helfte der gröberen Materie des Pulvers, das letzte Viertel *CCFF* die andere Helfte, und die mittlere zwei Viertel *EEFF* die zusammen gedruckte Luft, welche 400 mahl dichter ist, als die natürliche, In sich enthalten. Wenn also die Länge des Raums $AC = b$ gesetzt wird, so ist

$$AE = \tfrac{1}{4}b \text{ und } CF = \tfrac{1}{4}b \text{ und } EF = \tfrac{1}{2}b.$$

Weil nun die gröberen Theile des Pulvers schwehrer sind als Wasser, so wollen wir setzen, daß die in *CCFF* enthaltene gröbere Materie einer gleich dicken natürlichen Luft-Säule gleiche, deren Höhe $= 1000CF = 250b$. Damit aber unsere Rechnung nicht auf diese Hypotheses, als woran man noch einigen Zweifel haben könnte, eingeschränket werde, so wollen wir auf eine allgemeine Art setzen:

$$EF = \tfrac{1}{\alpha}b, \quad AE = CF = \tfrac{\alpha-1}{2\alpha}b$$

und die in *EEFF* enthaltene Luft soll m mahl dichter seyn, als die natürliche; die gröbere Materie in *CCFF* aber soll *n* mahl schwehrer, als die gemeine Luft angenommen werden; dahero wenn man setzen wird $\alpha = 2, m = 400$ und $n = 1000$, so kommen die vorher gegebenen Bestimmungen heraus. Laßt uns nun ferner setzen, daß sich nach Verfliessung einiger Zeit die in *EEFF* zusammen gepreßte Luft biß in *EEMM* ausgebreitet, und die in *FFCC* enthaltene gröbere Materie bis in *MMNN* fortgestossen habe, dergestalt, daß $MN = FC = \frac{\alpha-1}{2\alpha}b,$, so wird, wenn wir $EM = x$ setzen, die Dichtigkeit der in *EEMM* befindlichen Luft $\frac{mb}{\alpha x}$ mahl grösser seyn, als der natürlichen. Wenn also *h* für die Höhe einer Luft-Säule angenommen wird, deren Gewicht der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist, so wird ungefehr $h = 29100$ Rheinl. Schuh und die Elasticität der in *EEMM* eingeschlossenen Luft wird dem Gewicht einer natürlichen Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$\frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{\left(q - \frac{mb}{\alpha x}\right)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}} h = \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} h,$$

allwo *q* die Zahl 800 andeutet. Wir wollen aber lieber den Buchstaben *q* beybehalten, damit, wenn auf allen Fall ein anderer Werth dafür gefunden werden solte, die Rechnung dennoch Platz finden möchte. In dieser Formul ist aber die Erhitzung noch nicht in Betrachtung gezogen worden, wodurch nach dem Autore die Elasticität ungefehr 4 mahl grösser wird. Weil aber dieselbe bisweilen grösser, bisweilen kleiner seyn kann, so wollen wir an statt der Zahl 4 den Buchstaben *ß* gebrauchen, dahero die gesuchte Elasticität seyn wird

$$= \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} \beta h,$$

Es sey ferner $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, womit die vorderste Scheibe *MM* und also auch die gröbere Materie *MMNN* fortgetrieben wird, wo *v,* wie schon oben gemeldet worden, die Höhe andeutet, aus welcher ein schwehrer Körper durch den Fall eben dieselbe Geschwindigkeit erhält; indem aber die Scheibe *MM* durch $Mm = dx$ fortrücket, so soll die obige Höhe *v* um *dv* zunehmen. Hieraus ergiebt sich nun leicht die Kraft, welche erfordert wird, um diese Acceleration in der groben Materie *MMNN* hervorzubringen. Denn, da die Materie einer Luft-Säule gleichet, deren Höhe $= \frac{\alpha-1}{2\alpha} nb$*,* so wird die erforderte Kraft dem Gewichte einer gleich dicken Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $= \frac{\alpha-1}{2\alpha} \cdot \frac{nbdv}{dx}$. Wenn noch über diesesKugel en fortgetrieben werden sollte, deren Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= k$*,* gleich wäre, so würde die zu Forttreibung dieser Kugel erforderte Gewalt durch eine Luft-Säule, deren Höhe $=\frac{kdv}{dx}$, ausgedruckt werden.

Um aber die Kraft zu bestimmen, welche zur Acceleration der in *EEMM* zusammen gepreßten Luft erfordert wird, deren Dichte sich zur natürlichen Luft verhält, wie $\frac{mb}{\alpha x}$ zu 1, so wollen wir davon eine Scheibe *ZZ* betrachten, und die Entfernung $EZ = z$ setzen. Die Geschwindigkeit dieser Scheibe wird nun, wie wir oben gezeigt haben, seyn $=\frac{z\sqrt{v}}{x}$, und indem die vorderste Scheibe durch *dx* fortgehet, so wird diese durch $\frac{zdx}{x}$ fortrücken und inzwischen die Höhe $\frac{zzv}{xx}$, welche ihre Geschvindigkeit bestimmt, um $\frac{zzdv}{xx}$ zunehmen. Wenn wir nun dieser Scheibe eine Dicke $Zz = dz$ geben, so wird dieselbe einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe $=\frac{mbdz}{\alpha x}$, welche mit $\frac{zzdv}{xx} : \frac{zdx}{x}$ oder mit $\frac{zdv}{xdx}$ multipliciret, die Höhe einer Luft-Säule anzeigt, deren Gewicht der zur Acceleration erforderten Kraft gleich ist. Dahero diese Kraft seyn wird

$$=\frac{mbzdzdv}{\alpha xxdx}=\frac{mbdv}{\alpha xxdx}\cdot zdz,$$

wovon das Integrale

$$\frac{mbdv}{\alpha xxdx}\cdot\frac{zz}{2}$$

die Kraft ausdrückt, welche zur Acceleration der in *EEZZ* befindlichen Luft erfordert wird, und wenn man $z = x$ setzt, so bekommt man die Kraft, welche zur Acceleration der ganzen Luft, so in *EEMM* eingeschlossen ist, erfordert wird $=\frac{mbdv}{2\alpha dx}$.

Wir wollen nun erstlich annehmen, es befinde sich keine Kugel vor dem Pulver, sondern es werde das Pulver bloß allein ohne einigen Vorschlag loßgebrennt; und da wird in diesem Fall die sämtliche angewandte Kraft seyn

$$=\frac{mbdv}{2\alpha dx}+\frac{\alpha-1}{2\alpha}\cdot\frac{nbdv}{dx}=\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bdv}{2\alpha dx},$$

welche der würklichen forttreibenden Gewalt weniger dem Wiederstand wird gleich seyn müssen. Nun aber ist die forttreibende Gewalt der Elasticität gleich, und also

$$=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\beta h.$$

Der Wiederstand bestehet aber erstlich aus dem Gegendruck der äussern Luft, welche durch h angezeigt wird, und denn aus der Resistenz, welche einer Luft-Säule, deren Höhe $= v$, gleich ist, folglich bekommen wir diese Aequation

$$\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bdv}{2\alpha dx}=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^{2}}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{2}}}\beta h-h-v.$$

Weil wir aber schon vorher gesehen, daß der Wiederstand der Luft in diesem Fall nicht viel austrägt, so können wir zur Leichtigkeit der Rechnung zum wenigsten den letzten Terminum v sicher weglassen, und da bekommen wir

$$\frac{\left(1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{2}}\right)\left(m+(\alpha-1)n\right)}{2\alpha}bdv=\left(1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^{2}}\right)\beta hdx-\left(1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{2}}\right)hdx.$$

Um diese Aequation zu integriren, ist zu merken, daß

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{2}}=1-\frac{2}{3q}-\frac{1}{9qq}-\frac{4}{81q^{3}}-\frac{7}{243q^{4}}-\text{etc.}$$

und

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^{2}}=1-\frac{2mb}{3\alpha qx}-\frac{m^{2}b^{2}}{9\alpha^{2}q^{2}x^{2}}-\frac{4m^{3}b^{3}}{81\alpha^{3}q^{3}x^{3}}-\frac{7m^{4}b^{4}}{243\alpha^{4}q^{4}x^{4}}-\text{etc.}$$

Hernach muß die Integration also angestellt werden, daß wenn $x=EF=\frac{b}{\alpha}$, die Geschwindigkeit oder v nichts werde. Dahero bekommt man

$$\begin{aligned}&\frac{\left(m+(\alpha-1)n\right)bdv}{2\alpha dx}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9q^{2}}+\frac{4}{81q^{3}}+\frac{7}{243q^{4}}+\text{etc}\right)\\&=\beta h\left(\frac{2mb}{3\alpha q}l\frac{\alpha x}{b}-\frac{m^{2}b^{2}}{9\alpha^{2}q^{2}x}+\frac{m^{3}b}{9\alpha q^{2}}-\frac{2m^{3}b^{3}}{81\alpha^{3}q^{3}x^{3}}+\frac{2m^{3}b}{81\alpha q^{3}}-\text{etc.}\right)\\&-hx\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^{3}}+\text{etc.}\right)+\frac{hb}{\alpha}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^{3}}+\text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Weilen aber die Brüche $\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc.}$ so sehr klein sind, so kann man dieselben weglassen, und da erhält man

$$\frac{(m+(\alpha-1)n)bv}{2\alpha}=\beta h\left(\frac{mb}{\alpha}l\frac{\alpha x}{b}+\frac{m^2b}{6\alpha q}-\frac{m^3b^2}{6\alpha^2qx}\right)+\frac{hb}{\alpha}-hx.$$

Setzt man nun die Länge $EB=a$, und macht $x=a$, so kommt die Geschwindigkeit heraus, mit welcher die Flamme bey der Mündung *BB* heraus fahrt,

$$v=\frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}\left(l\frac{\alpha a}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6\alpha qa}\right)-\frac{2h(\alpha a-b)}{(m+(\alpha-1)n)b},$$

für welche Aequation man, ohne merklich zu fehlen, diese nehmen kann

$$v=\frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}l\frac{\alpha a}{b}.$$

Wenn wir nun für die Buchstaben $\alpha,\ \beta,\ m,\ n$ und h die oben angezeigten Werthe setzen, nehmlich $\alpha=2,\ \beta=4,\ m=400,\ n=1000$ und $h=29100$ Rheinl. Schuhe, so kommt

$$v=\frac{16}{7}hl\frac{2a}{b}.$$

Lasst uns hernach das oben angeführte Exempel berechnen, wo $b=2\frac{5}{8}$ Englische Zoll, und $a=45-\frac{21}{32}$. Dahero ist

$$2a=90-\tfrac{21}{16}\ \text{ und }\ \frac{2a}{b}=\tfrac{1419}{42}=33{,}8,$$

folglich $l\frac{2a}{b}=1{,}528917$, welches aber noch mit dieser Zahl 2,30258509 multiplicirt werden muß. Es ist aber

$$\begin{aligned} l1{,}528917 &= 0{,}184383 \\ l2{,}302585 &= 0{,}362215 \\ l\tfrac{16}{7} &= \underline{0{,}359021} \\ & \ 0{,}905619. \end{aligned}$$

Hiezu addire man den log. von h in 1000sten Theilen eines Rheinl. Schuhes

$$lh=\underline{7{,}463893}$$

kommt $$lv=8{,}369512$$

und $$l\sqrt{v} = 4{,}184756$$
folglich
$$\sqrt{v} = 15302.$$
Der vierte Theil hiervon 3825 zeiget, wie viel Schuhe die gesuchte Geschwindigkeit in einer Secunde betrage. Diese nicht allzugrosse Vermehrung der Geschwindigkeit, als welche vorher von 3215 Schuhen befunden worden, ungeachtet wir jetzo eine weit grössere Kraft angenommen haben, kömmt hauptsächlich von der gröbern Materie des Pulvers her, davon die Helfte vor der zusammengepressten Luft heraus getrieben werden muste. Wenn wir aber gesetzt hätten, daß diese grobe Materie gänzlich bey dem Boden des Stücks *AA* zurück bleibe, so würde der Terminus, darinnen *n* ist, weggefallen, und also diese Aequation
$$v = 2\beta hl\frac{\alpha a}{b} \quad \text{oder} \quad v = 8hl\frac{2a}{b}$$
herausgekommen seyn, woraus eine $\sqrt{\tfrac{7}{2}}$ mahl grössere Geschwindigkeit, das ist, von 7157 Schuhen in einer Secunde erwächst, welche, nach Abzug des Gegenstands der Luft, noch ungefehr 7000 Schuh betragen mag, welche Würkung sehr genau mit der Muthmassung des Autoris, welche er aus seinen Experimenten gezogen, überein kommt. Denn er schliesst aus denselben, daß, wenn die Bewegung der Flamme nicht durch die gröbern Theile des Pulvers gehemmet würde, dieselbe in dem gegenwärtigen Fall mit einer Geschwindigkeit von 7000 Schuhen aus dem Lauf heraus gefahren wäre. Es dienet auch insonderheit zu Bekräftigung unserer Meynung von der Gewalt des Pulvers, daß die von uns gefundene Geschwindigkeit etwas grösser ist, als die Experimente anzeigen, weil wegen der allmähligen Entzündung des Pulvers noch etwas abgezogen werden muß. Wenn sich vor dem Pulver eine Kugel befindet, so kan die vorige Rechnung auch leicht auf diesen Fall eingerichtet werden. Denn wenn *k* die Höhe einer Luft-Säule andeutet, deren Gewicht der Schwehre der Kugel gleich ist, so kommt die sämmtliche Kraft, welche zur Acceleration erfordert wird, heraus
$$= \frac{mbdv}{2\alpha dx} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha}\cdot\frac{nbdv}{dx} + \frac{kdv}{dx} = \left(mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k\right)\frac{dv}{2\alpha dx}$$
welche Kraft, da keine Kugel da war, gewesen
$$= \left(m + (\alpha - 1)n\right)\frac{bdv}{2\alpha dx}.$$
Wir dürfen also nur in der vorigen Rechnung an statt
$$m + (\alpha - 1)n$$
setzen

$$=m+(\alpha-1)n+\frac{2\alpha k}{b},$$

so bekommen wir die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel herausgetrieben wird, durch diese Aequation bestimmt

$$v=\frac{2\beta mbh}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}\left(l\frac{\alpha a}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6\alpha qa}\right)-\frac{2h(\alpha a-b)}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}.$$

Wenn wir nun nach den obigen Bedeutungen setzen
$\alpha=2,\ \beta=4,\ m=400,\ n=1000,\ q=800$ und $h=29100$ Rheinl. Schuh, so bekommen wir

$$v=\frac{h}{700b+2k}\left(1600bl\frac{2a}{b}+(2a-b)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)\right)$$

oder

$$v=\frac{h}{700+2k:b}\left(1600l\frac{2a}{b}+\left(\frac{2a}{b}-1\right)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)\right).$$

Um nun diese Rechnung auf den ersten Fall des Autoris zu appliciren, so wird $b=2\tfrac{5}{8},\ a=44\tfrac{11}{32}$ und $k=4900$ Englische Zoll. Dahero $\frac{2a}{b}=33,8$ und der Logarithmus hyperbolicus von $\frac{2a}{b}$

$$=3,52045.$$

Ferner $\frac{200b}{3a}=3,94$ und $\frac{2k}{b}=3733.$ Hieraus erwächst

$$1600l\frac{2a}{b}=5632,72$$

$$\left(\frac{2a}{b}-1\right)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)=\frac{96,43}{5729,15}.$$

Also ist

$$v=\frac{5729,15h}{4433}.$$

Um nun zu finden, wie viel Schuh mit dieser Geschwindigkeit in einer Secunde durch lauffen werden können, so muß h in tausendsten Theilen eines Rheinl. Schuhs ausgedruckt werden, da denn ist $h = 29100000$ und alsdenn muß die Quadrat-Wurzel aus *V* durch 4 getheilt werden. Mit Logarithmis zu rechnen, wird also:

$$\begin{aligned} lh &= 7,463893 \\ l5729,15 &= \underline{3,758090} \\ & 11,221983 \\ l4433 &= 3,646698 \\ lv &= 7,575285 \\ l\sqrt{v} &= 3,787642 \\ l4 &= \underline{0,602060} \\ & 3,185582 \end{aligned}$$

Die Zahl davon

$$1533.$$

Folglich müßte die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1533 Rheinl. Schuhen in einer Secunde heraus getrieben worden seyn, welche Zahl in Englischen Schuen 1580 beträgt. Diese Zahl, welche noch wegen der nicht auf einmahl erfolgten Entzündung und des Verlusts der Kraft, so durch den Spielraum und das Zündloch weggehet, vermindert werden müsste, würde um viel kleiner werden, als diejenige, welche die Experimente für diesen Fall angezeigt haben. Die Ursache hiervon scheinet aber diese zu seyn, daß wir nach der Entzündung nur die Helfte des Raums *AACC* mit Luft angefüllt angenommen haben; es ist aber sehr wahrscheinlich, daß die grobe Materie des Pulvers keinen so grossen Theil des Raumes einnehme: wobey zu merken, daß ein geringer Unterscheid in diesem Stücke bey der Geschwindigkeit einen sehr merklichen Unterscheid verursache. Denn, wenn wir annehmen, daß die gröbere Materie nach der Entzündung nur noch den dritten Theil des Raums erfülle, so wird $\frac{b}{\alpha} = \frac{2}{3}b$ und $\alpha = \frac{3}{2}$; dahero die oben gefundene Aequation in diese verwandelt wird

$$v = \frac{2h}{900b + 3k}\left(1600bl\frac{3a}{2b} + \left(\frac{3}{2}a - b\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right)$$

oder

$$v = \frac{2h}{900 + 3k:b}\left(1600l\frac{3a}{2b} + \left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right).$$

Gesetzt nun, es sey $b = 2\frac{5}{8}$, $a = 45 - \frac{7}{16}$ und $k = 4900$ Engl. Zoll, so wird

$$\frac{3a}{2b} = 25,46, \quad \frac{800b}{9a} = 5,23, \text{ und } \frac{3a}{2b} = 3,23710.$$

Also ist

$$1600l\frac{3a}{2b}=5179,36$$

$$\left(\frac{3a}{2b}-1\right)\left(\frac{800b}{9a}-1\right)=\frac{103,46}{5282,82.}$$

Hernach ist

$$\frac{3k}{b}=5600 \text{ und } \frac{900+3k:b}{2}=3250,$$

dahero

$$v=\frac{5283h}{3250},$$

woraus eine Geschwindigkeit erwächst, welche In einer Secunde 1720 Rheinl. Schuh, oder 1773 Engl. Schuh beträgt. Diese Geschwindigkeit ist nun weit grösser als diejenigen, welche durch die Experimente gefunden werden, und es scheinet, daß nach allem Abzug eine völlige Uebereinstimmung eintreffen würde, dahero wir billig diese letzte Expression, da $\alpha=\frac{3}{2}$ gesetzt worden, als der Wahrheit sehr nahe kommend, ansehen.

FÜNFTE ANMERKUNG

Wir können hieraus sowohl zur Erkenntniß der Natur des Pulvers, als zu vortheilhaftem Gebrauch desselben, sehr nützliche Schlüsse ziehen, welche vielleicht zu Verbesserung der Artillerie nicht wenig beytragen können.

Erstlich, da die Menge der gröbern und irdischen Materie, welche in dem Pulver enthalten ist, so viel zur Geschwindigkeit der Kugel beyträgt, indem dieselbe sehr merklich geschwinder oder langsamer fortgetrieben wird, wenn weniger oder mehr dergleichen gröbere Materie mit dem Pulver vermischet ist, so siehet man leicht, daß die verschiedene Güte des Pulvers hauptsächlich auf der Menge der damit vermischten gröbern Materie beruhe. Denn, da allem Ansehen nach in dem Salpeter die darinne befindliche Luft ungefehr 800 mahl dichter ist, als die natürliche, als welches der höchste Grad der Dichtigkeit ist, auf welchen die Luft durch die Zusammenpressung gebracht werden kann: so würde auch alles Pulver mit einerley Kraft begabt seyn, wenn sich darinn nur einerley Verhältniß zwischen dieser zusammen gedruckten Luft und der gröbern Materie befinden solte; woferne nehmlich die Vermischung nur so beschaffen ist, daß dadurch die Entzündung nicht verhindert wird. Dahero ist das Pulver um so viel besser und stärker, je weniger grobe Materie darinne enthalten ist. Da aber die Entzündung desselben auf dieser gröbern Materie beruhet, so bestehet der fürnehmste Handgriff in Zubereitung des Pulvers darinne, daß man eine solche Proportion zwischen dem Salpeter und den verbrennlichen Materien treffe, daß dadurch sowohl die

Entzündung beschleuniget, als auch zugleich so wenig, als immer möglich, von diesen Materien damit vermischet werde. Die erste Vorsichtigkeit kommt also auf die Läuterung des Salpeters an, daß dadurch die gröbern und irdischen Theile, so viel als möglich, abgesondert werden. Denn da diese Theile nicht nur zur schnellen Entzündung nichts beytragen, sondern dieselbe auch verhindern, so vermindern dieselben auch deswegen die Kraft des Pulvers, daß dadurch die Menge der gröbern Materie unnöthiger Weise vermehret wird; welcher Umstand, da das Pulver grösten theils aus Salpeter bereitet wird, sehr viel austrägt. Die Güte und Stärke des Pulvers besteht also in diesen zweyen HauptStücken, daß sich dasselbe erstlich plötzlich entzünde, und daß zweytens damit so wenig, als immer möglich ist, gröbere und irdische Materie vermischet sey. Dahero wenn man auf die Verbesserung des Pulvers arbeiten will, so hat man auf diese beyden Punkte zu sehen: erstlich, ob man nicht eine neue Vermischung finden könne, wo eine schnellere und plötzlichere Entzündungskraft hervor gebracht werde; und zweytens, ob man nicht die Menge der gröbern Materie, welche zur Entzündung erfordert wird, vermindern könne?

Hieraus lassen sich ferner die Mängel eines jeglichen Pulvers leicht beurtheilen. Denn alles, was entweder die Entzündungskraft hemmet, oder die gröbere Materie vermehret, dasselbe vermindert auch die Kraft desselben. Aus dem ersten Grunde wird das Pulver durch die damit vermischte Feuchtigkeit entkräftet, weil dadurch entweder viel Theilchen gar nicht Feuer fassen, oder doch die Entzündung langsamer vor sich geht. Aus dem andern Grunde wird solches Pulver, welches entweder aus unreinem Salpeter bereitet worden, oder allzu viel Schwefel und Kohlen, oder andere dergleichen :Materien in sich enthält, schwächer, weil bey der Entzündung allzuviel grobe Theile mit in Bewegung gebracht werden müßten. Wenn also für das beste Pulver der in obigen Aequationen befindliche Buchstabe α durch $\frac{3}{2}$ ausgedruckt wird, so muß demselben für schlechteres Pulver ein kleinerer Werth ertheilet werden. Dahero die für die Geschwindigkeit der Kugel gefundene Aequation für alle Arten Pulver gebraucht werden kann. Weil wir aber darinne angenommen haben, daß sich alles Pulver im ersten Augenblick auf einmahl entzünde, dieses aber in der That nicht geschieht, so müßten aus diesem Grunde die gefundenen Geschwindigkeiten etwas kleiner genommen werden: wie viel aber diese Verminderung austragen könne, wollen wir nachgehends genauer untersuchen.

Drittens läßt sich hieraus auch bestimmen, wie viel man Pulver in einen jeglichen gegebenen Lauf laden müsse, damit die Kugel mit der grösten Geschwindigkeit heraus geschossen werde. Denn man siehet leicht, daß durch die Verstärkung der Ladung die Geschwindigkeit nicht über einen gewissen Grad vermehret werden könne. Um dieses einzusehen, darf man sich nur einbilden, daß der ganze Lauf mit Pulver angefüllet werde. Denn da in diesem Fall die Kugel gleich nach dem ersten Eindruck heraus getrieben wird, und alsdenn die. forttreibende Gewalt wegen der Ausbreitung in der äussern Luft meistentheils aufhöret, so muß die der Kugel eingedruckte Bewegung sehr geringe seyn. Da nun eine solche allzu starke Ladung der Kugel eine weit kleinere Geschwindigkeit mittheilet, als eine kleine, doch aber eine allzu kleine Ladung wiederum eine kleinere Würkung hervorbringt: so muß es nothwendig in einem jeglichen Fall eine solche Ladung geben, wodurch die Kugel mit der grösten Geschwindigkeit heraus getrieben wird, dergestalt, daß wenn man so wohl mehr als weniger Pulver nehmen sollte, die Kugel in beyden Fällen eine schwächere Bewegung erhalten würde. man sieht aber wohl, daß die

Erkenntniß dieses Grads der Ladung in der Artillerie von einer grossen Wichtigkeit ist. Denn dadurch wird man nicht nur in Stand gesetzt, die Kugel mit dem grösten möglichsten Grad der Geschwindigkeit fort zu treiben, sondern man kan auch dadurch in vielen Fällen viel Pulver erspahren, wenn man nehmlich weiß, daß die Kugel mit einer geringeren Ladung eben so geschwind, und vielleicht noch geschwinder, fortgetrieben werden könnte. Um derohalben die Grösse dieser stärkesten Ladung zu bestimmen, so dürfen wir nur die oben gefundene Expression für die Geschwindigkeit der Kugel differenziren , und nur die Quantität b als variabel betrachten, hernach dieses Differentiale $=0$ setzen. Wir wollen zu diesem Ende, damit sich unsere Bestimmung auf alle Fälle erstrecke, die generale Expression nehmen, welche ist

$$\frac{v}{2h}=\frac{\beta mb}{mb+(\alpha-1)nb+2ak}\,l\frac{\alpha a}{b}+\frac{(\alpha a-b)(\beta m^2b-6\alpha qa)}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)6\alpha qa}.$$

Hiervon ist das Differentiale auf gemeldte Art genommen:

$$\frac{2\alpha\beta mkdb\cdot l(\alpha a:b)}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)^2}-\frac{\beta mdb}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}$$
$$+\frac{-(mb+(\alpha-1)n)(\beta m^2b^2-6\alpha^2qa^2))db-4\alpha\beta m^2bkdb+2\alpha^2ak(\beta m^2+6q)db}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)^2\,6\alpha aq},$$

welches $=0$ gesetzt, diese Aequation giebt:

$$12\alpha^2\beta mqk\,l\frac{\alpha a}{b}=(m+(\alpha-1)n)\beta m^2b^2+6\alpha\beta mq(m+(\alpha-1)n)ab$$
$$-6a^2q(m+(\alpha-1)n)a^2+4\alpha\beta m^2bk+12a^2\beta mqak-2\alpha^2\,ß m^2ak-12a^2qak.$$

Es ist aber hier k eine sehr grosse Zahl, massen dieselbe die Höhe einer LuftSäule ausdrückt, deren Gewicht dem Gewicht der Kugel gleich ist. Wenn wir nun den Diameter der Kugel setzen $=c$, so ist dieselbe einem gleich dicken Cylinder gleich, dessen Höhe $=\frac{2}{3}c$. Wenn also die Materie, woraus die Kugel besteht, i mahl schwerer als Luft angenommen wird, so kommt $k=\frac{2}{3}ic$*;* und wenn die Kugel von Eisen gesetzt wird, weil Eisen 7,820 mahl schwehrer ist, als Wasser, Wasser aber ungefehr 850 mahl schwehrer als Luft, so wird $i=6650$, und also ungefehr $k=4430c$. Wenn wir nun in obiger equation die kleinsten Terminos weglassen, so wird

$$l\frac{\alpha a}{b}=1-\frac{m}{6q}-\frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk}+\frac{mb}{3\alpha aq}+\frac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k}+\frac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2qak}.$$

Da nun alle diese Brüche in Ansehung der Unität sehr klein sind, wenn wir *e* für die Zahl annehmen, deren Logarithmus hyperbolicus $=1$, so bekommen wir

$$\frac{\alpha a}{b}=e^{1-\frac{m}{6q}-\frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk}}\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{mb}{3\alpha aq}+\dfrac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k}\\+\dfrac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2 qak}+\dfrac{mmbb}{18\alpha^2q^2a^2}+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

woraus der Werth für *b* durch die Näherung nicht schwehr zu finden ist. Laßt uns nun wie oben setzen

$$\alpha=\tfrac{3}{2},\ \beta=4,\ m=400,\ n=1000 \text{ und } q=800,$$

so wird

$$\frac{3a}{2b}=e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}}\left(1+\frac{b}{9a}+\frac{300b}{k}+\frac{50bb}{3ak}+\frac{bb}{162aa}\right).$$

Es sey der Kürze halben

$$\frac{3}{2}a:e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}}=A,$$

so wird

$$A=b+\frac{bb}{9a}+\frac{300bb}{k}+\frac{50b^3}{3ak}$$

Wenn man nun setzt

$$b=A-\mathfrak{p}A^2+\mathfrak{q}A^3,$$

so wird

$$bb=AA-2\mathfrak{p}A^3+\mathfrak{q}A^3 \quad\text{und}\quad b^3=A^3,$$

folglich

$$\begin{aligned}A=A-\mathfrak{p}A^2&+\mathfrak{q}A^3\\+\frac{1}{9a}A^2&-\frac{2\mathfrak{p}}{9a}A^3\\+\frac{300}{k}A^2&-\frac{600\mathfrak{p}}{k}A^3\\&+\frac{50}{3ak}A^3,\end{aligned}$$

dahero

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{9a} + \frac{300}{k},$$

$$\mathfrak{q} = 2\mathfrak{p}\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) - \frac{50}{3ak}.$$

Wir wollen diesen Werth für eine halbe Carthaune ausrechnen, deren Länge 20 mahl länger ist, als das Caliber, oder wo $a = 20c$. Für eine eiserne Kugel wird also seyn $k = 4430c$, und folglich

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{180c} + \frac{1}{15c} = \frac{1}{14c}$$

und

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{98cc} - \frac{1}{5316cc} = \frac{1}{99cc}.$$

Dahero haben wir

$$b = A - \frac{AA}{14c} + \frac{A^3}{99cc}.$$

Es ist aber

$$A = 39c : e^{1-\frac{1}{12}},$$

$\frac{9a}{32k}$ weil der Bruch allzuklein wird, und da

$$e^{1-\frac{1}{12}} = e : \left(1 + \tfrac{1}{12}\right),$$

so wird

$$A = \frac{32{,}5c}{2{,}718} = 12c$$

ungefehr; und also

$$b = 12c - \frac{72}{7}c.$$

Da aber hier der zweyte Terminus nicht viel kleiner ist als der erste, so sieht man wohl, daß die gebrauchte Näherung in diesem Fall nicht statt finde. Wir müssen also die erste Aequation wiederum vornehmen, da

$$A = b + bb\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{3ak}\right) + \frac{50b^3}{3ak},$$

welche auf den gegenwärtigen Fall giebt

$$12c = b + \frac{bb}{14c} + \frac{b^3}{5316cc},$$

in welcher der letzte Terminus schon weggelassen werden kann, und da bekommen wir diese quadratische Gleichung

$$bb + 14bc = 168cc$$

und also

$$b = -7c + \sqrt{217cc}\,,$$

oder beynahe

$$b = 7\tfrac{3}{4}c\,,$$

welcher Werth doch wegen des weggeworfenen letzten Termini noch etwas zu groß ist. Hieraus siehet man, daß aus einer halben Carthaune eine eiserne Kugel mit der grösten Geschwindigkeit heraus geschossen werden kann, wenn die Ladung in der Canone ungefähr $7\frac{1}{2}$ Caliber ausfüllt. So viel Pulver wird aber ungefehr anderthalb mahl schwehrer seyn, als die Kugel. Da nun die ordentliche Ladung dem halben Gewicht der Kugel gleich genommen wird, so siehet man, daß eine dreyfache Ladung der Kugel die allergröste Geschwindigkeit gebe, und daß, wenn man noch mehr als dreymahl so viel Pulver, als gewöhnlich ist, laden sollte, die Kugel mit einer kleinern Geschwindigkeit geschossen werden würde. In andern Fällen aber, da eiserne Kugeln geschossen werden, kann die stärkste Ladung auf gleiche Weise folgender Gestalt gefunden werden. Da $k = 4430c$, so setze man $a = \theta c$, so wird

$$A = \frac{13\theta c}{8e} = \frac{3}{5}\theta c,$$

und ferner

$$A = b + \frac{bb}{9\theta c} + \frac{bb}{15c},$$

folglich

$$bb + \frac{45\theta bc}{5+3\theta} = \frac{45\theta Ac}{5+3\theta} = \frac{27\theta\theta cc}{5+3\theta}\;;$$

und also

$$b = \frac{-45\theta c + 3\theta c\sqrt{(285+36\theta)}}{10+6\theta}.$$

Die Verhältniß des Raums, welcher die Ladung enthält, zum Caliber beruhet also auf der Zahl θ, welche anzeigt, wie viel Caliber lang der Lauf ist. Hieraus ist diese Tabelle gemacht worden:

Wenn die Länge der Seele so viel Caliber beträgt:	So trägt die stärkste Ladung in der Seele so viel Caliber aus:
5	2,46

10	4,46
15	6,17
20	7,71
25	9,10
30	10,39
35	11,60
40	12,73
45	13,81
50	14,83

Wobey zu merken, daß diese Zahlen nicht aufs genaueste, sondern nur beyläuffig mit der Erfahrung übereinstimmen werden, theils weil alle Umstände nicht in die Rechnung gebracht werden können, theils weil sich das Pulver nicht alles auf einmahl entzündet, wie hier angenommen worden, und auch die forttreibende Kraft noch andern Abbruch leidet.

SECHSTE ANMERKUNG

Wir haben versprochen, auch noch zu untersuchen, um wie viel die vorher gefundene Geschwindigkeit vermindert werde, wenn sich nicht alles Pulver zugleich entzündet. Es sey demnach wie vorhin die Länge des Raums, welchen anfänglich das Pulver eingenommen, $AC = b$, die Länge der ganzen Canone $AB = a$, und nach einiger Zeit soll sich die Flamme nebst der Kugel schon biß *NN* ausgebreitet haben. man setze $AN = x$, und die Geschwindigkeit so wohl der vördersten Scheibe *NN* als der Kugel sey $= \sqrt{v}$, dergestalt daß, indem die Kugel durch $Nn = dx$ fortgetrieben wird, die Höhe v um dv wachse. Wenn also das Gewicht der Kugel durch eine LuftSäule ausgedruckt wird, deren Länge $= k$, so ist die Kraft, welche zur Acceleration der Kugel erfordert wird, $= \frac{kdv}{dx}$. Da sich aber noch nicht alles Pulver entzündet, so wollen wir annehmen, daß sich der schon allbereits entzündete Theil des Pulvers zur ganzen Ladung verhalte, wie y zu b; so wird y eine solche aus x und bekannten Zahlen zusammen gesetzte Quantität seyn, welche, wenn $x = b$ gesetzt wird, verschwindet, weil in diesem Fall die Entzündung erst anfängt: hernach wenn sich schon alles Pulver entzündet hat, so muß $y = b$ werden, welches geschehen soll, wenn $x = a$; wenn wir nehmlich den Lauf so lang annehmen, daß sich alles Pulver zu entzünden Zeit hat, ehe die Kugel heraus getrieben worden, Solte sich aber in dieser Zeit noch nicht alles Pulver entzündet haben, so muß $y = b$ werden, wenn für x eine grössere Länge als a gesetzt wird. Dieselbe sei $= f$, dergestalt, daß wenn $x = f$. alsdenn werde $y = b$. Hieraus läßt sich nun schon ziemlicher massen abnehmen, wie die Expression für y beschaffen seyn werde: denn es wird ungefehr seyn

$$y = \frac{b(x - b)^{\mu}}{(f - b)^{\mu}},$$

als welche Ausdrückung die obgedachten Eigenschaften besitzt. Wenn wir ferner setzen, daß die aus dem schon entzündeten Pulver erzeugte Materie den $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ ten Theil desselben einnehme, so wird damit ein Theil des Raums *AM* erfüllet seyn, dessen Länge $=\frac{(\alpha-1)y}{\alpha}$; hernach nimmt aber das noch nicht *a* entzündete Pulver einen Raum ein, dessen Länge $= b-y$, welches mit den vorigen zusammen macht $b-\frac{y}{\alpha}$. Dahero für die Luft ein Raum übrig bleibt, dessen Länge ist $=x-b+\frac{y}{\alpha}$. Wenn sich aber diese Luft so weit ausdehnen solte, biß dieselbe mit der natürlichen einerley Grad der Dichte erhielte, so würde dieselbe einen mit dem Lauf gleich weiten Raum erfüllen, dessen Länge $=244y$; folglich muß dieselbe in gegenwärtigem Fall

$$\frac{244y}{x-b+\frac{y}{\alpha}}$$

mahl dichter seyn, als die natürliche. Wir wollen der Kürze halben für diese Zahl

$$\frac{244y}{x-b+\frac{y}{\alpha}}$$

den Buchstaben *s* setzen; so wird, wie wir oben gewiesen haben, die Elasticität dieser Luft dem Gewichte einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{s}{q}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\beta h=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right),$$

welche Näherung zu unserm Endzweck hinlänglich ist. Es bedeutet aber hier *h* die Höhe einer Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticität der natürlichen Luft gleich ist, und β zeiget an, wie viel mahl die Elasticität durch die Erhitzung vermehret werde. Da nun die durch die Entzündung schon befreyte Luft einer Luft-Säule gleich ist, deren Höhe $=244y$, so wird zur Acceleration derselben eine Kraft erfordert, welche

$$=\frac{122ydv}{dx}.$$

Diese Kraft ist nehmlich, wie aus obigem erhellet, nur halb so groß, als wenn alle diese Luft gleich stark accelerirt werden müßte. Ausser diesem ist noch die grobe Materie zu betrachten übrig, davon ein Theil gleichfals in Bewegung gesetzt werden muß.
Wir wollen wieder wie oben annehmen, daß die eine Helfte an dem Boden *AA* zurück bleibe, die andere aber mit der Kugel fortgestossen werde: und daß dieselbe *n* mahl dichter sey, als die natürliche Luft; so wird dieselbe seyn

$$=\tfrac{1}{2}n(b-\tfrac{y}{\alpha}),$$

und zur Acceleration derselben wird eine Kraft erfordert, welche

$$=\tfrac{1}{2}n(b-\tfrac{y}{\alpha})\tfrac{dv}{dx},$$

dahero die sämtliche zur Forttreibung erforderte Kraft seyn wird

$$=\frac{dv}{dx}\left(k+\tfrac{1}{2}nb-\frac{ny}{2\alpha}+122y\right),$$

welche gleich seyn muß der würklichen Kraft, so vorhanden ist,

$$\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)$$

weniger dem Gegendruck der Luft *h,* und noch über dieses weniger der Resistenz der Luft, welche, weil die Kugel rund ist, durch $\tfrac{1}{2}v$ ausgedruckt wird. Hieraus bekömmt man diese Aequation:

$$dv(2\alpha k+n\alpha b-ny+244\alpha y)=2\alpha\beta hdx\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)-2\alpha hdx-\alpha vdx,$$

wo

$$s=\frac{244\alpha y}{\alpha(x-b)+y} \text{ und } y=\frac{b(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}}.$$

Hieraus wird

$$s=\frac{244\alpha b(x-b)^{\mu-1}}{\alpha(f-b)^{\mu}+b(x-b)^{\mu-1}}.$$

Wenn also die Zahl $\mu=1$ wäre, so würde

$$s=\frac{244\alpha y}{\alpha f-(\alpha-1)b} \text{ und } y=\frac{b(x-b)}{f-b};$$

folglich würde in diesem Fall die elastische Kraft immer einerley seyn. Wir wollen diesen Fall wegen Erleichterung der Rechnung beybehalten, um zu sehen, wie viel derselbe von der Wahrheit abweicht, so wird

$$dv\big(\alpha(2k+nb)(f-b)+b(244\alpha-n)(x-b)\big)=\alpha dx(f-b)\left(2\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)-2h-v\right)$$

und also

$$\frac{dv}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h-v}=\frac{\alpha dx(f-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)+b(244\alpha-n)(x-b)},$$

welche integrirt und auf den gegenwärtigen Fall gerichtet giebt

$$l\frac{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h-v}=\frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}l\frac{\alpha(2k+nb)(f-b)+(244\alpha-n)b(x-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)},$$

man setze um abzukürtzen

$$2\beta h\left(s+\tfrac{ss}{6q}\right)-2h=g,\quad \frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}=\nu\ ;$$

so wird

$$l\frac{g}{g-v}=\nu l\frac{\nu(2k+nb)+x-b}{\nu(2k+nb)}$$

und folglich

$$\frac{g}{g-v}=\left(1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{\nu};$$

dahero

$$v=g-g\left(1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{-\nu}.$$

Aus welcher Gleichung, wenn man setzt $x=a$, die Geschwindigkeit, womit die Kugel herausgetrieben wird, heraus kömmt.

Um diese Ausdrückung auf den schon öfters berechneten Fall zu reduciren, so sey

$a=\frac{3}{2},\ \beta=4,\ n=1000,\ a=45,\ b=2\frac{5}{8}$ und $f=45$ und $k=4900$ Engl. Zoll,

so wird

$s=14,5,\ g=114,4h$, $\nu=-\frac{1}{26}$ und endlich $v=\frac{10135}{24850}h,$

woraus eine Geschwindigkeit gefunden wird, welche in einer Secunde 861 Rheinl. Schuh beträgt. Ohngeachtet nun diese Geschwindigkeit fast um die Helfte kleiner ist, als diejenige, welche aus den Versuchen herausgekommen, so ist doch dieselbe sehr groß, in Ansehung der kleinen Kraft, wodurch die Kugel fortgetrieben wird, als welche von einer Luft herrühret, die nur 14,5 mahl dichter ist, als die natürliche, und also durch die

Erhitzung nur eine 58 mahl grössere Elasticität bekömmt. Wir sehen also hieraus, daß wir die Zahl μ zu groß angenommen; denn je grösser μ angenommen wird, je kleiner wird *s*, und folglich auch die Geschwindigkeit. Wenn wir aber μ kleiner als 1 setzen, so wird *s*, und also auch die Geschwindigkeit grösser. Es dürfte also ungefehr seyn $\mu=\frac{1}{2}$, in welchem Fall wird

$$s=\frac{244\alpha b}{b+\alpha\sqrt{(f-b)(x-b)}} \text{ und } y=b\sqrt{\frac{x-b}{f-b}}\,;$$

und da $\sqrt{(x-b)}=\frac{y}{b}\sqrt{(f-b)}$, so ist

$$s=\frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)y} \text{ und } dx=\frac{2(f-b)ydy}{bb}.$$

Damit aber die Integration um so viel weniger Schwierigkeit habe, so wollen wir die 3 letzten Terminos

$$2\alpha\beta hdx\cdot\tfrac{ss}{6q}-2\alpha hdx-\alpha vdx$$

weglassen, welches sehr füglich geschehen kann, da wir schon oben gesehen, daß die Würkung des Wiederstands $2\alpha hdx+\alpha vdx$ fast nichts austrage, und dieselbe noch über dieses in gegenwärtigem Fall durch den Terminum $\frac{\alpha\beta hssdx}{3q}$ fast aufgehoben wird. Solchergestalt bekommen wir diese Aequation:

$$dv=\frac{2a\beta hsdx}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y}$$

Da nun

$$s=\frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)y} \text{ und } dx=\frac{2(f-b)ydy}{bb},$$

so wird

$$sdx=\frac{488\alpha(f-b)ydy}{bb+\alpha(f-b)y}$$

und dahero bekommt man

$$dv=\frac{976\alpha^2\beta h(f-b)ydy}{\big(bb+\alpha(f-b)y\big)\big(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y\big)}.$$

man setze um abzukürzen

$$\frac{976\alpha^2\beta h(f-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(f-b)(2k+nb)}=A,$$

so zertheilet sich die gefundene Aequation in diese Gestalt

$$dv=\frac{-Abbdy}{bb+\alpha(f-b)y}+\frac{A\alpha(2k+nb)dy}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y},$$

wovon das Integrale ist

$$v=C-\frac{Abb}{\alpha(f-b)}l\left(bb+a(f-b)y\right)-\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y\right).$$

Diese beständige Quantität C muß aber also beschaffen seyn, daß $v=0$ wird, wenn $x=b$, das ist, wenn $y=0$; dahero hat man

$$v=\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y}-\frac{Abb}{\alpha(f-b)}l\frac{bb+\alpha(f-b)y}{bb}.$$

Um nun die letzte Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Kugel aus dem Lauf hinaus getrieben wird, so setze man $x=a$; wir wollen aber annehmen, daß auch $f=a$, oder daß sich das Pulver alles entzünde, indem die Kugel durch den Lauf fährt; so wird $y=b$; und in diesem Fall ist also

$$A=\frac{976\alpha^{2}\beta h(a-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(a-b)(2k+nb)}$$

und

$$v=\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}-\frac{Abb}{\alpha(a-b)}l\frac{bb+\alpha(a-b)b}{bb},$$

oder

$$v=\frac{-Abb}{\alpha(a-b)}l\left(1+\frac{\alpha(a-b)}{b}\right)-\frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha}l\left(1-\frac{(n-244\alpha)b}{\alpha(2k+nb)}\right).$$

man setze ferner

$$\frac{\alpha(a-b)}{b}=\zeta \text{ und } \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b}=\eta,$$

so wird

$$v=-\frac{976\beta\eta bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)}l(1+\zeta)-\frac{976\beta\eta^2 bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)}l\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

Damit man nun diesen Fall besser mit demjenigen, da sich alles Pulver im ersten Augenblick auf einmahl zu entzünden gesetzt wird, vergleichen könne, so dürfen wir nur in der Differential-Aequation setzen $y=b$, und wenn wir und und wenn wir setzen $x=a$, so kommt: eben dieselben Terminos als vorher weglassen, so haben wir

$$s=\frac{244\alpha b}{\alpha x-(\alpha-1)b}$$

und

$$dv=\frac{488\alpha^2\beta bhdx}{\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b\right)\left(\alpha x-(\alpha-1)b\right)},$$

wovon das Integrale ist

$$v=\frac{488\alpha\beta bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}l\left(\frac{\alpha x-(\alpha-1)b}{b}\right);$$

und wenn wir setzen $x=a$, so kommt :

$$v=\frac{488\alpha\beta bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}l\left(1+\frac{\alpha(a-b)}{b}\right).$$

Setzen wir nun wie vorher

$$\frac{\alpha(a-b)}{b}=\zeta \text{ und } \frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b}=\eta,$$

so haben wir:

$$v=\frac{488\beta\eta bh}{(\eta-1)(2k+nb)}l(1+\zeta),$$

welche mit der vorigen Expression leichter verglichen werden kann, als diejenige, so wir oben gefunden haben; weil wir alhier in beyden Fällen einerley Terminos weggelassen haben. Derowegen wenn wir die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich das Pulver auf einmahl entzündet, setzen $=\sqrt{u}$, und die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich das Pulver nach und nach, wie WIr angenommen haben, entzündet, setzen $=\sqrt{v}$, so wird sich verhalten

$$u:v=\frac{1}{\eta-1}l(1+\zeta):\frac{-2}{1+\zeta\eta}l(1+\zeta)-\frac{2\zeta\eta}{1+\zeta\eta}l\left(1-\frac{1}{\eta}\right),,$$

und da die Logarithmi von allen verschiedenen Tabellen unter sich einerley Verhältnisse haben, so ists hier gleich viel, was man für eine Tabelle gebraucht. Wenn wir nun setzen

$$\alpha=\tfrac{3}{2},\ a=45,\ b=2\tfrac{5}{8},\ k=4900\ \text{ und }\ n=1000,$$

so wird

$$\zeta=24,21,\ \eta=5,2$$

und also

$$u:v=\frac{10}{42}l25,2:\frac{-100}{6342}l25,2+\frac{12580}{6342}l\frac{52}{42}$$

oder

$$u:v=1:\frac{1258l1,2381}{151l25,2}-\frac{10}{151}=1:\frac{73,25}{151},$$

das ist

$$u:v=1:0,4851\ \text{ und }\ \sqrt{u}:\sqrt{v}=1:0,696,$$

folglich verhalten sich diese Geschwindigkeiten beynahe wie 10 zu 7. Nun aber beträgt die Geschwindigkeit, wenn sich alles Pulver auf einmahl zu entzünden gesetzt wird, in einer Secunde 1731 Rheinl. Schuhe, dahero für den gegenwärtigen Fall, da sich nicht alles Pulver auf einmahl entzündet, 1212 Schuh heraus kommen. Da nun diese almählige Entzündung auf dem Werth $\mu=\frac{1}{2}$ beruht: als wir aber vorher $\mu=1$ gesetzt hatten, eine Geschwindigkeit nur von 877 Schuhen gefunden worden; so sieht man schon, daß wenn man für μ einen noch kleinern Bruch als $\frac{1}{2}$ nehmen solte, die Geschwindigkeit auch grösser, als 1212 Schuh, heraus kommen und folglich der Wahrheit näher kommen würde. Je kleiner wir aber den Werth von μ annehmen, je plötzlicher entzündet sich das Pulver im ersten Anfange, dennoch aber bleibt die Entzündung im allerersten Augenblick unendlich klein. Weil wir nun versichert seyn können, daß sich gleich im ersten Augenblick schon ein beträchtlicher Theil des Pulvers entzündet, so folgt hieraus, daß die gefundene Geschwindigkeit von 1212 Schuhen viel zu klein seyn müsse: und daß also unsere Meynung, kraft welcher sich das Pulver nicht auf einmahl entzünden soll, mit der Wahrheit sehr wohl bestehen könne. Denn da die plötzliche Entzündung eine Geschwindigkeit von 1795 Englischen Schuhen giebt, durch die Versuche aber nur ungefehr 1650 wahrgenommen worden, so ist der Unterscheid von 145 Schuhen groß genug, daß man daraus eine von der almähligen Entzündung herrührende Verminderung schliessen kann. Da auch die gefundene Geschwindigkeit von 1795 Schuhen wegen des weggeworfenen Termini $\frac{ss}{6q}$, als welcher in diesem Fall da s sehr groß ist, nicht mehr so wenig austrägt, noch um etwas merkliches zu klein ist, so begreift man leicht, daß man davon noch den durch den SpielRaum und das Zündloch verursachten Verlust abziehen könne: indem dieser Verlust in einem-Musketen Lauf, da wegen der Fütterung durch den Spielraum fast gar nichts durchdringen kann, kaum merklich seyn wird. Und also wird man keine weitere Ursache mehr finden, an der Wahrheit der hier gegebenen Lehre über die Gewalt des Pulvers zu zweifeln.

SIEBENTE ANMERKUNG

Weil es aber eben so schwehr ist, die almählige Entzündung des Pulvers in Rechnung zu bringen, als die Rechnung selbst zu vollenden, so kan man sich die Sache dergestalt vorstellen, als wenn sich im ersten Augenblick ein gewisser Theil des Pulvers auf einmahl entzündete, der übrige Theil aber gänzlich unentzündet bliebe. Denn das Pulver mag sich in der That so plötzlich oder langsam, als man immer will, entzünden, so wird es allzeit möglich seyn, eine gewisse Portion zu bestimmen, welche, wenn sie sich im ersten Augenblick auf einmahl entzündete, eben diejenige Würkung hervorbringen würde. Wir wollen dahero in der obigen Rechnung annehmen, daß diese Portion Pulver, welche sich im ersten Augenblick entzündet, und durch ihre Kraft allein die Kugel forttreibet, durch λb aus gedrückt werde, oder daß sich die Portion zur ganzen Ladung verhalte, wie $\lambda:1$, dergestalt daß λ einen gewissen Bruch andeutet, welcher der Unität um soviel näher kommt, je plötzlicher sich das Pulver in der That entzündet. Dahero wird in der vorher gefundenen Aequation seyn $y=\lambda b$ und

$$s=\frac{244\alpha\lambda b}{\alpha(x-b)+\lambda b} \quad \text{oder} \quad s=\frac{244\alpha\lambda b}{\alpha x-(x-\lambda)b}$$

und

$$\frac{ss}{6q} \quad \text{oder} \quad \frac{ss}{4800}=\frac{12,4\alpha^2\lambda^2b^2}{\left(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\right)^2}.$$

Weil nun

$$dv\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b\right)=2\alpha\beta hdx\left(\mathrm{s}+\frac{ss}{6q}\right)-2\alpha hdx-\alpha vdx,$$

so wird durch die Integration gefunden werden

$$v\left(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b\right)=488\alpha\beta\lambda bhl\frac{\alpha(x-b)x+\lambda b}{\lambda b}$$
$$-\frac{24,8\alpha^2\beta\lambda^2b^2h}{\alpha x-(x-\lambda)b}+24,8\alpha^2\beta\lambda bh-2\alpha hdx+2\alpha bh-\alpha\int vdx.$$

Weil aber schon ziemlich genau ist

$$v=\frac{488\alpha\beta\lambda bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}l\frac{\alpha(x-b)x+\lambda b}{\lambda b},$$

so ist

$$\alpha\int vdx=v\big(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\big)-\int dv\big(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\big).$$

Dahero ist

$$\alpha\int vdx=\frac{488\alpha\beta\lambda bh\big(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\big)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}l\frac{\alpha(x-b)x+\lambda b}{\lambda b}-\frac{488\alpha^2\beta\lambda bh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}.$$

man setze nun um abzukürtzen

$$\frac{2\alpha b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}=m,$$

so wird man finden

$$\begin{aligned}v=&\,244\beta\lambda mhl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}-\frac{12,4\alpha\beta\lambda^2 mbh}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}+12,4\alpha\beta\lambda mh-\frac{mh(x-b)}{b}\\&-\frac{244\beta\lambda mh\big(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\big)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}l\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}+\frac{244\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}v=&\,244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m\big(\alpha x-(\alpha-\lambda)b\big)}{2\alpha b}\right)l\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}+\frac{12,4\alpha^2\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}\\&-\frac{mh(x-b)}{b}(1-122\beta\lambda m).\end{aligned}$$

Setzt man nun $x=a$, so kommt die Geschwindigkeit heraus, womit die Kugel aus dem Lauf geschossen wird, in welchem Fall man diese Vergleichung erhält:

$$v = 244\beta\lambda mh\left(1 - \frac{m\left(\alpha\left(a-b\right)+\lambda b\right)}{2\alpha b}\right) l\,\frac{\alpha\left(a-b\right)+\lambda b}{\lambda b} + \frac{12{,}4\alpha^2\beta\lambda mh\left(a-b\right)}{\alpha\left(\alpha-b\right)+\lambda b}$$
$$-\frac{mh\left(a-b\right)}{b}\left(1-122\beta\lambda m\right).$$

Um aber die Geschwindigkeiten mit emander zu vergleichen, welche heraus kommen, wenn man erstlich setzt, daß sich alles Pulver, und hernach daß sich nur ein Theil desselben entzünde, so ist genug, den ersten Terminum allein zu nehmen. Es sey dahero $\sqrt{u}$ die Geschwindigkeit, womit die Kugel heraus geschossen wird, wenn sich alles Pulver auf einmahl entzündet; ferner sey $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, womit die Kugel heraus gestessen wird, wenn sich nur ein Theil des Pulvers, welcher sich zum ganzen verhält, wie λ zu 1, entzündet, so wird man haben

$$u:v = \frac{1}{\alpha\left(2k+nb\right)-\left(n-244\alpha\right)b}\, l\,\frac{\alpha\left(a-b\right)+b}{b} : \frac{\lambda}{\alpha\left(2k+nb\right)-\left(n-244\alpha\right)b}\, l\,\frac{\alpha\left(a-b\right)+\lambda b}{\lambda b}$$

oder

$$u:v = 1 : \frac{\alpha\lambda\left(2k+nb\right)-\left(n-244\alpha\right)\lambda b}{\alpha\left(2k+nb\right)-\left(n-244\alpha\right)\lambda b}\cdot\frac{l\,\frac{\alpha\left(a-b\right)+\lambda b}{\lambda b}}{l\,\frac{\alpha\left(a-b\right)+b}{b}}.$$

Oder um abzukürzen, so setze man, wie oben

$$\frac{\alpha\left(a-b\right)}{b} = \zeta \text{ und } \frac{\alpha\left(2k+nb\right)}{\left(n-244\alpha\right)b} = \eta,$$

so wird

$$u:v = 1 : \frac{\left(\eta-1\right)\lambda}{\eta-\lambda}\cdot\frac{l\left(\zeta+\lambda\right):\lambda}{l\left(\zeta+1\right)}.$$

Wenn nun, wie in dem schon oft berechneten Exempel, ist

$$\alpha = \tfrac{3}{2},\; a = 45,\; b = 2\tfrac{5}{8},\; k = 4900 \text{ und } n = 1000,,$$

so wird

$$\zeta = 24{,}21 \text{ und } \eta = 5{,}2\;;$$

folglich hat man diese Vergleichung

$$u:v = 1 : \frac{4{,}2\lambda}{5{,}2-\lambda}\cdot\frac{l\,\frac{24{,}21+\lambda}{\lambda}}{l25{,}21}.$$

man setze zum Exempel $\lambda = \frac{3}{4} = 0,75$, so wird

$$u : v = 1 : 0,7078 \cdot \frac{l33,28}{l25,21} = 1 : 0,7687$$

und die Geschwindigkeiten selbst werden sich also verhalten:

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,8767 .$$

Da also, wie wir gesehen, die Geschwindigkeit der Kugel, da alles Pulver auf einmahl zu entzünden gesetzt worden, in einer Secunde ungefehr 1800 Schuh betragen, so wird die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich nur $\frac{3}{4}$ vom Pulver entzünden, in einer Secunde austragen 1578 Engl. Schuh. Es ist aber wahrscheinlich, daß man, um mit der Wahrheit überein zu stimmen, einen grössern Theil als $\frac{3}{4}$ für λ annehmen müsse. Setzen wir aber $\lambda = \frac{7}{8}$, so kömmt ungefehr eine Geschwindigkeit von 1689 Schuhen in einer Secunde heraus, welche schon grösser ist, als die Experientz angezeiget. Da nun auch noch etwas weniges von der forttreibenden Gewalt durch das Zündloch und den Spiel-Raum weggehet, so wird man ungefehr, wenn das Pulver recht gut ist, wie der Autor gebrauchet, ziemlich sicher für λ diesen Bruch $\frac{9}{10}$ annehmen können. In dem gegenwärtigen Exempel wird aber dahero diese Proportion entstehen:

$$u : v = 1 : 0,88 \tfrac{l27,9}{l25,21} = 1 : 0,90765$$

und also

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : \sqrt{0,90765}.$$

Dahero anjetzo die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde 1755 Englische Schuh betragen wird. Wenn nun davon 100 Schuh für den Verlust wegen des Spielraums unddes Zündlochs abgezogen werden, so kommt die wahre Geschwindigkeit, welche gefunden worden, heraus. Wir können aber aus der letzt integrirten Aequation den Werth von u oder die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sich alles Pulver auf einmahl entzündet, genauer bestimmen, als bißher. weil darinnen auch die Resistenz nicht ist aus der Acht gelassen worden. Wir dürfen zu diesem Ende nur $\lambda = 1$ setzen, und da β eine solche Zahl ist, daß nach dem Autore $244\beta = 1000$, so ist $122\beta = 500$, und $12,4\beta = 50,8$. Ferner ist $n = 1000$, und $\alpha = \frac{3}{2}$ woraus entsteht $m = \frac{b}{k+289b}$. Setzen wir weiter

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \frac{3(a-b)}{2b} = \zeta ,$$

so wird

$$u = 1000mh\left(1 - \frac{m(\zeta+1)}{3}\right) l(\zeta+1) + \frac{76,2\zeta mh}{\zeta+1} - \frac{2\zeta mh}{3}(1-500m).$$

In unserem Exempel also, da $a = 45,\ b = 2\frac{5}{8}$ und $k = 4900,$ haben wir

$$\zeta = 24,2143 \text{ und } m = \tfrac{1}{2155,66},$$

folglich

$$u = \frac{h}{2,15566} \cdot 0,996102 l 25,2143 + 0,033947 \cdot h - 0,005752 \cdot h$$

oder

$$u = 0,46209 h l 25,2143 + 0,028195 \cdot h,$$

Hieraus wird die gesuchte Geschwindigkeit folgender Gestalt bestimmt werden:

$$\begin{array}{rl}
\underline{l25,2143 = 1,401647} & \\
l1,401647 = 0,146638 & \\
l2,302581 = 0,362215 & \\
l0,46209 \ = & \underline{9,664723} \\
 & 0,173576 \\
\text{Die Zahl} \ = & 1,491340 \\
 & \underline{0,028195} \\
 & \underline{1,519535} \\
l1,519535 = & 0,181710 \\
lh = & \underline{7,463893} \\
 & 7,645603 \\
\text{Die Hälfte} = & 3,822802 \\
l4 = & \underline{0,602060} \\
 & 3,220742
\end{array}$$

Die Geschwindigkeit 1662 Rheinl. Schuh oder aber 1711 Engl. Schuh. Da nun diese Zahl fast um 100 Schuh kleiner ist, als diejenige, welche vorher, da wir die Resistentz nicht in Betrachtung gezogen haben, gefunden worden, so bleiben nur ungefehr 60 Schuh übrig, welche der Verminderung, so von der allmähligen Entzündung des Pulvers und dem Zündloch, nebst dem Spielraum herrühren, zugeschrieben werden können. Setzt man nun $\lambda = \frac{9}{10}$ so beträgt dieser Abgang ungefehr 40 Schuh, und der übrige Verlust mag 20 Schuh austragen.

ACHTE ANMERKUNG

Da wir in diesen Anmerkungen alle diejenigen Umstände in Erwegung gezogen, welche auf die Bewegung der Kugel, ehe dieselbe aus der Canone heraus getrieben wird, einigen Einfluß haben, nur allein die Verminderung ausgenommen, welche von dem beständigen Verlust der forttreibenden Kraft durch das Zündloch und den Spiel-Raum herkömmt: so wollen wir alhier noch untersuchen, wie viel dieser Umstand austragen könne.

Es sey demnach, wie wir vorher gesetzt haben, die Länge der ganzen Canone $AB = a$, die Länge des Raums, welcher anfänglich mit Pulver angefüllt gewesen, $AC = b$, und um die Schwierigkeiten nicht ohne Noth zu vermehren, so wollen wir setzen, daß sich gleich im ersten Augenblick ein Theil des Pulvers, welcher sich zur ganzen Ladung verhalte wie λ zu 1, auf einmahl entzündet habe, und daß sich auch nachgehends nichts mehr entzünde. Dahero wird der noch unentzündete Theil einen Raum einnehmen, dessen Länge $= (1-\lambda)b$. Ferner sey die aus dem entzündeten Pulver erzeugte gröbere Materie der $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ te Theil desselben, welche mit dem unentzündeten Pulver einen Raum innehmen wird, dessen Länge $= b - \frac{\lambda b}{\alpha}$. Wir wollen nun setzen, daß die beyden Oefnungen des Spiel-Raums und Zündlochs, wodurch die zusammen gepreßte Luft heraus fährt, zusammen genommen den $\frac{1}{m}$ Theil der Höhlung des Stücks, welche durch cc angedeutet wird, austrage. Zu diesem Ende wollen wir das Zündloch ef um etwas grösser annehmen, damit darunter zugleich die Oefnung des Spiel-Raums begriffen werde, und folglich setzen $ef = \frac{cc}{m}$. Dieses voraus gesetzt, so soll nach einiger Zeit die Kugel schon biß MN fortgetrieben worden seyn, man nenne die Länge $AM = x$, und die Geschwindigkeit sowohl der Kugel, als der vördersten Scheibe $MN = \sqrt{v}$, dergestalt daß, indem die Kugel durch $Nn = dx$ fortrücket, die Höhe v um dv wachse. Wenn also das Gewicht der Kugel durch eine LuftSäule ausgedruckt wird, deren Höhe $= k$; so ist die Kraft, welche zur Acceleration der Kugel erfordert wird, $= \frac{kdv}{dx}$. Wenn hernach die gröbere Materie n mahl dichter, als die natürliche Luft, gesetzt wird, so ist die Kraft, welche zur Acceleration derselben erfordert wird,

$$= \frac{1}{2} n\left(b - \frac{\lambda b}{\alpha}\right)\frac{dv}{dx}.$$

Da aber anjetzo die Kugel nicht mehr von der ganzen Gewalt, welche anfänglich aus dem Pulver erzeugt worden, fortgetrieben wird, indem unterdessen ein Theil derselben durch das Zündloch verlohren gegangen, so wollen wir setzen, daß sich dieser verlohrne Theil zum ganzen verhalte, wie z zu 1; oder, daß dieser Verlust gleich sey einer natürlichen Luft-Säule, deren Höhe $244\lambda bz$. Also wird die in der Canone noch übrige Luft seyn $= 244\lambda b(1-z)$. Da nun dieselbe in der Canone einen Raum einnimmt, dessen Länge $= x - b + \frac{\lambda b}{\alpha}$, so muß dieselbe

$$\frac{244\lambda b(1-z)}{x - b + \frac{\lambda b}{\alpha}}$$

mahl dichter seyn, als die natürliche Luft. Wir wollen, um der Kürze willen für diesen Bruch den Buchstaben s setzen, so wird, wie oben gewiesen worden, die Elasticität dieser Luft dem Gewicht einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe

$$= \beta h(s + \tfrac{ss}{6q});$$

und da zur Acceleration dieser Luft eine Kraft erfordert wird

$$\frac{244\lambda b(1-z)dv}{dx}$$

so ist die völlige zur Acceleration erforderte Kraft

$$=\frac{dv}{dx}\left(k+\tfrac{1}{2}nb\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)+122\lambda b\left(1-z\right)\right),$$

welche der würklichen Kraft weniger dem Gegendruck h und der Resistentz der Luft $\frac{1}{2}v$ gleich gesetzt, diese Aequation giebt

$$dv\left(k+\tfrac{1}{2}nb\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)+122\lambda b\left(1-z\right)\right)=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)dx-hdx-\tfrac{1}{2}vdx.$$

Um aber den Verlust z zu bestimmen, so wollen wir die Geschwindigkeit, mit welcher diese Luft durch das Zündloch *er* heraus dringt, setzen $=\sqrt{u}$. Indem also die Kugel durch dx fortgehet, so wird durch das Zündloch ein kleiner Cylinder heraus gehen, dessen Länge $=\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ und dessen Dicke $=\frac{cc}{m}$. Und weil diese Luft s mahl dichter ist, als die natürliche, so wird dieser Verlust eine natürliche Luft-Säule austragen, deren Dicke $=cc$, und deren Höhe $=\frac{sdx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}}$. Da nun dieses der Abgang ist von der in der Canone enthaltenen Luft $=244\lambda b(1-z)$, so wird

$$244\lambda bdz=\frac{sdx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}},$$

wovon das Integrale also genommen werden muß, daß dasselbe verschwinde, wenn $x=b$. Nun ist also noch übrig, die Geschwindigkeit $\sqrt{u}$ zu bestimmen, welche von der Gewalt der Zusammendrückung abhängt. Weil nun diese Gewalt dem Gewichte einer natürlichen Luft-Säule, so hoch $=\beta h(s+\frac{ss}{6q})$, gleich ist, so wird zu dieser Zusammendrückung eine Höhe von einer gleich dichten Luft, so $=\beta h(s+\frac{s}{6q})$ erfordert, dahero wird der Druck auf das Zündloch eben so groß seyn, als wenn sich darüber eine Säule von einerley Luft, welche s mahl dichter als die natürliche, befände, deren Höhe $=\beta h(s+\frac{s}{6q})$. In diesem Fall aber würde die Luft durch das Zündloch mit einer Geschwindigkeit heraus getrieben werden, dergleichen ein fallender Körper aus dieser Höhe erlangt, und also wird seyn

$$u=\beta h\left(s+\tfrac{s}{6q}\right).$$

Wir können alhier den Bruch $\frac{s}{6q}$ als sehr klein sicher weglassen, und bekommen also $u=\beta h$, und folglich

$$244\lambda bdz = \frac{sdx\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{v}}.$$

Nun ist

$$s = \frac{244\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x + (\lambda - \alpha)b}$$

oder, da $a > 1$ und $\lambda < 1$, vielmehr

$$s = \frac{244\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b}$$

Wenn wir nun diesen Werth für s setzen, so kommt

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{\alpha dx\sqrt{\beta h}}{m\big(\alpha x - (\alpha - \lambda)b\big)\sqrt{v}}$$

Wir haben aber schon vorher gefunden

$$dv\Big(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\alpha\lambda b(1-z)\Big) = 2a\beta hdz\left(s + \tfrac{ss}{6q}\right) - 2\alpha hdx - \alpha vdx,$$

und wenn wir hier die drey letzten Terminos, als welche nicht nur sehr klein sind, sondern sich auch beynahe fast aufheben, weglassen, so haben wir

$$dv\Big(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\alpha\lambda b(1-z)\Big) = \frac{488\alpha^2\beta\lambda bh(1-z)}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b}\ dx.$$

Die obige Aequation aber giebt

$$\frac{\alpha dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b} = \frac{mdz\sqrt{v}}{(1-z)\sqrt{\beta h}}$$

und dahero bekommen wir

$$dv\Big(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\alpha\lambda b(1-z)\Big) = 488m\alpha\lambda bdz\sqrt{\beta hv}$$

oder

$$dz + \frac{zdv}{2m\sqrt{\beta hv}} = \frac{dv\big(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)\big)}{488m\alpha\lambda b\sqrt{\beta hv}} + \frac{dv}{2m\sqrt{\beta hv}},$$

welche mit $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$ multiplicirt, integrirt werden kann, da denn kömmt

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}z = \left(\frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244m\alpha\lambda b} + \frac{1}{m}\right)\int e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\frac{dv}{2\sqrt{\beta hv}}$$

oder

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}z = \left(\frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b} + 1\right)\left(e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - 1\right),$$

weil die Quantität *z*, welche den Verlust der forttreibenden Gewalt ausdrückt, verschwinden muß, wenn $v = 0$, als welches im ersten Augenblick geschieht. Hieraus bekommen wir

$$z = \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda) + 244\alpha\lambda b}{244\alpha\lambda b}\left(1 - e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\right)$$

und

$$1 - z = \frac{\left(2\alpha k + nb(\alpha-\lambda) + 244\alpha\lambda b\right)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - 2\alpha k - nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}$$

ferner

$$l(1-z) = l\left(\left(1 + \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right).$$

Es sey

$$\frac{2\alpha k + nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b} = \mu\ ;$$

so ist

$$l(1-z) = l\left((1+\mu)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \mu\right)$$

und also

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}dv : 2m\sqrt{\beta hv}}{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \mu}$$

oder

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(1+\mu)dv:2m\sqrt{\beta hv}}{(1+\mu)-\mu e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}}.$$

Da nun oben gefunden worden

$$\frac{\alpha dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{dz}{1-z}\cdot\frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{\beta h}},$$

so wird

$$\frac{2\alpha\beta hdx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{(1+\mu)dv}{1+\mu-\mu e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}}.$$

Weil aber m gemeiniglich eine sehr grosse Zahl ist, so wird der Bruch $\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$ sehr klein, und folglich ziemlich genau

$$e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}=1+\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

Wenn man nun diesen Werth in der obigen Aequation anbringt, so wird

$$\frac{2\alpha\beta hdx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{m(1+\mu)dv\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h}-\mu\sqrt{v}},$$

oder da

$$\frac{m\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h}-\mu\sqrt{v}}=1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}},$$

so bekommt man

$$\frac{2\alpha\beta hdx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=(1+\mu)dv+\frac{\mu(1+\mu)dv\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

Woraus man durch die Integration erhält

$$2\beta hl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)}{\lambda b}=(1+\mu)v+\frac{2\mu(1+\mu)v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}.$$

Solte aber durch das Zündloch nichts von der Gewalt des Pulvers verlohren gehen, so würde man haben

$$(1+\mu)v = 2\beta hl\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b},$$

woraus erhellet, daß in dem gegenwärtigen Fall die Geschwindigkeit vermindert wird. Um nun zu finden, wie viel diese Verminderung austrägt, so wollen wir setzen, daß wenn dieser Verlust nicht da wäre, die Geschwindigkeit der Kugel seyn würde $=\sqrt{u}$ *;* wenn aber der Verlust durch das Zündloch da ist, so sey die Geschwindigkeit der Kugel $=\sqrt{v}$ *;* und hieraus entspringt diese Aequation:

$$u = v+\frac{2\mu v\sqrt{v}}{2m\sqrt{\beta h}},$$

und daraus ferner durch die Näherung und

$$v = u-\frac{2\mu v\sqrt{v}}{2m\sqrt{\beta h}} \ \text{ und } \ \sqrt{v}=\sqrt{u}-\frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}}.$$

Folglich wird sich verhalten

$$\sqrt{v}:\sqrt{u} = 1-\frac{\mu\sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}}:1$$

Wenn nun $\sqrt{u}$ durch die Anzahl der Schuhe ausgedruckt wird, welche die Kugel in einer Secunde durchzulauffen vermögend ist, so wird $\sqrt{\beta h}=2700$ Schuhe, und also

$$\sqrt{v}:\sqrt{u} = 1-\frac{\mu\sqrt{u}}{8100m}:1\ ;$$

es ist aber

$$\mu=\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}.$$

Wenn also die Kugel ohne diesen Verlust mit einer Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde heraus getrieben würde, so müste dieser Umstand einen Verlust von $\frac{17\mu}{81m}\cdot 1700$ Schuh in einer Secunde austragen. In dem obigen Exempel, da wird

$$b=2,625,\ k=4900,\ n=1000,\ \alpha=\tfrac{3}{2} \text{ und } \lambda=\tfrac{9}{10}$$

wird

$$\mu=18,82$$

und daher beträgt der Verlust

$$\tfrac{319,6}{81m}\cdot 1700\text{, das ist } \tfrac{6714}{m} \text{ Schuh.}$$

Sollte nun die Weite des Zündlochs den hundertsten Theil der Weite der Canone austragen, so würde dieser Verlust 67 Schuh in einer Secunde ausmachen: und also die Kugel an statt 1700 nur 1633 Schuh in einer Secunde durchlauffen. Hierbey ist aber zu merken, daß unsere für den Verlust gefundene Expression allzu groß ist, indem wir in der obigen Integration einige Terminos weggelaßen, welche diesen Verlust vermindert haben würden; und dieser Fehler wird um so viel grösser seyn, je grösser das Zündloch, oder je kleiner die Zahl m ist; denn die gebrauchte Näherung gilt nur, wenn meine sehr große Zahl bedeutet. Dieses erhellet auch gantz deutlich aus dem Verlust $\frac{6714}{m}$; denn wenn zum Exempel m nur 3 wäre, so müste der Verlust 2238 Schuh in einer Secunde austragen. Da nun die gantze Geschwindigkeit nur bey 1700 Schuhen ist, so siehet man wohl, daß sich der Verlust auf weit weniger als 1700 Schuh belauffen müsse: folglich ist klar, daß wenn m keine sehr grosse Zahl ist, der auf diese Art gefundene Verlust immer um ein merkliches zu groß seyn müsse. Dahero wenn in dem Exempel $m = 100$ gesetzt worden, so ist die Verminderung der Geschwindigkeit gewiß viel kleiner, als 67 Schuh. Hernach ist auch der herausgebrachte Verlust aus diesem Grunde zu groß, weil wir angenommen haben, daß durch das Zündloch nur allein die zusammen gepreßte Luft heraus fahre, da doch außer Zweifel auch etwas von der gröbern Materie zugleich mit heraus geht, folglich wird die forttreibende Kraft nicht um so viel vermindert, als in der Rechnung angenommen worden. Denn außer dem, daß die forttreibende Gewalt dadurch keinen so großen Abgang leidet, so wird dadurch auch die gröbere Materie vermindert, welche sonsten mit der Kugel fortgestessen werden müßte. Diesem letzten mangel kann nun in der gefundenen Formul leicht abgeholfen werden, wenn man das Zündloch um etwas kleiner ansetzt, als solches in der That ist; wobey zu merken, daß wir hier unter dem Zündloch zugleich die Oefnung des Spielraums mit begreiffen. Um aber den ersten Fehler zu heben, welches nöthig ist, wenn m keine sehr große Zahl ist, so muß man den Werth von $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$ näher ausdrucken, und da bekommt man darfür

$$1+\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{v}{2m^2\beta h}+\frac{v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}+\text{etc.}$$

$$\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=\frac{(1+\mu)dv}{1-\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}-\frac{\mu v}{2m^2\beta h}-\frac{\mu v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}-\text{etc.}}$$

oder den Bruch weggebracht

$$\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=(1+\mu)dv\left(1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{\left(\mu^2+\frac{1}{2}\mu\right)v}{2m^2\beta h}+\frac{\left(\mu^3+\mu^2+\frac{1}{6}\mu\right)v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}\right).$$

Setzt man nun $\sqrt{u}$ für die Geschwindigkeit, welche die Kugel erhalten würde, wenn nichts von der forttreibenden Gewalt verlohren gienge, so wird

$$u = v + \frac{2\mu v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}} + \frac{\left(2\mu^2 + \mu\right)v^2}{4m^2\beta h} + \frac{\left(6\mu^3 + 6\mu^2 + \mu\right)v^2\sqrt{v}}{15m^3\beta h\sqrt{\beta h}}$$

und diese Aequation umgekehrt giebt

$$\sqrt{v} = \sqrt{u} - \frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}} + \left(\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu\right)\frac{u\sqrt{u}}{m^2\beta h} + \left(\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu\right)\frac{uu}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}.$$

Weil nun $\sqrt{\beta h}$ eine Geschwindigkeit von 2700 Schuhen ausdruckt, wenn $\sqrt{u}$ gleichfals in Schuhen genommen, und der Bruch $\frac{\sqrt{u}}{m\sqrt{\beta h}}$ Kürze halber $= r$ genennet wird: so findet man

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{1}{3}\mu r + \left(\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu\right)r^2 + \left(\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu\right)r^3.$$

Da nun In obigem Exempel $\mu = 18,82$ und $r = \frac{17}{27m}$ so wird

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - 3,950 \cdot \frac{1}{m} + 2,968 \cdot \frac{1}{m^2} + 10,427 \cdot \frac{1}{m^3}.$$

Diese Formul dienet nun, wenn *m* keine sehr große Zahl ist, als etwan unter 60. Denn wenn $m = 60$, so giebt der dritte Terminus $2,968 \cdot \frac{1}{m^2}$ mit $\sqrt{u} = 1700$ multipliciret nur 1,4 Schuh. Es sey zum Exempel $m = 10$, oder das Zündloch, nebst der Oefnung des Spielraums, betrage den zehnten Theil der gantzen Mündung, so wird $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 0,64511$ und der Verlust an der Geschwindigkeit beträgt 603 Schuh, dergestalt, daß die Kugel nur eine Geschwindigkeit von 1097 Schuh in einer Secunde erhält. Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß, da $\mu = \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\alpha\lambda b}$, der Abgang an der Geschwindigkeit um so viel grösser werde, je schwehrer die Kugel, oder je grösser *k* ist, und hieraus können wir einen von den stärksten Gründen, welche der Verfasser zu Behauptung seiner Meynung, daß sich alles Pulver im ersten Augenblick auf einmahl entzünde, anführet, hinlänglich wiederlegen. Denn derselbe sagt, daß, wenn sich nicht alles Pulver auf einmahl entzündete, zwey oder drey Kugeln, welche zugleich geladen werden, nach Proportion eine grössere Geschwindigkeit erhalten müßten, als nur eine, indem dieselben länger im Lauf blieben, und also eine stärkere Gewalt aushielten. Dem ungeachtet aber habe er niemahls finden können, daß solches durch seine Experimente wäre bestätiget worden.

Und in der That würde dieser Schluß seine völlige Richtigkeit haben, und die Meynung des Autoris bekräftigen, wenn dieser wegen des Zündlochs hier erklärte Umstand nicht vorhanden wäre. Denn da aus diesem Grunde eine schwerere Kugel einen stärkern Abgang leidet, als eine leichtere, aus dem vorigen Grunde aber das Wiederspiel folget: so kann es leicht geschehen, daß diese zwey wiederwärtigen Würkungen entweder emander völlig aufheben, oder doch so nahe, daß der Unterscheid in der Erfahrung nicht bemerkt werden kan. Wenn man nun alle diese Anmerkungen zusammen nimmt, so wird man in einem jeglichen vorkommenden Fall nicht nur die Ursachen von allen Umständen anzeigen, sondern auch zum voraus die Geschwindigkeit der Kugel durch die Rechnung bestimmen können.