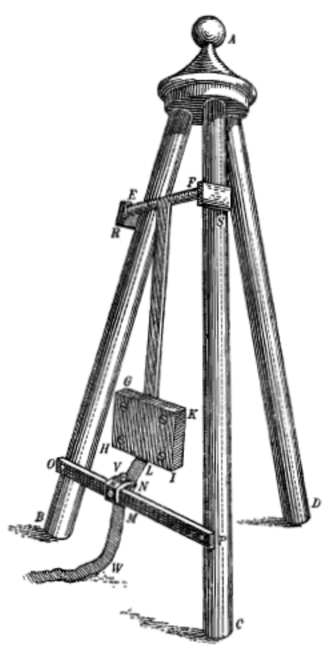
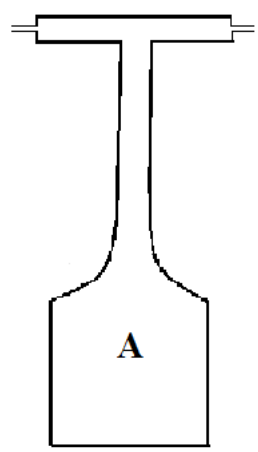
PROPOSITION VIII.

To determine the Velocity, which any Ball moves with at any Distance from the Piece, it is discharged from.

The simplest method of effecting this, is by means of an instrument like to that exhibited in the engraved figure, where ABCD represents the body of the machine, composed of the three poles B, C, D, spreading at bottom, and joining together at the top A; being the same with what is vulgarly used in the weighing and lifting of very heavy bodies, and is called by workmen the triangles. On two of these poles, towards their tops, are screwed on the sockets RS ; and on these sockets the pendulum EFGHIK is hung by means of its cross-piece EF, which becomes its axis of suspension, and on which it must be made to vibrate with great freedom. The body of this pendulum is made of iron, having a broad part at bottom, which cannot be seen in this scheme; but its entire shape is represented in the annexed figure *A*.

The lower part of the pendulum is covered with a thick piece of wood GKIH, which is fastened to the iron by screws. Something lower than the bottom of the pendulum there is a brace OP, joining the two poles to which the pendulum is suspended; and To this brace





there is fastened a contrivance MNU, made with two edges of steel, bearing on each other in the line UN, something in the manner of a drawing-pen; the strength with which these edges press on each other being diminished or increased at pleasure, by means of a screw Z going through the upper piece. There is fastened to the bottom of the pendulum a narrow ribbon LN, which passes between these steel edges, and which afterwards, by means of an opening cut in the lower piece of steel, hangs loosely down, as at W.

This instrument thus fitted, if the weight of the pendulum be known, and likewise the respective distances of its centre of gravity, and of its centre of oscillation, from its axis of suspension, it will thence be known, what motion will be communicated to this pendulum by the percussion of a body of a known weight moving with a known degree of celerity, and striking it in a given point; that , is, if the pendulum be supposed at rest before the percussion, it will be known, what vibration it ought to make in consequence of such a determined blow; and, on the contrary, if the pendulum, being at rest, is struck by a body of a known weight, and the vibration, which the pendulum makes after the blow, is known, the velocity of the striking body may from thence be determined.

Hence, then, if a bullet of a known weight strikes the pendulum, and the vibration, which the pendulum makes in consequence of the stroke, be ascertained ; the velocity, with which the ball moved, is thence to be known. Now the extent of the vibration, made by the pendulum after the blow, may be measured to great accuracy by the ribbon LN ; for let the pressure of the edges UN on the ribbon be so regulated by the screw Z, that the motion of the ribbon between them may be free and easy, though with some minute resistance; then settling the pendulum at rest, let the part LN between the pendulum and the edges be drawn straight, but not strained, and fix a pin in that part of the ribbon, which is then contiguous to the edges: let now a ball impinge on the pendulum, then the pendulum swinging back will draw out the ribbon to the just extent of its vibration, which will consequently be determined by the interval on the ribbon between the edges UN, and the place of the pin.

But the computation, by which the velocity of the ball is determined from the vibration of the pendulum after the stroke, requires a more particular explication ; and for this purpose we will exhibit, as an example, the pendulum made use of by us in some of our experiments.

The weight of the whole pendulum, wood and all, was 56 lb. 3 oz. its centre of gravity was 52 inches distant from its axis of suspension, and 200 of its small swings were performed in the time of 253 seconds ; whence its centre of oscillation (determined from hence) is $62\frac{2}{3}$ inches distant from that axis. The centre of the piece of wood GKIH is distant from the same axis 66 inches.

In the compound ratio of 66 to $62\frac{2}{3}$, and 66 to 52, take the quantity of matter of the pendulum to a 4th quantity, which will he 42 lb. $\frac{1}{2}$ oz. Now geometers will know, that if the blow be struck in the centre of the piece of wood GKIH, the pendulum will resist to the stroke in the same manner, as if this last quantity of matter only (42 lb. $\frac{1}{2}$ oz.) was concentrated in that point*,

[**Only the case when that point is the centre of oscillation ; a circumstance forgotten to be noticed when this tract was first printed in the year 1742, but which was mentioned by the author, in the Philos. Transactions for the year following, where the rule, is properly corrected, and where we are informed that the first example here given only requires to be corrected, as all the other examples in the 9th prop. following, were computed by the corrected rule. The necessary correction for the above rule, is to increase the velocity in the ratio of the distances of the centres of oscillation and percussion, below the axis of* *suspension. And that remark, had M. Euler observed it, might have spared him the trouble of many of his animadversions on Mr. Robin's work. As to the rule, in an algebraic form, the easiest that I know of, is that given in my volume of Tracts, printed in 1786, p.119, viz .* $v = 614.58\, gc \times \frac{p+b}{birn}$ *for the velocity of the ball in feet : where b denotes the weight of the ball, p the weight of the pendulum, g the distance to the centre of gravity, i the distance to the point of impact or point struck, c the chord of the arch described by the pendulum, to the radius or distance r, and n the number of small vibrations the pendulum makes in one minute or 60 seconds ; and where the values of the quantities c, g, i, r may be taken in any one and the same measure, either all inches, or all feet, &c. ; also p and b in any one measure, either pounds or ounces, &c. C. Hutton.*],

and the rest of the pendulum was taken away; whence, supposing the weight of the bullet impinging in that point to be the $\frac{1}{12}$ of a pound, or the $\frac{1}{504}$ of this quantity of matter nearly, the velocity of the point of oscillation after the stroke will, by the laws observed in the congress of such bodies as rebound not from each other, will be the $\frac{1}{504}$ of the velocity, the bullet moved with before the stroke; whence the velocity of this point of oscillation after the stroke being ascertained, that multiplied by 505 will give the velocity with which the ball impinged.

But the velocity of the point of oscillation after the stroke is easily deduced from the chord of the arch, through which it ascends by the blow; for it is a well-known proposition, that all pendulous bodies ascend to the same height by their vibratory motion, as they would do, if they were projected , directly upwards from their lowest point, with the same velocity they have in that point; wherefore, if the versed sine of the ascending arch be found, (which is easily determined from the chord and radius being given) this versed sine is the perpendicular height, to which a body projected upwards with the velocity of the point of oscillation would arise ; and, consequently, what that velocity is, can be easily computed by the common theory of falling bodies.

For instance, the chord of the arch, described by the ascent of the pendulum after the stroke, measured on the ribbon, has been sometimes $17\frac{1}{2}$ inches ; the distance of the ribbon from the axis of suspension is $71\frac{1}{8}$ inches; whence reducing $17\frac{1}{4}$ in the ratio of $71\frac{1}{8}$ to 66 the resulting number, which is nearly 16 inches, will be the chord of the arch, through which the centre of the board GKIH ascended after the stroke : now the versed sine of an arch, whose chord is 16 inches, and its radius 66, is 1,93939; and the velocity, which would carry a body to this height, or, which is the same thing, the velocity, which a body would acquire by descending through this space, is nearly that of $3\frac{1}{4}$ [3.216] feet in 1".

To determine, then, the velocity, with which the bullet impinged on the centre of the wood, when the chord of the arch described by the ascent of the pendulum, in consequence of the blow, was $17\frac{1}{4}$ inches measured on the ribbon, no more is necessary, than to multiply $3\frac{1}{4}$ by 505, and the resulting number 1641 will be the feet which the bullet would describe in 1", if it moved with the velocity it had at the moment of its percussion; for the velocity of the point of the pendulum, on which the bullet struck, we have just now determined to be that of $3\frac{1}{4}$ feet in 1"; and we have before shewn, that this. is the $\frac{1}{505}$ of the velocity of the bullet. If, then, a bullet weighing $\frac{1}{12}$ of a pound strikes the pendulum in the centre of the wood GKIH, and the ribbon be drawn out $17\frac{1}{4}$ inches by the blow; the velocity of the bullet is that of 1641 feet in 1" [with Hutton's above correction this becomes almost 1700 feet]. And since the length the ribbon is drawn, is always nearly the chord of the arch described by the ascent, (it being placed so as to differ insensibly from those chords which most frequently occur) and these chords are known to be in the proportion of the velocities of the pendulum acquired from the stroke, it follows that the proportion between the lengths of ribbon drawn out at different times, will be the same with that of the velocities of the impinging bullets ; and, consequently, by the proportion of these lengths of ribbon to $17\frac{1}{4}$, the proportion of the velocity with which the bullets impinge to the known velocity of 1641 feet in 1", will be determined. Hence, then, is shewn, in general,· how the velocities of bullets of all kinds may be found out by means of this instrument; but that those, who may be disposed to try these experiments, may not have unforeseen difficulties to struggle with, I shall here subjoin a few observations, which it will be necessary for them to attend to, both to secure success to their trials, and safety to their persons. And first, that they may not conceive the piece of wood GKIH to be an unnecessary part of the machine, I must inform them, that if a bullet impelled by a full charge of powder should strike directly on the iron, the bullet would be beaten into shivers by the stroke, and these shivers will rebound back with such violence, as to bury themselves in any wood they chance to light on, as I have found by hazardous experience ; and besides the danger, the pendulum will not in this instance ascertain the velocity of the bullet, because the velocity, with which the parts of it rebound, is unknown. The weight of the pendulum, and the thickness of the wood, must be in some measure proportioned to the size of the bullets which are used. A pendulum of the weight here described, will do very well for all bullets under three or four ounces, if the thickness of the board be increased to 7 or 8 inches tor the heaviest bullets: beech is the toughest and properest wood for this purpose.

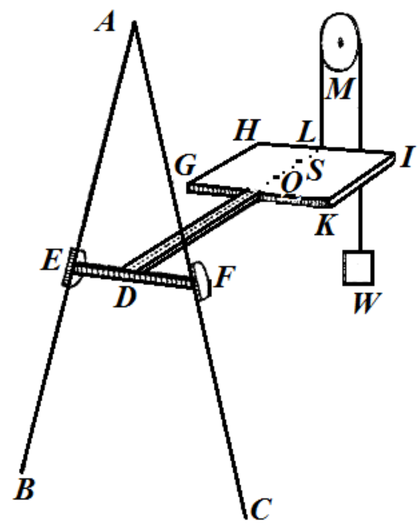
It is hazardous standing on the side of the pendulum, unless the board be so thick, that the greatest part of the bullet's force is lost before it comes at the iron; for if it strikes the iron with violence, the shivers of lead, which cannot return back through the wood, will fore themselves out between the wood and iron, and will fly to a considerable distance.

As there is no effectual way of fastening the wood to the iron but by screws, the heads of which must come through the board ; the bullets will sometimes light on those screws, from whence the shivers will disperse themselves on every side.

When in these experiments so small a quantity of powder is used, as will not give to the bullet a velocity of more than 4 or 500 feet in 1", the bullet will not stick in the wood, but will rebound from it entire, and (if the wood be of a very hard texture) with a considerable velocity. Indeed I have never examined any of the bullets, which have thus rebounded, but I have found them indented by the bodies, they have struck against in their rebound. To avoid, then, these dangers, to the braving of which in philosophical researches no honour it annexed; it will he convenient to fix whatsoever barrel is used, on a strong heavy carriage, and to fire it with a little slow match. Let the barrel too be very well fortified in all its length ; for no barrel (I speak of musket-barrels) forged with the usual dimensions, will bear many of the experiments recited hereafter without bursting, as I have found to my cost. The barrel, I have most relied on, and which I procured to be made on purpose, is nearly as thick at the muzzle as at the breech; that is, it has in each place nearly the diameter of its bore in thickness of metal.

The powder used in these experiments should be exactly weighed, and that no part of it be scattered in the barrel, the piece must be charged with a ladle in the same manner as is practised with cannon, the wad should be of tow of the same weight each time, and no more than is just necessary to confine the powder in its proper place; the length of the cavity left behind the ball should be determined each time with exactness; for the increasing or diminishing that space will vary the velocity of the shot, although the bullet and quantity of powder be not changed. The distance of the mouth of the piece from the pendulum ought to be such, that the impulse of the flame may not act on the pendulum; this will be prevented in a common barrel charged with $\frac{1}{2}$ an ounce of powder, if it be at the distance of 16 or 18 feet ; in larger charges the impulse is sensible farther off ; I have found it to extend to above 25 feet ; however, between 25 and 18 feet is the distance I have usually chosen ; other precautions, which arc necessary, will better find their place in the account of the experiments I have made, to which I now hasten.

FIRST NOTE



The method, which our author describes, to determine the speed of a bullet by experiment, is without doubt one of the most ingenious and useful inventions in artillery ; because everything that we have been able to determine about that until now is very uncertain and inaccurate. The description of the machine is so clear that one could easily construct such a device ; but its use in determining the true speed of the ball from experiments is still in need of some clarification. For which in the first place it is necessary to know the weight of the whole pendulum, which is easily found by the usual procedure. Only it is to noted that for the body of the pendulum, not only the lower part, but also all the parts which take part in the same motion must be treated together, and from that therefore also the weight pertaining to the horizontal beam *EF*. Further this beam, or rather the line *EJ*, must be laid down perfectly horizontal resting on the arms *R* and *S* [see Robins' first diagram]. Then this line represents the axis, about which the pendulum itself moves, and of which the distances both of the centre of oscillation as well as the centre of gravity then must be found. To this end, one searches before all these things for the distance of the bottom board *HI* from the considered axis,, where the ribbon *LMW* is attached, as the same which is necessary to calculate the speed of the fired bullet. In order now to find next the distance of the centre of gravity of the whole pendulum from the same axis ; as you lift the pendulum so far in the air by means of the ribbon *LMW* or a stronger one, if such is deemed necessary, as far as itself to come to lie horizontally. [See figure above.]

To this end, you pull the ribbon over a pulley *M*, which is fastened in such a place that the piece of tape *LM* becomes perpendicular. If the Pendulum *GHIK* has been placed in the horizontal position, since you hang on the other end of the ribbon at *W* such a large weight, so as to maintain the pendulum in its required horizontal position, the distance of the centre of gravity from the axis, to the distance of the point *L* from the axis is known from statics. So if the weight of the whole pendulum should become $= P$, the weight, so for the above sought *W* must be hung for equilibrium, $= Q$, the distance of the point *L* from the axis *EF* namely $DL = a$, and the centre of gravity of the whole pendulum taken at *Q*, and the distance $DQ = g$ will become known, as from the rule of statics there becomes $Q : P = g : a$, or $Pg = Qa$; from which there is found $g = \frac{aQ}{P}$. Further *S* is to be the centre of oscillation of the pendulum, and $DS = f$, so f will indicate the length of a simple pendulum, which makes its vibrations in the same time with that proposed. From which in order to find this distance $DS = f$, so one must look into how long a time that pendulum completes an oscillation. To this end, one brings this pendulum into a small swing, in such a way, that the oscillations besides do not exceed 5 or 6 degrees; because otherwise the same would not be all of the same length, and count with a good clock, how many oscillations of this pendulum oscillations are made in 1, 2 or 3 minutes. The author has taken for this purpose a time of 200 swings, so we want to take the example of three minutes or 180 ". Now let *n* be the number of oscillations, which the pendulum performs in the time of 3 minutes. Since a simple pendulum, which is 3.16625 Rh.ft. long, has its oscillations accurate to one second, so this pendulum would perform 180 oscillations in 3 minutes. [Recall that at this time the period of a simple pendulum was defined as the time taken to traverse the arc from one point of instantaneous rest to the other, or half the modern period; note also the closeness of this length to the metre to be defined later by Lagrange.] But the times in which two simple pendulums of different lengths make their oscillations, are between themselves as the square roots of their lengths. Therefore, since a pendulum 3,16625 feet long makes an oscillation in 1", so the pendulum sought of which length we put $= f$, completes an oscillation in $\frac{180''}{n}$, so there will become

$$1 : \frac{180}{n} :: \sqrt{3{,}166525} : \sqrt{f} \;,$$

and so

$$f = \frac{32400 \times 3{,}166525}{nn}$$

That is

$$= \frac{102586\frac{1}{2}}{nn} \text{ Rh.ft.}$$

It is then easy to find the value of f in Rh.ft., which measure has no small advantage in mechanical calculations over other measures, because a body freely falling down from rest describes precisely in the first second 15625 thousand parts of a Rh.ft., and this number 15625 is a square number, the square root 125 is a very convenient number to bring into the calculations. But from the Rhenish measure so subdivided also the Paris and English measures of feet can be established easily, there 1,030 Rh.ft. amounts to a Parisian foot, and 0.970 Rh.ft to an English foot. In the author's example the pendulum makes 200 oscillations in 253 seconds, therefore one oscillation to be done in $\frac{253''}{200}$, from which this proportion arises :

$$1 : \frac{253}{200} :: \sqrt{3{,}16625} : \sqrt{f} \;,$$

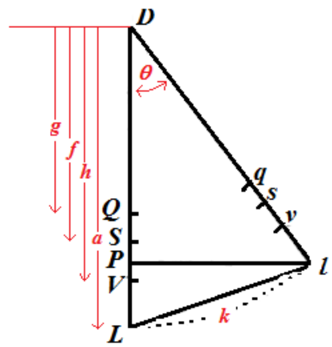
therefore there becomes

$f = \dfrac{253 \cdot 253 \cdot 3{,}16625}{40000} =$ 5,0667 ft: or from the English measure there becomes
$f =$ 5 ft. $2\frac{2}{3}$ inches $= 62\frac{2}{3}$ inches, as the author found.

SECOND NOTE

Once the nature of the pendulum been investigated and recognized in this way, so one thereby in that case use it in experiments, and thereby determine the speed of all the balls.

There is also the weight of the whole pendulum $= P$, the length $DL = a$; the centre of gravity of the whole pendulum at Q and $DQ = g$, the center of oscillation of the pendulum at *S*, and $DS = f$, which quantities are found in the manner previously described. Let us now put in place a ball to be shot towards this pendulum at the point *V*, and from this impact the pendulum will be forced forwards as far as *Dl*, the chord of which is indicated by the ribbon *Ll*. One notes as well, first and foremost, the distance *DV*, which is $= h$, furthermore the weight of the ball to be $= p$, and the chord $Ll = k$, from which the speed of the ball is found, following the form of the author's statement. Namely, one uses this rule of three : how the square of *DV* or h^2 is to the product $DQ \cdot DS$ or *fg*, as the weight *P* of the pendulum behaves to another weight



[*i.e.* the fourth term in the cross-product, which weight becomes $= \dfrac{fg}{hh}P$; there is a need to incorporate a constant feature of the experiment, evidently the standard amount of angular momentum mvf associated with a bullet striking the centre of percussion of the pendulum with the same speed *v* at the fixed distance *f* from the axis. One imagines an unknown mass *M*, or weight as it is called here, forming an equivalent simple pendulum of length *h*, so that given the standard amount of *A.M*, mvf, it will begin to move from the impact point *V* with the same angular velocity ω as the actual pendulum. The *A.M*. of the equivalent simple pendulum is given by $Mh^2\omega$, so that approximately, $mvf = Mh^2\omega$, assuming the mass of the bullet to be much less than *M*. Also in the experiment involving the actual pendulum, the initial linear momentum of the bullet is mv horizontally, and after the collision, the centre of mass of the actual pendulum will begin to move forwards at this instant with the velocity ωg, and with the linear momentum at this instant being $P\omega g$; thus, $mv = P\omega g$. Thus, from these two equations, we have $\dfrac{mv}{mvf} = \dfrac{P\omega g}{Mh^2\omega}$ or $M = \dfrac{Pfg}{h^2}$ as required. The customary explanation is given in the next note.]

Thus, the effect of the ball is the same as if, in place of the total mass of the pendulum, it had disturbed a body placed at *V*, of which the weight was $=\frac{fg}{hh}P$, and since the ball has not been reflected, the communication of its force shall follow the law of non-elastic bodies, and the shock could be withstood. Now, because the ball does not bounce back, the communication of the motion is done according to the laws of inelastic collisions. If the speed of the ball, which strikes at *V*, is equal to that which a heavy body receives by the fall from a height $=v$, and thus is proportional to its square root $\sqrt{v}$, as was the size of its momentum before the collision $=p\sqrt{v}$

[recall that the mass of the bullet is *p*, and the mass of the equivalent simple pendulum is $\frac{Pfg}{h^2}$; note also that $\sqrt{v}$ represents the initial speed, as the vis viva idea is being used as a conservation law : $mass \times velocity^2 \rightarrow mass \times height$; as ratios were normally taken, the constant of proportionality has been taken as 1. Otherwise to make the formula correct, we must use $velocity^2 \rightarrow 2 \times acc.\,due\ to\ gravity \times height$] which therefore also remains the same after the collision. Therefore, the speed of the point *V* after the collision will be

$$=\frac{p\sqrt{v}}{p+\frac{fg}{hh}P}=\frac{hhp\sqrt{v}}{fgP+hhp},$$

with which the same pendulum in the subsequent swing will rise to a height

$$=\frac{h^4ppv}{\left(hhp+fgP\right)^2}.$$

[Below the formula is fitted to experimental results, and a constant of proportionality is introduced.]
Since the chord $Ll=k$ is known from experiment, and so the point *L* indeed ascends through the height

$$LP=\frac{Ll\cdot Ll}{2DL}=\frac{kk}{2a}$$ [*i.e.* from the well-known approximated sagitta formula.]

Consequently, the point *V* ascends through a height which is related to that [in the proportion *h* to *a*], how to as $DV=h$ to $DL=a$, and is therefore $=\frac{hkk}{2aa}$.

From which this comparison arises:

$$\frac{h^4p^2v}{\left(fgP+hhp\right)^2}=\frac{hkk}{2aa},$$

and there will become:

$$v=\frac{kk\left(fgP+hhp\right)^2}{2aah^3pp}$$

and

$$\sqrt{v}=\frac{k\left(fgP+hhp\right)}{ahp\sqrt{2h}}=\frac{fgP+hhp}{ahp}\times\frac{k}{\sqrt{2h}}.$$

From this the form of the equation for the true speed can now be found. Since a body falling freely from rest falls down in one second through a height of 15625 thousandth parts of a Rh.ft., and thus acquires a speed in one second through a path of 31250 of such parts, but the speeds, which a body acquires at different heights are proportional to their square roots : so $\sqrt{15625}$ is to $\sqrt{v}$ as 31250 is to the speed of the ball at a height *v*, which the balls with their speeds, so arise by falling back from the height *v* at rest. Therefore this speed will be

$$=\frac{31250\sqrt{v}}{\sqrt{15625}}=250\sqrt{v}$$

thousands of parts of Rh.ft. : namely if v as well may be written in thousand parts of Rh.ft.

Because now $\frac{fgP+hhp}{ahp}$ gives a number without dimensions, and so it does not matter here what kind of measure one expresses by the letters *a, f, g, h, p* and *P*, it is only necessary for *k* and *h*, or the fraction $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ be expressed in such small parts, and as then the speed of the ball becomes in so many thousandth parts of Rh.ft. in a second, as this number

$$\frac{250\left(fgP+hhp\right)}{ahp}\times\frac{k}{\sqrt{2h}}$$

indicates, or so many Rh.ft., as this number $\frac{fgP+hhp}{ahp}\times\frac{k}{4\sqrt{2h}}$ indicates. For calculation this form

$$\left(\frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p}+\frac{b}{a}\right)\times\frac{k}{4\sqrt{2h}}$$

will be more convenient, which, when the fraction $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ is expressed in the thousandth parts of Rh. ft., indicating how many Rh.ft. with its speed the ball is able to pass through in one second. In the example cited by the author there is now :

$$P = 56\tfrac{3}{16}\ \text{lb.}$$

$$p = \tfrac{1}{12}\ \text{lb.} \qquad \text{hence } \frac{P}{p} = 674\tfrac{1}{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
a &= 71\tfrac{1}{8}\ \text{inches}\\
f &= 61\tfrac{2}{3}\ \text{inches}\\
g &= 52\ \text{inches}\\
b &= 66\ \ \text{inches}\ (= 5335 \text{ thousandths of Rh.ft.})\\
k &= 17\tfrac{1}{4}\ \text{inches}\ (= 1295 \text{ thousandths of Rh.ft.})
\end{aligned}\right\}\ \text{English dimensions.}$$

Also there is

$$\frac{fg}{ah} = \frac{62\frac{2}{3}\times 52}{71\frac{1}{8}\times 66} = \frac{3268\frac{2}{3}}{4694\frac{1}{4}}$$

$$\&\quad \frac{fg}{ah}\cdot\frac{\mathrm{P}}{p} = 468,053$$

$$\frac{h}{a} = 0,928$$

$$\frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} + \frac{h}{h} = 468,981$$

Furthermore, $2h = 10670$ and the calculation is to be completed in the following form by logarithms:

$$\begin{aligned}
l2h &= 4,0281644\\
l\sqrt{2h} &= 2,0140822\\
l4 &= 0,6020600\\
\hline
l4\sqrt{2h} &= 2,6161422\\
\text{from } lk &= \underline{3,1445742}\\
& \ 0,5284320\\
\text{Adding } l\left(\frac{fg}{ah}\times\frac{\mathrm{P}}{p}+\frac{h}{a}\right) &= \underline{2,6711544}\\
& \ 3,1995872
\end{aligned}$$

The corresponding number is therefore

$$= 1583,388$$

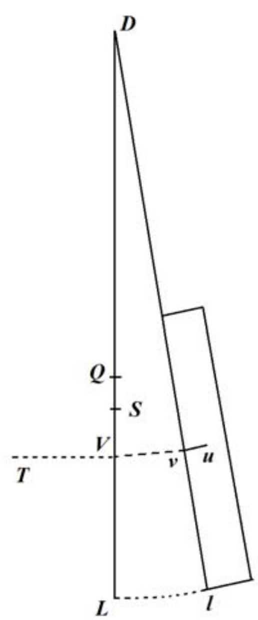
and shows, that the bullet at its speed travels about1583 Rh.ft. in one second. Since 970 Rh.ft amount to 1000 Eng.ft., thus this speed becomes 1632 Eng.ft. in one second, which differs from the author's account by only 9 feet, one is not aware of such a difference in this work. In fact, the true velocity of the bullet is slightly larger than the calculation indicates, because of the resistance caused by the air, so that the pendulum is not lifted as high as such should happen by virtue of the lower speed. We will examine the effect of this resistance after we have shown on what principle the rule is founded by which the author calculates the speed of a ball.

THIRD NOTE

The demonstration of the rule, which the author gives in order to calculate the speed of the ball from the action of the impulse, is found to be carried out in so few places, that the same will be completely unknown to most readers. Besides it would not be unhelpful, to explain these otherwise fairly dark matters, as far as to be allowed to explain our present intentions. The same now pertains to the theory regarding the change of motion, which is caused by the impact of two bodies colliding with each other ; where from the rules when two bodies collide with each other directly in such a way, that the line which is perpendicular drawn to the place where the same touch, going through each centre of gravity, are sufficiently known, and can be found in most mechanics books : whether or not the bodies are provided with an elastic force. Where, however, these laws do not suffice to determine the circumstances of the motion of two bodies which collide with each other ; as can also be known by these rules changed, not determined in the preceding. But in the present case, however, yet this is added, that of a body, namely the Pendulum is not free after the impulse has happened, but movable about an axis, which fact must be considered a special feature in this investigation of its motion. But to determine any change that is going on in a body moving around an axis, thus one has to consider its momentum of inertia, which is obtained when you multiply any small part of the body by the square of its distance from the axis, and all these products are added together : because, when the body is free to move, one takes its inertia or the weight itself to be maintained. Furthermore, it is not only the force itself acting that must be considered in this movement about an axis, but also the same moment must be taken into consideration, which arises when the force is multiplied by the perpendicular distance from the axis of its direction. This last moment of the force divided by the above moment of inertia, gives the absolute acceleration of the movement about the axis : and if this fraction is multiplied by the distance of any point from the axis, the acceleration at this point emerges. In contrast, in a freely moving body, dividing the force acting on which by the inertia or weight, gives the acceleration maintained. Now, because the distance from the axis of the centre of oscillation S namely $DS = f$ is found if one multiplies all the particles of the pendulum by the squares of their distances from the axis, and the sum of all these products, which is the moment of inertia, is then divided by the product of the weight of all the pendulum P by the distance of the centre of gravity from the axis, namely by Pg, so the moment of inertia is $= Pfg$, and is therefore easily found in this way.

[For if a horizontal impulse J be delivered to a motionless pendulum at its centre of percussion in particular, so that there is no reactive impulse at the pivot : which can be considered most simply as a constant F force delivered for a very short time Δt, equal to the initial momentum of the bullet mv, ignoring the comparatively slow rate of motion of the pendulum initially and considering the mass of the bullet m to be much less than that of the pendulum, delivering a certain amount of linear momentum $= mv$ to the pendulum, and with that an associated angular momentum $(A.M.) = mvf$; the moment of inertia of the pendulum about the axis of rotation $= Mk^2$, and its centre of mass lies at a distance h from the axis of rotation, then the pendulum will begin to swing with an initial angular velocity ω according to the fundamental law : $\tau = I\alpha$ (*i.e.* applied torque = rate of change of *A.M.*), or $fmv = fJ = Mk^2 \times \alpha\Delta t = Mk^2 \times \omega$, on taking moments about the axis; at the same instant, to conserve linear momentum, the centre of mass of the pendulum will start to rotate with the same angular velocity ω, and so with a linear momentum $= Mh\omega$, which is the same as J. Hence, $J = \dfrac{Mk^2 \times \omega}{f} = Mh\omega$, or $k^2 = hf$. Thus the moment of inertia is given in Euler's case by the product Pfg, all of which quantities can be measured. See, e.g. A.P.French, *Newtonian Mechanics*, p.669.]

It is common practise in determining the change, which is brought about by the collision of two bodies, not to consider the time in which the same change arises, and many seem to consider that when this change happens it does so suddenly, and requires no time. That this opinion is contrary to the truth, however, can be shown by many reasons, if the present case does not provide an obvious proof at hand : because, since the ball penetrates fairly deep into the wood of the pendulum, so no one will deny that this will not require some time. Meanwhile, as this time is very short, in so far as one can safely assume that the pendulum does not markedly move while the collision gives rise to its effect.



It therefore the natural position of the pendulum DL, in which the same is found before the ball is shot, however, Q the same was the centre of gravity, S, the centre of oscillation, and consequently $DQSL$ shall be a vertical line. Beforehand one calls the weight of the whole pendulum $= P$; the line $DL = a$; $DQ = g$; $DS = f$. In this situation a bullet is fired in the horizontal direction TV against the pendulum, such that the first collision happens at the point V. There shall be $DV = h$ and b the height from which a body may fall with the same given speed as in the case of the bullet ; therefore, we suggest that speed through $\sqrt{b}$ because $\frac{1}{4}\sqrt{b}$ shows how much the bullet travels through in one second when the height b is expressed in the small parts of thousandths of Rh.ft. Let us now consider that after the lapse of time $= t$ the pendulum has been brought into the position Dl, and that the ball is already forced its way into the wooden board as far as *u*. One calls the little arc $Vv = x$, and the depth $vu = y$; also the speed, which the point *v* of the pendulum has already gained $= \sqrt{v}$, and the speed of the ball at *u* is $= \sqrt{u}$. Now since in the infinitesimally small time *dt*, the point of the pendulum *v* has traced out *dx*, but the ball has traced out $dx + dy$, then from the rules of motion there is:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx + dy}{\sqrt{u}}.$$

During this moment the bullet has penetrated a little deeper into the wood, and because the wood resists, so as the speed of the pendulum is increased, the speed of the ball is reduced. Now let *V* be the force pressing against the wood so that $\frac{V}{p}$ is the deceleration of the bullet, therefore there becomes :

$$du = -\frac{V}{p}(dx + dy)$$

[For if we use an equation of the form $velocity^2 \propto height$, then we can write v_p & v_b for the respective velocities of the point *V* on the pendulum and the decelerating bullet at some instant, for which $v_p^2 = v,$ the height corresponding to *u*, and similarly $v_b^2 = v$, according to the vis viva notion, then the change in the height corresponding to the speed on the point *u* on the pendulum is *du*, while Lombard uses *dv* in his translation, the one should be the negative of the other, if mechanical energy conservation applied, which of course is not the case, due to some energy being changed into heat in an obvious inelastic collision, in which the *vis viva* idea fails. Euler's equation is therefore very close to the change in potential energy of the bullet being equal to the work done in penetrating the wood, though these concepts were not fully understood at the time.]

Afterwards in so far as this force *V* acts on the pendulum, the moment $= \mathrm{V}h$ will be the same. Now, since the moment of inertia of the pendulum $= Pfg$, thus the [linear] acceleration at the point *v* in the pendulum, is thus $= \frac{Vhh}{Pfg}$, thus

$$dv = \frac{Vhhdx}{Pfg}.$$

[As $\tau = I\alpha$ then $Vh = Pfg\alpha$ and the linear acceleration is given by $h\alpha = \frac{Vh \cdot h}{Pfg} = a_V$.
Subsequently, the result for *dv* follow as above.]

That equation divided by this gives

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg\left(dx+dy\right)}{phhdx};$$

and because

$$\frac{dx+dy}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

thus because

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg\sqrt{u}}{phh\sqrt{v}}$$

or

$$\frac{phhdu}{\sqrt{u}} + \frac{Pfgdv}{\sqrt{v}} = 0$$

which equation integrated gives

$$phh\sqrt{u} + Pfg\sqrt{v} = phh\sqrt{b},$$

because at the beginning of the interaction $v = 0$ and $u = b$. Since the effect of the impact has ceased completely finished when the velocity v of the point of the pendulum has become the same as the speed of the ball, thus $\sqrt{s}$ will be the speed of the pendulum indicated at v after the completion of the impulse, to be

$$phh\sqrt{s} + Pfg\sqrt{s} = phh\sqrt{b}$$

or

$$\sqrt{s} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg + phh}$$

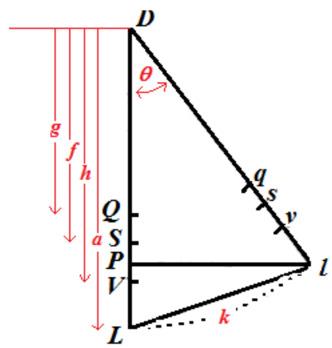
which expression agrees completely with that given that the author, and so up to this point proves the correctness of his rule. Because now $\sqrt{s}$ indicates the speed, which has been communicated to the pendulum by the collision at the point V, then

$$\frac{\sqrt{s}}{h} = \frac{ph\sqrt{b}}{Pfg + phh}$$

shows the absolute speed of the swings; from which it is evident that the moment will be very small if the distance DV is assumed very small: but occasionally the moment is still very small, if h is assumed to be too large. From this, then, to let the question be resolved, at which point the bullet $\sqrt{b}$ with its speed must collide with the pendulum so that the same receives the greatest swing. But one will find, that this has been shown, if

$$Pfg = phh, \text{ or } h = DV = \sqrt{\frac{Pfg}{p}}.$$

This point V is thus the so-called centre of percussion, and the same is neither to be the centre of gravity nor the centre of oscillation ;



[Euler's definition of the centre of percussion is thus not the one generally accepted now, which is the same as the centre of oscillation; the idea that the impacting bullet and the pendulum have equal moments of inertia does not enter into the discussion, as the point relates to the pendulum alone.]
but the ratio between the weight of pendulum and the weight of the ball is still required in addition to these points. But if the weight of the ball p is very small with respect to that of the pendulum P, so the centre of percussion has fallen very low. One has no need to consider the centre of percussion in the present case, but rather, it is advisable to consider that the moment impressed on the pendulum will not be too large. But since now we found the speed of the point V, it remains only to see how far from that the pendulum must be been raised. Because it is now known that each single pendulum gets just that motion, as if all the weight were concentrated at the same centre of oscillation, but which now will have moved a little, because the bullet has been stuck into the pendulum.
To find this point, consider the moment of inertia, which because of the bullet will become $Pfg + phh$; so that on dividing by $Pg + ph$, so the distance of the centre of oscillation from the axis will be

$$= \frac{Pfg + phh}{Pg + ph};$$

[*i.e.* by an extension of the Pgf idea] whereby we have brought the weight of the bullet to our attention.
Just as the ratio of h shall be to $\frac{Pfg + phh}{Pg + ph}$, as the speed of the point V itself, namely

$$\sqrt{s} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg + phh}$$

[for $\frac{\sqrt{s}}{h} = \frac{ph\sqrt{b}}{Pfg + phh}$ represents the total angular speed of the bullet + pendulum],
shall be to the speed of the centre of oscillation, which shall become

$$= \frac{ph\sqrt{b}}{Pg + ph}.$$

[Recall from above that $\sqrt{b}$ is the height the bullet must fall from rest to obtain the same speed of impact. Thus we have the ratios :
$h : \frac{Pfg+phh}{Pg+ph} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg+phh} : v_V$ or $v_V = \frac{ph\sqrt{b}}{Pg+ph}$ as required.]

In the following swing these must rise through an arc, of which the versed sine is $= \frac{pphhb}{(Pg+ph)^2}$.[Again using the *vis viva* equivalence of velocity squared with height fallen, where the versed sine of the angle is *VL*, taken as *PL* in the above diagram.] and the chord

$$= \frac{ph}{Pg+ph}\sqrt{\frac{2b(Pfg+phh)}{Pg+ph}}.$$

[Recall that the versed sine of θ is $(1-cos\,\theta) = 2sin^2\frac{\theta}{2}$, while the chord *Ll* is given by $Ll = 2\,sin\frac{\theta}{2}$, hence $Ll = \frac{ph\sqrt{b}}{Pg+ph} \times \sqrt{\frac{2(Pfg+phh)}{Pg+ph}} \times \frac{a(Pg+ph)}{Pfg+phh}$, as required next.]

Therefore, the chord of the arc, which the point *L* will describe, shall be

$$= \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+pb)(Pfg+phh)}}.$$

Because this chord has been found by experiment and is put $= k$, thus there becomes

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

and therefore

$$\sqrt{b} = \frac{k\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}{pah\sqrt{2}}$$

Here *b* is what we have called *v* above, namely, the height from which the speed of the ball is generated by the case in question. So also taken from the rule of the author to have been :

$$\sqrt{b} = \frac{k\left(Pfg + phh\right)}{pah\sqrt{2h}}$$

so one sees, that the same is not right. The author is mistaken in that he believed the movement of the pendulum was performed just as if all the weight, which he found, could be combined at the point *V*, so that this still only would take effect at the centre of oscillation. Thus, to correct the author's formula, and to make the speed conform with the truth, one must multiply the same still throughout by $\sqrt{\frac{Pgh+phh}{Pfg+phh}}$. Therefore if *h* is greater than *f,* then the author finds the speed of the bullet to be too small; but to be too large, if *h* is smaller than *f.* However the difference is commonly to be so small that one can easily view it as being the same. For when *p* is very small in respect to *P* and the difference between *f* and *h* is very small, the speed found by author still has to be multiplied by $1+\frac{h-f}{2f}$, which in his example amounts to

$$1+\frac{3\frac{1}{3}}{2\cdot 62\frac{2}{3}} = 1+\tfrac{5}{188}:$$

Consequently, 43 Eng.ft. must be added to the speed found of 1632 Eng.ft. per second, so that 1675 Eng.ft per second emerges; A difference which is nevertheless still quite noticeably.

Because for the masses *p* is very small in comparison to *P* , will be very nearly

$$\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)} = \left[Pg\sqrt{f}\left(1+\frac{ph}{Pg}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{phh}{Pfg}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$= Pg\sqrt{f} + \tfrac{1}{2}ph\sqrt{f} + \tfrac{1}{2}phh : \sqrt{f} = \frac{Pfg + \frac{1}{2}ph\left(f+h\right)}{\sqrt{f}}$$

thus,

$$\sqrt{b} = \frac{Pgk\sqrt{f}}{pah\sqrt{2}} + \frac{k\left(f+h\right)}{2a\sqrt{2f}} = \frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}$$

One also puts the number without dimensions

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f}\right) = n,$$

and expresses f in thousandth parts of Rh.ft., so the bullets will have the speed, from where they collide with the pendulum, to travel through $\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}}$ Rh.ft. in one second. Now in the example cited by the author, there is :

$k = 17\tfrac{1}{4}$, $a = 71\tfrac{1}{8}$, $P = 56\,Pf$, $p = \tfrac{1}{12}Pf$, $g = 52$, $h = 66$, $f = 62\tfrac{1}{2}$ hence

there is

$$\frac{k}{a} = 0,24253,\ \frac{P}{p} = 674,25,\ \frac{g}{h} = 0,788,\ \frac{Pg}{ph} = 531,309,\ \frac{f+h}{2f} = 1,032,$$

$$\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f} = 532,341,$$

thus $n = 129{,}109$ and $\frac{n}{4} = 32,277$;

further there is

$$f = 62\tfrac{2}{3} \text{ inches and } \frac{\mathrm{f}}{2} = 2532,78\,;$$

therefore

$$\sqrt{\frac{f}{2}} = 50,326 \text{ and } \frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}} = 1624,37\,.$$

So the ball would travel 1624 Rh.ft. per second, or putting these back, almost 1675 Eng.ft. per second.

Here also will useful to examine how far the bullet penetrates into the board. For as the force of the wood V is almost everywhere the same, so from the equation

$du = -\frac{V}{p}(dx + dy)$ through integration there arises

$$u = b - \frac{V}{p}(x + y)$$

and so

$$x + y = \frac{p(b-u)}{V};$$

but the other equation

$$dv = \frac{Vhhdx}{Pfg}$$

gives

$$v = \frac{Vhhx}{Pfg}$$

therefore

$$x = \frac{Pfgv}{Vhh}.$$

But after the force has ended, there will be

$$u = v = \frac{p^2h^4b}{(Pfg + phh)^2} = s$$

and also the depth

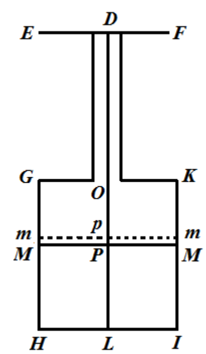
$$vu = y = \frac{pb}{V} - \frac{s}{Vh^2}(Pfg + pbb) = \frac{ph}{V} - \frac{p^2hhb}{V(Pfg + phh)} = \frac{Pphfg}{V(Pfg + phh)}.$$

From this it appears, that the greater the distance DV assumed, the less the bullet penetrates into the wood. The depth *vu* indeed is reduced also, the smaller the moment of inertia *Pfg* of the pendulum becomes. Now as the pendulum has to be strong enough, to prevent the ball penetrating too far, one needs the pendulum to be as long as possible, and made as light as could be wished at the base, and then the bullet is fired into that lowest part. If one considers these things, then perhaps such a pendulum could be brought about, through which not only the speed of pistols and musket bullets, but also the speed of cannon balls could be determined.

FOURTH NOTE

The rule, which the author gives, about how to find the speed of a bullet from the magnitude of the collisions, thus is correct only if the ball is shot towards the centre of oscillations of the pendulum: for if the shot is made either lower or higher, in the first case from the author's rule too small a speed results, and in the latter case too large a speed. But it seems to have happened that in most of the experiments performed by the author, the shot was fired below the centre of oscillation, and therefore the speeds designated by him must be too small.

But there arises another circumstance to consider, which was overlooked by the author, and likewise brings about a velocity that is greater than the previous reckoning reveals. This circumstance is the resistance of air, the effect of which may be present in that the pendulum is not urged away by the collision so far from its natural position, as would have happened if no resistance were present. Since now it has been assumed in the calculation that the pendulum rises so high after the impact as if no obstacle were present, it is clear that the true length of the chord *Ll*, from which the velocity of the ball must be determined, is greater than the experiment indicates ; wherefore, consequently, the speed of the ball must be increased so much more. Notwithstanding however that this distinction by which the motion is reduced by the air is commonly not very noticeable in the first swing, still we will investigate to what extent the air affects these, so that we can be fully assured to know, whether or not attention has to be paid to the same without error. Towards this end, we shall look at the back surface of the pendulum exposed to this action, to consider what happens to the air resistance at some place during the first movement upwards. Thus, the speed with which the lowest point L moves around the axis EF, $=\sqrt{v}$ or equal to that rate which a body acquires falling down from the height v ; and the distance L from the lowest point of this axis EF is $DL = a$, as we set earlier. Further as desired one draws a horizontal line MPM on the surface of this pendulum, and calling $\mathrm{DP} = x$, so the velocity of any points on this line will be $\frac{x}{a}\sqrt{v}$, and consequently the height from which this velocity is generated $=\frac{xxv}{aa}$, the resistance of the air on this line MPM is just as great as impressed on a column of air, of height $=\frac{xxv}{aa}$. [Thus Euler makes the air resistance proportional to the velocity, and the mass of air swept through, taken initially as 1 unit.] If we now put the width $MM = b$ and to draw the line mm considered infinitely close and parallel to MM, so that the area becomes $MmmM = bdx$ and the pressure arising from the air itself $=\frac{bv}{aa}xxdx$.



Since here it is not so much because of the pressure itself, as of its moment to be taken into consideration, then the moment will be

$$=\frac{bv}{aa}\cdot x^3dx\,,$$

from which the integral is

$$=\frac{bv}{aa}\left(\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{4}DO^4\right).$$

Thus one puts $\mathrm{DO} = c$, and on putting $x = a$ so arises the moment of the resistance, which the area $GHIK$ experiences,

$$=\frac{bv}{4aa}\left(a^4-c^4\right).$$

The resistance of the narrow part DO, in view of the findings, because of the small surface DO, and because of the still more rapidly disappearing moments, may be removed. The moment of the resistance is then equal to $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{4aa}v$*;* one calculates the weight of the air pertaining to this pressure, which will fill the volume $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{4aa}$, or the equivalent weight of water $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{3456aa}$, and put this weight $=R$, then the moment of resistance of the air becomes $=Rv$.

Let us now place the pendulum to be in the position *Dl* in its ascent and angle of *LDl* to be $=\varphi$. The velocity of the point *l*, had been set as above $=\sqrt{v}$, the speed of the point L at the beginning of the swing is $=\sqrt{i}$. If now the pendulum *Dl* goes further away from this point *DL*, two obstacles stand in the way : both its weight, as well as the resistance of the air : the moment from this is, as we found, $=Rv$, if the weight of the common kind namely *R*, can be determined. But the weight of the pendulum , which acts as if it were all concentrated at the centre of gravity *q*, and since the distance $Dq = DQ = g$, so its moment becomes $=Pg\sin.\varphi$. But the moment of inertia of the whole pendulum, as we saw above $=Pfg$. Therefore, the absolute diminishing [angular] strength of the motion is

$$=\frac{Pg\sin.\varphi+Rv}{Pfg};$$

but at the point *l* there will be this magnitude [of the linear acceleration]

$$=\frac{Pag\sin.\varphi+Rav}{Pfg}$$

Thus, as the point *l* goes forwards through the element of the arc *Ll*, which is $ad\varphi$, so there shall be

$$dv=\frac{-Pa^2gd\varphi\sin\varphi-Ra^2vd\varphi}{Pfg}=\frac{-a^2d\varphi\sin\varphi}{f}-\frac{Ra^2vd\varphi}{Pfg},$$

or

$$dv+\frac{Ra^2vd\varphi}{Pfg}=\frac{-a^2d\varphi\sin\varphi}{f}.$$

In order to make this equation integrable, thus one must multiply throughout by $e^{\mathrm{R}aa\varphi:Pfg}$, where *e* signifies the number, of which the hyperbolic logarithm is 1, or one can call that, for brevity, $\frac{\mathrm{R}a^2}{Pfg}=m$, and multiplying by $e^{m\varphi}$, so that one has

$$e^{m\varphi}\left(dv+mvd\varphi\right)=\frac{-a^2}{f}e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi$$

the integral of which is

$$e^{m\varphi}v=\frac{-a^2}{f}\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi$$

Since now $-\int sin.\varphi d\varphi = cos.\varphi$, so there is

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi = e^{m\varphi}cos.\varphi-\int e^{m\varphi}d\varphi cos.\varphi$$

And because $-\int d\varphi cos.\varphi = sin.\varphi$, so there will be

$$\int e^{m\varphi} d\varphi cos.\varphi = e^{m\varphi} sin.\varphi - m\int e^{m\varphi} d\varphi sin.\varphi \,,$$

and also,

$$-\int e^{m\varphi} d\varphi sin.\varphi = e^{m\varphi}\left(cos.\varphi - m\,sin.\varphi\right) + mm\int e^{m\varphi} d\varphi sin.\varphi$$

From which there arises :

$$-\int e^{m\varphi} d\varphi sin.\varphi = \frac{e^{m\varphi}\left(cos.\varphi - m\,sin.\varphi\right)}{1+mm}$$

Therefore we obtain this equation :

$$e^{m\varphi} v = \frac{e^{m\varphi} aa\left(cos.\varphi - msin.\varphi\right)}{\left(1+mm\right) f} + \text{Const.}$$

This constant, which can become known, must be designated from the start of the motion. Then, if one puts $\varphi = 0$, so there becomes $v = i$, and thus one knows

$$i = \frac{aa}{\left(1+mm\right) f} + \text{Const.}$$

therefore

$$\text{Const.} = i = \frac{aa}{\left(1+mm\right) f}.$$

Following from that,

$$e^{m\varphi} v = i - \frac{aa + e^{m\varphi} aa\left(cos.\varphi - msin.\varphi\right)}{\left(1+mm\right) f}.$$

If we now let *Dl* be the highest point which the pendulum can attain in the first swing, and from where, it begins to fall down from the same place, here there is $v = 0$, and so

$$\left(1+mm\right) fi = aa - e^{m\varphi} aa\left(cos.\varphi - msin.\varphi\right).$$

But since then, as known from experiment, the chord of the arc $Ll = k$. Therefore there is :

$$sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a}, \qquad cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$$

and further :

$$cos.\varphi = 1 - \frac{kk}{2aa}, \text{ and } sin.\varphi = \frac{k}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$$

therefore

$$\left(1+mm\right) fi = aa - e^{m\varphi} aa\left(1 - \frac{kk}{2aa} - \frac{mk}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}\right)$$

or

$$\left(1+mm\right) fi = aa - e^{m\varphi}\left(aa - \tfrac{1}{2}kk - \tfrac{1}{2}mk\sqrt{\left(4aa-kk\right)}\right).$$

But if the resistance should disappear completely, there would be $m = 0$, and the chord *Ll* becomes somewhat larger than *k*. Let us put the chord in this case $= s$, so that from this, $fi = \frac{1}{2}ss$. From such an equation, one can take the unknown letter *i* from the calculation, so that there becomes :

$$\left(1+mm\right)ss = 2aa - e^{m\varphi}\left(2aa - kk - mk\sqrt{\left(4aa-kk\right)}\right),$$

from which one can find the true length of the string *s*, which would be found instead, if there were no resistance, and one must use that in the calculation instead of the observed chord k . Then *a* and k , and the fraction $m = \dfrac{Raa}{Pfg}$ are known, and φ is the angle half of which has $\dfrac{k}{2a}$ for the sine, if the whole sine $=1$ is assumed. But this calculation can be made easier in two ways. In the first place, because the resistance is very low, then *m* is a small fraction so that it is possible to replace $e^{m\varphi}$ by $1+m\varphi$, and the higher powers of *m* can be ignored without error. Hence there becomes

$$\left(1+mm\right)ss = kk - 2maa\varphi + mkkz + mk\sqrt{\left(4aa-kk\right)}$$

or

$$ss = kk - 2maa\varphi + mkk\varphi + mk\sqrt{\left(4aa-kk\right)}\ .$$

Secondly, the angle LDl is usually of a few degrees in such experiments, and therefore the sine of half the angle φ is almost equal to the arc itself. Thus there becomes :

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a} + \frac{k^3}{48a^3} \text{ and } \varphi = \frac{k}{a} + \frac{k^3}{24a^3}$$

and hence

$$ss = kk - 2mak - \frac{mk^3}{12a} + \frac{mk^3}{a} + mk\sqrt{\left(4aa-kk\right)}$$

But because k is so small with regard to *2a*, hence there is

$$\sqrt{(4aa-kk)}=2a-\frac{kk}{2a},$$

and therefore

$$ss=kd+\frac{2mk^3}{3a} \text{ or } s=k+\frac{mkk}{3a},$$

because we can safely omit the higher powers of k. So in the calculation described above in place of k, we need to use this found value, $k+\frac{mkk}{3a}$, and since the speed of the ball is proportional to the chord itself k, the true speed of the ball is obtained if the speed found above is multiplied by $k+\frac{mkk}{3a}$; which correction will always be made, easily put in place, when the air resistance has a measurable effect on the motion of the pendulum.

We want to make test this theory on the example given by the author. Indeed the same does not describe how large his board is, which he had been screwed on to the pendulum, but it seems to have been at least 2 feet long, and just as wide. Since now the whole length $DL=a=71\frac{1}{8}$ inches, so in feet it will be $a=5,927$, also $c=3,927$, and $b=2$ feet. Therefore :

$$\begin{aligned} a^4 &= 1134,07 \\ \underline{c^4} &\underline{= \quad 237,82} \\ a^4-c^4 &= \quad 996,25 \\ \text{and} \qquad b\left(a^4-c^4\right) &= 1992,50 \\ \text{therefore } \frac{b\left(a^4-c^4\right)}{3456aa} &= 0,01641. \end{aligned}$$

This is a volume of $\frac{1641}{100000}$ Cubic ft. Now since a cubic foot of water weighs around 70 lb, so the weigh R becomes $=1,1487$ lb. But there is $P=56,187$ lb and likewise $f=5,222$ ft. $g=4,333$ ft. Therefore there becomes :

$$m=\frac{Raa}{Pfg}=0,03174,$$

and since $k=1,4375$ ft., thus one has :

$$\frac{mk}{3a} = 0,002566\,,$$

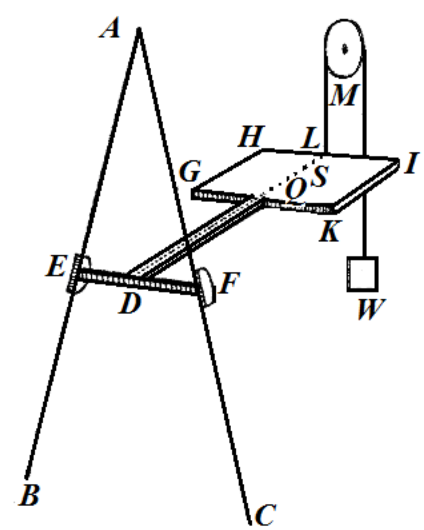
that is nearly:

$$\frac{mk}{3a} = \frac{1}{400}.$$

On account of which the rate found by the above method is $\frac{1}{400}$ to small. Since now we have found that the bullet passes through 1675 Eng.ft per second , so this correction carries out no more than 4 ft., such an amount that the bullet would have gone1679 Eng.ft in a second. The author has found only 1641ft. in this case, but because of his own rule he should have found only 1632 ft. But as his rule itself incorrect, it was for this reason that the speed was already too small by 43 ft. And since there is still 4 ft. to be added on account of the air resistance, it follows that method gives a speed of 47 ft. per second too small, a difference too great, according to these correct principles, to be ignored. It is certain that we have not considered the air resistance to be too small, and also not to have considered the friction of the axis on its supports, which would also take away some amount : such that one can safely say that the speed of the ball in this experiment, would have to be at least1680 Eng.ft. per second.

PREMIERE REMARQUE.

La méthode que notre Auteur décrit ici , pour trouver la vitesse d'une balle par le moyen de l'expérience , est très-ingéniese & une des plus utiles inventions qu'on ait faites depuis lontemps dans l'Artillerie ; car tout ce qu'on a pratiqué jusqu'à présent à cet effet, n'a pu donner que des résultats souvent erronés & toujours incertains. La description de la machine est si bien détaillée, que l'on peut aisément en faire construire une pareille ; mais son usage pour découvrir la vitesse réelle d'une balle, a encore besoin de quelques éclaircissemens. Il faut en premier lieu connaître le poids du pendule, ce que l'on trouve par une pesée à l'ordinaire. On observera seulement que, dans le poids du pendule , on doit comprendre celui de toutes les parties du pendule qui participent ensemble à son mouvement, & par conséquent celui de la traverse EF. Cette traverse ou, pour mieux dire, la ligne suivant laquelle elle est appuyée sur les bras R ,S,



doit être placée horizontalement; car cette ligne est l'axe autour duquel le pendule lait ses vibrations, & duquel il faut compter les distances des centres de gravité d'oscillation. On mesurera à cet effet la longueur du pendule, depuis le bord inférieur HI, où est attaché le ruban LMW , jusqu' à son axe de mouvement *;* cette longeur elevant aussi entrer dans le calcul de la vîtesse de la balle. Pour trouver ensuite la distance du centre de gravité à l'axe on élevera le pendule, en le faisant tourne: autour de cet axe , jusqu'à ce que d'soit dans une position horizontale ; & on le fexera dans cette situation par le moyen d'une corde , dont l'un des bouts sera attaché à l' extrémité L du pendule; on sera passer cette corde sur une poulie M, disposée de maniere que le brin LM soit vertical, & l'on suspendra à l'autre bout un poids W qui fasse équilibre avec le pendule, en le soutenant dans une situation horizontale. Ce poids étant connu, il sera au poids du pendule, comme la distance de son centre de gravité à l'axe de mouvement , est à la distance du point L au même axe. Soit donc le poids total âu pendule $= \mathrm{P}$; celui du poids W qui lui fait équilibre $= \mathrm{Q}$; la distance DL du point L à l'axe $\mathrm{EF} = a$; la distance DQ du centre de gravité du pendule supposé en $\mathrm{DQ} = g$, on aura, par les loix de la statique, $\mathrm{Q} : \mathrm{p} :: g : a,$ ou $g = \dfrac{a\mathrm{Q}}{P}$

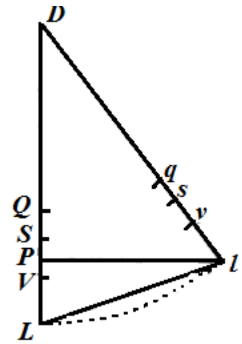
Soit maintenant *S* le centre d'oscillation du pendule, & $\mathrm{DS} = f$ *;* cette distance *f* sera la longeur d'un pendule simple qui fait ses vibrations dans le meme temps que le premier. Ainsi, pour trouver la valeur de *f* , il faut connoître la durée d'une vibration de ce pendule. Pour cela, mettez le pendule en mouvement , en lui faisant faire des oscillations qui n'excedent point 5 ou 6 degrés, parce qu'autrement elles ne feroient point isochrones : observez, par le moyen d'une bonne montre, combien il fait de vibrations en 1 , 2 ou 3 mmutes. Soit, par example , *n* le nombre d'oscillations faites en trois minutes ou 180" ; puisque les oscillations d'un pendule simple, dont la longueur est de 3,166525 pieds de Rhin, sont chacune précisément d'une seconde ; ce pendule sera 180 oscillations en trois minutes. Mais les temps pendant lesquels deux pendules simples de différentes longueurs font leurs vibrations, sont entre eux comme les racines quarrées de ces longueurs; donc puisque le pendule qui a 3,166525 pieds de longueur, fait une oscillation par seconde , & que celui dont la longueur est en *f* en doit faire une en $\dfrac{180''}{n}$; on aura

$1 : \dfrac{180}{n} :: \sqrt{3{,}166525} : \sqrt{f}$ *;* ce qui donne $f = \dfrac{32400 \times 3{,}166525}{nn} = \dfrac{102586\frac{1}{2}}{nn}$ pieds de Rhin. Il est donc aiaé de trouver la valeur de *f* en pieds de Rhin , & ce n'est point sans raison que nous nous servons ee cette mesure préférablement à toute autre : elle a, pour les calculs de la Méchanique , un avantage que les autres especs de mesures a'ont pas ; c' est qu'un corps qui tombe librement, parcourt dans la premiere seconde précisément 15625 milliemes du pied de Rhin, & que ce nombre 15625 est un quarré parfait , dont la racine 125 est d'un usage très commode dans le calcul. Il est d'ailleurs facile de çonvertir le pied de Rhin en pieds de Roi, ou en pieds de Londres , attendu que 1,035 pied de Rhin $=1$ pieds de Roi , & 0,970 pieds de Rhin $=1$ pied de Lomdes. Dans l'exemple de l'Auteur le pendule faisoit 200 oscillations en 253 secondes; faisant donc cette proportion

$1 : \frac{253}{200} :: \sqrt{3,16625} : \sqrt{f}$ on aura $f = \frac{253 \times 253 \times 3,16625}{40000} = 5,0667$ pieds de Rhin, ou 5 pieds $2\frac{2}{3}$ pouces anglois , ou enfin $62\frac{2}{3}$ pouces , ainsi que notre Auteur l'a trouvé.

SECONDE REMARQUE.

La nature du pendule étant ainsi connue, on peut le mettre en expérience , & déterminer, par son moyen, la vîtesse d'une balle. Soit donc le poids du pendule entier $= \mathrm{P}$, sa longueur $\mathrm{DL} = a$, son centre de gravité au point Q & $\mathrm{DQ} = g$, son centre d'oscillation en S , ac $\mathrm{DS} = f$, lesquelles quantités peuvent être connues par les moyens qn'on vient de voir. Supposons maintenant que la balle frappe le pendulee au point V , & que , par ce choc, il parvienne à la position D*l*, en décrivant un arc dont on connoîtra la corde L*l*, par le moyen du ruban. On mesurera la distance DV, que l'on fera $= b$, le poids de la balle $= p$ & la corde $\mathrm{L}l = k$. Cela posé, on trouvera la vîtesse de la balle suivant la méthode de t'Auteur , en disant : le quarré de la distance DV, ou b^2 , est au product $\mathrm{DQ} \times \mathrm{DS}$ ou *fg*, comme le poids du pendule P est à un quatrieme terme $= \frac{fg}{bb}\mathrm{P}$. Ainsi



l'effet de la balle est le même que si, au lieu de la masse totale du pendule, elle eût choqué un corps placé en V, dont le poids seroit $\frac{fg}{bb}\mathrm{P}$; & comme la balle n'est point réfléchie ;la communication de la vîtesse sera seron les loix du choc des corps non élastiques. Si la vîtesse de la balle qui frappe en V est égale à celle qu'lle auroit acquise en tombant d'une hauteur $= v$, & qu'elle soit par conséquent proportionnelle à $\sqrt{v}$, la quantité de mouvement de cette balle, avant le choc, aura été $= p\sqrt{v}$, & elle sera la même après le choc: La vîtesse du point V, après le choc, sera done $= \frac{p\sqrt{v}}{p + \frac{fg}{bb}\mathrm{P}}$; & cette vîtesse doit le faire monter, à la premiere oscillation, à une hauteur $= \frac{b^4 ppv}{(bbp + fg\mathrm{P})^2}$: ou, la hauteur à laquelle le point L est monté dans le même temps, est $\mathrm{PL} = \frac{\mathrm{L}l \times \mathrm{L}l}{2\mathrm{DL}} = \frac{kk}{2a}$.

Faisant donc $\mathrm{DL} = a$ est à $\mathrm{DV} = b$ comme $\frac{kk}{2a}$; est à $\frac{bkk}{2aa}$; ce quatrieme terme sera une nouvelle expression de la hauteur à laquelle le point V dont monter, ce qui donne cette equation $\frac{b^4 ppv}{(bbp + fg\mathrm{P})^2} = \frac{bkk}{2aa}$; d'ou l'on tire

$$v=\frac{kk\left(fg\mathrm{P}+bbp\right)^2}{2aab^3pp}, \& \sqrt{v}=\frac{k\left(fg\mathrm{P}+bbp\right)}{abp\sqrt{2b}}=\frac{fg\mathrm{P}+bbp}{abp}\times\frac{k}{\sqrt{2b}}$$

: de là on trouve la vraie vîtesse de la balle , comme il fuit. Puisqu'un corps qui tombe librement, parcourt 15625 milliemes d'un pied de Rhin dans la premiere seconde de sa çhûte, il acquiert une vîtesse par seconde de 31250 de ces mêmes parties. Mais les vîtesses acquises, en tombant de différentes hauteurs, sont entre elles comme les racines de ces hauteurs; on a donc $\sqrt{15625}:\sqrt{v}::31250$ est à la vîtesse par seconde due à la hauteur v. Cette vîtesse est donc $=\frac{31250\sqrt{v}}{\sqrt{15625}}=250\sqrt{v}$, milliemes du pied de Rhin, lonque v exprime un nombre de ces mêmes parties. Maintenant, puisque $\frac{fg\mathrm{P}+bbp}{abp}$ peut être regardé commme un nombre abstrait, & qu'il importe peu quelle espeçe de mesure on représente par les lettres *a, b, f, g, p,* & P, il suffira que les quantités k & b , ou la fraction $\frac{k}{\sqrt{2b}}$, experiment des milliemes du pied de Rhin ; alors la vîtesse de la balle par seconde sera d'autant de des parties, que le nombre $\frac{250\left(fg\mathrm{P}+bbp\right)}{abp}\times\frac{k}{\sqrt{2b}}$ en contiendra , ou d'un nombre de pieds de Rhin, exprimé par $\frac{fg\mathrm{P}+bbp}{abp}\times\frac{k}{4\sqrt{2b}}$. Pour la commodité du calcul , on changera cette derniere expression en celle-ci : $\left(\frac{fg}{ab}\times\frac{\mathrm{P}}{p}+\frac{b}{a}\right)\times\frac{k}{4\sqrt{2b}}$, dans laquelle $\frac{k}{\sqrt{2b}}$ exprime des milliemes du pied de Rhin. Soit donc, comme dans l'exemple de notre Auteur:

$$\mathrm{P}=56\tfrac{3}{16}\text{ liv.}$$

$$p=\tfrac{1}{12}\text{ liv.} \qquad \text{donc } \frac{\mathrm{P}}{p}=674\tfrac{1}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} a&=71\tfrac{1}{8}\text{ ponces)}\\ f&=61\tfrac{2}{3}\text{ p.}\\ g&=52\text{ p.}\\ b&=66\text{ p.}(=5335\text{ milliemes du pied de Rhin.})\\ k&=17\tfrac{1}{4}\text{ p.}(=1295\text{ milliemes du pied de Rhin.})\end{aligned}\right\}\text{ pieds de Londres.}$$

on aura

$$\frac{fg}{ab} = \frac{62\frac{2}{3}\cdot 52}{71\frac{1}{8}\cdot 66} = \frac{3268\frac{2}{3}}{4694\frac{1}{4}}$$

$$\& \ \frac{fg}{ab}\times\frac{\mathrm{P}}{p} = \ 468,053$$

$$\frac{b}{a} = \quad 0,928$$

$$\frac{fg}{ab}\times\frac{\mathrm{P}}{p}+\frac{b}{a} = 468,981$$

On a en outré $2b = 10670$, & achevant le calcul par les logarithmes, on aura :

$$l2b \qquad = 4,0181644$$

$$l\sqrt{2b} \quad = 2,0140822$$

$$l4\sqrt{2b} \ = 2,6161422$$

retranchant de $lk = \underline{3,1445742}$

rest . . . 0,5284320

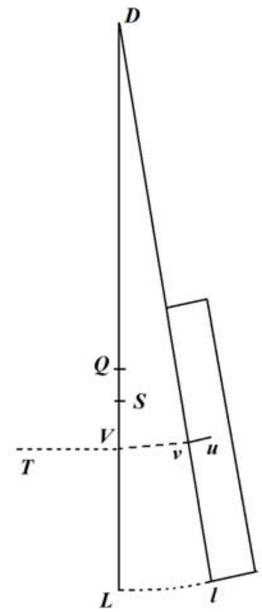
ajoutant $l\left(\frac{fg}{ab}\times\frac{\mathrm{P}}{p}+\frac{b}{a} = 468,981\right) = \underline{2,6711544}$

on aura. . . 3,1995864

qui est le logarithm de 1583,385. D'où l'on voit que la vîtesse par seconde de la balle, est de 1583 pieds de Rhin. Et comme 970 de ces pieds sont 1000 pieds anglois, il fuit que cette vîtesse est de 1631 pieds anglois, ce qui ne differe que de neuf pieds du résultat trouvé par l'Auteur: il est à remarquer que la vrai vîtesse de la balle doit effectivement être plus grande qu'elle n'est donnée par le calcul; partce que la résistance de l'air empêche que le pendule ne monte aussi haut qu'il devroit le faire en vertu de la vîtesse qui lui est communiquée. Nous examinerons l'effet de cette résistance après que nous aurons fait voir sur quel principe est fondée la regle que l'Auteur donne pour calculer la et la vîtesse d'une balle.

TROISIEME REMARQUE.

La démonstration de la regle, d'après laquelle l'Auteur détermine la vîtesse d'une balle, en considérant l'effet de son impulsion contre le pendule , se trouve en si peu d'endroits, qu'elle peut fort bien être ignorée du plus grand nombre des Lecteurs. D'ailleurs, cette matière ne laissant pas d'avoir ses difficultés, il est à propos de l'éclaircir, autant que notre objet actuel pourra le comporter. Il s'agit ici du changement qui arrive au mouvement de deux corps qui se choquent ; les loix du choc direct de deux corps, élastiques ou non élastiques, se trouvent dans presque tous les Traités de méchanique ; mais ces Loix connues ne sufficent pas pour déterminer les circonstances da mouvement de deux corps qui se choquent obliqement ; c'est-à-dire, quand, l'impulsion se fait suivant une ligne oblique à l'èndroit du contact ; ou suivant une ligne perpendiculaire à cet endroit, & qui ne passe pas par le centre de gravité des deux corps. Il y a plus encore dans le cas presènt , c'est que l'un des deux corps, savoir le pendule qui reçoit la percussion, ne se meut pas librement , mais autour d'un axe: circonstance à laquelle il faut principalement avoir égard dans cette recherche. Or, pour déterminer les changemens qu'éprouve un corps mobile autour d'un axe, on doit considérer son moment inertie, c'est-à-dire , la sommo des produits faits en multipliant chaque particule de ce corps par le quarté de sa distance à l'axe de mouvement, au lieu que dans le cas d'un mouvement libre, on n'a besoin que de la simple inertie , ou du poids du corps. En outre ce n'est simplement la force agissante qu'il faut considérer quand le mouvement se fair autour d'un axe; mais son moment, qui n'est autre chose que le produit de cette force multipliée par la distance perpendiculaire de sa direction à l'axe de mouvement. Ce dernier moment, divisé par le moment d'inertie du pendule, donnera la force accélératrice absolue du mouvement autour de l'axe ; & si on multiplie cette fraction par la distance d'un point quelconque à l'axe , on aura la force accélératrice de ce point. Dans le mouvement libre, au contraire, on a la force accélératrice du mobile en divisant sa force par son inertie ou son poids. Maintenant puisque la distance $\mathrm{DS} = f$ du centre d'oscillation S à l'axe, se trouve en divisant le moment d'inertie du pendule par le produit de son poids multiplié par la distance $\mathrm{DQ} = g$ de son centre de gravité Q à l'axe; c'est-à-dire, par Pg, on aura Pfg pour le moment d'inertie du pendule. Il est assez ordinaire que, dans la théorie du choc des corps, on ne fasse point attention au temps qu'exigent les changemeas occasionnés dans les deux corps par la percussion, dans l'idée que ces changemens se font subitement. Mais 1'on pourroit faire voir la fausseté de cette opinion par pluseurs raisons, si le cas présent n'en foumissoit une des plus évidentes: car puisque la balle s'enfonce bien avant dans le plateau du pendule, on ne peut disconvenir qu'il ne faille un certain temps pour cela. Il est vrai que ce temps est trés court, & l'on peut suppose sans erreur que, pedant sa durée, le déplacement du pendule n'a point été



sensible. Soit donc DL la situation naturelle du pendule, Q son centre de gravité, S son centre d'oscillation, & par conséquent DQSL une ligne verticale; que t'on fasse, comme ci-devant, le poids total du pendule $=\mathrm{P}$; $\mathrm{DL}=a$; $\mathrm{DQ}=g$; $\mathrm{DS}=f$; soit TV la direction horizontale , suivant laquelle la balle, dont le poids $=p$, vient frapper le pendule au point V, où se fait le premier choc , & $\mathrm{DV}=b$. Si h est la hauteur d'où un corps doit tomber pour acquérir une vîtesse égale à celle de la balle, cette vîtesse sera représentée par $\sqrt{h}$; & $\frac{1}{4}\sqrt{h}$ sera le nombre de milliemes du pied de Rhin qu'elle sera parcourir à la balle en une seconde, si la hauteur *h.* est évaluée en milliemes du pied de Rhin. Supposons maintenant que, dans un temps $=t$, le pendule ait été transporté en *Dl,* & que la balle se soit déjà enfoncée jusqu'en u dans le plateau ; nommons le petit arc $Vv=x$; l'enfoncement $vu=y$; la vîtesse acquise du point $v=\sqrt{v}$, & celle de la balle en $u=\sqrt{u}$: cela posé, puisque dans le temps infiniment petit dt, le point v du pendule aura parcouru l'espace dx & la balle un espace $=dx+dy$; on aura, par les principes de méchanique , $dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx+dy}{\sqrt{u}}$. La balle continuant de s'enfoncer, & trouvant de la résistance dans le bois, la vîtesse du pendule en sera augmentée , & celle de la balle diminuée. Soit donc V la force de la résistance du bois, $\frac{V}{p}$ sera la force qui retarde le mouvement de la balle ; d'où l'on tire $du=-\frac{V}{p}(dx+dy)$. Considérant ensuite l'action de la force V sur le pendule, son moment sera $=\mathrm{V}b$; & comme le moment d'inertie du pendulè est $=\mathrm{P}fg$, la force accélératrice du pendule au point v sera $\frac{\mathrm{V}bb}{\mathrm{P}fg}$. Donc $dv=\frac{Vbbdx}{\mathrm{P}fg}$, &

$\frac{du}{dv}=\frac{-Pfg(dx+dy)}{pbbdx}$, & parceque $\frac{dx+dy}{dx}=\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, on aura $\frac{du}{dv}=\frac{-Pfg\sqrt{u}}{pbb\sqrt{v}}$, ou

$\frac{pbbdu}{\sqrt{u}}+\frac{Pfgdv}{\sqrt{v}}=0$, dont l'intégrale est $pbb\sqrt{u}+\mathrm{P}fg\sqrt{v}=pbb\sqrt{h}$, parce qu'au commencement du choc $v=0$ & $u=h$. Mais l'effet du choc esse totalement, lorsque le point v & la balle ont une vîtesse commune ; nommant cette vîtesse $\sqrt{s}$, on aura

$pbb\sqrt{s}+\mathrm{P}fg\sqrt{s}=pbb\sqrt{h}$, & $\sqrt{s}=\frac{pbb\sqrt{h}}{pbb+\mathrm{P}fg}$. Cette expression s'accorde parfaitement avec celle que 1'Auteur a donnée, & montre que, jusqu'ici, sa regle est bonne. Maintenant, puisque $\sqrt{s}$ exprime la vîtesse communiquée par la percussion au point V du pendule ; $\frac{\sqrt{s}}{b}=\frac{pb\sqrt{h}}{pbb+\mathrm{P}fg}$ exprimera d'une maniere absolue 1a vîtesse de l'oscillation; d'où l'on voit que cette oscillation sera très- petite si l'on prend DV très - petit, & qu'elle sera encore très - petite , si DV est trop grand. On peut donc proposer de trouver en quel point la balle doit frapper le pendule avec la vîtesse $\sqrt{h}$, pour que l'oscillation soit la plus grande qu'il sera possible. On trouvera $\mathrm{P}fg = pbb$, & $b = \mathrm{DV} = \sqrt{\frac{\mathrm{P}fg}{p}}$. Ce point est le centre de percussion du pendule ; d'où il fuit que le centre de percussion n'est, ni le centre de gravité, ni le centre d'oscillation; qu'outre *ces* deux points, il faut encore avoir égard au rapport du poids du pendule à celui de la balle , & que le centre de percussion tombe très-bas , lorsque le poids p de la balle est très-petit par rapport au poids P du pendule. Mais il est inutile, dans le cas present, d'avoir égard àu centre de percussion , il est même plus à propos que l'arc décrit pat lè pendule ne soit pas trop grand. Après avoir déterminé la vîtesse du point V *;* il nous reste à trouver à quelle hauteur cette vîtesse doit faite monter le pendule. On fait que le mouvement d'un pendule est le même qu'il auroit , si toute sa pesanteur étoit réunie au centre d'oscillation ; nous considérons donc ici ce centre, en observant toutefois qu'il n'est plus à la même place, depuis que la balle est enfoncée dans le plateau. Pour trouver ce point, on cherchera le moment d'inertie du pendule , lequel, à cause de la balle, est $= \mathrm{P}fg + pbb$ *;* on le divisera par $\mathrm{P}g + pb$, & on aura $\frac{\mathrm{P}fg + pbb}{\mathrm{P}g + pb}$ pour la distance du centre d'oscillation à l'axe de mouvement. On fait abstraction ici du volume de la balle. On dira donc : b est à $\frac{\mathrm{P}fg + pbb}{\mathrm{P}g + pb}$, comme $\sqrt{s} = \frac{pbb\sqrt{h}}{\mathrm{P}fg + pbb}$ est à la vîtesse du centre d'oscillation, que l;on trouvera $= \frac{pb\sqrt{h}}{\mathrm{P}g + pb}$. Ce centre doit donc faire sa premiere vibration dans un arc dont le sinus verse est $= \frac{ppbbh}{(\mathrm{P}g + pb)^2}$ la corde

$= \frac{pb}{\mathrm{P}g + pb}\sqrt{\frac{2h(\mathrm{P}fg + pbb)}{\mathrm{P}g + pb}}$: ainsi la corde de l'arc décrit par le point L , sera

$= \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(\mathrm{P}g + pb)(\mathrm{P}fg + pbb)}}$; cette corde , que l' on a trouvé par l'expérience, ayant été nommée k, on aura

$$k = \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(\mathrm{P}g + pb)(\mathrm{P}fg + pbb)}}, \ \& \ \sqrt{h} = \frac{k\sqrt{(\mathrm{P}g + pb)(\mathrm{P}fg + pbb)}}{pab\sqrt{2}}.$$

La lettre h exprime ici ce qu'on a nommé v ci-dessus, c'est-à-dire, la hauteur d'où la vîtesse de la balle eût été aequise par la chûte. Mais la regle de l'Auteur a donné $\sqrt{h} = \frac{k(\mathrm{P}fg + pbb)}{pab\sqrt{2b}}$ *;* elle n'est donc pas juste. L'Auteur s'est trompé; en ce qu'il a cru que le mouvement du pendule étoit le mêmé que si toute la pesanteur qu'il a trouvée étoit réunie au point V , ce qui ne peut avoir lieu que pour le centre d'oscillation. Ainsi, pour rectifier la formule de notre Auteur, & rendre la vîtesse qu'elle donne conforme à la vérité, il faut la multiplier par $\sqrt{\frac{\mathrm{P}gb + pbb}{\mathrm{P}fg + pbb}}$ son voit que la vîtesse de la balle trouvée par l'Auteur est trop petite lorsque $b > f$, & trop grande lorsque $b < f$. Mais cette différence est ordinairement si petite, qu'elle peut facilemenf échapper à l'observation: car lorsque *p* est très petit par rapport à P , & qu'il y a peu de différence entre *f* & b , il faut encore multiplier la vîtesse que l'Auteur a trouvée ; par $1+\frac{b-f}{2f}$, ce qui , dans son exemple , fait $1+\frac{3\frac{1}{3}}{2\cdot 62\frac{2}{3}} = 1+\frac{5}{188}$; c'est-à-dire, qu'à la vîtesse de 1632 pieds anglois, ut encore en ajouter 43, & on aura une vîtesse de 1675 pieds pieds par seconde ; ce qui ne laisse pas de faire une différence assez sensible.

Puisque *p* est extrêmement petit en comparison de P, on aura, à peu près,

$$\sqrt{(\mathrm{P}g + pb)(\mathrm{P}fg + pbb)} = \mathrm{P}g\sqrt{f} + \tfrac{1}{2}pb\sqrt{f} + \frac{\frac{1}{2}pbb}{\sqrt{f}} = \frac{\mathrm{P}fg + \frac{1}{2}pb(f+b)}{\sqrt{f}}$$

Donc $\sqrt{h} = \frac{\mathrm{P}gk\sqrt{f}}{pab\sqrt{2}} + \frac{k(f+b)}{2a\sqrt{2f}} = \frac{k}{a}\left(\frac{\mathrm{P}g}{pb} + \frac{f+b}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}$, si l'on suppose le nombre $\frac{k}{a}\left(\frac{\mathrm{P}g}{pb} + \frac{f+b}{2f}\right) = n$, & que *f* exprime des milliemes de pied de Rhin; la vîtesse de la balle, à l'instant du choc, sera exprimée par $\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}}$ pieds de Rhin. Reprenons l'exemple de notre Auteur , dans lequel on a:

$k = 17\tfrac{1}{4}$

$a = 71\tfrac{1}{8}$ donc $\dfrac{k}{a} = 0,24253$

$\mathrm{P} = 56$ lb.

$p = \tfrac{1}{12}$ lb. & $\dfrac{\mathrm{P}}{p} = 674,25$

$g = 52$

$b = 66$ & $\dfrac{g}{b} = 0,788$

$f = 62\tfrac{1}{2}$ $\dfrac{\mathrm{P}g}{pb} = 531,309$

$\dfrac{f+b}{2f} = 1,032$

$\dfrac{\mathrm{P}g}{pb} + \dfrac{f+b}{2f} = 532,341$

Donc $n = 129,109$

& $\dfrac{n}{4} = 32,277$

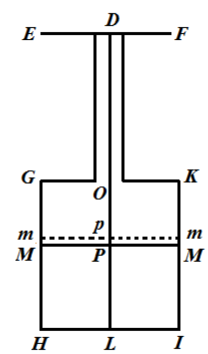
De plus, f étant de $62\tfrac{2}{3}$ pouces du pied dè londres, on aura $\dfrac{f}{2} = 2532,75$ milliemes du pied de Rhin; donc $\sqrt{\dfrac{f}{2}} = 50,326$; & $\dfrac{n}{4}\sqrt{\dfrac{f}{2}} = 1624,37$, c'est-à-dire, que la balle aura une vîtesse de 1624 pi. de Rhin; ou à peu près de 1675 pieds de Londres par seconde. Voyons maintenant de combien la balle s'enfonce dans le plateau : la résistance des fibres ligneuses pouvant être considérée comme uniforme ; l'intégrale de l'équation $du = -\dfrac{V}{p}(dx + dy)$ sera $u = h - \dfrac{V}{p}(x+y)$ donc $x + y = \dfrac{p(h-u)}{V}$: l'autre equation $dv = \dfrac{Vbbdx}{\mathrm{P}fg}$ a pour integrale, $v = \dfrac{Vbbx}{\mathrm{P}fg}$ & $x = \dfrac{\mathrm{P}fgv}{Vbb}$. Or, quand le choc a totalement cessé, on a $u = v = \dfrac{p^2b^4h}{(\mathrm{P}fg + pbb)^2} = s$; donc l'enfoncement

$$vu = y = \frac{pb}{\mathrm{V}} - \frac{s}{\mathrm{V}b^2}(\mathrm{P}fg + pbb) = \frac{ph}{\mathrm{V}} - \frac{p^2b^2h}{\mathrm{V}(\mathrm{P}fg + pbb)} = \frac{\mathrm{P}phfg}{\mathrm{V}(\mathrm{P}fg + pbb)}.$$

D'où l'on voit que plus la distance $\mathrm{DV} = b$ est grande, moins la balle s'enforcè dans le plateau. Cet enfoncement vu sera aussi d'autant plus petit, que le moment d'inertie Pfg du pendule est plus petit. Mais comme il faut que le pendule ait une solidité suffisante, on ne pourra empêcher que la balle ne s'ensonce trop avant, qu'en se servant d'un pendule le plus long & le plus léger par le bas qu'il sera possible, & en tirant contre sa partie inférieure. En observant ce que nous venons de dire , peut-être parviendra-t-on à construire un pendule, dont on pourra faire usage pour déterminer la vîtesse , non-seulement d'une balle de pistolet & de mousquet , comme a fait notre Auteur, mais encore d'un boulet de canon.

QUATRIEME REMARQUE.

La regle que l'Auteur donne pour trouver la vîtesse d'une balle par le moyen de la percussion, n'est donc bonne que quand la balle frappe le pendule à son centre d'oscillation : si l'on tire plus haut ou plus bas, il en résulte une vîtesse trop petite dans le premier cas, & trop grande dans le second ; & il paroît que dans toutes ses expériences , le coup a porté au dessous du centre d'oscillation , de sorte que les vîtesse qu'il a trouvées doivent être trop petites. Mais nous avons à examiner une autre circonstance , qui a échappé ã notre Auteur, & qui doit néanmoins rendre la vîtesse de la baJle plus grande qu'on ne l'a trouvée par les calculs précédens ; c'est la résistance de l'air, dont l'effet est d'empêcher le rendule de s'écarter de sa situation naturelle , autant qu'il le feroit s'il n'y avoir point de résistance. Puisqu'on a donc fait abstraction de cette résistance, il est évident que la vraie longueur de la corde *Ll* , par laquelle on détermine la vîtesse de la balle, doit être plus grande que l'expérience ne l'a indiquée; & que cette vîtesse doit par conséquence aussi être augmentée d'autant. Mais quoique cette différence soit très-petite , parce que la résistance ne produit pas ordinairement d'effet senible sur la premiere vibration du pendule , nous ne laisserons pas d'en faire l'objet de nos recherches, afin que nous soyons pleinement assurés de son efficacité , & si l'on doit y avoir égard ou non. Considérons à cet effet, la surface du pendule exposée à l'action de l'air, dans une des positions où elle se trouve durant la premiere vibration. Soit donc la vîtesse avec laquelle le point inférieur L se meut autour de l'axe $\mathrm{EF}=\sqrt{v}$, ou égale à la vîtesse duc à la hauteur v ; la distance de ce point L à l'axe $\mathrm{EF}=a$ *:* soit aussi menée à volonté une ligne horisontale MPM sur la surface du pendule, & $\mathrm{DP}=x$; la vîtesse de chaque point de cette ligne sera $\frac{x}{a}\sqrt{v}$, & la hauteur d'où cette vîtesse est acquise $=\frac{xxv}{aa}$. La résistance de l'air sur cette ligne sera donc égale à la pression d'une colonne d'air dont la hauteur $=\frac{xxv}{aa}$. Si l'on sait la largeur $\mathrm{MM}=b$, & qu'on mene la parallele infiniment proche *mm* ; la surface MM*mm* sera $=bdx$, & la pression de l'air sur cette surface $=\frac{bv}{aa}xxdx$. Mais comme ce n'est pas tant de la pression de l'air qu'il s'agit ici, que de son moment, ce moment sera $\frac{bv}{aa}x^3dx$, dont



l'intégrale est $=\frac{bv}{aa}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\mathrm{DO}^4\right)$. Ainsi x devenant a, & faisant $\mathrm{DO}=c$, le moment de la résistance de l'air sur la surface GHIK sera $\frac{bv\left(a^4-c^4\right)}{4aa}$. On peut, sans erreur, faire abstraction de la résistance de l'air contre la partee DO du pendule, tant à cause de son peu de largeur, que parce que son moment est très-petit en comparaison de celui de la surface GHIK. Le moment de la résistance de l'air étant donc $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{4aa}v$, on cherchera le poids de la quantité d'air qui rempliroit l'espace $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{4aa}$, ou celui de la quantité d'eau qui rempliroit l'espace $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{3456aa}$; & nommant ce poids R , le moment de la résistance de l'air, sera $=\mathrm{R}v$.

Supposons maintenant le pendule parvenu à la position D*l*, & l'angle $\mathrm{LD}l=z$, la vîtesse du point L, comme ci-dessus, $=\sqrt{v}$, & celle du point L, au commencement de la vibration , $=\sqrt{i}$. Lorsque le pendule, parvenu en D*l*, s'écartera encore plus de la position DL, deux obstacles s'opposeront à son mouvement : son propre poid, & la résistance de l'air. Le moment de la résistance de l'air est R*v*, èn donnant au poids R la valeur trouvée ci-dessus. Le poids du pendule , qu'on a fait $=\mathrm{P}$, agit comme s'il étoit réuni au centre de gravité *q* ; & comme on a $\mathrm{D}q=\mathrm{DQ}=g$, le moment sera donc P*gsinz.* Mais le moment de la masse entiere du pendule est $=\mathrm{P}fg$, comme on l'a déjà vu : donc la force absolue qui résiste au mouvement, est $=\frac{\mathrm{P}gsinz+\mathrm{R}v}{Pfg}$ & cetta force est, au point *1*, $=\frac{\mathrm{P}agsinz+\mathrm{R}av}{Pfg}$; ainsi, pendant que le point *l* parcourt l'élément de l'arc L*l*, qui est *adz*, on a

$$dv=\frac{-\mathrm{P}a^2gdzsinz-\mathrm{R}a^2vdz}{Pfg}=\frac{-a^2dzsinz}{f}-\frac{\mathrm{R}a^2vdz}{Pfg},$$

ou

$$dv+\frac{\mathrm{R}a^2vdz}{Pfg}=\frac{-a^2dzsinz}{f}.$$

Pour rendre cette équation intégrable, on la multipliera par $e^{\frac{\mathrm{R}aaz}{Pfg}}$ prenant *e* pour le nombre dont le logarithme hyperbolique $=1$; & pour abréger, on sera $\frac{\mathrm{R}a^2}{Pfg}=m$, & on multipliera par e^{mz},ce qui donne

$$e^{mz}\left(dv+mvdz\right)=\frac{-a^2}{f}e^{mz}dzsinz$$

dont l'intégrale est $e^{mz}v = \frac{-a^2}{f}\int e^{mz}dz sin z$,

Mais : $-\int sinzdz = cosz$, donc $-\int e^{mz}dzsinz = e^{mz}cosz - \int e^{mz}dzcosz$; & comme $-\int dzcosz = sinz$, on aura $\int e^{mz}dzcosz = e^{mz}sinz - m\int e^{mz}dzsinz$.

Donc : $-\int e^{mz}dzsinz = e^{mz}\left(cosz - msinz\right) + mm\int e^{mz}dzsinz$;

d'où l'on tire : $-\int e^{mz}dzsinz = \frac{e^{mz}\left(cosz - msinz\right)}{1+mm}$.

On aura donc cette équation : $e^{mz}v = \frac{e^{mz}aa\left(cosz - msinz\right)}{\left(1+mm\right)f} + \mathrm{A}$.

Pour détermmer la constante A, on remarquera qu'au commencement du mouvement on a $z = 0$, & $v = i$, donc : $i = \frac{aa}{\left(1+mm\right)f} + \mathrm{A}$, & par conséquent $\mathrm{A} = i = \frac{aa}{\left(1+mm\right)f}$: donc,

$$e^{mz}v = i - \frac{aa + e^{mz}aa\left(cosz - msinz\right)}{\left(1+mm\right)f}.$$

Si l'on suppose maintenant que D*l* est le terme de la premiere vibration du pendule, & que de là il en commence une seconde ; dans cette position, on aura

$$v = 0, \ \& \ \left(1+mm\right)fi = aa - e^{mz}aa\left(cosz - msinz\right).$$

Mais alors la corde L*l* sera $= k$, & connue par l'expérience. On aura donc $sin.\tfrac{1}{2}z = \frac{k}{2a}$, $cos\tfrac{1}{2}z = \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$; de plus $cosz = 1 - \frac{kk}{2aa}$, & $sinz = \frac{k}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$;

par consequence : $\left(1+mm\right)fi = aa - e^{mz}aa\left(1 - \frac{kk}{2aa} - \frac{mk}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}\right)$;

ou $\left(1+mm\right)fi = aa - e^{mz}\left(aa - \tfrac{1}{2}kk - \tfrac{1}{2}mk\sqrt{\left(4aa - kk\right)}\right)$.

Mais si la résistance devient nulle , on aura $m = 0$, & la corde L*l* sera un peu plus grande que *k*, supposons-la $= s$, on aura $fi = \tfrac{1}{2}ss$ *;* ainsi on pourra faire évanouir la quantité inconnu *i*, car on aura

$$\left(1+mm\right)ss = 2aa - e^{mz}\left(2aa - kk - mk\sqrt{\left(4aa - kk\right)}\right).$$

Cette équation donnera une valeur de *s* ou de la corde de l'arc que le point L décriroit , s'il n'y avoit point de résistance. Çar les quantités $a,\ k$ & $m=\frac{\mathrm{R}aa}{\mathrm{P}fg}$ sont connues, de même que *z*, qui est un angle dont la moitié a pour sinus $\frac{k}{2a}$, en prenant le sinus total $=1$. On peut abréger ce calçul de deux façons : premiérement, la résistance de l'air étant très-peu considérable, *m* sera une fraction d'une si petite valeur, qu'à la place de e^{mz} on pourra mettre $1+mz$, parce que les puissances plus élévées de *m* peuvent être négligées; on aura alors $(1+mm)ss=kk-2maaz+mkkz+mk\sqrt{(4aa-kk)}$, ou

$$ss=kk-2maaz+mkkz+mk\sqrt{(4aa-kk)}.$$

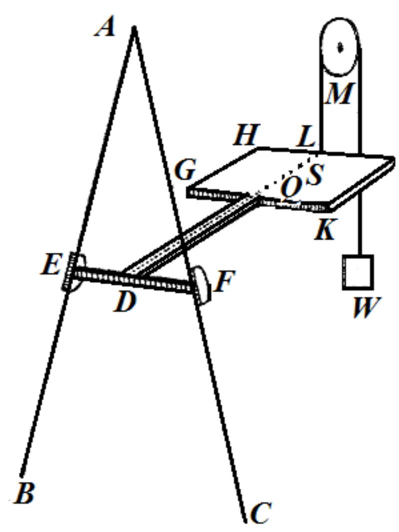
Secondement, l'angle LD*l*, dans ces sortes d'expériences, étant ordinairement de peu degrés, le sinus de sa moité sera, à peu près, égal à l'arc lui-même, c'est-i-dire que $\frac{1}{2}z=\frac{k}{2a}+\frac{k^3}{48a^3}$, & $z=\frac{k}{a}+\frac{k^3}{24a^3}$; donc $ss=kk-2mak+\frac{mk^3}{12a}+\frac{mk^3}{a}+mk\sqrt{(4aa-kk)}$.
Mais *k* étant très-petit par rapport à 2*a*, on aura $\sqrt{(4aa-kk)}=2a-\frac{kk}{2a}$; & par conséquent $s=k+\frac{mkk}{3a}$, parce qu'on peut négliger les puissances plus élevées de *k*. On mettra donc $k+\frac{mkk}{3a}$ à la place de k , dans le calcul que nous avons fait précédemment. Et comme la vîtesse da la balle est proportionnelle à la corde *k*, il suffira de multiplier sa vîtesse trouvée ci-dessus par $1+\frac{mk}{3a}$ correction qui pourra toujours se faire, quand la résistance de l'air influera sensiblement sur 1e mouvement du pendule. Nous allons fairè d'essai de cette théorie, sur l'exemple rapporté par notre Auteur. Quoiqu'il n'ait rien dit de l'étendue du plateau, il paroit cependant qu'il pouvoit avoir au moins 2 pieds de hauteur sur autant de largeur; on a donc $\mathrm{DL}=a=71\frac{1}{8}$ pouces; ou $a=5,927$ pieds ; donc $c=3,927$ & $b=2$ pieds , ce qui donne :

$$\begin{aligned} a^4 &= 1134,07 \\ c^4 &= \ \ 237,82 \\ \hline a^4-c^4 &= \ \ 996,25 \\ \&\quad b\left(a^4-c^4\right) &= 1992,50 \\ \text{donc}\ \frac{b\left(a^4-c^4\right)}{3456aa} &= 0,01641 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, que cet espace conntient $\frac{1641}{100000}$ de pied cubique ; & comme un pied cubique d'eau pese environ 70 lb. le poids R sera de 1,1487 lb. Or,

$\mathrm{P} = 56{,}187$ $f = 5{,}222$ lb. pieds, & $g = 4{,}333$, on aura donc $m = \frac{\mathrm{R}aa}{\mathrm{P}fg} = 0{,}03174$; & , à cause de $k = 1{,}4375$, ou, à peu près, $\frac{mk}{3a} = \frac{1}{400}$; de forte que la vîtesse trouvée ci-dessus de $\frac{1}{400}$ trop petite, & qu'à 1675 pieds anglois, que nous avons trouvés, il faut encore ajouter 4 pieds, ce qui donnera 1679 pieds par seconde pour la vîtesse de la balle. Mais l'Auteur a trouvé 1641 pieds pour cette vîtesse, qui, selon la regle, ne devroit même être que de 1634 pieds; ainsi on tombe déjà, en la suivant, dans une erreur de 43 pieds par seconde; & comme il y a encore 4 pieds à ajouter à cause de la résistance de l'air, il s'ensuit que la méthode donne une vîtesse de 47 pieds plus. petite qu'elle ne devroit être; différence trop considérable, selon ses propres principes, pour qu'elle puisse être négligée. Il est certain que nous n'avons pas supposé la résistançe de l'air aussi grande qu'elle l'est réellement, & comme outre cela nous avons encore fait abstraction du frottement de l'axe sur ses appuis, on peut conclure en toute sùreté , que la vîtesse de la balle dans cette expérience a dû être au moins de 1680 pies anglois par seconde.

ERSTE ANMERKUNG



Die Art, welche unser Autor beschreibet, um die Geschwindigkeit einer Kugel durch Versuche zu bestimmen, ist ohne Zweifel eine von den sinnreichsten und nützlichsten Erfindungen in der Artillerie; indem alles dasjenige, was man bißher darüber zu bestimmen im Stande gewesen, sehr ungewiß und unrichtig ist. Die Beschreibung der Maschine ist so deutlich, daß man solche leicht für einen jeglichen Fall darnach verfertigen lassen kann; wie aber aus den damit angestellten Experimenten die wahre Geschwindigkeit der Kugel ausgefunden werden soll, verdienet eine weitere Erläuterung. Für das erste hat man das Gewicht des ganzen Penduli zu wissen nöthig, welches durch die gewöhnliche Abwägung leicht gefunden wird. Nur ist hiebey zu merken, daß zu dem Cörper des Penduli nicht nur der untererrheil, sondern alles, so mit demselben zugleich in Bewegung gesetzt wird, gerechnet werden müsse, und folglich dazu auch das Gewicht des Horizontal-Balkens *EF* gehöre. Ferner muß dieser Balken *EJ*, oder vielmehr die Linie, nach welcher derselbe auf den Armen *R* und *S* auflieget, vollkommen horizontal seyn. Denn diese Linie stellt die Axe vor, um welche das Pendulum sich beweget, und von welcher die Entfernungen so wohl des

Centri gravitatis, als des Centri oscillationis gesucht werden müssen. Man suche zu diesem Ende vor allen Dingen die Distanz des untersten Bords *HI*, wo das Band *LMW* befestigt ist, von der gedachten Axe, als welche zu Berechnung der Geschwindigkeit der geschossenen Kugel gleichfalls nöthig ist. Um hernach die Distanz des Centri gravitatis des ganzen Penduli von eben derselben Axe zu finden; so hebe man vermittelst des Bands *LMW* oder eines stärkern, wenn solches nöthig erachtet wird, das Pendulum so weit in die Höhe, biß dasselbe horizontal zu liegen komme.

Zu diesem Ende ziehe man das Band über eine Rolle *M*, welche an einem solchen Orte befestiget ist, daß das Stück des Bandes *L M* perpendicular stehe. Wenn das Pendulum *GHIK* in die Horizontal-Lage gebracht worden, alsdenn hänge man an das andere Ende des Bandes in *W* ein so grosses Gewicht, als zu Erhaltung des Penduli in der Horizontal-Lage erfordert wird. Wenn dieses Gewicht gefunden, so wird sich dasselbe zum Gewicht des Penduli verhalten, wie die Distanz des Centri gravitatis von der Axe, zur Distanz des Puncts *L* von der Axe; wie aus der Static bekannt ist. Wenn also das Gewicht des ganzen Penduli gesetzt wird $=\mathrm{P}$, das Gewicht, so bey dieser Untersuchung in *W* angehängt werden muß, $=\mathrm{Q}$, die Distanz des Puncts *L* von der Axe *EF* nehmlich $DL=a$, und das Centrum gravitatis des ganzen Penduli in *Q* angenommen, und die Distanz $\mathrm{DQ}=g$ genennet wird, so muß nach den Regeln der Statik sein $Q:P=g:a$, oder $Pg=Qa$; woraus gefunden wird $g=\frac{aQ}{P}$. Es sey ferner *S* das Centrum oscillationis des Penduli, und $DS=f$, so wird *f* die Länge eines einfachen Penduli andeuten, welches mit dem vorgelegten seine Schwingungen in einerley Zeit verrichtet. Dahero um diese Distanz $DS=f$ zu finden, so muß man suchen, in wie langer Zeit das Pendulum eine Oscillation absolvire. Zu diesem Ende bringe man dieses Pendulum in einen kleinen Schwung, dergestalt, daß die Oscillationes nicht über 5 biß 6 Grad beyderseits ausweichen; weil dieselben sonsten nicht alle von einerley Dauer seyn würden, und zehle nach einer guten Uhr, wie viel Oscillationen dieses Pendulum in 1, 2 oder 3 Minuten mache. Der Autor hat hierzu eine Zeit von 200 Schwingungen genommen, dahero wollen wir hier zum Exempel 3 Minuten oder 180" annehmen. Es sey nun *n* die Zahl der Oscillationen, welche das Pendulum in der Zeit von 3 Minuten verrichtet. Da nun ein einfaches Pendulum, so 3,16625 Rheinländische Schuh lang ist, durch seine Schwingungen accurat Secunden weiset, so würde dieses Pendulum in 3 Minuten 180 Schwingungen verrichten. Es sind aber die Zeiten, in welchen zwey einfache Pendula von verschiedener Länge ihre Oscillationen machen, wie die Quadrat-Wurzeln aus ihrer Länge. Derowegen, da ein Pendulum, so 3,16625 Schuh lang ist, eine Oscillation in 1", das gesuchte Pendulum aber, dessen Länge wir $=f$ setzen, eine Oscillatione in $\frac{180''}{n}$ absolvert , so wird seyn

$$1:\frac{180}{n}::\sqrt{3{,}166525}:\sqrt{f}\ ,$$

und also

$$f = \frac{32400 \times 3,166525}{nn}$$

Rheinl. Schuh. Das ist

$$= \frac{102586\frac{1}{2}}{nn}.$$

Solchergestalt wird also die Länge f leicht in Rheinländischen Schuhen gefunden, welches Maaß in Mechanischen Rechnungen vor andern Maassen einen nicht geringen Vorzug hat, weil ein frei herabfallender Cörper in einer Secunde accurat 15625 tausendste Theile Rheinländlschen Schuhes beschreibt, und diese Zahl 15625 eine Quadrat-Zahl ist, deren Radix 125 in den Rechnungen sehr vortheilhaft angebracht wird. Aus dem Rheinländischen Maaß kann aber entweder das Parisische, oder das Englische leicht heraus gebracht werden, indem 1,030 Rheinländische Schuh einen Pariser Schuh und 0,970 Rheinländische Schuh einen Englischen Schuh betragen. In dem Exempel des Autoris machte das Pendulum in 253 Secunden 200 Oscillationen, folglich geschahe eine Oscillation in $\frac{253''}{200}$, woraus diese Proportion entsteht

$$1 : \frac{253}{200} :: \sqrt{3,16625} : \sqrt{f} ,$$

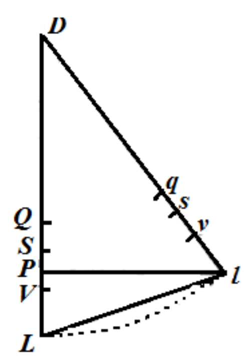
dahero wird

$f = \frac{253 \cdot\ 253 \cdot 3,16625}{40000} =\ 5,0667$ Schuh: oder nach Englischem Maaß wird $f =\ 5$ Schuh $2\frac{2}{3}$ Zoll $= 62\frac{2}{3}$ Zoll, wie der Autor gefunden.

ZWEYTE ANMERKUNG

Nachdem die Natur des Penduli auf diese Art untersuchet und erkannt worden, so ist man im Stande, damit die Experimente anzustellen, und dadurch die Geschwindigkeit einer jeglichen Kugel zu bestimmen.

Es sey also das Gewicht des ganzen Penduli $= P$, die Länge $DL = a$; das Centrum gravitatis des Penduli in Q und $DQ = g$; das Centrum oscillationis des Penduli in S und $DS = f$, welche Quantitäten auf die vorher beschriebene Weise gefunden werden. Lasst uns nun setzen, daß eine Kugel gegen dieses Pendulum auf den Punkt V geschossen, und von diesein Stoß das Pendulum biß in Dl fortgestossen vorden, wovon die Sehne Ll durch das Band angezeiget wird. Man bemerke also zuvörderst die Distanz DV, welche sei $= h$; ferner sey das Gewicht der Kugel $= p$, und die Sehne $Ll = k$, woraus nach der



Anweisung des Autoris die Geschwindigkeit der Kugel folgender Gestalt gefunden wird. Man stelle nehmlich diese Regul Detri an: wie sich verhält das Quadrat von DV oder h^2

zum Product $DQ \cdot DS$ oder fg, also das Gewicht des Penduli P zu einem andern Gewicht, welches seyn wird $= \frac{fg}{hh} P.$ Der Stoß des Penduli wird also eben so beschaffen seyn, als wann an statt des ganzen Penduli in V ein Gewicht $= \frac{fg}{hh} P.$ befindlich wäre, und den Stoß aushielte. Weil nun die Kugel nicht zurück prellet, so wird die Mittheilung der Bewegung nach den Gesetzen der weichen Cörper geschehen. Wann die Geschwindigkeit der Kugel, welche in V anstösst, derjenigen gleich gesetzt wird, welche ein schwerer Cörper durch den Fall aus der Höhe $= v$ erhält, und folglich der Quadrat-Wurzel daraus $\sqrt{v}$ proportional ist, so war die Grösse ihrer Bewegung vor dem Stoß $= p\sqrt{v}$, welche also auch nach dem Stoß unverändert bleibet. Dahero wird die Geschwindigkeit des Punkts V nach dem Stoß seyn $= \frac{p\sqrt{v}}{p + \frac{fg}{hh}\mathrm{P}} = \frac{hhp\sqrt{v}}{fgP + hhp}$ mit welcher dasselbe in dem darauf folgenden Schwung zu einer Höhe

$$= \frac{h^4 ppv}{\left(hhp + fgP\right)^2}$$

steigen wird. Da nun die Sehne $Ll = k$ durch die Erfahrung bekannt ist, so steiget das Punkt L in der That durch die Höhe

$$LP = \frac{Ll \cdot Ll}{2DL} = \frac{kk}{2a}$$

folglich steiget das Punkt V durch eine Höhe, welche sich zu jener verhält, wie $DV = h$ zu $DL = a$, und ist also $= \frac{hkk}{2aa}$. Woraus diese Vergleichung entspringt

$$\frac{h^4 p^2 v}{\left(fgP + hhp\right)^2} = \frac{hkk}{2aa},$$

und vird also

$$v = \frac{kk\left(fg\mathrm{P} + hhp\right)^2}{2aah^3 pp}$$

und

$$\sqrt{v} = \frac{k\left(fgP + hhp\right)}{ahp\sqrt{2h}} = \frac{fgP + hhp}{ahp} \times \frac{k}{\sqrt{2h}}$$

Hieraus wird nun die wahre Geschwindigkeit folgender Gestalt gefunden. Da ein frey herabfallender Cörper in einer Secunde durch eine Höhe von 15625 tausendsten Theilchen eines Rheinländischen Schues herab fällt, und mit der dadurch erhaltenen

Geschwindigkeit in einer Secunde einen Weg von 31250 solcher Theilchen durchläuft, die Geschwindigkeiten aber, welche ein Cörper aus verschiedenen Höhen erlangt, den Quadrat-Wurzeln daraus proportional sind: so wird sich verhalten $\sqrt{15625} : \sqrt{v} = 31250$ zu dem Wege, welchen die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit, so aus der Höhe v entspringt, zurück legt. Dahero dieser Weg seyn wird

$$= \frac{31250\sqrt{v}}{\sqrt{15625}} = 250\sqrt{v}$$

tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schues: wenn nehmlich v in eben dergleichen Theilchen ausgedruckt wird.

Weil nun $\frac{fgP + hhp}{ahp}$ eine blosse Zahl giebt, und es hierbey nicht darauf ankommt, was man sich bey den Buchstaben a, f, g, h, P und p für eines Maasses bedienet, so hat man nur nöthig k und h, oder den Bruch $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ in solchen Theilchen auszudrücken; und alsdann wird die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde so viel tausendste Theilchen eines Rheinl. Schuhes, als diese Zahl

$$\frac{250\left(fgP + hhp\right)}{ahp} \times \frac{k}{\sqrt{2h}}$$

ausweiset, oder so viel Rheinl. Schuhe, als diese Zahl $\frac{fgP + hhp}{ahp} \times \frac{k}{4\sqrt{2h}}$ anzeiget, austragen. Zur Rechnung wird diese Form

$$\left(\frac{fg}{ah} \cdot \frac{P}{p} + \frac{b}{a}\right) \times \frac{k}{4\sqrt{2h}}$$

bequemer seyn, welche, wann der Bruch $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ in tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schues ausgedrückt wird, anzeigt, wie viel Rheinl. Schuh die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde durchzulauffen im Stande ist. In dem von dem Autore angeführten Exempel ist nun

$P = 56\frac{3}{16}\,\text{Pf}.$

$p = \frac{1}{12}\,\text{Pf}.$ folglich $\dfrac{P}{p} = 674\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} a = 71\frac{1}{8}\ \text{Zoll)} \\ f = 61\frac{2}{3}\ \text{Zoll} \\ g = 52\ \text{Zoll} \\ b = 66\ \ \text{Zoll}\left(= 5335\ \text{tausendstel Rhinl. Sch.}\right) \\ k = 17\frac{1}{4}\,\text{Zoll}\left(= 1295\ \text{tausendstel Rhinl. Sch.}\right) \end{array}\right\}\ \text{Engl.}$$

Also ist

$$\frac{fg}{ah} = \frac{62\frac{2}{3} \times 52}{71\frac{1}{8} \times 66} = \frac{3268\frac{2}{3}}{4694\frac{1}{4}}$$

$$\& \quad \frac{fg}{ah} \cdot \frac{\text{P}}{p} = \ 468,053$$

$$\frac{h}{a} = \quad 0,928$$

$$\frac{fg}{ah} \cdot \frac{\text{P}}{p} + \frac{h}{h} = \ 468,981$$

Ferner ist $2h = 10670$, und die Rechnung wird folgender Gestalt durch die Logarithmos vollendet werden:

$$\begin{array}{rl} l2h & = 4,0281644 \\ l\sqrt{2h} & = 2,0140822 \\ l4 & = 0,6020600 \\ \hline l4\sqrt{2h} & = 2,6161422 \\ \text{von}\ \ lk & = \underline{3,1445742} \\ & \ 0,5284320 \end{array}$$

$$\text{Addir}\ l\left(\frac{fg}{ah} \times \frac{P}{p} + \frac{h}{a}\right) = \underline{2,6711544}$$

$$3,1995872$$

Die gehörige Zahl ist also

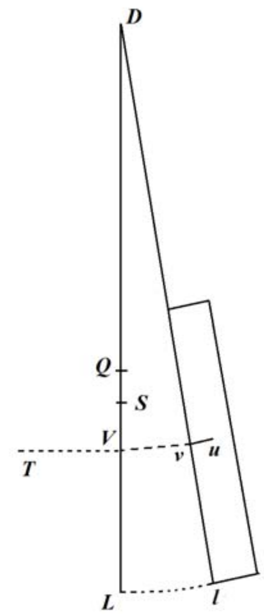
$$= 1583,388$$

und weiset, daß die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit in einer Secunde 1583 Rheinl. Schuh durchzulauffen vermögend ist. Da nun 970 Rheinl. Schuh 1000 Engl. Schuh betragen, so macht diese Geschwindigkeit 1632 Engl. Schuh in einer Secunde, welches von der Rechnung des Autoris nur um 9 Schuh differiret, dergleichen Unterscheid in diesem werk nicht zu achten ist. In der That muß auch die wahre Geschwindigkeit der Kugel etwas grösser seyn, als diese Rechnung anzeigt, weil die Resistentz der Luft verursachet, daß das Pendulum nicht so hoch aufgehoben wird, als solches kraft der eingedrückten Geschwindigkeit geschehen müsste. Wie viel aber diese Hinderniße austragen könne, wollen wir hernach untersuchen, wann wir den Grund dieser von dem Autore angegebenen Regel, um die Geschwindigkeit der Kugel zu berechnen, werden angezeigt haben.

DRITTE ANMERKUNG

Der Beweis der Regel, welche der Autor giebt, um die Geschwindigkeit der Kugel aus der Würkung des Stosses zu berechnen, findet sich an so wenig Orten ausgeführt, daß derselbe den meisten Lesern völlig unbekannt seyn wird. Derowegen wird nicht undienlich seyn, diese sonst ziemlich dunkle Materie, so viel unser gegenwärtiges Vorhaben verstattet, zu erläutern. Dieselbe gehöret nun zu der Lehre von der Veränderung der Bewegung, welche durch den Stoß zweyer an einander stossenden Cörper verursachet wird; wovon die Regeln, wann beyde Cörper dergestalt gerade auf einander stossen, daß die Linie, welche auf den Ort, wo sich dieselben berühren, perpendicular gezogen wird, durch eines jeden Centrum gravitatis durchgehet, genugsam bekannt, und in den meisten mechanischen Büchern anzutreffen sind: die Cörper mögen mit einer elastischen Kraft begabt seyn oder nicht. Wo aber dieser Umstand nicht statt findet, da lässt sich auch durch diese bekannten Regeln die Veränderung, so bey dem Stoß vorgehet, nicht bestimmen.

In dem gegenwärtigen Fall aber kommt noch dieses hinzu, daß der eine Cörper, nahmlieh das Pendulum, worauf der Stoß geschieht, nicht frey, sondern um eine Axe beweglich ist, welcher Umstand bey dieser Untersuchung insonderheit in Erwegung gezogen werden muß. Um aber eine jede Veränderung, welche in einem um eine Axe beweglichen Cörper vorgeht, zu bestimmen, so hat man auf das Momentum inertiae desselben zu sehen, welches erhalten wird, wann man ein jegliches Theilchen des Cörpers durch das quadrat seiner Distantz von der Axe multiplicirt, und alle diese Producte zusammen addirt: da man, wenn der Cörper frey beweglich ist, seine Inertiam oder das Gewicht selbst zu nehmen pflegt. Ferner muß auch bey dieser Bewegung um eine Axe nicht die darauf würkende Kraft selbst, sondern derselben Momentum in Betrachtung gezogen werden, welches entsteht, wenn man die Kraft durch die Perpendicular-Distantz ihrer Direction von der Axe multiplicirt. Dieses Momentum der Kraft durch das obige Momentum inertiae dividirt, giebt die absolute Vim acceleratricem der Bewegung um die Axe: und wenn dieser Bruch durch die Distantz eines beliebigen Punkts von der Axe multiplicirt wird, so kommt die Vis acceleratrix dieses Punkts heraus. Dahingegen bey einem frey beweglichen Cörper die Kraft durch die Inertiam oder das Gewicht desselben dividirt, die Vim acceleratricem zugeben pflegt. Weil nun die Distantz des Centri oscillationis *S* von der Axe nehmlich $DS = f$ heraus kommt, wenn man alle Theilchen des Penduli durch die Quadrate ihrer Distantzen von der Axe



multiplicirt, und die Summe aller dieser Producten, das ist das Momentum inertiae, durch das Product des Gewichts des ganzen Penduli P in die Distanz des Centri gravitatis von der Axe $DQ = g$, nehmlich durch Pg dividiret, so ist das Momentum inertiae $= Pfg$, und wird folglich auf diese Art leicht gefunden. Man pflegt gemeiniglich in Bestimmung der Veränderung, welche durch den Stoß zweyer Körper verursachet wird, nicht auf die Zeit zu sehen, in welcher dieselbe hervor gebracht wird, und viele scheinen in den Gedanken zu stehen, als wenn diese V er- 1 änderung plötzlich geschähe, und keine Zeit erfordere. Daß aber diese Meynung der Wahrheit entgegen sey, könnte durch viele Gründe dargethan werden, wann uns nicht der gegenwärtige Fall einen augenscheinlichen Beweis davon an die Hand gäbe: denn, da die Kugel ziemlich tief in das Holtz des Penduli hinein dringet, so wird niemand läugnen können, daß dazu nicht einige Zeit erfordert werde. Inzwischen ist doch diese Zeit sehr kurz, und man kann sicher annehmen, daß das Pendulum seine Stelle nicht merklieh verändere, indem der Stoß seine Würkung hervor bringt.

Es sey also *DL* die natürliche Stelle des Penduli, in welcher sich dasselbe befindet, ehe die Kugel dagegen geschossen wird; in derselben sey *Q* das Centrum gravitatis, *S* das Centrum oscillationis, und folglich *DQSL* eine Vertical-Linie. Man nenne ·wie vorher das Gewicht des ganzen Penduli $= \mathrm{P}$; die Linien $\mathrm{DL} = a$; $\mathrm{DQ} = g$; $\mathrm{DS} = f$. In dieser Lage werde eine Kugel, deren Gewicht $= p$, nach der Horizontal-Direction *TV* gegen dem Pendulo geschossen, dergestalt, daß der erste Stoß im Punkt *V* geschehe. Es sey $DV = h$, und *b* die Höhe, aus welcher ein Cörper durch den Fall eine der Kugel gleiche Geschwindigkeit bekommt; dahero wir diese Geschwindigkeit durch $\sqrt{b}$ andeuten, weil $\frac{1}{4}\sqrt{b}$ anzeigt, wie viel Rheinländische Schuhe die Kugel in einer Secunde durchlauffen würde, wann die Höhe *b* in tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schues ausgedruckt wird. Lasst uns nun setzen, daß nach Verfluß einer geringen Zeit = *t* das Pendulum in die Stelle *Dl* gebracht worden, und daß die Kugel schon in dem höltzernen Brett biß in *u* hinein gedrungen. Man nenne den kleinen Bogen $Vv = x$, und die Tiefe $vu = y$; ferner sey die Geschwindigkeit, welche des Penduli Punct *v* schon erlanget, $= \sqrt{v}$, und die Geschwindigkeit der Kugel in *u* sey $= \sqrt{u}$. Da nun in der unendlich kleinen Zeit *dt*, das Punkt des Penduli *v* durch *dx*, die Kugel aber durch $dx + dy$ fortrücket, so ist aus den Regeln der Bewegung

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx + dy}{\sqrt{u}}$$

In diesem Moment wird die Kugel noch etwas tiefer in das Holtz hinein dringen, und weil das Holtz wiedersteht, so wird dadurch die Geschwindigkeit des Penduli vermehrt, die Geschwindigkeit der Kugel aber vermindert. Es sey nun V die wiederstehende Kraft des Holtzes, so wird $\frac{V}{p}$ die Vis retardatrix der Kugel seyn, dahero entspringt

$$du = -\frac{V}{p}(dx + dy)$$

Hernach in so fern diese Kraft V auf das Pendulum würket, so wird das Momentum derselben seyn $= \mathrm{V}h$. Da nun das Momentum inertiae des Penduli ist $= Pfg$, so wird die Vis acceleratrix des Penduli im Punct v seyn $= \frac{\mathrm{V}hh}{\mathrm{P}fg}$, folglich

$$dv = \frac{Vhhdx}{\mathrm{P}fg}.$$

Jene Aequation durch diese dividirt gibt

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg(dx + dy)}{phhdx};$$

und weil

$$\frac{dx + dy}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

so wird

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg\sqrt{u}}{phh\sqrt{v}}$$

oder

$$\frac{phhdu}{\sqrt{u}} + \frac{Pfgdv}{\sqrt{v}} = 0$$

welche Aequation integrirt giebt

$$phh\sqrt{u} + Pfg\sqrt{v} = phh\sqrt{b},$$

weil im Anfange des Stosses ist $v = 0$ und $u = b$. Da nun die Würkung des Stosses völlig aufhöret, wenn die Geschwindigkeit des Penduli im Punkt v der Geschwindigkeit der Kugel gleich worden, so wird, wenn $\sqrt{s}$ die Geschwindigkeit des Penduli in v nach vollendetem Stoß andeutet, seyn oder

$$phh\sqrt{s} + Pfg\sqrt{s} = phh\sqrt{h}$$

oder

$$\sqrt{s} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg + phh}$$

welche Expression mit derjenigen, welche der Autor gegeben, vollkommen übereinkommt, und also biß hieher die Richtigkeit seiner Regel beweiset. Weil nun $\sqrt{s}$ die Geschwindigkeit andeutet, welche dem Pendulo im Punkt *V* durch den Stoß mitgetheilet wird, so wird

$$\frac{\sqrt{s}}{h} = \frac{ph\sqrt{b}}{Pfg + phh}$$

die Geschwindigkeit des Schwungs absolute anzeigen; woraus erhellet, daß der Schwung sehr klein seyn werde, wenn die Distantz *DV* sehr klein angenommen wird: hinwiederum aber wird der Schwung sehr klein, wenn *h* allzugroß angenommen wird. Hieraus lässt sich also die Frage auflösen, in welchem Punkt die Kugel mit ihrer Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ auf das Pendulum stossen müsse, damit dasselbe davon den stärksten Schwung bekomme. Man wird aber finden, daß dieses geschehe, wenn

$$Pfg = phh, \text{ oder } h = DV = \sqrt{\frac{Pfg}{p}}.$$

Dieses Punkt *V* ist also das sogenannte Centrum percussionis, und hieraus erhellet, daß dasselbe weder das Centrum gravitatis, noch das Centrum oscillationis sey; sondern ausser diesen Punkten noch die Verhältniß zwischen dem Gewicht des Penduli, und dem Gewicht der Kugel erfordere. Wenn also das Gewicht der Kugel *p* in Ansehung des Penduli *P* sehr klein ist, so wird das Centrum percussionis sehr tief hinab fallen. Man hat aber in dem gegenwärtigen Fall nicht nöthig, auf das Centrum percussionis zu sehen, sondern es ist vielmehr rathsam, dahin zu trachten, daß der dem Pendulo eingedruckte Schwung nicht allzugroß werde. Da wir aber jetzt die Geschwindigkeit des Punkts *V* gefunden; so ist noch übrig zu suchen, ·wie weit dadurch das Pendulum erhoben werden müsse. Weil nun bekannt ist, daß ein jedes Pendulum eben die Bewegung bekommt, als wenn das ganze Gewicht desselben in dem Centro oscillationis vereiniget wäre, so müssen wir hier auf das Centrum oscillationis sehen, welches aber, da nunmehro die Kugel im Pendulo steckt, etwas verändert wird. Um dieses zu finden, so suche man das Momentum inertiae, welches wegen der Kugel seyn wird $= Pfg + phh$; solches dividire man durch $Pg + ph$, so kommt die Distantz des centri oscillationis von der Axe

$$\frac{Pfg + phh}{Pg + ph}$$

wobey wir die Grösse der Kugel aus der Acht lassen. Wie sich also verhält h zu $\frac{Pfg+phh}{Pg+ph}$, also verhält sich die Geschwindigkeit des Puncts V nehmlich $\sqrt{s}=\frac{phh\sqrt{b}}{Pfg+phh}$ zur Geschwindigkeit des Centri oscillationis, welche seyn wird

$$=\frac{ph\sqrt{b}}{Pg+ph}.$$

Dieses muß also im folgenden Schwung durch einen Bogen steigen, dessen Sinus versus ist $=\frac{pphhb}{(Pg+ph)^2}$ und die Sehne

$$=\frac{ph}{Pg+ph}\sqrt{\frac{2b(Pfg+phh)}{Pg+ph}}.$$

Dahero die Sehne des Bogens, welchen das Punct L beschreiben wird, seyn muß

$$=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+pb)(Pfg+phh)}}.$$

Da nun diese Sehne durch das Experiment gefunden und $=k$ gesetzt worden ist, so wird

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

und folglich

$$\sqrt{b}=\frac{k\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}{pah\sqrt{2}}$$

Hier bedeutet b, was wir oben v genennet haben, nehmlich die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel durch den Fall erzeuget wird. Weil also nach des Autoris Regel heraus gebracht worden

$$\sqrt{b}=\frac{k(Pfg+phh)}{pah\sqrt{2h}}$$

so sicht man, daß dieselbe nicht richtig ist. Der Autor hat sich darinne versehen, daß er geglaubt, die Bewegung des Penduli geschehe eben, als wenn das gantze Gewicht, welches er gefunden, im Punkt V vereinigt wäre, da doch dieses nur vom Centro oscillationis gilt. Um also die vom Autore gefundene Geschwindigkeit der Wahrheit gemäß einzurichten, so muß man dieselbe noch durch $\sqrt{\frac{Pgh+phh}{Pfg+phh}}$ multipliciren. Dahero wenn *h* grösser ist als *f*, so findet der Autor die Geschwindigkeit der Kugel zu klein; zu groß aber, wenn *h* kleiner als *f*. Der Unterscheid wird aber gemeiniglich so klein seyn, daß man denselben leicht aus der Acht lassen kann. Denn da *p* in Ansehung des *P* und der Unterscheid zwischen *f* und *h* sehr klein ist, so muß die vom Autore gefundene Geschwindigkeit noch mit $1+\frac{h-f}{2f}$ multipliciret werden, welches in seinem Exempel

$$1+\frac{3\frac{1}{3}}{2\cdot 62\frac{2}{3}}=1+\tfrac{5}{188}$$

beträgt: folglich müssen zu der oben gefundenen Geschwindigkeit von 1632 Engl. Schuen in einer Secunde noch 43 Schuh addirt werden, dahero heraus kommt 1675 Engl. Schuh in einer Secunde; welcher Unterscheid gleichwohl noch ziemlich merklich ist. Weil *p* in Ansehung des *P* über die maassen klein ist, so wird beynahe seyn

$$\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}=Pg\sqrt{f}+\tfrac{1}{2}ph\sqrt{f}+\tfrac{1}{2}phh:\sqrt{f}=\frac{Pfg+\frac{1}{2}ph\left(f+h\right)}{\sqrt{f}},$$

folglich

$$\sqrt{b}=\frac{Pgk\sqrt{f}}{pah\sqrt{2}}+\frac{k\left(f+h\right)}{2a\sqrt{2f}}=\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{f+h}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}$$

Man setze also die blosse Zahl

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{f+h}{2f}\right)=n,$$

und exprimire *f* in tausendsten Theilchen eines Rheinl. Schuhes, so wird die Kugel mit der Geschwindigkeit, womit sie auf das Pendulum gestossen, in einer Secunde $\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}}$ Rheinl. Schuhe durchlauffen können. Da nun in dem von dem Autore angeführten Exempel ist:

$k=17\frac{1}{4}$, $a=71\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}=56$ Pf, $p=\frac{1}{12}$ Pf, $g=52$, $h=66$, $f=62\frac{1}{2}$ donc

so ist

$\frac{k}{a}=0,24253$, $\frac{\mathrm{P}}{p}=674,25$, $\frac{g}{h}=0,788$, $\frac{\mathrm{P}g}{ph}=531,309$, $\frac{f+h}{2f}=1,032$,

$$\frac{Pg}{ph}+\frac{f+h}{2f}=532,341,$$

folglich $n=129,109$ und $\frac{n}{4}=32,277$;

ferner ist

$$f = 62\tfrac{2}{3} \text{ Zoll und } \frac{f}{2} = 2532,78$$

dahero

$$\sqrt{\frac{f}{2}} = 50,326 \text{ und } \frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}} = 1624,37\,.$$

Also würde die Kugel in einer Secunde 1624 Rheinl. Schuh, oder fast 1675 Engl. Schuh haben zurück legen können.

Hierbey wird auch nicht undienlich seyn zu untersuchen, wie weit die Kugel in das Brett hinein dringt. Denn da die wiederstehende Gewalt des Holtze V beynahe allenthalben einerley ist, so entsteht aus der Aequation $du = -\frac{V}{p}(dx+dy)$ durch die Integration

$$u = b - \frac{V}{p}(x+y)$$

und also

$$x + y = \frac{p(b-u)}{V};$$

die andere Aequation aber

$$dv = \frac{Vhhdx}{Pfg}$$

gibt

$$v = \frac{Vhhx}{Pfg}$$

also

$$x = \frac{Pfgv}{Vhh}.$$

Nach geendigtem Stoß aber wird

$$u = v = \frac{p^2h^4b}{(Pfg+phh)^2} = s$$

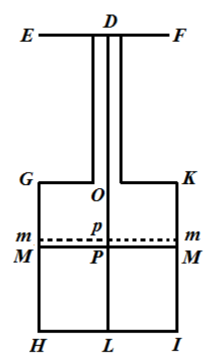
und also die Tieffe

$$vu = y = \frac{pb}{V} - \frac{s}{Vh^2}(Pfg+pbb) = \frac{ph}{V} - \frac{p^2hhb}{V(Pfg+phh)} = \frac{Pphfg}{V(Pfg+phh)}.$$

Hieraus erhellet, daß je grösser die Distantz DV angenommen wird, je weniger die Kugel hinein dringe. Eben diese Tiefe vu wird auch verringert, je kleiner das Momentum inertiae des Penduli Pfg ist. Da nun das Pendulum seine gehörige Stärke haben muß, so ist diese Verringerung nicht anders in in unserer Gewalt, als daß man das Pendulum so lang, und unten so leicht mache, als immer möglich ist, und dann die Kugel gegen das unterste Ende desselben loßschiesse. Wenn man dieses beobachtet, so wird man vielleicht ein solches Pendulum zu Stande bringen können, wodurch man nicht nur von Pistolen und Mußketen-Kugeln, wie der Autor gethan, sondern auch von Canonen-Kugeln die Geschwindigkeit zu bestimmen im Stande seyn wird.

VIEITE ANMERKUNG

Die Regel, welche der Autor giebt, um die Geschwindigkeit einer Kugel aus der Stärke des Stosses zu finden, hat also nur alsdenn ihre Richtigkeit, wenn die Kugel gegen das Centrum oscillationis des Penduli geschossen wird: geschieht aber der Schuß entweder tiefer oder höher, so wird im erstern Fall nach des Autoris Regel die Geschwindigkeit der Kugel zu klein, im letztern aber zu groß heraus gebracht. Es scheinet aber, daß in den meisten von dem Autore angestellten Experimenten der Schuß unter dem centro oscillationis geschehen, und dahero müssen die von ihm bestimmten Geschwindigkeiten zu klein seyn.
Es kommt aber hier noch ein anderer Umstand zu betrachten vor, welcher von dem Autore übergangen worden, und gleichfalls verursachet, daß die Geschwindigkeit grösser wird, als die bißherige Rechnung ausweiset. Dieser Umstand ist die Resistentz der Luft, davon die Würkung darinne bestehet, daß das Pendulum von dem Stoß nicht so weit von seiner natürlichen Lage weggetrieben wird, als geschehen würde, wenn kein Wiederstand, vorhanden wäre. Da nun in der Rechnung angenommen worden, daß das Pendulum nach dem Stoß so hoch steige, als wenn keine Hinderniß wäre, so ist klar, daß die wahre Länge der Sehne *Ll*, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel bestimmt werden muß, größer ist, als das Experiment anzeigt; weswegen folglich auch die Geschwindigkeit der Kugel um eben so viel vermehret werden muß. Ungeachtet aber dieser Unterscheid sehr geringe ist, indem bey dem ersten Schwung die von der Luft verursachte Verminderung der Bewegung gemeiniglich nicht sehr merklich ist, so wollen wir doch diese Würkung Luft einigermassen untersuchen, damit wir völlig versichert seyn können, ob man dieselbe ohne Fehler aus der Acht lassen könne oder nicht? Wir wollen zu diesem Ende die hintere Fläche des Penduli, auf welche die Resistentz der Luft geschieht, in irgend einer Stelle während dem Aufsteigen betrachten.



Es sey also die Geschwindigkeit, womit das unterste Punkt *L* sich um die Axe *EF* bewegt, $=\sqrt{v}$ oder gleich derjenigen Geschwindigkeit, welche ein Cörper, so durch die Höhe *v* herunter fällt, erlangt; und die Entfernung dieses untersten Punktes *L* von der Axe *EF* sey, wie wir schon vorher gesetzt, $DL = a$. Man ziehe ferner auf der Fläche dieses Penduli nach Belieben eine Horizontal-Linie *MPM*, und nenne $\mathrm{DP} = x$; so wird die Geschwindigkeit eines jeglichen Punkts in dieser Linie seyn $\frac{x}{a}\sqrt{v}$; und folglich die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeuget wird, $=\frac{xxv}{aa}$ Der Wiederstand der Luft gegen diese Linie *MPM* ist also eben so groß, als wenn eine Luft-Säule, deren Höhe $=\frac{xxv}{aa}$, darauf druckte. Wenn wir nun die Breite $MM=b$ setzen, und die Linie *mm* unendlich nahe mit *MM* parallel ziehen, so wird der Raum $MmmM=bdx$, und der Druck, den derselbe von der Luft aussteht, $=\frac{bv}{aa}xxdx$.

Weil aber hier nicht sowohl der Druck selbst, als dessen Moment in Betrachtung kommt, so wird das Moment

$$\frac{bv}{aa}x^3dx,$$

wovon das Integrale ist

$$=\frac{bv}{aa}\left(\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{4}DO^4\right).$$

Man setze also $\mathrm{DO}=c$, und mache $x=a$, so kommt das Momentum der Resistentz, welche die Fläche *GHIK* empfindet,

$$=\frac{bv}{4aa}\left(a^4-c^4\right)$$

Die Resistentz des schmalen Theils *DO* kann, in Ansehung der gefundenen, theils wegen der kleinen Fläche *DO,* theils wegen des noch mehr verringerten Moments, aus den Augen gesetzt werden. Das Moment der Resistentz ist also gleich $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{4aa}v$; um dieses gehörig auszudrucken, so rechne man das Gewicht der Luft, welche den Raum $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{4aa}$, oder das Gewicht des Wassers, welches den Raum $\frac{b\left(a^4-c^4\right)}{3456aa}$ ausfüllet, aus, und setze dieses Gewicht $=Rv$, so wird das Moment der Resistentz der Luft seyn $=Rv$.

Lasst uns nun setzen, das Pendulum sey in seinem Hinaufsteigen in die Stelle *Dl* gekommen und der Winkel *LDl* sey $=\varphi$. Die Geschwindigkeit des Punkts *l* sey, wie oben gesetzt worden, $=\sqrt{v}$, die Geschwindigkeit aber des Punkts *L* im Anfange des Schwungs sey $=\sqrt{i}$. Wenn sich nun das Pendulum *Dl* aus dieser Stelle noch weiter von *DL* entfernet, so stehet ihm sowohl seine Schwehre, als die Resistentz der Luft im Wege: von dieser ist das Momentum, wie wir gefunden $=Rv$, wenn nehmlich das Gewicht *R* auf gemeldte Art bestimmet worden. Die Schwehre aber des Penduli, welche $=P$, würkt, als wenn sie ganz im Centro gravitatis *q* concentrirt wäre, und da die Distantz $Dq=DQ=g$, so wird das Momentum seyn $=Pg\sin.\varphi$. Das Momentum der Materie aber des ganzen Penduli ist, wie wir oben gesehen, $=Pfg$. Dahero die vermindernde Kraft der Bewegung absohlte ist

$$=\frac{Pg\sin.\varphi+Rv}{Pfg};$$

im Punkt *l* aber wird diese Kraft

$$= \frac{Pag\sin.\varphi + Rav}{Pfg}$$

Indem also das Punkt *l* durch das Elementum des Bogens *Ll,* welches ist $ad\varphi$, fortgeht, so wird seyn

$$dv = \frac{-Pa^2gd\varphi\sin\varphi - Ra^2vd\varphi}{Pfg} = \frac{-a^2d\varphi\sin\varphi}{f} - \frac{Ra^2vd\varphi}{Pfg},$$

odor

$$dv + \frac{Ra^2vd\varphi}{Pfg} = \frac{-a^2d\varphi\sin\varphi}{f}.$$

Um diese Aequation integrabel zu machen, so multiplicire man dieselbe durch $e^{\mathrm{R}aa\varphi:Pfg}$, wo *e* die Zahl bedeutet, deren Logarithmus hyperbolicus 1, oder man nenne um der Kürze willen $\frac{\mathrm{R}a^2}{Pfg} = m$, und multiplieire mit $e^{m\varphi}$, so hat man

$$e^{m\varphi}\left(dv + mvd\varphi\right) = \frac{-a^2}{f}e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi$$

wovon das Integrale ist

$$e^{m\varphi}v = \frac{-a^2}{f}\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi$$

Da nun $-\int sin.\varphi d\varphi = cos.\varphi$, so ist

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi = e^{m\varphi}cos.\varphi - \int e^{m\varphi}d\varphi cos.\varphi$$

Und weil $-\int d\varphi cos.\varphi = sin.\varphi$, so wird seyn

$$\int e^{m\varphi}d\varphi cos.\varphi = e^{m\varphi}sin.\varphi - m\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi,$$

und also.

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi = e^{m\varphi}\left(cos.\varphi - m\sin.\varphi\right) + mm\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi$$

Woraus entspringt

$$-\int e^{m\varphi}d\varphi sin.\varphi = \frac{e^{m\varphi}\left(cos.\varphi - m\sin.\varphi\right)}{1+mm}$$

Dahero erhalten wir diese Aequation:

$$e^{m\varphi}v = \frac{e^{m\varphi}aa\left(cos.\varphi - msin.\varphi\right)}{\left(1+mm\right)f} + \text{Const.}$$

Diese Constans muß aus dem Anfange der Bewegung, welcher bekannt angenommen worden, bestimmt werden. Denn, wenn man setzt $\varphi = 0$, so wird $v = i$, und also bekommt man

$$i = \frac{aa}{(1+mm)f} + \text{Const.}$$

folglich

$$\text{Const.} = i = \frac{aa}{(1+mm)f}.$$

Derowegen ist

$$e^{m\varphi}v = i - \frac{aa + e^{m\varphi}aa(cos.\varphi - msin.\varphi)}{(1+mm)f}.$$

Wenn wir nun setzen, daß *Dl* die höchste Stelle anzeige, zu welcher das Pendulum im ersten Schwung gelangen kann, und wo dasselbe wiederum herunter zu fallen beginnt, so wird daselbst $v = 0$, und also

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}aa(cos.\varphi - msin.\varphi).$$

Alsdenn aber wird die Sehne des Bogens $Ll = k$, als welche durch das Experiment erkannt wird. Dahero ist

$$sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a}, cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$$

und weiter

$$cos.\varphi = 1 - \frac{kk}{2aa}, \text{ und } sin.\varphi = \frac{k}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$$

folglich

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}aa\left(1 - \frac{kk}{2aa} - \frac{mk}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}\right)$$

oder

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}\left(aa - \tfrac{1}{2}kk - \tfrac{1}{2}mk\sqrt{(4aa - kk)}\right).$$

Wenn aber die Resistentz völlig verschwände, so würde $m = 0$, und die Sehne *Ll* etwas grösser, als *k*. Lasst uns also setzen, die Sehne werde in diesem Fall *s*, so kömmt heraus $fi = \tfrac{1}{2}ss$. Solchergestalt kan man den unbekannten Buchstaben *i* aus der Rechnung bringen, da dann kommt :

$$(1+mm)ss = 2aa - e^{m\varphi}\left(2aa - kk - mk\sqrt{(4aa - kk)}\right)$$

aus welcher man die wahre Länge der Sehne *s*, welche statt finden würde, wenn keine Resistentz da wäre, und welche man in der Rechnung statt der observirten Sehne *k* gebrauchen muß, finden kann. Denn *a*, *k* und der Bruch $m = \frac{\mathrm{R}aa}{\mathrm{P}fg}$; sind bekannt, und φ ist der Winkel, dessen Helfte zum Sinu hat $\frac{k}{2a}$: wenn der Sinus totus $=1$ angenommen wird. Diese Rechnung kan aber auf zweyerley Art erleichtert werden. Erstlich weil die Resistentz sehr geringe ist, so wird *m* ein so kleiner Bruch, daß man für $e^{m\varphi}$ setzen kann $1+m\varphi$, indem die höheren Dignitäten des *m* ohne Fehler ausgelassen werden können. Dahero wird

$$(1+mm)\,ss = kk - 2maa\varphi + mkkz + mk\sqrt{(4aa-kk)}$$

oder

$$ss = kk - 2maa\varphi + mkk\varphi + mk\sqrt{(4aa-kk)}\,.$$

Zweytens ist auch gemeiniglich in dergleichen Experimenten der Winkel *LDl* von wenig Graden, und dahero der Sinus des halben Winkels *p* dem Bogen selbst beynahe gleich. Dahero wird

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a} + \frac{k^3}{48a^3} \text{ und } \varphi = \frac{k}{a} + \frac{k^3}{24a^3}$$

und also

$$ss = kk - 2mak - \frac{mk^3}{12a} + \frac{mk^3}{a} + mk\sqrt{(4aa-kk)}$$

Weil aber *k* in Ansehung des *2a* so sehr klein, so ist

$$\sqrt{(4aa-kk)} = 2a - \frac{kk}{2a},$$

und folglich

$$ss = kd + \frac{2mk^3}{3a} \text{ oder } s = k + \frac{mkk}{3a},$$

weilen wir die höheren Dignitäten von *h* sicher weg lassen können. In der obbeschriebenen Rechnung müssen wir also an statt der Sehne *k* diesen jetztgefundenen Werth $k+\frac{mkk}{3a}$ gebrauchen; und da die Geschwindigkeit der Kugel der Sehne *k* selbst proportional ist, so erhält man die wahre Geschwindigkeit der Kugel, wenn man die gefundene Geschwindigkeit noch mit $k+\frac{mkk}{3a}$: multipliciret, und auf diese Art kann man diese Correction, so oft dieselbe merklich ist, leicht anstellen.

Wir wollen die Probe an dem von dem Autore angeführten Exempel machen. Derselbe beschreibt zwar nicht, wie groß sein Brett, welches er auf das Pendulum geschraubt, gewesen, es scheinet aber, daß dasselbe zum wenigsten 2 Schuh lang, und eben so breit gewesen. Da nun die gantze Länge $\mathrm{DL} = a = 71\tfrac{1}{8}$ Zoll, so wird in Schuhen seyn $a = 5{,}927$, also $c = 3{,}927$, und $b = 2$ Schuh. Dahero ist

$$\begin{aligned} a^4 &= 1134{,}07 \\ c^4 &= \;\;237{,}82 \\ \hline a^4 - c^4 &= \;\;996{,}25 \\ \text{und } b\left(a^4 - c^4\right) &= 1992{,}50 \\ \text{folglich } \frac{b\left(a^4 - c^4\right)}{3456aa} &= 0{,}01641. \end{aligned}$$

Dieser Raum hält also $\frac{1641}{100000}$ Cubische Schuh. Da nun ein Cubischer Schuh Wasser ungefehr 70 Pf wiegt, so wird das Gewicht $R = 1{,}1487$ Pf. Es ist aber $P = 56{,}187$ Pf und gleichfalls in Schuen $f = 5{,}222$ und $\mathrm{g} = 4{,}333$. Dahero wird

$$m = \frac{\mathrm{R}aa}{\mathrm{P}fg} = 0{,}03174,$$

und da $k = 1{,}4375$ Schuh, so bekommt man:

$$\frac{mk}{3a} = 0{,}002566,$$

das ist beynahe

$$\frac{mk}{3a} = \frac{1}{400}.$$

Derowegen ist die durch obige Methode gefundene Geschwindigkeit um $\frac{1}{400}$ zu klein.

Da wir nun gefunden, daß die Kugel in einer Secunde 1675 Englische Schuh fort gegangen, so trägt diese Correction nicht mehr als 4 Schuh aus, dergestalt, daß die Kugel in einer Secunde 1679 Schuh hätte lauffen können. Der Autor hat nun für diesen Fall nur 1641 Schuh gefunden, da doch nach seiner eigenen Regel nur 1632 hätten heraus kommen sollen. Weil aber seine Regel selbst unrichtig, so war aus diesem Grunde schon diese Geschwindigkeit um 43 Schuh zu klein. Welcher Fehler also noch durch die Resistentz der Luft um 4 Schuh vermehret wird, dergestalt, daß des Autoris Regel in diesem Exempel die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde um 47 Schuh zu klein angiebt, welcher Unterscheid nach seinen eigenen Gründen allzugroß ist, als daß man denselben aus der Acht lassen könnte. Wir haben aber allhier die Resistentz noch gewiß zu klein angenommen, und dabey auch nicht auf die Reibung der Axe gesehen, welche auch noch etwas austragen würde: dergestalt, daß man sicher behaupten kann, daß die Kugel, womit das Experiment angestellt worden, in einer Secunde zum wenigsten 1680 Englische Schuhe durchlauffen haben würde.