PROPOSITION IX.

To compare the actual Velocities with which Bullets of different Kinds are discharged from their respective Pieces, with their Velocities computed from the theory.

How to determine the actual velocities with which bullets are discharged, has been amply shewn in the last proposition ; and how to compute the velocity with which they would be discharged according to our theory, has been likewise fully explained in the sixth proposition;. we shall here then compare the results of our theory with experience, and thence evince, how accurately that theory agrees with the real motions of bullets, though founded on principles no ways connected with these experiments.

The first experiments, I shall exhibit, were made, with a barrel of the same dimensions with the example of the sixth proposition, the ball being $\frac{3}{4}$ of an inch in diameter, the length 45 inches, and the cavity containing the powder $2\frac{3}{8}$ inches, which, as the barrel exceeded the bullet in diameter by about the $\frac{1}{40}$ of an inch, just contained 12dw. of powder. The bullet thus made use of was $\frac{1}{12}$ of a pound, avoirdupois, in weight, and consequently the same with the example of the seventh proposition ; but the board on the pendulum used here was 4lb. lighter than what was assigned in that example; from these circumstances, and the velocity which by the theory the bullet ought to be discharged with, there is known the chord of the arch measured on the ribbon, through which the pendulum should ascend after the stroke, if the theory be true : how near this agrees with our experiments, will appear by the following table :

No .	Quantity of Powder. Dw.	Chord of its ascending arch measured on the ribbon.	The same by the theory.	Error of the theory.
1	12	18,7	19,0	+,3
2	12	19,6	19,0	-,6
3	6	13,6	13,4	-,2

The next experiments were made with the same barrel, but the board on the pendulum was now of little more weight than that in the example of the seventh proposition.

No.	Length of the cavity containing the powder or line AF, in fig.1 Inches.	Quantity of powder. Dw.	Chord of its Ascending arch measured on the ribbon. Inch.	The same by the theory. Inch.	Error of the theory. Inch.
4	$2\frac{5}{8}$	6	11,9	12, 1	+,2,
5	$2\frac{5}{8}$	6	12,2	12, 1	-,1
6	$1\frac{3}{4}$	6	13,2	13,6	+,4.
7	$1\frac{3}{4}$	6	13,9	13,6	-,3
8	$2\frac{5}{8}$	12	16,7	17,2	+,5
9	$2\frac{5}{8}$	12	17,5	17,2	-,3
10	$2\frac{5}{8}$	12	16,9	16,8	-,1
11	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	16,8	-;2
12	$2\frac{5}{8}$	6	11,7	11,5	-,2
13	$2\frac{5}{8}$	6	11,1	11,5	+,4
14	$2\frac{5}{8}$	6	16,7	16,3	-,4

The last five numbers resulting from the theory are corrected from the quantity of bullets lodged in the board, which, as, any other experiments of a different kind were tried in the interval, amounted at last to above two pounds; whence the weight of the pendulum being increased, its vibration with the same blow must be proportionally diminished.

The next experiments were made with a barrel of the same bore with the last, but only 12,375 inches in length to distinguish them, we shall for the future denominate the first barrel by the letter A, and this short one by C. The board on the pendulum was at first rather lighter than in the example of the seventh proposition:

		Extent of the cavity containing the powder.	Quantity of powder.	Chord of the ascending arc Measured on the ribbon.	The same by the theory.	Error of the theory.
No.	Bar.	Inch.	Dw.	Inch.	Inch.	
15	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,7	12,8	+,1
16	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,6	12,8	+,2
17	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,4	12,8	+,4
18	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	17,3	+,3
19	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	+,0
20	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+,1
21	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	+,0
22	A	$2\frac{5}{8}$	6	12,4	12,2	-,2

In some of the following experiments a third barrel was used of the same bore with the other two, but 24,312 inches in length: this, barrel I denominate B ; the board fixed on the pendulum was at first but little heavier than that in the seventh proposition ; and when in the course of the experiments it is sensibly increased in the weight, I diminish the numbers arising from the theory by a corresponding part.

		Extent of the cavity containing the powder.	Quantity of powder.	Chord of the ascending arc Measured on the ribbon.	The same by the theory.	Error of the theory.
No.	Bar.	Inch.	Dw.	Inch.	Inch.	
23	C	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+,1
24	C	$2\frac{5}{8}$	9	15,2	15,0	-,2
25	C	$2\frac{5}{8}$	9	15,4	15,0	-,4
26	A	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+1,3
27	A	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+1,3
28	A	$2\frac{5}{8}$	6	8,7	9,	+,3
29	A	$2\frac{5}{8}$	12	12,3	12,5	+,2
30	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0,0
31	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0,0
32	B	$2\frac{5}{8}$	6	10,3	10,5	+,2
33	A	$1\frac{3}{4}$	8	14,7	14,5	-,2
34	A	4	12	15,7	15,3	-,2

The error in the 26 and 27th experiments being much greater than what has occurred to me in any other trials, I suspect, that some mistake was made in the weight of the powder, or that the barrel (which had indeed lain by in a moist place) was very damp ; which circumstance, I know by experience, will considerably diminish the action of the powder.

The following experiments were made with a pendulum much heavier, it weighing in the whole 97 lb. its centre of gravity was 55,625 inches distant from its axis of suspension, and 200 of its small swings were performed in the space of $255''\frac{3}{4}$, whence its centre of oscillation is 63,9 inches distant from the axis of suspension. Also sometimes another barrel was used 7,06 inches in length, and ,83 in diameter; its ball was exactly fitted to the bore without any windage, so that it went in with difficulty ; the weight of this ball was $33\frac{1}{2}$ dw. This barrel we shall denominate, D.

		Extent of the cavity containing the powder.	Quantity of powder.	Chord of the ascending arc Measured on the ribbon.	The same by the theory.	Error of the theory.
No.	Bar.	Inch.	Dw.	Inch.	Inch.	
35	C	$2\frac{5}{8}$	12	9,2	9,2	+,0
36	C	$2\frac{5}{8}$	12	9,5	9,2	-,3
37	C	$5\frac{1}{4}$	24	11,7	11,3	-,4
38	A	$7\frac{7}{8}$	36	13,2	12,6	-,6
39	A	$2\frac{5}{8}$	12	9,3	9,1	-,2
40	A	$1\frac{3}{4}$	12	7,6	8,1	+,5
41	A	$2\frac{5}{8}$	12	6,1	6,6	+,5
42	B	$2\frac{5}{8}$	12	6,5	6,6	0,1
43	B	$2\frac{5}{8}$	12	8,0	8,2	+,2
44	B	$2\frac{5}{8}$	12	8,3	8,2	-,1
45	A	$1\frac{3}{4}$	12	9,5	9,1	-,4
46	A	4	12	9,1	9,1	,0
47	A	$2\frac{5}{8}$	6	7,2	6,5	-,7
48	A	$2\frac{5}{8}$	6	6,7	6,5	-,2
49	C	$2\frac{5}{8}$	12	6,8	6,7	-,1
50	C	$2\frac{5}{8}$	12	7,5	6,7	-,8
51	C	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+,1
52	C	$2\frac{5}{8}$	6	5,0	4,8	-,2

53	D	$2\frac{5}{8}$	12	7,0	7,2	+,2
54	D	$2\frac{5}{8}$	12	7,1	6,8	-,3
55	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+,1
56	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,8	4,8	,0
57	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+,1
58	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+,1
59	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,6	6,5	-,1
60	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,7	6,5	-,2
61	A	$2\frac{1}{16}$	12	9,0	9,1	+,1

The error in the 50th experiment, the greatest in this set, was doubtless owing to the wind ; for the 49th , which was made immediately, before it in the same manner, and with the same quantity of powder, differs but little from the theory. The excess of the 38th experiment above the theory, was in part occasioned by the impulse of the flame on the pendulum, which in this large quantity of powder was plainly to be discerned.

This theory is farther confirmed too, by experiments made on the action of very small quantities of powder. We have hitherto supposed the powder when fired to be equally hot with iron at the beginning of its white heat; but we have observed that in very small quantities of powder the heat is probably less than this, and consequently the elasticity in those cases less than what arises from this supposition. Now this decrease of elasticity in small quantities of powder we have found by many trials actually to take place ; for instance; in the example of the 7th proposition, the velocity, which should be given to the ball by the action of the powder according to the theory is in round numbers that of 1670 feet in 1 ", and this velocity we have found, in the preceding experiments to be the medium velocity, which the ball really receives in those circumstances. If now, the barrel and position of the ball remaining the same ; there be placed in the same space DEGC containing likewise the same l dw. of powder instead of 12, which is the quantity supposed in that example; it follows from the principles there laid down, that if the elasticity of the smaller charge be the same in proportion to its quantity with that of the larger, then the velocity of the bullet, when impelled by the explosion of the smaller charge, will be to the velocity of a bullet impelled by the greater charge, in the sub-duplicate ratio of the quantities of the respective charges ; that is, in the sub-duplicate ratio the true and genuine determination of the force and manner of acting of fired gunpowder.

This theory, as here established, supposes, that in the firing of gunpowder about $\frac{1}{10}$ of its substance is converted by the sudden inflammation into a permanent elastic fluid, whose elasticity, in proportion to its heat and density, is the same with that of common air in the like circumstances ; it further supposes; that all the force exerted by gunpowder, in its most violent operations, is no more than the action of the elasticity of the fluid thus generated ; and these principles enable us, as we have seen, to determine the velocities of the bullets impelled from firearms of all kinds, and are fully sufficient for all purposes, where the force of gunpowder is to be estimated. Whether this fluid be true and genuine air, of another substance, we shall not discuss in this place, as it is an enquiry no ways connected with the design of this treatise

From this theory many deduction may be made of the greatest consequence to the practical part of Gunnery. From hence the thicken of a piece, which will enable it to confine without bursting any given charge of gunpowder, is easily determined, since the effort of the powder is known. From hence appears the incondusiveness of what some modern authors have advanced, relating to the advantages of particular forms for the forms of chambers of mortars and cannon; for all their labored speculations on this head are evidently founded on very erroneous opinions about the action of fired powder. From this theory too, we are taught the necessity of leaving the same space behind the bullet, when we would by the same quantity of powder communicate the same velocity to the bullet; since on our principles it follows, that the same power has a greater or less degree of elasticity, according to the different spaces it occupies. The method, which I have always practised for this purpose, has been by marking the rammer ; and this is a maxim, which ought not to be dispensed with, when cannon are fired at an elevation, particularly in those called by the French *Batteries à ricochet.*

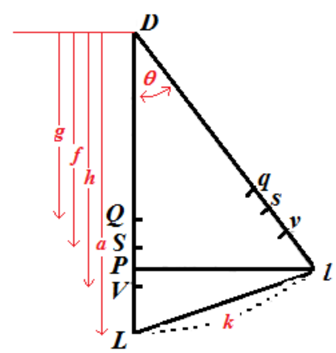
From the continued action of the powder ; and its manner of expanding described in this theory ; and the length and weight of the piece; one of the most essential circumstances in the well-directing of artillery may be easily ascertained. All practitioners are agreed, that no shot can be depended on, unless the piece be placed· on a solid platform ; for if the platform shakes with the first impulse of the powder, it is impossible but the piece must likewise shake, which will alter its direction, and render its shot uncertain. To prevent this accident, the platform is usually made extremely firm, to a considerable depth backwards ; so; that the piece is not only well supported in the beginning of its motion, but likewise through a great part of its recoil. However, it is sufficiently obvious, that when the bullet is separated from the piece, it can no longer be affected by the trembling of the piece or platform; and by a very easy computation it will be found, that in a piece 10 feet in length, carrying a bullet of 24lb. and charged with 16 lb of powder, the bullet will be out of the piece, before the piece has recoiled $\frac{1}{2}$ an inch; whence, if the platform be sufficiently solid at the beginning of the recoil, the remaining part of it may be much slighter ; since its unsteadiness beyond the first $\frac{1}{2}$ inch will have no influence on the direction of the shot. And hence a more compendious method of constructing platforms may be found out.

From this theory it also appears, how greatly those authors have been mistaken, who have attributed the force of gunpowder, or at least a considerable part of it, to the action of the air contained either in the powder or between the intervals of the grains; for they have supposed, (though indistinctly enough) that air to exist in its natural elastic state, and to receive all its addition of force from the heat of the explosion. But, from what we have experimented in the fifth proposition, relating to the increase of the elasticity of the air by heat, we may conclude, that the heat of the explosion cannot augment the elasticity of the air to five times its common quantity; consequently, the force arising from this cause only cannot amount to more than the 200th part of the real force exerted on this occasion.

Having thus dispatched the general confirmation of our theory, we shall proceed to the examination of some other particulars relating to this subject ; which, though easily enough flowing from the principles already laid down, do yet, from the novelty and singularity of the matter, merit a circumstantial discussion.

FIRST REMARK

In this proposition, the author compares the speeds of bullets calculated according to his theory, with those he has found by the machine described in the previous proposition, and one finds throughout so precise an agreement, such as one could hardly expect from a false theory. Now in order to put in place a more diligent investigation about this, in the first place, to have made attempts to this end, and to take into consideration the conclusions derived from them, as we have noted in the previous proposition. But in the same place we have indicated that in the rule used by the author to determine the speed of the ball from the measured length of the ribbon by means of chord *Ll*, to be inaccurate, and only in accordance with the truth in the case where the ball is fired towards the center of oscillation of the pendulum itself. Then if one expresses the weight of the pendulum by P, the weight of the bullet by p, and puts the length of the whole pendulum from the axis as far as to the ribbon, $DL = a$, the distance of the centre of gravity from the axis $DQ = g$, the distance of the centre of oscillation from the axis $DS = f$, the distance of the point *V*, where the bullet strikes, from the axis $DV = h$, then from the author's rule, the speed of the bullet is expressed by this formula



$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{h}{f}\right)\frac{f}{\sqrt{2h}};$$

But in fact this itself must be put in the same place :

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{h+f}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}},$$

as we have obtained above for the case in which *p* is very small compared to *P*. Indeed in neither case has attention been paid to air resistance, but we can ignore the same, as this only results in a very few feet. On its own, the inaccuracy of the rule used by the author sometimes can cause a marked difference in the speed of the ball ; as can be seen in the example calculated above, because that speed found by the author emerged 43 feet too small, which was about a 40^{th} part short of the whole speed. This difference arises from this, that in this experiment the ball has been fired into the pendulum under the centre of oscillation S, and as the greater the distance between the centre of oscillation and the

point V, where the bullet strikes, according to which so much more will the calculation from the author's rule depart from the truth. While in both formulas the quantities $\frac{h}{f}$ and $\frac{h+f}{2f}$ are very small with respect to the first quantity $\frac{Pg}{ph}$, so the reduced velocity found by the author's rule to the true speed is almost always in the ratio $\sqrt{f}$ to $\sqrt{h}$. Thus, the more h is different from f, the error will be even greater. Since the author, as it appears from his experiments, fired a rather large number of balls into the same wood, and never two which could have collided at the same place, and it is clear that the difference between f and h soon become either larger or smaller. In the present case there was $f = 62\frac{2}{3}$ inches, and the whole length of the pendulum $71\frac{1}{8}$ inches. As also in a trial, it is easy to assume that the distance $DV = h$ were 69 inches, so the speed itself found by the author has the ratio to the true speed, as $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ to $\sqrt{69}$, that is nearly as 20 to 21, and so bears an error of a twentieth part, according to which the speed found would be too small. If the centre of gravity had been placed towards the middle of the board without danger, its distance being 52 inch from the axis, it would be presumed that the balls against the same and even higher, only about 45 inches of so was shot from the axis. In this case the speed of the bullet found by the author would be too great, and if the distance DV were only $= 45$ inches, so the reckoned speed itself must be to the correct ratio as $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ to $\sqrt{45}$, that is, as 13 to 11. Thus the same would be more around the sixth part too great. Now because in all these experiments, the author has not noted how far the point V have been moved from the axis of the pendulum, where the ball has been pushed up, it is not possible to say how large the error may be in each one. If the speed found were around 1700 feet per second, so it can be, that the number in one case to be around 85 feet too small, but in another the speed would be around 262 feet too great.
Or because there the author has not recorded the actual speed itself, but only the length of the chord, which is proportional to the speed: if the same is 16 inch long, the error in the measurement could be 0.8 inches when the ball is shot right at the bottom of the board, and just 2.5 inches to be delivered, if the same has been shot at the top. Here the uncertainty in this latter part would not be enough to close the gap between theory and experiment.

It is also not evident from the description of these experiments that the author was very careful in measuring the distance $DV = h$; because for the same situation with equal charge being shot from the very same barrel many times, always bringing forth the same length $Ll = k$ for the string ; but it is hard to believe that in all these experiments the ball has constantly struck the wood to the same height. Because even if he were able to shoot always to the same point, he would not be allowed to do so, without that thrusting against another ball : hence he always had to shoot with diligence at different points of the wood, and since the ball had a diameter of $\frac{3}{4}$ inches, it always had to be one of the others, at least 1 inch apart. Further he does not say, and truly it is not probable, that all the bullets were going to lie on a horizontal line of the board, and also all were to be an equal distance from the axis; but if one ball has struck the board around one inch higher or lower, so must the line Ll still have been put to become around 0,1 inch greater or smaller, namely if the length of the whole line is over 10 inches ; a difference of two inches would produce an error in the line of 0,2 inches, of 3 inches 0, 3 inches and so forth. Now this error arises from the inexactitude of the author's rule, in so far as the same differs from the truth values. But if this theory were correct, so one must still go about the measurements of the distance $DV = h$ with much more diligence. Then from the author that speed of the bullet is close to $\frac{k}{a}.\frac{Pfg}{ph\sqrt{2h}}$, or, with all other things being equal, as $\frac{1}{h\sqrt{h}}$, so one can indeed see, that a little difference in this distance h cannot be neglected. Let us suppose, that if h were equal to 66 inches, the chord amounts to $k = 16$ inches ; so it follows, that even if this difference were only about 1 inch greater or less, the chord k would still be around $\frac{1}{3}$ rd of an inch greater or less. Now we have not come across suchlike noticeable differences in the calculated length of the chord for shots of equal strength, so either they must all be on a horizontal line going along the wood, or the author has not considered the different distances of the points V in his account ; now because the first supposition is not probable, so one must concede the latter. But we want to recover the correctness of these experiments, to think rather, that if not all shots go on a horizontal line on the board, the difference in the height still never has been carried over an inch ; in which case nevertheless this error of $\frac{1}{3}$ rd inch of the author not to be exceeded by his more accurate magnitudes ; as which circumstance was born out more just as often as the increase of the weights through the bullets fired therein already, from which still the author so carefully has attended too, and from the same effect the calculated length of the chord has been reduced.

But there is found in the description of the machine a circumstance, which we can give hereupon a further understanding. For, where the author establishes his rule, from which he has determined the speed of the bullet, there he gives the point, the midpoint of the board, which the bullet would pass through ; and calculates from the same the form of his rule, that he afterwards uses to calculate all cases from the same, by the rule of three. Because he finds namely, that if the length of the chord measured from the ribbon is $17\frac{1}{4}$ inches, the speed of the bullet arising is 1641 feet per second, thus he gives this rule for some other case, for there some other bullet even of the same weight would be fired into this wood: How the ratio itself of $17\frac{1}{4}$ inches to that of the length of the chord found in another case, thus the ratio of the speed itself 1641 feet to the distance, which the bullet in the second case passes through in one second. Now it seems the author had persisted in using this rule, after he had calculated the speed according to his principles from a single case. If this is the case, thus a twofold error is introduced into most calculations. Because in the first place the assumed number 1641, as we have shown, is too small, and 1675 was supposed to be put in place for the same. But in the second place, it is not possible to admit the condition that all the shots be fired in the midpoint of the board, or 66 inches away from the axis. Because in the last list mentioned of experiments 27 shots are found, that thus went into a board. Because now any two bullets must be at least one inch apart, but the width of the board amounts to little over a foot, so not all can be going along a horizontal line on the board ; consequently, some of them must have struck the board at least an inch higher or lower, and in all circumstances, it is likely that this difference often amounts to as much as 2, 3 or more inches, which thus sometimes causes an error of a whole inch in the calculated length of the chord. This fact of the central point of the board, which was 66 inches away from the axis, shows us the size of the board, which has not been expressly shown by the author. Then there the bottom edge of the pendulum was $71\frac{1}{8}$ from the axis, thus the distance from the centre of the board as far as to the bottom end was as much as 5 inches, and consequently the entire length of which was 10 inches. Now, if the width were assumed to be the same as the length, so that the surface itself were only 1 square foot, and not 4, as we have assumed above in calculating the air resistance. Therefore that calculated resistance is there four times too large, and since the same diminished the speed of the ball by 4 feet per second, so the true resistance would not be given as more than 1 foot per second: thus one can rather more omit the resistance of the air in these experiments. Since also according to this reason, no shot more than 5 inches higher or lower than the midpoint can go into the board, so also neither can the error in the author's rule, be more than the twentieth part of the whole speed totaled up.

The author had to give consideration, in the course of his experiments, to the weight of the balls which already had got stuck in the board; whether which circumstance is worth considering, still has not amounted to much, as noted before. Thus in the first place, the weight of the pendulum P is greater, because these bullets penetrated into the board quite far below the centre of gravity, so the centre of gravity or the length g has changed, and finally the centre of oscillation would undergo a little change. If we put in place, that the speed of the ball in a case would obtain a height b, so we have this equation, if still no ball is stuck in the wood,

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}.$$

Let us now put in place, that the weight of the ball, which again already has been shot at the distance h from the axis into the wood, be $=q$, so must in place of Pg, whereby the moment of the weight implied would become written $Pg+qh$: and in place of Pfg, whereby the moment of inertia would be expressed, must become written $Pfg+qhh$; which gives in this case

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}}.$$

From the same understanding also, the ratio of the chord in the first case, will be to that one, as

$$\sqrt{\frac{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}$$

to 1, that is nearly as $1+\frac{qh(f+h)}{2Pfg}$ to 1, only if P is still very large in respect of q. If now the case will be, still taken in the above calculation, $P=56\text{lb}$, $f=62\frac{2}{3}\text{in.}$, $g=52$ in. and $h=66$ in., and we suppose, that the weight of the bullets, which still are in the wood will be, amount to a lb, so there becomes $q=1$; and therefore the chord itself, if the wood is still re-screwed, has the ratio to the chord, which under equal circumstances, after which a 1 lb ball still sticks in the wood, deforms, as $1+\frac{1}{43}$ to 1, that is, the chord must become shortened about a 44th part on account of the balls still imbedded in the wood, which decrease the author attended to also.

SECOND REMARK

From the last carefully described remark, the length of the chord $Ll=k$ can also be calculated, if the speed of the bullet which has been fired against the wood again can be taken as known. Then, if b is the height, to which a falling body receives some speed as the bullet, so there will be, as we have found above,

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

which length, as we have noted already, often can be fairly different from those, which our author found from his method. But the author also specifies the speed of the bullet, or the height b, from his initial method given, from the quantity of the powder charge, the length of the barrel, and the space behind the bullet, already whereupon we have made several different observations. Let us now, so that the letters do not become confused between each other, the length of the barrel, from where the bullet will be fired, put $=\alpha$, the length of the space behind the bullet $=\beta$, the cavity so filled with powder to become $=\gamma$, the diameter of the bullet $=c$, and the number n shall specify, how many times the matter, from which the bullet is made, is heavier than water ; so one finds from here the height b, from which the speed of the bullet through a fall must receive also, expressed in Rhenish

$$b=\frac{110524,08\gamma}{nc}l\frac{\alpha}{\beta}$$

where one has taken $l\frac{\alpha}{\beta}$ for the common logarithm of the fraction $\frac{\alpha}{\beta}$. But one wants to express these lengths b in English feet with the author, as 0,97 Rh.ft. gives 12 English inches, so one has

$$b = \frac{136708\gamma}{nc} l\frac{\alpha}{\beta}$$

Engl. inches, therefore

$$2b = \frac{2734616\gamma}{nc} l\frac{\alpha}{\beta},$$

and also

$$\sqrt{2b} = 1654\sqrt{\frac{\gamma}{nc} l\frac{\alpha}{\beta}} ;$$

from which one knows the length of the chord k also to be :

$$k = 1654\, pah\sqrt{\frac{\gamma l(\alpha : \beta)}{\sqrt{nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}}},$$

if one takes neither the pressure, nor the air resistance into consideration, as long as the bullet is found in the barrel. But we have assumed with the author for the calculation in this formula, that all the powder did itself ignite at once, and from that explosion some such subtle matter would arise, and that the elasticity it has acquired from the parts of the powder, as long as the same is still confined in the same volume, to be 1000 times greater than the elasticity of ordinary air, or, which amounts to the same thing, as the pressure of the atmosphere. But it is already been shown rather thoroughly, that the powder is known to be impossible to ignite at once, and that therefore the abovementioned elasticity of the subtle matter increases more, as it must be more than 1000 times greater than the air pressure, if the same must bring forth the same effect. As for the agreement which is found between experiment and the author's theory, regardless of the calculation of the length of the chord *Ll,* which the writer compares with the observations, only a few are at fault, so still enlightened from the fact that so many found by the theory have not departed very far from the true speed, even though the prevalence of confirmation may not be so great as the author believes, because the calculated length of the chord can amount to around a whole inch in error. But even if the calculated speed of the bullet were completely in accordance with the truth, that would still not confirm the author's opinion concerning the force derived from the powder; for likewise the same speed of the bullet could be impressed, if the force of the powder were far greater, but the action of which would not be instantaneous. The author in fact goes further to raise the claim that

those experiments, which were done with unequal long barrel lengths, and still in good agreement with the theory, which, in his opinion, could not have happened if the powder itself is ignited only gradually in the shorter barrel, as a far smaller part would ignite, before the ball is driven out, as in the longer barrel.
But we have already responded above to that fact, and also we have opposed other experiences from which the contrary is illuminated, quoting against. So we want to here only to include so much that perhaps the powder, the author had used was so good that the greater part had itself ignited before the bullet left the shortest barrel. It can also be indicated from that, that the chords showing such a precise agreement with the experiments have been calculated incorrectly, nothing like what would appear to be allowed, if one had calculated from the true rule.
Finally, the emergence of the elastic matter through the lee space [around the bullet] and the explosion to some extent produce here the agreement with experiment, as has been indicated further in the previous notes. But one yet may know so much from this agreement, that if equally the first elasticity of the powder were far greater, than the author assumed, nevertheless the same will arise in most cases with no greater effort being provided, as the author found in his reckoning, and that consequently the gradual ignition of the powder, and the other unwanted factors that have been present above, the speed of the ball even reduced so much, should be increased by the greater force.
As often, therefore as this equality is found, so often thus one can use safely the rule given by the author, so that from that charge the speed of the ball arising may be determined with more assurance. But it is known equally well that such circumstance arise, either because of the greater strength of the powder, or with the removal of the worst obstacles by keeping the upper hand, in which consequently the speed of the ball shall be either greater or less than that indicated, by the rule given by the author. One such case occurs when the charge of powder is too small, as the author has noted very well, the heat of the explosion, and consequently the elasticity of the subtle matter may not be so great as is set out in the reckoning formula.

In this, the letter $m = 1000$ has been taken, which value agrees very well for the bigger charge; but for very small charges the same must be put smaller. If we set μ to be that for a smaller charge of the corresponding value of the letter *m*, so this number μ will always be able to be determined in any case from the difference between the length of the chord, as found by calculation, and by that which has been indicated from experiment, which is easily specified. Since there, if $m = 1000$, the chord *k* was found:

$$k = 1654\,pah\sqrt{\frac{\gamma l(\alpha:\beta)}{nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

so the chord, if *m* is not equal to 1000, but rather equal to μ, must be

$$= 1654\,pah\sqrt{\frac{\mu\gamma l(\alpha:\beta)}{1000nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

namely, if the other conditions are taken the same. Therefore the proportion itself for very low charges : the calculated chord to the observed chord, is as $\sqrt{1000}$ to $\sqrt{\mu}$ and therefore 1000 is to be calculated to the square of the observed chord, or as the squares of the velocities themselves.

Now in the example presented by the author, where only 1 Dr. of powder was loaded, the speed from the calculation should be 482 ft. per second, but the true speed taken was only 400 ft. per second, so in this case 1000 was to μ as 482^2 to 400^2, and so

$$\mu = \frac{160000000}{482 \cdot 482} = 688.$$

Thus, if only one Dr. of powder had been ignited, the heat generated thereby is so much smaller than if a large quantity of powder is taken in that the first elasticity is only 688 times greater than the pressure of the atmosphere.

In the following experiment, as three Dr. powder was the charge, there became $1000 : \mu = 835^2 : 730^2$ and thus

$$\mu = \frac{532900000}{835 \cdot 835} = 764,$$

that in this case also, on account of the small heat, the first elasticity of the powder is only 764 greater than the atmospheric pressure.

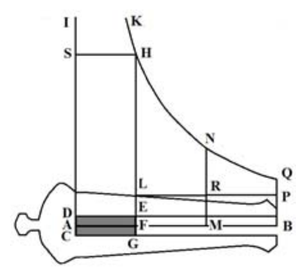
The author finds in the first case, even from this principle of proportionality, that the proportion of elasticities [i.e. exhaust gas pressures] if one Dr. or 12 Dr. were ignited, to be as 2 to 3, which relation matches very well with our 688 to 1000, but in the other case he has as 3 to 4 instead of 764 to 1000, between which the difference is also very low. Now because the difference between these numbers 688, 764 and 1000, is quite noticeable, which elasticity has been introduced by igniting 1, 3 and 12 Dr. powder in place, then you have to be surprised that the charges from 6 as far as to 36 Dr. do not show such a difference, and that these so different cases correspond accurately with the calculation. Perhaps here one would like to blame the above noted inaccuracy in the calculation of the chord of the ascending arc, and since the heat of the flame, as the author has claimed to be so much greater, the more the powder ignited at one time, so to presume that so much more elasticity has been from the charge of 36 Dr. than from 6 Dr., and that the same by the same gun, where a far greater quantity of powder is loaded, should become even greater. Therefore from the rule given by author to calculate the speed of the ball from the strength of the powder, all these would not seem to apply so exactly for guns, without looking at the other factors, through which the effect of the powder, as shown above, suffers no small change.

[Here one may presume the inexact understanding of the gas laws was at fault, especially with regard to changes in pressure associated with the temperature change and the associated adiabatic expansion; that the velocity squared, or in modern terms, the kinetic energy of the bullet, is proportional to the amount of powder used, is of interest in itself.]

But here a complete test is still not provided to determine how the correct chord, from the author's calculation, can differ so strongly from the truth, but those circumstances were not noted by him, which are necessary for improvement. Therefore it is to be hoped that someone would find that out just by hard work, and just the way that the author had done, like all repeated experiments, special attention being paid to the exact measurement of the distance from the point where the ball has struck the wood to the axis : then the length of the chord would be *Ll* would be calculated, following the true principles we have indicated above.

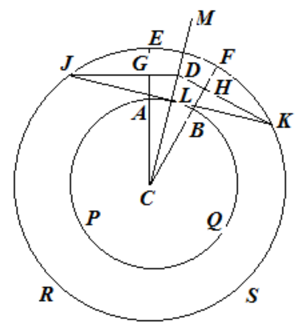
THIRD REMARK

The usefulness, which can be seen in artillery from the realization of the power of powder and the speed of bullets, must necessarily be of great importance. For, if one can determine these points exactly, we also know how strong and fast both the cannon and mortars, as the rest of the associated equipment must be, and therefore has no reason to fear that the firing pieces either will be made too strong or too weak : thus avoiding all needless expense in the former case, but in the other all harm and danger will be prevented. Even this force, by which the ball will have been forced forwards, also acts just as strong on the inner walls of the cannon, and if the same do not have the proper strength to resist this force, so the cannon necessary must burst. The greatest force, which the cannon has to withstand, so act at the first moment when the powder has ignited before the bullet is yet noticeably driven from its position in the chamber *CDEG*, which consequently occurs where all the walls of the cannon are so strongly pressed by the same force as there would be at the base of an upright column filled with water whose height was 32000 feet, when we suppose with the author that the elasticity of the subtle matter generated by the ignition of the powder, at the first instant, is greater than 1000 times atmospheric pressure, which is equal to the weight at the bottom of a water column of 32 feet. But this very great force does not extend to the whole cannon , but only to the rearmost part of it, CDEG, which has been filled with powder charge, therefore also this part has such a strength as is required to resist this force, the forwards part of the cannon does not endure such a force, at this point the bullet will be pushed forwards, and also by then this force is less than at the beginning. If the bullet were already forced forwards towards *M*, so the ratio of the force in the final volume *AM* to that in the original, shall be as *AF* to *AM*, and equal also to a water column as high as $32000\cdot\frac{AF}{AM}$ feet, from which it emerges, that the force which the forwards part of the cannon has to withstand, will always be smaller. Therefore also the cannon at the forwards part has no benefit in being so strong, as the hindmost part *AF*, and so it would be superfluous, if one wanted to make the foremost part as strong and thick as the hindmost part. But on account of which to see clearly, how all places should have a proportional thickness of the cannon so as to make it neither too strong nor too weak, we must consider the way by which a cannon can withstand this force. If the metal, from which a cannon is made, by virtue of which the parts thereof are joined together



would have no strength, the same would be torn apart and scattered from the first explosion, from which we see that the attachment of the parts of the metal must resist the force of the powder. But allowances can be made for this strength, because of the great inequality, as is found in the joining together of the parts, not so accurately calculated, likewise the same will be driven by the cast into one place often held together stronger than to another; therefore the strength must always be greater, as any theory indicates, which is founded on such an equality between all the parts ; therefore the force must always be greater, as any one theory indicates, which is founded on such an equality between all the parts.

Nevertheless, it would not to be unhelpful to form an idea about the joining of the small metal parts, and therefore from that the resulting resistance they issue against the force of the powder, even if nothing can be considered here to be determined exactly. In order to do this, we consider a section of the cannon perpendicular to its axis, so that the inner circular *ABQP* represents the centre of the cannon, where the expansive force of the powder is located, and the intermediate space between both circles is supposed to indicate the metal. The expanding force of the gunpowder now takes effect everywhere equally strong inside the circumference of the circle *ABQP*, and seeks to widen or burst the same. But we want to consider only a piece of the metal *AEFB*, which would be cut out, drawn from the centre *C* along the two radii *CE* and *CF*. Let the inner radius be $AC = BC = a$ and the angle $ACB = 2\varphi$, so that the arc will be *AB*, on which the force of the powder is applied, the same to be $2a\varphi$, and thus, the force itself to be proportional to the arc, which so we want to set $= 2ma\varphi$. The mean direction of this force is now going through the centre *C*, and cuts the angle *ACB* into two equal parts. Thus *CDM* is to be the direction, towards which the piece AEFB is pushed by the force $2ma\varphi$. So if this piece were not joined to the rest of the metal, so that the same really would be pushed away along the direction *DM*. But the attachment of this piece takes place along the lines *AE* and *BF*, as the same is joined to the other metal, and since this attachment likewise takes place at all points, so the same can be considered as a force which the piece *AEFB* presses on both sides to the other parts at *AE* and *BF*, and whose direction is perpendicular to the mid-point of the line joining *G* and *H*. So if we set the thickness of the metal to be $AE = FB = b$, so on both sides the cohesive force is to be proportional to the thickness *b*, which we will call $= nb$. One extends these two directions of the forces *GJ* and *HK*, as far as to the point *D* where they come together on the line *GM*, and since we will be able to consider this point *D*, as if three forces act at the same point : in the first place the force $2ma\varphi$ along the direction *DM*, then besides a force $= nb$ along the directions *DJ* and *DK*, and these two forces must be as large or larger, as required to cancel out the first force. So we want these two forces to be resolved along the direction *DC*, and along those directions which are perpendicular to the line *CD*, and cancel each other. Because now the triangles *CDG* and *CDH* are right angled at *G* and *H*, so the ratio *DJ* or *DK* is to *DL* as *CD* to *DG*, which is as the sine of the whole angle 1 to the sine *DCG*. Therefore this force $2nb\sin.\varphi$ arises



from the two [components of] the forces *DJ* and *DK* acting in the direction *DC*, which, if it were less than the force $2ma\varphi$, then the piece *AEFB* would not be able to withstand the force, and therefore would be torn from the cannon along the direction *DM* . We want also both these forces resolved along the direction *DC*, as well as for such as are perpendicular to the line *CD*, and cancel each other. Now, because the triangles *CDG* and *CDH* have the right angle at *G* and *H*, so the proportion will be *DJ* or *DK* to *DL*, as *CD* to *DG*, which is as the sine of the whole angle 1, to the sine of the angle *DCG*, $\sin.\varphi$. Therefore this force $2nb\sin.\varphi$ arises from both the forces *DJ* and *DK* in the direction *DC*, which, if it were less than the force $2ma\varphi$, so the piece *AEFB* would not be able to withstand the force, but be swept away from the cannon in the direction *DM*. Therefore, so this does not happen, the force $2nb\sin.\varphi$ must be just as great, or greater, than the force $2ma\varphi$, thus there must be $nb\sin.\varphi > ma\varphi$ and this must be found instead, and the angle *ACB* may be taken as great as one would wish, but the proportion $nb\sin.\varphi$ to $ma\varphi$ is smallest, [*i.e.* the cannon is safest] when the angle *ACB* is equal to 180 °, or $\varphi = 90°$ in which case $\sin.\varphi = 1$, and $\varphi = 1{,}570796$: therefore *nb* must be much greater than $1{,}570796ma$, or in small numbers *nb* is to be greater than $\frac{11}{7}ma$. In this expression *m* will be the letter for the expanding force of the powder, and the letter *n* for determining the cohesive force of the metal. So if different cannon were taken to be made of one metal, so the thickness of the metal always must be proportional to the caliber, or to the diameter of the ball. And since the expansive force of the powder decreases rather more for a cannon, the further the ball is driven forward, so must the thickness of the cannon itself at some place *M* be in proportion to the thickness of the bottom piece at *AF*, as the length *AF* is to length *AM*. For this reason, therefore, the muzzle of a cannon could be made much weaker without danger, as indeed is obliged to happen if the author's theory were correct, and all the powder ignited at the same time. Because in this one case if *AM* can still considered as large as *AF*, it would still be enough, if the cannon were only half as thick as at *M*, as in the bottom part *AF*. But here you still have to consider the strongest charge that ever could be used. Alone, assuming that not all the powder has ignited at once, it will be on account of the ignition of the new powder that the force at *AM* to the force at *AF* will have a greater proportion than the force at *AF* to that at *AM*, and for this reason the thickness of the cannon must be seen to be greater than in the previous rule, which will also be confirmed by experience. Because the opinion is not precisely fixed that the powder does not all ignite at once, and also because this gradual ignition cannot be determined, which according to the different types of powder is very different, so also by the mere theory one cannot ascertain the best proportion of the thickness of a cannon, but diverse experience seems to do so to this end by providing some average value. But if you would wish on the other hand, to follow the author's theory, then this matter could be very easy supposed to be accounted for: it would however be required that such like guns were not to be long, to be able to resist the force of the powder, for the muzzle would certainly be too weak, even if the bottom piece had its proper strength ; for opinion is not precisely fixed that the powder does not all ignite at once. But because this gradual ignition is not allowed to be determined, and according to the different types of powder is very different, so here from the mere theory you cannot set out the best proportion of the thickness of a cannon, but to this end manifold experiences seem to provide some means of doing so. But if you want to follow the author's theory, then this thing would be very easy to bring to account : but such a cannon would not be able to resist the force of the powder for long as the muzzle would certainly be too weak, even if the bottom piece had its own strength.

Now since this principle does not provide a means for reducing the weight of guns without danger, so it does the best to maintain this final purpose, to keep improving the material from which the guns are cast. The one greatest advantage would thus consist therein if one could find how to make a material whose parts were joined together far stronger than with the ordinary material, in which one could still promise the best progress. It may perhaps also be that several advantages are discovered in the casting, making it so that the material would receive a much greater strength, undoubtedly with the one found from the calculation, as some have begun to pour the cannon solid without a core, and only after the casting to drill the hollow into it.

Because in this way the metal is not only much thicker, but the hollow can be accurately bored out in the middle, from which circumstance one would not have so much force by casting. Finally, a little elasticity in the material would create no small advantage to cannons. After all, it does not depend only on the force by which the particles of matter are connected together, in what can be an all brittle and hard body of no consequence or an elastic one, whether, after the particles have been driven from each other by the slightest amount, the body immediately ruptures, or has the ability to return to its former state of well-being. Herein namely lies the difference between brittle and ductile materials, that the former disintegrate, as soon as the particles become disrupted among themselves, but the latter, whatever equal disruption took place between their particles, are still not broken up through the strength of the bond. Thus, if the material which is used to make guns, had a somewhat greater degree of toughness, so that it would become easier to make the same without danger. Even if this were the cause, that in prior times with leather cannon, which were not to be compared with the weight of metal, almost as strong shots had been able to be done, regardless of whether or not the same were as permanent. Meanwhile, all that can be said at this point as far as the material of guns is concerned, still a big improvement could be hoped for.

Here also from the expansive force of the powder arises the recoil of the shotgun and cannon. Because this force drives the bottom of the barrel backward just as much as the bullet forward, but it is a heavier body, so the gun would be sent backwards by the same force with a much smaller speed. Therefore as many times as the gun taken together with the carriage is heavier than the cannon ball, which would be fired from that, even so much slower will be the speed of the gun, than that of the ball forced out; consequently the distance itself through which the cannon moves backwards, while the ball is being driven through the length of the cannon less the initial distance behind the ball, is in proportion to the weight of the ball to the whole weight of the cannon. So when a half Carthaune [a type of cannon]fires a 24 pounder ball, 10 feet is the set length, because the weight of the same is around 64 cwt , or 6400 pounds, so this canon must move by the ball driven out through a space of $\frac{24}{6400}\cdot 10\,\text{ft.}$ that's just $\frac{3}{80}$ ft. , or to go back around half an inch. If therefore the ground, on which the cannon rests, is so firm, that the same can step back thereon around $\frac{1}{2}$ without being shaken, so the shot is sure, unless equally the ground had no firmness and then it would go further back. But that nevertheless after the ball has already been fired, and so the back driving force has ceased entirely, the cannon goes even further back, coming from the same already impressed movement, by which the same continues to recede, until the motion is completely stopped by resistance. Therefore the author's note is completely true, concerning the firmness of the batteries upon which the guns are planted, and much needless work can be spared.

FOURTH NOTE

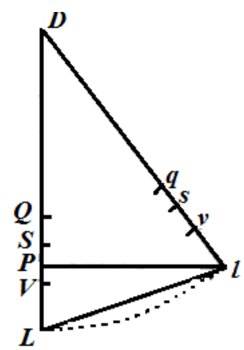
The author again concludes from his theory that all proposals in these guns that are directed towards an unusual form of the powder chamber cannot bring the slightest advantage. This conclusion is completely accurate for guns in which all the powder is ignited at once, in the author's opinion. Then in this case the first force is still the same : the volume may have any shape whatever, providing the volume within which the powder is enclosed is completely filled with powder, as it always will. And if only a part of the volume is filled with powder, so the force concerned becomes so much smaller as this part is smaller than the whole space behind the ball: therefore also in this case the force is not based on the shape of the volume. But if the ball actually is already being forced out, the proportion itself of the driving force to the initial force, is as the volume which the charge of power takes up initially, to the volume besides this which the ball has already been driven through : and therefore also the shape of the powder chamber has no influence on the continuing driving force. For this reason it is quite indifferent to whatever shape one wants to give the posterior cavity, and because all the shapes have the same effect with regard to the repulsive force, so one resists the cheap one which is the most convenient according to other circumstances. So if you do not have other reasons to change the customary form of the cannon, one could also therefore safely retain the same, and view all the proposals as reprehensible that aim to change the shape without farther investigation.

This is based, however, as already reported, in this writer's opinion that all the powder is ignited equally at. As we have invoked very important reasons against this opinion before, so one can also not so flatly reject the proposals, which are aimed at a more advantageous shape of the powder chamber. The matter thus arrives at the question of whether the shape of the volume within which the powder is enclosed, could contribute or not to a faster or slower ignition of the powder ? Because if this question can be answered in the affirmative, no doubt is left which shape ignites the powder fastest, and that should not be the best and most advantageous. Because then all the powder suddenly ignites itself, and the force which continually acts on the ball is both greater and longer, therefore also the same one impressed force is so much faster movement. But that the shape of the volume could not contribute much to a sudden ignition may be added to that easily. One must imagine be a very long and narrow cavity, in which the powder is enclosed, and ignited at one end. Because in this case the ignition is not so quick to spread as far as to the other end of the tube, as if the tube were shorter. Everyone easily understands also that if one should change the bottom end of a cannon into such a long and narrow tube, even if one had an equally strong charge, then the ball would be driven out with a far smaller degree of speed obtained. From this it is now easy to understand that the powder is so much quicker to ignite, the less distant all the grains are from each other. Now since the round ball-shape among all of the others, which enclose an equal volume, has this property that its periphery is at a minimum, and that all the parts are gathered together among themselves closest next to each other ; thus there is no doubt that the powder in a such a volume should ignite the quickest. Therefore from this suggestion it should be tried, that one might be able to make the cavity of the bottom piece behind the ball either into a perfectly round or very nearly round shape, in a convenient way : because in this way you would get no small increase in the speed obtained by which the ball is driven out. The action would also be so much stronger if you could light the powder at the centre of this volume : which is the location from which the ignition would spread around to all extremities the quickest. It will admittedly, by all appearances, find many difficulties, which seem to make the implementation of this proposal unlikely, but perhaps there might still be a more able and experienced practitioner who can find the means to address all these difficulties, and the proposal in correcting the work done with interest. Meanwhile it is enough for us to have displayed the circumstances which could improve the shape of the powder chamber, and to have put in place a better understanding by which one can better judge this proposal. One has but to note from these insertions that the more one is able to increase the first strength of the powder in this way, also the much more stronger the metal would have to be made at this place in the cannon.

ERSTE ANMERIKUNG

In diesein Satz hält der Autor die nach seiner Theorie berechnete Geschwindigkeit der Kugel, und diejenige, welche die im vorigen Satz beschriebene Maschine zu erkennen giebt, gegen einander, und findet durchgehends eine so genaue Uebereinstimmung, dergleichen man von einer falschen Theorie kaum erwarten könnte. Um nun hierüber eine fleißigere Untersuchung anzustellen, so wollen wir erstlich die zu diesem Ende gemachten Versuche, und die daraus hergeleiteten Schlüsse nach demjenigen, was wir bey dem vorigen Satz angemerket haben, in Erwegung ziehen. Wir haben aber daselbst gewiesen, daß die von dem Autore gebrauchte Regel, um aus der vermittelst des Bandes gemessenen Länge der Sehne *Ll* die Geschwindigkeit der Kugel zu bestimmen, unrichtig, und nur in diesem Fall der Wahrheit gemäß sey, wenn die Kugel gegen das Centrum oscillationis des Penduli selbst geschossen wird. Denn wenn man das Gewicht des Penduli durch *P*, das Gewicht der Kugel durch *p*, ausdruckt, und setzet die Länge des gantzen Penduli von der Axe biß zum Band, $DL = a$, die Entfernung des Centri gravitatis von der Axe $DQ = g$, die Entfernung des Centri oscillationis von der Axe $DS = f$, die Entfernung des Puncts *V*, wo die Kugel anstößt, von der Axe $DV = h$, und endlich die Länge der Sehne, welche nach dem Stoß das Band anzeiget, $Ll = k$, so wird nach des *A*utoris Regel die Geschwindigkeit der Kugel durch diese Formul

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{h}{f}\right)\frac{f}{\sqrt{2h}}$$



ausgedruckt; In der That aber sollte an statt derselben diese gesetzt werden

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{h+f}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}$$

als welche wir oben für den Fall, da *p* gegen *P* sehr klein ist, heraus gebracht haben. In beyden ist zwar nicht auf den Widerstand der Luft gesehen worden; wir können aber denselben, indem er nur etliche wenige Schuh austrägt, sicher aus den Augen setzen. Allem, die Unrichtigkeit der vom Autore gebrauchten Regel kann öffters einen merklichen Unterscheid in der Grösse der Geschwindigkeit der Kugel verursachen; wie bey dem vorher berechneten Exempel geschehen, da die vom Autore gefundene Geschwindigkeit aus diesem Grunde um 43 Schuh zu klein heraus gekommen, welches ungefehr den 40 sten Theil der ganzen Geschwindigkeit austrägt. Dieser Unterscheid kommt daher, daß in diesem Versuche die Kugel unter dem Centro oscillationis *S* gegen das Pendulum geschossen worden, und je grösser die Distanz zwischen dem Centro oscillationis und dem Punct *V*, wo die Kugel anstößt, ist, um so viel mehr wird auch die nach des Autoris Regel angestellte Rechnung von der Wahrheit abweichen. Weilen in beyden Fomuln die Quantitäten $\frac{h}{f}$ und $\frac{h+f}{2f}$ in

Ansehung der erstern Quantität $\frac{Pg}{ph}$ sehr klein sind, so wird sich fast immer die nach des Autoris Regel gefundene Geschwindigkeit zu der wahren verhalten, wie $\sqrt{f}$ zu $\sqrt{h}$. Je mehr also h von f unterschieden ist, je grösser wird auch der Fehler seyn. Da nun der Autor, wie aus seinen Experimenten erhellet, ziemlich viel Kugeln gegen ein Bret geschossen, und doch nimmer zwey an einerley Stelle haben anstossen können, so ist klar, daß der Unterscheid zwischen f und h bald grösser bald kleiner gewesen.

In dem gegenwärtigen Fall war $f = 62\frac{2}{3}$ Zoll, und die gantze Länge des Penduli $71\frac{1}{8}$ Zoll. Wenn also bey einem Experiment, wie leicht zu vermuthen, die Distanz $DV = h$ gewesen wäre 69 Zoll, so würde sich die vom Autore gefundene Geschwindigkeit zur wahren verhalten haben, wie $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ zu $\sqrt{69}$, das ist bey nahe 20 zu 21, und würde also der Fehler den zwanzigsten Theil austragen, um welchen die gefundene Geschwindigkeit zu klein seyn würde. Wenn das Centrum gravitatis ungefehr mitten ins Brett gefallen wäre, da dasselbe von der Axe 52 Zoll weit entfernet gewesen, so wäre zu vermuthen, daß auch bißweilen Kugeln gegen dasselbe und auch noch höher, als etwa nur 45 Zoll weit von der Axe geschossen worden. In diesen Fällen würde die vom Autore gefundene Geschwindigkeit der Kugel zu groß seyn, und wenn die Distanz DV nur $= 45$ Zoll wäre, so müßte sich die gerechnete Geschwindigkeit zur wahren verhalten, wie $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ zu $\sqrt{45}$, das ist, wie 13 zu 11. Dahero würde dieselbe mehr um den sechsten Theil zu groß seyn. Weil nun in allen diesen Experimenten der Autor nicht bemerket, wie weit das Punctum V, wo die Kugel aufgestossen, von der Axe des Penduli entfernet gewesen, so ist auch nicht möglich zu sagen, wie groß bey einem jeden der Fehler sey. Wenn die gefundene Geschwindigkeit ungefehr 1700 Schuh in einer Secunde austrägt, so könnte es seyn, daß diese Zahl in einigen Fällen um 85 Schuh zu klein, in an dem aber um 262 Schuh zu groß wäre. Oder da der Autor nicht die würckliche Geschwindigkeit selbst, sondern nur die Länge der Sehne $Ll = k$, als welcher die Geschwindigkeit proportional ist, aufgezeichnet: wenn dieselbe 16 Zoll groß ist, so konnte der Fehler in diesem Maaß 0,8 Zoll, wenn die Kugel zu unterst an das Bret geschossen wird, und gar 2,5 Zoll, wenn dieselbe zuoberst geschossen worden, austragen. In dieser Ungewißheit wäre also aus der Uebereinstimmung der Experimenten mit der Theorie nicht viel zum Vortheil dieser Jetztern zu schliessen.

Es erhellet auch nicht aus der Beschreibung dieser Experimente, daß der Autor sehr sorgfältig in Ausmessung der Distanz $DV = h$ gewesen; denn er bringt für gleiche Fälle, da mit gleicher Ladung aus eben demselben Lauf mehrmalen geschossen worden, immer einerley Länge für die Sehne $Ll = k$ heraus; da doch kaum zu glauben ist, daß die Kugel bey allen diesen verschiedenen Schüssen in einerley Höhe auf das Bret angestossen. Denn wenn er auch ja beständig auf eben denselben Punct hätte schiessen können, so hätte er doch solches nicht thun dörfen, damit nicht eine Kugel auf die andere stiesse: folglich mußte er mit Fleiß immer auf verschiedene Punkte des Brets schiessen, und da die Kugel $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hatte, so mußte immer eine von der an dem zum wenigsten 1 Zoll entfernet seyn. Er sagt auch nicht, und es ist auch nicht zu vermuthen, daß alle Kugeln in eine Horizontal- Linie des Brets gegangen, und also alle von der Axe gleich weit entfernet gewesen; wenn aber eine nur um einen Zoll höher oder niedriger das Bret getroffen, so müßte die Sehne *Ll* schon um 0,1 Zoll grösser oder kleiner angesetzt werden, wenn nehmlich die Länge der gantzen Sehne über 10 Zoll ist; ein Unterscheid von zwey Zollen würde in der Sehne 0,2 Zoll, von 3 Zollen 0,3 Zoll und so fort austragen. Dieser Fehler würde nun von der Unrichtigkeit der Regel des Autoris entspringen, in so fern dieselbe von der Wahrheit abweicht. Wenn aber auch gleich dieselbe richtig wäre, so müßte man doch in Ausmessung der Distanz *DV h* um so viel mehr Fleiß anwenden. Denn da nach dem Autore die Geschwindigkeit der Kugel bey nahe ist wie $\frac{k}{a}.\frac{Pfg}{ph\sqrt{2h}}$, das ist unter einerley Umständen, wie $\frac{1}{h\sqrt{h}}$, so sieht man wohl, daß ein geringer Unterscheid in dieser Distanz *h* nicht aus der Acht gelassen werden könne. Laßt uns setzen, daß wenn $h = 66$ Zoll gewesen, die Sehne $k = 16$ Zoll betragen; so folgt, daß wenn unter eben diesen Umständen die Distanz *h* nur um 1 Zoll grösser oder kleiner wäre, die Sehne *k* schon um $\frac{1}{3}$ Zoll grösser oder kleiner würde. Da wir nun dergleichen merklichen Unterscheid in der berechneten Länge der Sehne für gleich starke Schüsse nicht antreffen, so müssen entweder dieselben alle auf eine Horizontal-Linie am Bret gegangen seyn, oder der Autor hat auf die verschiedenen Entfernungen des Puncts *V* von der Axe in seiner Rechnung nicht gesehen; weil nun das erstere nicht wahrscheinlich ist, so müßte man das letztere zugeben. Wir wollen aber um die Ehre dieser Experimenten zu retten, lieber glauben, daß wenn auch nicht alle Schüsse auf eine Horizontal-Linie am Bret gegangen, der Unterscheid in der Höhe doch nimmer über einen Zoll ausgetragen; in welchem Fall gleichwohl dieser Fehler von $\frac{1}{3}$ Zoll von dem Autore nach seiner grossen Accuratesse nicht hätte übergangen werden sollen; als welcher Umstand viel mehr austrägt, als die Vermehrung des Gewichts des Penduli durch die schon darein geschossenen Kugeln, vorauf doch der Autor so sorgfältig Acht giebt, und nach denselben die berechnete Länge der Sehne vermindert.

Es findet sich aber in der Beschreibung der Maschine ein Umstand, welcher uns hierüber eine hinlängliche Erläuterung geben kann. Denn, wo der Autor seine Regel vorträgt, nach welcher er die Geschwindigkeit der Kugel bestimmt, da nennet er das Punct, gegen welches die Kugel geschossen wird, das MittelPunct des Brets, und richtet auf dasselbe seine Rechnung dergestalt, daß er nachgehends aus demselben alle Fälle durch die Regel Detri berechnet. Weil er nehmlich befunden, daß, wenn die Länge der Sehne nach dem Band gemessen $17\frac{1}{4}$ Zoll ist, die Geschwindigkeit der Kugel 1641 Schuh in einer Secunde betrage, so giebt er für einen jeglichen an dem Fall, da eine gleich schwehre Kugel in eben dieses Brett geschossen ·wird, diese Regel: Wie sich verhalten $17\frac{1}{4}$ Zoll zu der im vorgelegten Fall gefundenen Länge der Sehne, also verhalten sich 1641 Schuh zu dem Wege, welchen die Kugel in einer Secunde durch zu lauffen vermögend ist. Dieser Regel scheinet sich nun der Autor beständig bedienet zu haben, nachdem er einmal für einen Fall die Geschwindigkeit nach seinen Grundsätzen ausgerechnet hatte. Wenn sich die Sache so verhält, so muß in den meisten Rechnungen ein doppelter Fehler stecken. Denn erstlich ist die angenommene Zahl 1641, wie wir gewiesen haben, zu klein, und solte für dieselbe 1675 gesetzt werden. Hernach aber ann die Bedingung, daß alle Schüsse auf das Mittel-Punct des Bretts, oder 66 Zoll weit von der Axe geschehen, unmöglich statt finden. Denn in der letzten angeführten Liste von Experimenten finden sich 27 Schüsse, so in ein Brett gegangen. Weil nun von denselben je zween Schüsse zum wenigsten um einen Zoll von einander entfernet seyn müssen, die Breite aber des Bretts nicht viel über einen Schuh betragen, so können nicht alle auf eine Horizontal-Linie in das Brett gegangen seyn; folglich müssen einige davon das Brett zum wenigsten um einen Zoll höher oder tiefer getroffen haben, und nach allen Umständen ist zu vermuthen, daß dieser Unterscheid öfters 2, 3 und mehr Zoll ausgetragen, welcher also in der berechneten Länge der Sehne zuweilen einen Unterscheid von einem gantzen Zoll hätte verursachen müssen. Dieser Umstand von dem Mittel-Punct des Bretts, welches von der Axe 66 Zoll entfernet gewesen, weiset uns auch die Grösse des Bretts, welche von dem Autore nicht ausdrücklich augezeiget worden. Dann da der unterste Rand des Penduli $71\frac{1}{8}$ Zoll von der Axe entfernt gewesen, so war die Distantz von der Mitte des Bretts biß zum untersten Ende ungefehr 5 Zoll, und folglich die ganze Länge desselben 10 Zoll. Wenn nun die Breite, wie es scheinet, der Länge gleich gewesen, so war die Oberfläche desselben nur 1 QuadratSchuh, und nicht 4, wie wir oben bey Ausrechnung des Wiederstands der Luft angenommen haben. Derowegen ist die daselbst berechnete Resistentz viermahl zu groß, und da dieselbe in der Geschwindigkeit der Kugel 4 Schuh ausgetragen, so würde die wahre Resistentz mehr nicht als 1 Schuh gegeben haben: dahero man um so viel mehr bey diesen Experimenten den Wiederstand der Luft weglassen kann. Da auch um dieser Ursache Willen kein Schuß mehr als um 5 Zoll höher oder tiefer, als das Mittel-Punct in das Brett gehen kann, so kann auch der Fehler, so sich in des Autoris Regel befindet, sich nicht über den zwanzigsten Theil der ganzen Geschwindigkeit belauffen.

Der Autor hat auch in dem Verfolg seiner Experimenten auf die Kugeln, welche schon allbereit in dem Brett stecken, gesehen, welcher Umstand, ob er gleich nicht aus der Acht zu lassen, dennoch so viel nicht austrägt, als der vorgemeldete. Dadurch wird erstlich das Gewicht des Penduli *P* grösser, hernach, da die Kugeln ziemlich weit unter dem Centro gravitatis in das Brett gedrungen, so wird auch dadurch das Centrum gravitatis selbst, oder die Länge *g* verrücket, und endlich leidet dadurch auch das Centrum oscillationis eine geringe Veränderung. Wenn wir setzen, daß die Geschwindigkeit der Kugel durch den Fall aus einer Höhe *b* erhalten werde, so haben wir, wenn noch keine Kugel im Brett stecket, diese Aequation

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}.$$

Lasst uns nun setzen, daß das Gewicht der Kugeln, welche schon allbereit in der Distantz *h* von der Axe in das Brett geschossen worden, sey $= q$, so muß an statt *Pg*, wodurch das Momentum der Schwehre angedeutet wird, geschrieben werden $Pg + qh$: und an statt *Pfg*,wodurch das Momentum der Materie ausgedrückt wird, muß geschrieben werden $Pfg + qhh$ folglich wird in diesem Fall

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}}.$$

Unter gleichen Umständen verhält sich also jene Sehne zu dieser wie

$$\sqrt{\frac{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}$$

zu 1, das ist beynahe wie $1+\frac{qh(f+h)}{2Pfg}$ zu 1, wann nur *P* in Ansehung des *q* noch sehr groß ist. Wenn nun in dem schon oben berechneten Fall genommen wird $P=56Pf$, $f=62\frac{2}{3}$, $g=52$ und $h=66$, und wir setzen, daß das Gewicht der Kugeln, welche schon im Brett sind, ein Pfund ausmache, so wird $q=1$; und dahero wird sich die Sehne, wenn das Brett noch neu aufgeschraubt ist, verhalten zu der Sehne, welche unter gleichen Umständen, nachdem schon 1 *Pf* Kugeln im Brett stecken, entsteht, wie $1+\frac{1}{43}$ zu 1, das ist, die Sehne muß wegen der schon im Brett steckenden Kugeln um ihren 44 sten Theil vermindert werden, welche Verringerung auch der Autor Wohl in Acht genommen.

ZWEYTE ANMERIKUNG

Auf die in der vorigen Anmerkung beschriebene Art muß also die Länge der Sehne $Ll = k$ ausgerechnet werden, wenn die Geschwindigkeit der Kugel, welche gegen das Brett geschossen wird, schon als bekannt angenommen werden kann. Denn, wenn *b* die Höhe ist, aus welcher ein fallender Körper mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält, so wird, wie wir oben gefunden,

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

welche Länge, wie wir schon bemercket, öfters ziemlich von derjenigen, welche der Autor nach seiner Art gefunden, unterschieden seyn kann. Der Autor bestimmet aber ferner die Geschwindigkeit der Kugel, oder die Höhe *b*, nach der von ihm anfänglich gegebenen Methode aus der Quantität der Ladung, der Länge des Laufs, und dem Raum hinter der Kugel, worüber schon vorher verschiedene Anmerkungen gemacht worden. Lasst uns nun, um die Buchstaben nicht unter einander zu verwirren, die Länge des Laufs, woraus die Kugel geschossen wird, setzen $=\alpha$, die Länge des Raums hinter der Kugel $=\beta$, die Länge der Höhlung so mit Pulver angefüllt worden $=\gamma$, den Diameter der Kugel $=c$, und die Zahl *n* soll anzeigen, wie vielmahl die Materie, woraus die Kugel besteht, schwehrer ist, als das Wasser; so findet man hieraus die Höhe *b*, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel durch den Fall erlangt wird, also in Rheinländischen Schuhen ausgedrückt

$$b=\frac{110524,08\gamma}{nc}l\frac{\alpha}{\beta}$$

wo man für $l\frac{\alpha}{\beta}$ den gewöhnlichen Logarithmum des Bruchs $\frac{\alpha}{\beta}$ zu nehmen hat. Will man aber diese Länge *b* in Englischen Zollen mit dem Autore ausdrücken, weil 0,97 Rheinl. Schuh 12 Englische Zoll geben, so hat man

$$b=\frac{136708\gamma}{nc}l\frac{\alpha}{\beta}$$

b Engl. Zolle, folglich

$$2b=\frac{2734616\gamma}{nc}l\frac{\alpha}{\beta},$$

und also

$$\sqrt{2b}=1654\sqrt{\frac{\gamma}{nc}l\frac{\alpha}{\beta}}$$

dahero bekömmt man die Länge der Sehne *k* also:

$$k=1654\,pah\sqrt{\frac{\gamma l\left(\alpha:\beta\right)}{\sqrt{nc\left(Pg+ph\right)\left(Pfg+phh\right)}}}$$

wenn man nehmlich weder den Gegendruck, noch die Resistentz der Luft, so lange sich die Kugel im Lauf befindet, in Betrachtung ziehet. Wir haben aber in dieser Rechnungs-Formul mit dem Autore angenommen, daß sich alles Pulver plötzlich entzünde, und dadurch eine solche subtile Materie erzeuget werde, deren Elasticität, so lange dieselbe noch in eben demselben Raum, den das Pulver eingenommen hatte, eingeschränckt 1000 mahl grösser sey, als die Elasticität der ordentlichen Luft, oder, welches gleich viel, als Druck der Atmosphäre. Es ist aber schon oben deutlich dargethan worden, daß sich das Pulver unmöglich so plötzlich entzünden könne, und daß folglich die Elasticität obgemeldeten subtilen Materie weit mehr, als 1000 mahl grösser seyn müsse, als der Druck der luft, wenn dieselbe eben die Würkung hervor bringen soll. Was demnach die so genaue Uebereinstimmung der Versuche mit des Autoris Theorie betrift, ungeachtet an der Berechnung der Länge der Sehne *Ll*, welche der Verfasser den observirten vergleichet, ziemlich viel auszusetzen ist, so erhellet doch daraus so viel, daß die aus der Theorie gefundenen Geschwindigkeiten von der Wahrheit nicht allzusehr abweichen, obgleich die Uebereinstünmung beyweitem nicht so groß als der Autor glaubet, weil die berechnete Länge der Sehne bißweilen auch um einen gantzen Zoll unrichtig seyn kann. Wenn aber auch ja die gerechnete Geschwindigkeit der Kugel der Wahrheit gänzlich gemäß wäre, so würde doch dadurch noch nicht die Meynung des von der Gewalt des Pulvers befestiget; indem eben dieselbe Geschwindigkeit der Kugel eingedrückt werden könnte, wann die Kraft des Pulvers weit grösser, dabey aber nicht auf einmahl ihre Würkung auszuüben gesetzt würde. Der Autor führet zwar zu Behauptung Meynung diejenigen Experimente an, welche mit ungleich langen Läufen gemacht worden, und dennoch mit der Theorie gut übereinstimmen, welches, seiner Meynung nach, nicht geschehen könnte, wenn sich das Pulver nur nach und nach entzündete, indem sich in dem kürzeren Lauf ein weit geringerer Theil entzünden würde, die Kugel heraus getrieben wird, als in dem längern. Wir haben aber oben schon auf diesen Umstand geantwortet, und auch andere Erfahrungen, aus welchen das Gegentheil erhellet, dagegen angeführt. Wir wollen also allhier nur so viel beyfügen, daß vielleicht das Pulver, welches der Autor gebrauchet, so gut gewesen, daß sich der meiste Theil da von entzündet hat, ehe die Kugel aus dem kürzesten Lauf heraus gefahren. Es können auch hernach die unrichtig berechneten Sehnen eine so genaue Uebereinstimmung mit der Experientz anzeigen, dergleichen nicht erscheinen dürfte, wenn man dieselben nach den wahren Regeln berechnen Wolte. Endlich kann auch das Herausdringen der elastischen Materie durch den Spielraum und das Zündloch wiederum einiger maassen die Uebereinstim mung mit der Experientz herstellen, wie in den vorigen Anmerkungen mit mehrerem augezeiget worden. Man erkennet aber aus dieser Uebereinstimmung doch so viel, daß wenn gleich die erste Elasticität des Pulvers weit grösser ist, als der Autor angenommen, dennoch dieselbe in den meisten Fällen keine stärkere Würkung hervorbringe, als der Autor nach seiner Rechnung befunden, und daß folglich die allmählige Entzündung des Pulvers, und die übrigen Hin demisse, welche oben angeführet worden, die Geschwindigkeit der Kugel beynahe um eben so viel vermindem, als dieselbe durch die grössere Gewalt vermehret werden solte. So oft sich also diese Gleichheit einfindet, so oft kann man auch die von dem Autore gegebene Regel, um aus der Ladung die Geschwindigkeit der Kugel zu bestimmen, sicher gebrauchen. Es können aber gleichwohl solche Umstände vorkom men, da entweder die grössere Gewalt des Pulvers, oder die abgemeldeten Hin demisse die Oberhand behalten, in welchen folglich die Geschwindigkeit der Kugel entweder grösser oder kleiner seyn wird, als die von dem Autore gegebene Regel anzeigt. Ein solcher Fall ereignet sich, wenn die Ladung des Pulvers allzu geringe ist, allwo, wie der Autor sehr wohl bemerket, die Hitze Entzündung, und folglich die Elasticität der subtilen Materie nicht so groß seyn kann, als in der Rechnungs-Formul gesetzt wird. In dieser ist der Buchstabe $m = 1000$ genommen worden, welcher Werth sich für die grösseren Ladungen sehr wohl schickt; bey sehr kleinen Ladungen aber muß derselbe kleiner gesetzt werden. Wenn wir nun setzen, daß für eine geringere Ladung μ der gehörige Werth des Buchstabens m sey, so lässt sich diese Zahl μ für einen jeglichen Fall aus dem Unterscheid zwischen der Länge der Sehne, so nach der Rechnung gefunden, und durch das Experiment angezeigt wird, leicht bestimmen. Denn da, wenn $m = 1000$, die Sehne k gefunden worden

$$k = 1654\,pah\sqrt{\frac{\gamma l(\alpha:\beta)}{nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

so muß, wenn *m* nicht 1000, sondern gleich ist μ, die Sehne seyn

$$=1654\,pah\sqrt{\frac{\mu\gamma l(\alpha:\beta)}{1000nc(Pg+ph)(Pfg+phh)}},$$

wenn nehmlich die übrigen Umstände einerley sind. Dahero verhält sich bey sehr geringen Ladungen die gerechnete Sehne zu der observirten wie $\sqrt{1000}$ zu $\sqrt{\mu}$, und folglich ist 1000 zu μ wie das Quadrat der gerechneten Sehne, zu dem Quadrat der observirten, oder wie die Quadrate der Geschwindigkeiten selbst.

Da nun in dem von dem Autore angeführten Exempel, wo nur 1 Dr. Pulver geladen worden, die Geschwindigkeit nach der Rechnung seyn solte 482 Schuh in einer Secunde, dieselbe aber nur 400 Schuh wahrgenommen worden, so war in diesem Fall 1000 zu μ, wie 482^2 zu 400^2, und also

$$\mu=\frac{160000000}{482\cdot482}=688.$$

Wenn also nur ein Drachma Pulver angezündet wird, so ist die dabey entstehende Hitze um so viel kleiner, als wenn eine grosse Quantität Pulver genommen wird, daß die erste Elasticität nur 688 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre.

Im folgenden Experiment, da drey Drachm. Pulver geladen worden, wird $1000:\mu=835^2:730^2$ und also

$$\mu=\frac{532900000}{835\cdot835}=764,$$

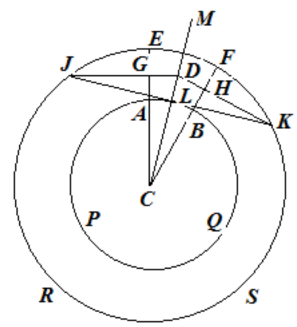
daß also in diesem Fall auch wegen der geringern Hitze die erste Elasticität des Pulvers nur 764 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre.

Der Autor findet im erstern Fall aus eben diesem Grunde die Verhältniß der Elasticitäten, wenn 1 Drach. oder 12 Drach. angezündet werden, wie 2 zu 3, welche Verhältniß mit unserer 688 zu 1000, sehr genau zutrifft; im an dem Fall aber hat er wie 3 zu 4 an statt 764 zu 1000, zwischen welchen der Unterscheid auch sehr geringe ist. Weil nun der Unterscheid zwischen diesen Zahlen 688, 764 und 1000, welche die Elasticität bey Entzündung 1, 3 und 12 Drach. Pulver vorstellen, ziemlich merklich ist, so hat man sich zu verwun dem, daß sich bey den Ladungen von 6 biß 36 Drach. kein solcher Unterscheid geäussert, und daß diese so verschiedene Fälle mit der Rechnung so genau haben übereinstimmen können. Vielleicht mag die oben bemerkte Unrichtigkeit in Berechnung der Sehne des aufsteigenden Bogens hieran Schuld seyn; und da die Hitze der Flamme, wie der Autor behauptet, um so viel grösser ist, je mehr Pulver sich auf einmahl entzündet, so stehet vielmehr zu vermuthen, daß auch die Elasticität bey der Ladung von 36 Drachm. merklich grösser, als bey 6 Drachm. gewesen, und dass dieselbe bey Canonen, wo eine weit grössere Quantität Pulver geladen wird, noch grösser seyn müsse. Dahero die von dem Autore gegebene Hegel, die Geschwindigkeit der Kugel aus der Kraft des Pulvers zu berechnen, allem Ansehen nach bey Canonen nicht mehr so genau zutreffen würde, ohne auf die übrigen Umstände zu sehen, wodurch die Würkung des Pulvers, wie oben erwiesen worden, keinen geringen Abbruch leidet. Es läst sich aber anjetzo noch nichts vollständiges hierinne bestimmen, weil die von dem Autore berechneten Sehnen von der Wahrheit ziemlich stark abweichen können, diejenigen Umstände aber nicht bemerket worden, welche zur Verbesserung nöthig sind. Dahero zu wünschen wäre, daß sich jemand finden möchte, welcher mit eben dem Fleiß, und auf eben die Weise, wie der Autor gethan, alle dergleichen Experimente wiederhohlte, bey einem jeglichen aber auch die Entfernung des Puncts am Brett, wo die Kugel hinein gefahren, von der Axe sorgfaltig mässe, und daraus nach den hier angezeigten wahren Hegeln die Länge der Sehne berechnete.

DRITTE ANMERKUNG

Der Nutzen, welchen man aus der Erkänntniß der Gewalt des Pulvers, und der Geschwindigkeit der Kugel in der Artillerie ziehen kann, muß nothwendig von grosser Wichtigkeit seyn. Denn, wenn man diese Punkte genau bestimmen kann, so weiß man auch, wie stark und fest sowohl die Canonen und Mörser, als die übrige dazu gehörige Geräthschaft seyn muß, und hat also nicht zu befürchten, daß man die Stücke entweder zu stark, oder zu schwach mache: wodurch im ersteren Fall alle unnöthige Unkosten vermieden, im an dem aber allem Schaden und Gefahr vorgebeuget wird. Eben diejenige Gewalt, womit die Kugel fortgetrieben wil·d, würket auch eben so stark auf die innern Wände der Canone, und wenn dieselben die gehörige Stärke nicht haben, um dieser Gewalt zu wiederstehen, so muß die Canone nothwendig bersten. Die gröste Gewalt, welche die Canone auszustehen hat, äussert sich also im ersten Augenblick, wenn sich clas Pulver entz1indet, ehe noch die Kugel merklich von ihrer Stelle getrieben wird, welches folglich in dem Raum *CDEG* (Fig. 1) geschieht, allwo die Wände der Canone so stark gedruckt werden, als der Boden einer aufrecht stehenden und mit Wasser angefüllten Röhre, deren Höhe 32000 Schuh ist, wenn wir nehmlich mit dem Autore setzen, daß die Elasticität der durch die Entzündung des Pulvers erzeugten subtilen Materie im ersten Augenblick 1000 mahl grösser sei, als der Druck der Atlnosphäre, welche einer Wasser-Säule von 32 Schuhen gleichet. Diese so sehr grosse Kraft erstreckt sich aber nicht auf die ganze Canone, sondern nur auf den hintersten Theil derselben *CDEG,* welcher nüt Pulver angefüllt worden; weswegen auch dieser Theil eine solche Stärke, als zu Aushaltung dieser Kraft erfordert wird, haben muß. Die vor dem Theile der Canone leiden nicht eher einige Gewalt, als biß die Kugel dahin fortgestossen worden, und alsdenn ist auch diese Gewalt kleiner, als vom Anfang. Wenn die Kugel schon biß *M* fortgestossen worden, so verhält sich die ausdehnende Kraft in Raum *AM* zur ersten, wie *AF* zu *AM,* und gleicht also einer Wasser-Säule, so $32000\cdot\frac{AF}{AM}$ Schuh hoch ist, woraus erhellet, daß die Gewalt, welche die vor dem Theile der Canone auszustehen haben, immer kleiner werde. Dahero auch die Canone an dem vor dem Theil nicht nöthig hat, so stark zu seyn, als hinten bey *AF,* und würde also überflüßig seyn, wenn man die Canonen vornen so stark und dick machen wolte, als hinten. Um aber deutlicher zu sehen, wie sich an einem jeglichen Orte die Dicke der Canone verhalten müsse, damit dieselbe weder zu stark, noch zu schwach sey, so müssen wir die Art, nach welcher eine Canone dieser Gewalt wiederstehet, in Betrachtung ziehen. Wenn das Metall, woraus eine Canone bestehet, keine Festigkeit hätte, kraft welcher die Theile desselben unter einander zusammen verbunden sind, so würden dieselben von der ersten Gewalt von einander zertrennet und zerstreuet werden, woraus wir erkennen, daß die Befestigung der Theile des Metalls der Gewalt des Pulvers wiederstehen müsse. Diese Festigkeit läßt sich aber, wegen der grossen Ungleichheit, so sich in der Verknüpfung der Theile befindet, so genau nicht berechnen, indem dieselben durch den Guß an einem Ort öfters viel fester zusammen getrieben werden, als an den an dem; dahero die Stärke immer grösser seyn muß, als irgend eine Theorie, welche auf eine solche Gleichheit in allen Theilen gegründet ist, anzeigt.

Dem ungeachtet wird es nicht undienlich seyn, allhier einen Begriff von dem Zusammenhang der Theilchen des Metalls, und dem daher entstehenden Wiederstand gegen die Gewalt des Pulvers zu ertheilen, ob sich gleich hierinne nichts so genau bestimmen läßt. Wir wollen uns zu dem Ende einen Durchschnitt einer Canone, so auf die Axe desselben perpendicular gemacht worden, vorstellen, allwo der innere Zirkul *AB QP* die Seele der Canone, da die ausdehnende Gewalt des Pulvers befindlich, und der Zwischen-Raum zwischen den beyden Circuln das Metall andeuten soll. Die ausdehnende Kraft des Pulvers würket nun allenthalben gleich stark den innern Umfang des Cirkuls *ABQP*, und suchet denselben entweder zu erweitern, oder gar zu zersprengen. Wir wollen aber nur ein Stück des Metalls *AEFB*, welches durch zwey aus dem Centro *C* gezogene Radios *CE* und *CF* abgeschnitten wird, in Betrachtung ziehen. Es sey der innere Radius $AC = BC = a$, und der Winkel $ACB = 2\varphi$, so Wird der Bogen *AB*, auf welchen die Kraft des Pulvers würket, gleich seyn $2a\varphi$, und folglich die Kraft selbst diesem Bogen proportional, welche wir also $= 2ma\varphi$ setzen wollen. Die mittlere Direction dieser Kraft wird nun durch das Centrum *C* gehen, und den Winkel *ACB* in zwey gleiche Theile zerschneiden. Es sey demnach *CDM* diese Direction, nach welcher das Stück *AEFB* von der Kraft $2ma\varphi$ gestossen wird. Wenn also dieses Stück nicht mit dem übrigen Metall befestiget wäre, so würde dasselbe würklich nach der Direction *DM* weggestossen werden. Die Befestigung dieses Stücks aber geschieht nach den Linien *AE* und *BF*, als in welchen dasselbe mit dem übrigen Metall zusammen hängt, und da diese Befestigung in allen Punkten gleich statt findet, so kann dieselbe als eine Kraft angesehen werden, welche das Stück *AEFB* beyderseits an den übrigen Theilen in *AE* und *BF* andrückt, und deren Direction beyderseits auf die Mitte den Punkten *G* und *H* perpendicular ist. Wenn wir also die Dicke des Metalls $AE = FB = b$ setzen, so wird beyderseits die zusammenhängende Kraft dieser Dicke *b* proportional seyn, welche wir also $= nb$ nennen wollen. Man verlängere diese beyden Kräfte-Directionen *GJ* und *HK*, biß sie im Punkt *D* auf der Linie *GM* zusammen kommen; und da werden wir dieses Punkt *D* ansehen können, als wenn auf dasselbe drey Kräfte würkten, erstlich nach der Direction *DM* die Kraft $2ma\varphi$, hernach nach den Directionen *DJ* und *D K* beyderseits eine Kraft $= nb$; und



diese beyden Kräfte müssen so groß oder grösser seyn, als zur Zernichtung der ersten erfordert wird. Wir wollen also diese beyden Kräfte zertheilen nach der Direction *DC*, und nach solchen, welche auf die Linie *CD* perpendicular sind, und sich untereinander aufheben. Weil nun die Dreyecke *CDG* und *CDH* in *G* und *H* rechte Winkel haben, so wird sich verhalten *DJ* oder *DK* zu *DL* wie *CD* zu *DG*, das ist wie der Sinus totus 1 zum Sinu des Winkels *DCG*, $\sin.\varphi$. Dahero wird aus beyden Kräften *DJ* und *DK* nach der Direction *DC* diese Kraft heraus kommen, $2nb\sin.\varphi$, welche, wenn sie kleiner wäre, als die Kraft $2ma\varphi$, so würde das Stück *AEFB* der Gewalt nicht wiederstehen können, sondern nach der Direction *DM* aus der Canone weggerissen Werden. Damit also dieses nicht geschehe, so muß die Kraft $2nb\sin.\varphi$ so groß oder grösser seyn, als die Kraft $=2ma\varphi$, folglich muß $nb\sin.\varphi > ma\varphi$, und dieses muß statt finden, der Winkel *ACB* mag so groß angenommen werden, als man will; es wird aber die Verhältniß $nb\sin.\varphi$ zu $ma\varphi$ am kleinsten, wenn der Winkel *ACB* gleich wird 180°, oder $\varphi = 90°$, in welchem Fall ist $\sin.\varphi = 1$ und $\varphi = 1,570796$: dahero muß auch *nb* grösser sein als $1,570796ma$. Hieraus erhellet, daß die zersprengende Gewalt am grösten werde, wenn das Stück *AEFB* dem halben Umfang gleich genommen wird, und daß also die Canonen der Gefahr an zwey gegen einander überstehenden Orten zu zerbersten am meisten unterwoi fen seyn. Wenn nun dieses nicht geschehen soll, so muß *nb* grösser seyn, als $1,570796ma$, oder in kleinen Zahlen muß *nb* grösser sein als $\frac{11}{7}ma$. In diesen Expressionen wird der Buchstabe *m* durch die ausdehnende Kraft des Pulvers, und der Buchstabe *n* aus der Festigkeit des Metalls bestimmt. Wenn also zu verschiedenen Canonen einerley Metall genommen wird, so muß immer die Dicke des Metalls dem Caliber, oder dem Diameter der Kugel proportional seyn. Und da einer Canone die ausdehnende Gewalt des Pulvers um so vielmehr abnimmt, je weiter die Kugel vorwärts getrieben wird, so muß sich die Dicke der Canone in dem Ort *M* verhalten zur Dicke des Boden-Stücks in *AF*, wie sich verhält die Länge *AF* zur Länge *AM.* Aus diesem Grund könnte also das Mund-Stück einer Canone ohne Gefahr viel schwächer gemacht werden, als zu geschehen pflegt, wenn nehmlich die Theorie des Autoris ihre Richtigkeit hätte, und sich alles Pulver auf einmahl entzündete. Denn in diesein Fall, wenn *AM* noch so groß als *AF* angenommen Wird, würde es genug seyn, wenn die Canone in *M* nur halb so dick wäre, als im Boden-Stück *AF*. Hiebey aber hätte man dennoch auf die stärkste Ladung zu sehen, so jemahls gebraucht werden könnte. Allem, Wenn man annimmt, daß sich nicht alles Pulver auf einmahl entzünde, so wird wegen des neu entzündeten Pulvers die Gewalt in *AM* zur Gewalt in *AM* eine grössere Verhältniß haben, als *AB* zu *AM*, und aus diesem Grund muß die Dicke der Canone im Vordertheil grösser seyn, als nach der vorigen Regel, welches auch durch die Erfahrung bestätiget wird. Und eben dadurch wird auch die Meynung nicht wenig befestiget, daß sich das Pulver nicht alles auf einmahl entzünde. Weil sich aber diese allmählige Entzündung nicht bestimmen läßt, und nach den verschiedenen Arten des Pulvers sehr unterschieden ist, so kann man auch durch die blosse Theorie die beste Proportion der Dicke einer Canone nicht heraus bringen, sondern die vielfältige Erfahrung scheinet zu diesem Ende das einige Mittel an die Hand zu geben. Wenn man aber des Autoris Theorie folgen wolte, so würde sich diese Sache sehr leicht ausmachen lassen: es würden aber dergleichen Canonen nicht lange der Gewalt des Pulvers wiederstehen können, indem das Mundstück gewiß zu schwach seyn würde, wenn auch das Bodenstück seine gehörige Stärke hätte.

Da nun aus diesem Grunde nicht wohl ein Mittel zu erfinden, das Gewicht der Canonen ohne Gefahr zu vermindem, so thut man am besten, wenn man sich zu Erhaltung dieses Endzwecks an die Verbesserung der Materie, woraus die Canonen gegossen werden, hält. Der gröste Vortheil würde also darinne bestehen, wenn man eine Materie ausfündig machen könnte, deren Theile weit stärker untereinander verbunden wären, als in der gewöhnlichen, in welcher Untersuchung man sich noch den besten Fortgang versprechen könnte. Es könnten vielleicht auch noch in dem Guß verschiedene Vortheile entdecket werden, wodurch die Materie eine um so viel grössere Festigkeit erhielte, wohin ohne Zweifel diejenige Erfindung mit zu rechnen, da einige angefangen haben, die Canonen maßiv und ohne Kern zu giessen, und erst nach dem Guß die Höhlung darein zu bohren. Denn auf diese Art wird das Metall nicht nur weit dichter, sondern man ist auch im Stande, die Seele accurat in der Mitte gerade durchzubohren, welchen Umstand man beydem Giessen nicht sowohl in der Gewalt hat. Endlich würde auch eine geringe Zähigkeit in der Materie zu den Canonen keinen geringen Vortheil schaffen. Denn, es kommt hier nicht nur auf die Kraft, wodurch die Theilchen der Materie untereinander verbunden sind, an, als welche in einem spröden und zähen Körper einerley seyn kann, sondern ob, nachdem die Theilchen im geringsten von einander getrieben worden, der Körper sogleich zerbreche, oder sich wiederum in seinen vorigen Stand zu versetzen vermögend sey. Hierinne bestehet nehmlich der Unterscheid zwischen spröden und zähen Materien, daß jene, so bald die Theilchen unteremander zerrüttet werden, auch so gleich zerbrechen, diese aber, ungeachtet in ihren Theilchen eine gleiche Zerrüttung vorgegangen, dennoch dadurch das Band der Festigkeit noch nicht aufgelöset wird. Wenn also die Materie, welche zu den Canonen gebraucht wird, einen etwas grössern Grad der Zähigkeit hätte, so würde man dieselben ohne Gefahr leichter machen können. Denn eben dieses war die Ursache, daß man vor Zeiten mit ledernen Canonen, welche am Gewieht mit den metallenen nicht zu vergleichen waren, fast eben so starke Schüsse hat thun können, ungeachtet dieselben nicht so dauerhaft waren. Inzwischen ist doch aus diesem Umstand so viel abzunehmen, daß in diesem Punct, was die Materie der Canonen betrifft, noch eine grosse Verbesserung gehoffet werden könne.

Von der ausdehnenden Kraft des Pulvers kommt auch das Zurückstossen der Schieß-Gewehre und der Canonen her. Denn diese Kraft treibt den Boden des Laufs eben so stark rückwärts, als die Kugel vorwärts; dergestalt, daß wenn das ganze Stück nicht schwehrer seyn solte, als die Kugel, alsdenn das Stück mit eben der Geschwindigkeit zurück, als die Kugel heraus fahren würde. Je schwehrer aber ein Körper ist, um so viel kleiner ist auch die Bewegung, welche demselben von eben derselben Kraft eingedrücket wird. Dahero so vielmahl eine Canone samt der L'affuite schwehrer ist, als die Kugel, welche daraus geschossen wird, eben so vielmahl langsamer wird auch die Bewegung der Canone seyn, als der Kugel; folglich wird sich der Raum, durch welchen die Canone zurückfährt, indem die Kugel zur Canone heraus getrieben wird, zur Länge der Canone weniger dem Raum hinter der Kugel verhalten, wie das Gewicht der Kugel zum Gewicht der gantzen Canone. Wenn also eine halbe Carthaune, so eine 24 pfündige Kugel schießt, 10 Schuh lang gesetzt wird, weil das Gewicht derselben ungefehr 64 Centner, oder 6400 Pfund beträgt, so muß diese Canone, indem die Kugel daraus herausgetrieben wird, durch einen Raum von $\frac{24}{6400}\cdot 10$ Schuh, das ist nur $\frac{3}{80}$ Schuh, oder nicht gar um einen halben Zoll zurückfahren. Wenn demnach der Grund, worauf die Canone ruht, so fest ist, daß dieselbe darauf um $\frac{1}{2}$ Zoll, ohne erschüttert zu werden, zurück treten kann, so ist der Schuß gewiß, wenn gleich der Grund weiter zurück keine Festigkeit hätte. Daß aber gleichwohl die Canone, nachdem die Kugel schon heraus geschossen worden, und also die zurücktreibende Kraft gänzlich aufgehöret hat, noch weiter zurück geht, kommt von der derselben schon eingedrückten Bewegung her, womit dieselbe zurück zu weichen fortfährt, so lange, biß durch den Wiederstand diese Bewegung völlig gehemmet wird. Deswegen hat die Anmerkung des Verfassers, betreffend die Festigkeit der Batterien, worauf die Canonen gepflantzet werden; ihre völlige Richtigkeit, und kann dadurch viel unnöthige Arbeit erspahret werden.

VIERTE ANMERKUNG

Der Autor ziehet auch noch aus seiner Theorie diesen Schluß, daß alle Vorschläge, welche auf eine sonderbare Figur der Pulver-Kammer in den Canonen gerichtet sind, nicht den geringsten Vortheil bringen können. Dieser Schluß hat seine völlige Richtigkeit, wenn sich nach der Meynung des Autoris alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzündet. Denn in diesem Fall ist auch die erste Gewalt desselben einerley, der Raum, worinne das Pulver eingeschlossen ist, mag eine Figur haben, wie man immer will, wenn nur derselbe ganze Raum mit Pulver angefüllet ist. Und wenn auch nur einTheil desselben mit Pulver angefüllet ist, so wird die Gewalt um so viel kleiner, als dieser Theil kleiner ist, als der ganze Raum hinter der Kugel: dahero auch in diesem Fall die Grösse der Gewalt nicht auf der Figur des Raums beruhet. Wenn aber die Kugel schon würklich fortgetrieben wird, so verhält sich die forttreibende Gewalt zur ersten Gewalt, wie der Raum, den das Pulver anfänglich eingenom men, zu eben diesem Raum nebst demjenigen, durch welchen die Kugel schon fortgetrieben worden: und also hat auch hier die Figur des Pulver-Raums auf die forttreibende Gewalt keinen Einfluß. Aus diesem Grunde ist es also gleichgültig, was man der hintersten Höhlung der Canonen für eine Figur geben will, und weil alle Figuren in Ansehung der forttreibenden Gewalt einerley Würkung haben, so erwehlet man billig diejenige, welche nach den übrigen Umständen die bequemste ist. Wenn man also aus an dem Ursachen nichts an der gewöhnlichen Figur der Canonen zu verändem nöthig findet, so könnte man auch aus diesem Grunde dieselbe sicher beybehalten, und alle Vorschläge, welche auf eine Veränderung abzielen, ohne fernere Untersuchung, als verwerflich ansehen.

Dieses gründet sich aber, wie schon gemeldet, auf die Meynung des Verfassers, daß sich alles Pulver im ersten Augenblick zugleich entzünde. Da wir aber schon oben sehr wichtige Gründe gegen diese Meynung angeführet haben, so kan man auch die Varschläge, welche auf eine vortheilhaftere Figur der Pulver-Kammer gerichtet sind, nicht mehr so platterdings verwerfen. Die Sache wird also auf diese Frage ankommen, ob die Figur des Raums, darinne das Pulver eingeschlossen ist, etwas zu einer schnellern oder langsamern Entzündung des Pulvers beytragen könne, oder nicht? Denn, wenn diese ,rage mit Ja beantwortet werden kann, so ist kein Zweifel übrig, daß diejenige Figur, in \welcher sich das Pulver am schnellsten entzündet, nicht die beste und vortheilhafteste seyn sollte. Denn je plötzlicher sich alles Pulver entzündet, je grösser und je länger fortdaurend ist auch die Gewalt, welche auf die Kugel würket, dahero auch derselben eine um so viel schnellere Bewegung eingedrucket wird. Daß aber die Figur des Raums nicht wenig zu einer plötzlichen Entzündung beytragen könne, ist leicht darzuthun. Man darf sich nur eine sehr lange und enge Höhre, in welcher das Pulver eingeschlossen und an einem Ende angezündet wird, vorstellen. Denn in diesem Fall wird sich die Entzündung nicht so gesch, vinde biß zum an dem Ende der Röhre ausbreiten, als wenn die Röhre kürzer wäre. Jedermann wird auch leicht begreiffen, daß, wenn man das Boden-Stück einer Canone in eine solche lange und enge Röhre verwandeln sollte, die Kugel mit einem weit geringern Grad der Geschwindigkeit heraus getrieben werden würde, wenn man schon eine gleich starke Ladung gebrauchte. Hieraus ist nun leicht abzunehmen, daß sich das Pulver um so viel geschwinder entzünde, je weniger alle Körner desselben von einander entfernet sind. Da nun die Kugelrunde Figur unter allen an dem, welche einen gleichen Raum einschliessen, diese Eigenschaft hat, daß der Umfang derselben am kleinsten, und alle Theile unter sich am nächsten beysammen sind, so ist auch kein Zweifel, daß sich das Pulver nicht in einem solchen Raum am geschwindesten entzünden sollte. Es wäre dahero dahin zu trachten, ob man nicht auf eine bequeme Art die Höhlung des Boden-Stücks in einer Canone hinter der Kugel entweder volkommen oder doch beynahe rund machen könnte: denn auf diese Art würde man keinen geringen Zuwachs an der Geschwindigkeit, womit die Kugel fortgetrieben wird, erhalten. Die Würkung würde auch um so viel stärker seyn, wenn man das Pulver im Mittel-Punkt dieses Raums anzünden könnte: als von welchem Ort sich die Entzündung rings herum am schnellsten zu allen Extremitäten ausbreiten ·würde. Es werden sich zwar, allem Ansehen nach, viele Schwierigkeiten finden, welche die Ausführung dieses Vorschlags unmöglich zu machen scheinen werden; es dürfte aber doch vielleicht ein tüchtiger und erfahrner Practicus noch Mittel ausfinden können, alle diese Schwierigkeiten zu heben, und den gethanen Vorschlag mit Vortheil ins Werck zu richten. Inzwischen ist zu unserem gegenwärtigen Endzweck genug, die Umstände angezeigt zu haben, worauf es bey vortheilhafter Einrichtung der Pulver-Kammer insonderheit ankömmt, und woraus man alle dahin abzielende Varschläge leicht wird beurtheilen können. Man hat aber hierbey zu bemerken, daß je mehr man die erste Gewalt des Pulvers auf diese Art zu vermehren im Stande seyn wird, das Metall an der Canone an diesem Ort auch um soviel stärker gemacht werden müßte.