NEW PRINCIPLES OF GUNNERY

CHAPTER II.

Of the resistance of the air, and of the track described by the flight of shot and shells.

BEFORE I more minutely discuss the subject of this chapter, it is necessary to premise, that the greatest part of authors have established it as a certain rule, that, whilst the same body moves in the same medium, it is always resisted in the duplicate proportion of its velocity; that is, if the resisted body move in one part of its track with three times the velocity, with which it moved in some other part, then its resistance to the greater velocity will be nine times the resistance to the lesser. If the velocity in one place be four times the velocity in another, the resistance to the greater velocity will be sixteen times the resistance to the lesser, and so on. This rule, though excessively erroneous, (as we shall hereafter shew) when taken in a general sense, is yet undoubtedly very near the truth, when confined within certain limits; and therefore, in our future disquisitions, we shall suppose, that in all small changes of velocity in the resisting body it does accurately hold true; so that when we speak hereafter of the resistance of the medium being increased or diminished by the varying of the velocity, we shall not hereby include that increase or diminution, which ought to take place according to this law, but shall thereby intend a resistance, greater or less, than what the moving body ought to undergo from the application of this principle; that is, we shall thereby understand an increase or diminution in the resisting power of the medium, similar to what might be occasioned by increasing or diminishing its density: the principal purport of our present attempt being to evince, that, according to the different compression of the medium, or the different degree of velocity in the moving body, such changes may arise in the resisting power of the medium, as could scarcely be effected, according to the principles commonly received on this subject, by a treble augmentation of its density. This we doubt not irrefragably to confirm in the following dissertation.

PROPOSITION I.

To describe the general principles of the resistance of fluids to solid bodies moving in them.

In order to conceive the resistance of fluids to a body moving in them, it is necessary to distinguish between those fluids, which being compressed by some incumbent weight, perpetually close up the space deserted by the body in motion, without permitting for an instant any vacuity to remain behind it ; and those fluids in which (they being not sufficiently compressed) the space lest behind the moving body remains for some time empty. These differences, in the resisting fluids, will occasion very remarkable varieties in the laws of their resistance, and are absolutely necessary to be considered in the determination of the action of the air on shot and shells ; for the air partakes of both these affections, according to the different velocities of the projected body.

If a fluid was so constituted; that all the particles composing it were at some distance from each other, and there was no action between them; then the resistance of a body moving therein would be easily computed, from the quantity of motion communicated to these particles: for instance, if a cylinder moved in such a fluid in the direction of its axis, it would communicate to the particles it met with a velocity equal to its own, and in its own direction, supposing that neither the cylinder, nor the parts of the fluid, were elastic ; whence, if the velocity and diameter of the cylinder be known, and also the density of the fluid, there would thence be determined the quantity of motion communicated to the fluid, which (action and re-action being equal) is the same with the quantity lost by the cylinder, consequently the resistance would be hereby ascertained.

In this kind of discontinued fluid, the particles being detached from each other, every one of them can pursue its own motion in any direction, at least for some time, independent of the neighbouring ones? wherefore, if, instead of a cylinder moving in the direction of its axis, a body, with a surface oblique to its direction, be supposed to move in such a fluid, the motion the parts of the fluid will hereby acquire, will not be in the direction of the resisted body, but perpendicular to its oblique surface; whence the resistance to such a body will not be estimated from the whole motion communicated to the particles of the fluid, but from that part of it only, which is in the direction of the resisted body. In fluids then, where the parts are thus discontinued from each other, the different obliquities of that surface, which goes foremost, will occasion considerable changes in the resistance, although the section of the solid by a plain perpendicular to its direction should in all cases be the same. And Sir *Isaac Newton* has particularly determined, that in a fluid thus constituted, the resistance of a globe is but half the resistance of a cylinder of the same diameter, moving in the direction of its axis with. the same velocity.

But though the hypothesis of a fluid, thus constituted, be of great use in explaining the nature of resistances; yet, in reality, no such fluid does exist within our knowledge: all the fluids, with which we are conversant. are so formed, that their particles either lie contiguous to each other, or at least act on each other in the same manner, as if they did; consequently, in these fluids, no one particle, contiguous to the resisted body, can be moved, without moving at the same time a great number of others, some of which will be distant from it; and the motion thus communicated to a mass of the fluid will not be in any one determined direction, but will in each particle be different, according to the different manner in which it lies in contact with those, from whence it receives its impulse; whence, great numbers of the particles being diverted into oblique directions, the resistance of the moving body, which will depend on the quantity of motion communicated to the fluid in its own direction, will be hereby different in quantity, from what it would be in the preceding supposition, and its estimation becomes much more complicated and operose.

If the fluid be compressed by the incumbent weight of its upper parts (as all fluids are with us, except at their very surface) and if the velocity of the moving body be much less ·than that, with which the parts of the fluid would rush into a void space, in consequence of their compression it is evident, that in this case the space lest by die moving body will be instantaneously filled up by the fluid, and the parts of the fluid against which the foremost part of the body presses in its motion, will, instead of being impelled forwards in the direction of the body, circulate in some measure towards the hinder part of the body, thereby to restore the equilibrium, which the constant influx of the fluid behind the body would otherwise destroy ; whence the progressive motion of the fluid, and consequently the resistance of the body, which depends thereon, would be in this instance much less than in our first hypothesis, where each particle was supposed to acquire, from the stroke of the resisting body, a velocity equal to that, with which the body moved, and in the same direction. Sir *Isaac Newton* has determined, that the resistance to a cylinder moving in the direction of its axis, in such a compressed fluid, as we have here treated of, is but one fourth part of the resistance, which the same cylinder would undergo, if it moved with the same velocity in a fluid constituted in the manner, we have described in our first hypothesis, each fluid being supposed to be at the same density. But again, it is not only in the quantity of their resistance that these fluids differ, but likewise in the different manner, in which they act on solids of different forms moving in them. We have shewn, that in the discontinued fluid, which we first described, the obliquity of the foremost surface of the moving body would diminish the resistance ; but in compressed fluids this holds not true, at least not in any considerable degree ; for the principal resistance in compressed fluids arises from the greater or lesser facility, with which the fluid, impelled by the fore part of the body, can circulate towards its hindermost part; and this being little, if at all, affected by the form of the moving body, whether it be cylindrical, conical, Of spherical, it follows, that while the transverse section of the body, and consequently the quantity of impelled fluid be the same, the change of its figure will scarcely affect the quantity of its resistance.

And this case, that is, the resistance of a compressed fluid to a solid, moving in it with a velocity much less than what the parts of the fluid would acquire from their compression ; this case, I say, has been very fully considered by Sir *Isaac Newton*, who has ascertained the quantity of such a resistance according to the different magnitudes of the moving body, and the density of the fluid. But he very expressly informs us, that the rules he has laid down are not generally true, but upon a supposition that the compression of the fluid be increased in the greater velocities of the moving body : however some unskilful writers who have followed him, overlooking this caution, have applied his determinations, to bodies moving with all kinds of velocities, without attending to the different compressions of the fluids they were refined by ; and by this means they have accounted the resistance of the air to musket and cannon-shot to be but one third part, of what I have found is by experience.

Indeed, from all we have said, it appears plain enough, that the resisting power of the medium must be increased, when the resisting body moves so fast, that the fluid cannot instantaneously press in behind it, and fill the deserted space ; for when , this happens, the body. will be deprived of the pressure of the fluid behind it, which in some measure balanced its resistance, and must support on its fore part the whole weight of a column of the fluid, independent of the motion it gives to the parts of the fluid ; and besides the motion in the particles driven before the body is, in this case, less affected by the compression of the fluid, and consequently they are less deflected from the direction, in which they are impelled by the resisted surface; whence this species of resistance approaches more and more to that described in our first hypothesis, when each particle of the fluid being unconnected with the neighbouring ones pursued its own motion, in its own direction; without being interrupted or deflected by their contiguity; and therefore, as we before observed, that the resistance of a discontinued fluid to a cylinder, moving in the direction of its axis, was four times greater than the resistance of a fluid sufficiently compressed of the same density, it follows, that the resistance of a fluid, when a vacuity is left behind the moving body, may be near four times greater than that of the same fluid, when no such vacuity is formed; for when a void space is thus left, we have shewn the resistance to approach in its nature to that of a discontinued fluid.

This then may probably be the case in a cylinder moving in the same compressed fluid, according to the different degrees of its velocity ; so that if it set out with a great velocity, and moves in the fluid till that velocity be much diminished, the resisting power of the medium may be near four times greater in the beginning of its motion than in the end. In a globe the difference will not be so great, because on account of its oblique surface, its resistance in a discontinued medium is but about twice as much as in one properly compressed; for its oblique surface diminishes its resistance in one case and not in the other: however, as the compression of the medium, now when a vacuity is left behind the moving body, may yet confine the oblique motion of the parts of the fluid, which are driven before the body, and as in an elastic fluid (as is our air) there will be some degree of condensation in those parts, it is highly probable, that the resistance of a globe, moving in a compressed fluid with a very great velocity, will be between that of a globe and of a cylinder in a discontinued medium ; that is, (in proportion to its velocity) we may suppose it to be more than twice, and less than four times the resistance of the same globe, moving slowly through the same medium; Whence, perhaps, we shall not much err in supposing the globe in its swiftest motions to be resisted near three times more, in proportion to its velocity, than when it is slowest.

And as this increase of the resisting power of the medium will take place, when the velocity of the moving body is so great, that a perfect vacuity is left behind it, so some degree of augmentation will be sensible in velocities much short of this ; for now when, by the compression of the fluid, the space left behind the body is instantaneously filled up, yet if the velocity, with which the parts of the fluid rush in behind, is not much greater than that, with which the body moves, the same reasons we have urged above, in the case of an absolute vacuity, will hold in a less degree in this instance ; and therefore we are now to suppose, that the increased resistance, which we have hitherto treated of, immediately vanishes, when the compression of the fluid is just sufficient to prevent a *vacuum* behind the refitted body ; but we must consider it as diminishing only, according as the velocity, with which the parts of the fluid follow the body, exceeds that, with which the body moves.

Hence then we conclude, that if a globe sets out in a resisting medium, with a velocity much exceeding that with which the particles of the medium would rush into a void space, in consequence of their compression, so that a vacuum is necessarily lest behind the globe in its motion, the resistance of this medium to the globe will be near three times greater, in proportion to its velocity, than what we are sure, from Sir *Isaac Newton*, would take place in a slower motion. We may farther conclude, that the resisting power of the medium will gradually diminish, as the velocity of the globe decreases, till at last, when it moves with velocities, which bear but a small proportion to that, with which the particles of the medium follow it, the resistance becomes the same with what is assigned by Sir *Isaac Newton* in the case of a compressed fluid.

And from this determination we may learn, how false that position is, which asserts the resistance of any medium to be in the duplicate proportion of the velocity of the resisted body ; for it plainly appears, by what we have said, that this can only be considered as nearly true in small variations of velocity, and can never be applied in the comparing together the resistances to all velocities whatever without the most enormous errors. These principles being laid down, we shall next proceed to an experimental examination of the resistance of the air in particular, both in order thence to evince how nearly these speculations agree to the real observed action of fluids, and likewise to shew, how egregiously all those theorists have been mistaken, who have conceived, that the resistance of the air to shells and shot of all kinds scarcely worthy of attention.

FIRST REMARK

Because a body, which moves in a fluid substance, cannot move forwards without setting the particles of the fluid standing in its way in motion themselves, thus it is necessary that the speed of the body must be diminished. Now since no motion can occur without this force being introduced, thus a force is required to move the particles of the fluid forwards. But this force acts backwards on the body itself, and consequently diminishes its motion. This thus follows from the known principles of mechanics, that no body can communicate a motion to another body, without losing so much of its own motion; and the common rule is founded on this, according to which the motions between the colliding bodies will be changed by each other after the collision.

But one asks further for the initial cause of these changes, as based on the same property which all bodies have, in so far as the same are able to persist in their unchanged states, without the fluid matter being put in place. That it, this capability is an essential property of matter, and the same is just as intrinsic for the expansion [of the fluid] itself, the change in form that the fluid can adopt, ever so small, likewise cannot take place without this ability, and so persists in its unchanged state. This capability is expressed equally for bodies at rest as well as moving. Then a resting body by virtue of these capabilities must remain in a state of rest, and can never have a motion, if no external force arises, through which it will be set in motion. The same thing occurs, if a body is found to be moving, so must the same invariably be moving forwards with the same invariant motion, if no external force causes a change therein. Thus as often as either a body which before remained at rest, will have been set in motion, or a moving body experienced a change in its motion: so thus one is always assured, that an external force has acted on that body.

Moreover every motion arises with two parts to be considered, namely the speed and the course or direction of the same, and therefore also equally a body by virtue of its intrinsic capabilities, according to these two parts, thus will have its state determined to remain unchanged. Indeed if a body shall once be set in motion, and no external force acts on the same [thereafter], hence shall maintain both the same constant motion as well as the same fixed direction. But if one may observe, that either the speed or direction of the same, or both parts should be changed together : thus, one can safely draw the conclusion that such a change will have been caused by an external force. Now since at each instant suchlike changes arise in the world, and since there neither lasting rest nor uniform motion is encountered, thus here it would be fair to ask the question: Where do all these forces come from, which enable these changes to arise.

In order to answer these questions, various philosophers have asserted that bodies as well as having the ability to persist unchanged in their present state, still are endowed with a force to alter their condition evermore. But besides that, because in this way, one can attribute to the matter two wholely directly opposed properties to be considered, thus from that, one cannot provide a single way of explaining the smallest of these changes that we perceive in the world. In particular, besides, nature has no need to this end for special forces to produce these changes :
[*i.e.* those changes associated with uniform motion in a straight line; one still hears occasionally people referring to the *force of inertia*, demanding that some kind of force is needed for this kind of motion, rather than lack of force completely, as Newton asserts.]
for in all its workings the shortest and simplest way is chosen always; thus no other force is employed by which all bodies are endowed to persevere in their state, besides those mandatory ones capable of making the changes.

There seems in fact still to be some dissent held with regard to this the first view, in that one can have difficulty in understanding how a force, which is determined to maintain the body in its state, also equally can bring forth change. Moreover, if one considers this matter to be of greater significance, thus one sees at once, that this intrinsic property of all bodies, by which they endeavour to maintain themselves in their present state of motion, not only causes them to change, but also that all changes undergone, which we can explain in that state, can be derived from this common property, and from no others.

In order to make this action understandable, thus one may put in place only two bodies, of which the second encounters the first at rest and collides with it with a certain amount of speed. These two bodies have the property of maintaining the state in which they find themselves. We would like for clarity to call the first body which remained still by the letter *A,* but the other, which goes away from it, is noted with the letter *B*. The first body *A* now has a property, whereby it remains in its unchanging state of rest, but the other *B* has the property, also to persist in its state, that is, with its speed constant along its direction or to proceed along a straight line. If now the body *B* actually comes to the body *A*, as one well sees, that neither can stay in the same state, without that equally the state of the other will change more markedly. For if the body *A* should persist in its own state of rest ; because the other cannot penetrate through this one, so *B* must either suddenly remain at rest, bounce backwards, or go of sideways ; but in all cases its former state would change considerabley. But should body *B* continue with its motion unchanged, so must then the body *A* itself here be forced forwards; and consequently the body *A* would be brought out of its previous state. Since it is not possible now, that the two bodies continue in their original states, and also with no reason at hand, why only one rather than the other should go ahead with all the change, so therefore it is necessary, that both bodies together must suffer a change in their states. For example body *A* will start to move, but the speed of body *B* will be diminished. Because now the cause, by which a body will have its state changed, has been called a force, to take care of the changes, thus it is clear that the forces, by which the states achieved by both the bodies *A* und *B* will be changed, in which nothing other is to be put in place, than in that the possibility, which every body has in that state, to persist in its state. Thus there is that ability, which body *A* has, to persist in its state, to which the cause and consequently the force acts, which therefore can bring about the change in the state of the body *B* ; and on the other hand, from that with which the body *B* is endowed, to remain in its state, the causes and also the force, by which a change in body *A* may arise.

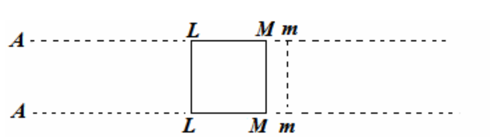
As long as a body maintains its unchanged state, that is whether staying in its state of rest, or continuing its motion undisturbed, as not in any other way, than to express the ability to persist in its state; but as soon as this body encounters a resistance which hinders its motion, it can no longer remain in its state, so it resists these changes now by that same property, so it must move forwards, and exert a force to clear the obstacles from the way. Thus all the forces that are to be found in the world, arise from nothing other than the ability, with which all bodies are endowed, to persist in their state, and which changes into a real force, as soon as two or more bodes run up against each other in such a way, that nothing can be maintained, without the remaining being changed at the same time. Now because suchlike coincidences occur incessantly in the world, as whither a body at rest is to be pushed against by another, or a change in speed put in place by bodies colliding together, thus themselves express such persistent forces encountered between each other, by which the state of any body will be changed. And from this one sees, that all changes which come about in the world, can be considered to have arisen alone merely from the ability that all bodies have, to persist in their unchanging state. When one examines this circumstance thoroughly, thus one finds in so doing that the state of any body will only be changed so far, as the other body encountered, which cannot maintain its state, without that undergoing a change itself. Now how great in any single case, if two bodies can be changed together, that both cannot remain in their state, the changes shall be, which occur in each one in particular, will be determined by mechanics.

On this foundation rests the whole doctrine of the resistance of bodies, which themselves move in a fluid matter, such as water or air. Because if a body should continue in its motion in such a fluid without interruption, so it must be necessary for a rather small part of the fluid at rest to be pushed away and to be put into motion. Now since these small particles are endowed with an equal ability to persist in their state, so they resist such a change: and thus must go on to produce also a change in the body itself, which as it will be so much greater, the more the particles of fluid are to be put in motion, and so the greater the change is, that must arise from that. If also the change were know, which was caused in the fluid , so one can calculate from the principles of mechanics, how great the change must be in the moving body itself. Now from this arises the resistance, which a body moved in a fluid suffers, and must consequently be determined from the principles of mechanics.

SECOND REMARK

The author considers initially such a fluid matter, the particles of which are separated from each other in such a way that any one of which can continue with its impressed motion unchanged for some time, without being disturbed by surrounding particles in the fluid. Now equally if this idea is contrary to the nature of all flowing matter, and in the whole world no such material were to be found, thus this itself still serves to lay the basis of the understanding of resistance. For if a body itself moves in such a fluid, thus it acts continually against new particles ; because these, which before have sustained the force already, continue to progress with the motion impressed on them without the state of the rest being interrupted: and if this fluid were assumed itself to be completely at rest, thus all the particles themselves are found, whereupon the body at some instant pushes against, to be completely at rest. The calculation of the resistance, which the body endures in this fluid, also is based on this, which one determines, as to how much of its speed a body loses in any single instant, if the same steadily interacts with a certain number of smaller particles ; which are taken at rest, and of which the density is known relative to the body. Let this itself be accounted for by the known rules, after which the motions of two bodies interacting together will be changed, if one knows only before, if these particles next to the body, shall be elastic and after the interaction with each other, whether they rebound or not, in which case they both stay together after the interaction. We want here to put in place both cases, as from which in one the resistance is a much greater difference, to be seen besides in the reckoning

Thus for the first case no elastic force should be present, in such a way that the particles, which have been set in motion by the body already, for the same to go forwards [*i.e.* attached to the body], but nevertheless causing no change in the remaining. Now as one can clearly be introduced to this without finding difficulty, so one must imagine only that these particles, which already have endured the impact of the body, to vanish at once or to become reduced to nothing, from which no change will be ongoing in the state of the remaining particles, before the body also interacts with the same. Because then the whole notion of such a flowing matter exists alone merely in the power of the



imagination, so it enables us free also still towards putting this requirement in place : that renders it clearer about what we have to say about this kind of fluid. We will also to put in place, that the foremost part of the body MM , with which the body itself collides with the part of the fluid matter, to be a plane and equally to be perpendicular to the line AM, along which the body moves forwards. Let the area of this foremost surface $MM = cc$, the length of the body, which can be considered as a cylinder, $LM = a$; and the speed, with which the same now actually progresses, should be expressed by $\sqrt{v}$, or v signifies the height, from which a falling body reaches such a speed. The density of the body further expressed by *m*, and the density of the flowing matter by *n*. Hence the mass of the body will be $= macc$. Now while the body is borne along through an infinitely small space $Mm = dx$, so must the particles of the flowing matter, which are held in this volume $MmmM$, be pushed away ; and since the mass of these particles is $= nccdx$, so here this question arises to be resolved : by how much the speed $\sqrt{v}$ of a body, of which the mass = *macc*, will be changed, if the same collides with another body at rest, of which the mass $= nccdx$. Before the collision thus the magnitude of the motion $= macc\sqrt{v}$, and since after the collision the speed of the body is

$$\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}},$$

which thus in common with the particles of the fluid matter *nccdx*, so meanwhile the magnitude of the motion of both bodies after the collision will be

$$= (macc + nccdx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

which after the laws of mechanics must be equal to the magnitude of the original motion, $= macc\sqrt{v}$. Thus this equation arises

$$macc\sqrt{v} = (macc + nccdx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

which will change into this :

$$0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{v},$$

from which there becomes:

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx.$$

From this it is found, that the motion of the body equally must be diminished, as if a weight from the flowing matter were impressed consisting of a cylinder, of which the base or thickness were $= cc$, and of which the height $= 2v$; then the mass, and consequently the weight of such a cylinder, will be $= 2nccv$, and since the mass of the body is *macc*, so must the motion of the same, while advancing itself through a way *dx*, be diminished by so much, as the equation indicates :

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx,$$

which is in full agreement with the above. Thus if such a body moves in such a fluid, so the force of the resistance equals the weight of such a cylinder of moving matter put in place, of which the base with the same surface as the body $MM = cc$, and the height of which is the doubled height $2v$, through which the speed of the body will be impressed. Now since the height v is proportional to the square of the speed, thus one sees that the resistance of such a fluid matter is proportional to the square of the body moving therein ; namely if the foremost plane of the body *MM* pushes perpendicularly against the particles of the flowing matter.

Thus the resistance of fluid matter is of such a form, if no elasticity is present, and consequently no rebounding of the particles occurs from the collisions. But if both the body as well as the particles of the flowing matter shall be endowed with complete elasticity, so must the interaction be extended to the following case in which elastic bodies are to be calculated in the collisions. In this case now the particles of the flowing matter rebound from the body, and consequently can have a greater degree of speed than the body had itself. Thus in this case there shall be two unknown quantities, firstly the speed of the body, and then also the speed of the fluid particles after the collision. In order to determine both these things, thus to the previous principle that we have just used, concerning the equality of the motion before and after the collision, it is necessary to combine this with other principle, that the so-called living forces are equal before and after the collision [i.e. the kinetic energy without the factor of $\frac{1}{2}$]. But the living force of a body will be found, if one multiplies the mass by the square of the speed. Thus if we multiply as before, the speed of the body, the mass of which is $= macc$, before the impact by $\sqrt{v}$, and after the impact by

$$\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}};$$

whereas the speed of the fluid matter, the mass of which is $= nccdx$, against which the body strikes, as well as progressing through the space itself $Mm = dx$, after the impact will be designated by $\sqrt{u}$, as which before the collision had been $= 0$: so the quantity of motion before the collision be

$$= macc\sqrt{v},$$

but after the collision it will be

$$= macc\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right) + nccdx\sqrt{u}.$$

From which this equation arises from the first principle [*i.e.* the conservation of linear momentum]:

$$0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{u}.$$

The living force before the impact will be $= maccv$, but after the impact it will be

$$= macc(v + dv) + nccudx\,,$$

from the equality of which one has $0 = maccdv + nccudx.$ [Essentially the conservation of kinetic energy.] Now since from the first equation there will be found :

$$\sqrt{u} = \frac{-madv}{2ndx\sqrt{v}}$$

and also

$$u = \frac{m^2a^2dv^2}{4nndx^2v},$$

but the other equation gives

$$u = \frac{-madv}{ndx},$$

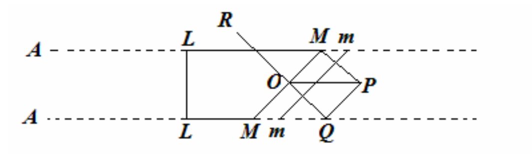
so there becomes

$$\frac{madv}{4nvdx} = -1 \text{ or } dv = \frac{-4nccvdx}{macc}.$$

Therefore in this case the resistance is just as great as the weight of a cylinder of flowing matter put in place pressed against the body, the base of which equals the thickness of the body $MM = cc$, and its height is four times as great as that v, by which the speed of the body will be expressed. Now since in the original case the height of the opposing pressing cylinder was only found to be $= 2v$, thus one sees that in the present case because the resistance of the elasticity to be twice as great as in the previous, where no elasticity was present. But in both cases, if the same body itself were moving with a different degree of speed in the same fluid matter, thus the resistance is always proportional to the square of the speed. But if the density of the flowing matter were greater or smaller : so also would the resistance become just as much greater or smaller. Now because of this method the change of the speed of the body will be found easily, thus also from that the whole motion of the same can be found, so it will not be difficult to determine the successive diminutions in its motion.

But until now we have considered only the case, if the foremost part of the body, on which the parts of the fluid matter strike, not only to be a plane, but also is perpendicular to the direction of the motion. In this case the force of the resistance is directly opposite to the motion of the body, and consequently diminishes the speed itself, without changing the direction. Therefore such a body moves forward according to a straight line, and its state only with regard to its speed alone will be changed. It is thus still necessary, that the resistance be determined, if the front plane of the body be made with its direction at a sloping angle, as from that subsequently also the resistance of all figures as well as just figures made from crooked lines will be able to be found.

We will also put in place the figure of the body provided, as the diagram shows, to have the form, that the body *LLMM,* which itself from the figure moves in the direction *OP* in the fluid matter, with its sloping plane *MM* colliding with the particles of flowing



matter. Thus as well as this body moving through an indefinitely small space $Mm = dx$, so must the fluid matter contained in the volume *MMmm* be forced forwards. If now further we put in place the foremost surface of the body *MMcc*, so that the volume of the fluid matter to be moved forward is no more than $= ccdx$ *:* the same must be in accordance with the ratio of the radius to the sine of the angle *MOP*, by which the force acting on the foremost part of the fluid matter will be diminished. If also the radius $=1$, and the sine of the angle were set : $MOP = q$, thus the volume of the fluid matter, which must be present in the motion, as well as in the body drawn forwards along the path $Mm = dx$, must be expressed by *ccqdx*, and thus the former resistance must still be multiplied by *q*, namely if the action otherwise produces the same effect. Since the body alone is not thrust straight, otherwise the collision with the fluid matter will be oblique, thus also the resistance must not be so great as in the previous case, and consequently must be still be from the same principle from the rules of mechanics to be multiplied by *q*. Whence the ratio itself of the resistance of the plane *cc*, if the same strikes the fluid matter perpendicularly, to the resistance if now it strikes at a sloping angle, of which the sine $= q$, progresses as the square of the radius 1 to the square of the sine *qq*. But since further the fluid matter only resists, as far as the motion of the body is directed along the straight line *MM*, thus the direction of the resisting force is perpendicular to the surface *MM*. If also the speed of the body were expressed by the height *v*, thus the resisting force, of which the direction *OR* is perpendicular to *MM*, is equal to a weight now of the fluid matter consisting of cylinder, of which the base $= cc$, and the height either $= 2qqv$ or $= 4qqv$,depending on whether the force is judged from the rules to be fully elastic or not. Because now in the present case the body will be forced back along the line *OR,* which is perpendicular to the front surface *MM*, but this direction makes a slanting angle with the direction of the motion, so thus not only will the speed of the body be diminished, but also its direction changes. Then if we assign this force, which will be expressed either by $2nccqqv$ or through $4nccqqv$, where as before *n* shall be the density of the fluid matter, to be resolved in two directions, one of which is set to go along the direction of the motion, but the other is perpendicular to the same, thus the former will be $=_4^2 nccq^3v$, but the latter

$$=_4^2 nccqqv\sqrt{(1-qq)} .$$

The first will diminish the speed of the body, but the latter will change the direction of the motion. We will put the letter μ for the two numbers $\frac{2}{4}$, which consequently, if the body had no elasticity, be expressed by 2, but if complete elasticity is present, it will be expressed by 4, and *P* shall be the mass, or the weight assigned to the moving body. Now from this it is clear, that while the body goes forth through $Mm = dx$, first its speed $\sqrt{v}$ will be diminished in such a way, that

$$dv = \frac{-\mu nccq^3 vdx}{P}.$$

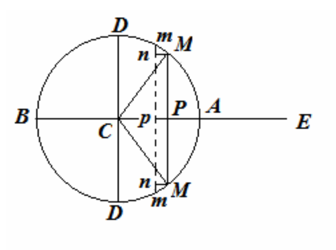
Meanwhile also the direction will be changed in such a way, that the body will describe the arc of a circle, of which the radius

$$= \frac{2P}{\mu nccqq\sqrt{(1-qq)}}.$$

But thus as soon as the body changes its direction, so also will the slope change, on which the particles of fluid matter act, and consequently the sine *q* adopts another value. Thereupon the body will take a movement of rotation, and at once strikes the particles of the fluid matter with another part of its surface. In such a manner, that the resistance will all change in an instant, and thus the motion of the body will become very complicated.

From the resistance, which a moving sloping surface endures in a fluid matter, the resistance of any body now can be calculated, whatever its shape may be. But here in particular rounded bodies, which are especially noteworthy before others, because those alone will lose their speed but maintain their direction unchanged, moving along the direction of their axes. Since then such a body presents on all sides equal surfaces symmetrically placed for their interactions with the fluid, so that all these lateral forces therefore can result in no effect on the motion of the body.

A round body is now but in place, if an arbitrary shape may be rotated about an axis. Therefore *ADB* shall be such a figure, from the rotation of which about the line *AB* the body is put in place, the resistance of which we investigate here, if the same moves along the direction of its axis *BAE* in a fluid matter. One sees easily too, that if the shape *ADB* were semicircular, hence the extended body will be a ball. But we want in the first place to address in general the calculation of any curved line, which can be taken for *ADB*. Before all else one must now distinguish that circumferential part which interacts with the fluid matter from the remaining part. This part of the circumference, from which the resistance has come about, extends from the part *AMD* of the curved line taken, and stretches from *A* as far as *D,* where the circumference starts to return backward, that is usually, where the tangent will be parallel to the axis *AB*. Now one can take at will a perpendicular line *MP* from the axis



AB, and put $AP = x$, $PM = y$; further *mp* to be indefinitely close to the previous *MP*, and together parallel, and draw *Mn* parallel to the axis, so there will be

$$Pp = Mn = dx, \quad mn = dy \text{ and } Mm = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)};$$

however for brevity, one puts $Mm = ds$. By the rotation of these line elements Mm about the axis *AB* a ring is put in place, of which the surface expressed $= 2\pi yds$, if $1:\pi$ indicates the ratio between the diameter of the circle and its circumference. This ring now thrusts everywhere against the particles of the fluid matter at the same slope, namely at the same angle $= mMn$, of which the sine consequently is $= \frac{dy}{ds}$, and the cosine $= \frac{dx}{ds}$. Also if the speed of the body is expressed by $\sqrt{v}$, and the density of the fluid matter will be expressed by *n* : so the resistance of the accommodated rings has been addressed (namely if one puts $2\pi yds$ for *cc* and $\frac{dy}{ds}$ for *q*)

$$\mu n \cdot 2\pi yds \cdot \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \cdot v = \frac{2\mu\pi nvydy^2}{ds},$$

the direction of which is along the line *MC*, which is thus perpendicular to *Mm*. Therefore the resistance thus increased along the direction of the motion

$$= \frac{2\mu\pi nvydy^3}{ds^2};$$

and the integral from this

$$2\mu\pi nv\int \frac{ydy^3}{ds^2}$$

gives the whole resistance, which the part of the circumference suffers, arising thus from the arc *AM* : and if one works out the point *M* as far as *D*, thus the sought resistance arises, by which the motion of the body will be diminished.

Now therefore in order to find the resistance of a ball, thus one is required only to put in place for the curved line *AMD* the quarter of a circle. Let the radius of the ball be $AC = CD = a$; thus there becomes $CP = \sqrt{(aa - yy)}$ and

$$Mm = ds = \frac{ady}{\sqrt{(aa - yy)}}.$$

Consequently there is

$$ds^2 = \frac{aady^2}{aa-yy},$$

and the resistance found above will be

$$= 2\mu\pi nv \int \frac{ydy(aa-yy)}{aa} = 2\mu\pi nv\left(\tfrac{1}{2}yy - \frac{y^4}{4aa}\right).$$

One now puts $y = a$, in order to find the whole resistance, thus one finds

$$2\mu\pi nv \cdot \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{2}\mu\pi naav.$$

But now πaa expresses the whole area of a great circle of the [cannon] ball, or the thickness of that itself, for which if one puts *cc*, so the resistance arises

$$\tfrac{1}{2}\mu nccv.$$

But if such a circle, or an equally suitable thick cylinder, be so moving along its length in this fluid matter, thus its resistance would be

$$= \mu nccv;$$

it is clear that the resistance of the ball is half as great as the resistance of a cylinder of equal thickness, thus itself moving along its length with the same speed in a suitable fluid matter.

THIRD REMARK

Moreover such a fluid matter, of the kind we have considered here, neither itself can be found not even in the whole world, but also because it is not possible : therefore also the resistance found, which acts on a body in such a fluid matter that can be encountered in the world, must be found otherwise than in the previous note. We want to address our considerations mainly to air, as the resistance of which will be sought here. Now before all other things it is to be noted that not only is air a fluid matter, but also itself to be found in a compressed state, to such an extent that every body is so surrounded by air so to be pressed together all around by the air ; but because this compression force is equally great everywhere, so the body will not be set in motion from that, if previously to be at rest itself. But if the body already had a motion, thus not only does it experience the previous compression force, as well as that it still has the force, which has been put in place from the impact of the particles of the air. If indeed the previous forces are maintained in equilibrium, then the whole change in the motion comes from the latter alone; which has arisen, if the motion of the body is not very fast. But if the body itself moves with a great speed, thus the air around it will be set into a marked motion, whereby the pressure of the same has changed to some extent, and no longer has a single effect around the body. In this case also the state of the body will be changed not only by the retarding force of the air, but also by the uneven pressure itself. In particular one has here to consider the rear part of the body, that as long as the body stays at rest, on which the pressure of the air will have pressed just as strongly forwards on the rear as backwards on the front. But if the body itself moves so fast, that the air is unable to follow at once, so hardy any pressure can occur on its the rear part : therefore in this case the pressure from the front will not be cancelled, and therefore the resistance will be increased very markedly. From this one sees easily, that equally if the speed of the body is smaller, the pressure from the rear must be still smaller than from the front : and on that account in this case the motion of the body will be diminished not only from the proper resistance, as arising from the force of the particles of the air, but also from the pressure of the air which the forwards part exerts, in so far as the same will not be able to maintain equilibrium with the pressure exerted from behind.

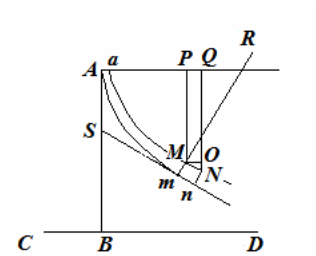
After that yet another circumstance comes from the air to be considered, which does not happen both for water and other fluid bodies. Within which it consists, that the air itself can be compressed as well into a smaller volume, just as it can be let expand into a larger volume, and therefore can be made to change greatly as regards its density. Thus if a very sharp body moves through the air, and the same stays in the way before itself, thus it is clear, that the air before the body must always be somewhat denser, but behind the same somewhat tenuous ; and by this reason in front of the body a greater back-pressure will be found as well, and also a greater resistance: but against the rear a lesser pressure will be found. Now since all these circumstances diminish the speed of the body, and accordingly the more easy it becomes, the quicker the body itself moves, thus on that account the author's opinion on the emphatic confirmation, that the resistance of the air from very fast motion is far greater than all the theories as yet indicate.

Thus from all these it is apparent, that in any body, thus itself moving in the air, to be exposed to twice the force, on of which arises against the impact of the particles of the air, and from which the proper resistance or resistance is made ; but the other force here comes from the unequal pressure of the air on the body. If now both these forces act together on arising, if one wants to determine the motion of the body, so still must the size of each be determined, since the same must be derived from just as many different causes, to happen in the particular circumstances.

We want to this end firstly to consider the first of these two forces, which arises from the interaction of the body on the air particles. On this account the body experiences so far a loss in its speed, as a motion must have arisen in the surrounding part of the air: then so much force will be required for this motion in the air, just as much force acts backwards on the body. Now one sees here easily, that this resistance of the air must be smaller than in both the cases of the previous remark [which was concerned with a fictitious medium]. In the latter case, since the particles of the fluid matter rebounded, the resistance was equal to the weight of a cylinder, of which the height $=4v$, but in the first case, since the particles arrived at the body with a single speed, the resistance was equal to the height of a cylinder, of which the height $=2v$. But if a body interacts with the particles of the air, thus again the same rebound from the body, yet here to be driven before the body ; but they turn away to the side, and maintain no notable speed, if the body itself does not move very fast. Thus because these particles of air will communicate a far smaller motion, as explained in both cases before, so also must the resistance be smaller than in a cylinder, the height of which was either $4v$, or only $2v$; and on this account one will have assumed that the resistance of the air, which a flat surface endures $= cc$, thus itself moves with a speed $\sqrt{v}$ perpendicular against the air, the weight of an equal air column, of which the base $= cc$, and of which the height $= v$. One has also found through experience that a body in water experiences a similar resistance, which will be expressed by the weight of a water column of which the height $= v$: and since the particles of water and of air have moved a body therein by the same manner, thus it has been concluded, that the resistance of a similar kind be provided in both these fluid matters.

In order that this may be explained more clearly, thus it is to be observed that the resistance, which a body that moves in a fluid matter at rest with a given speed encounters, must be consistently like that force, which a body would now experience, if the same were at rest, but whereas the fluid matter were moving against the same with an equal speed. Now imagine a vessel full of water, a hole to be found at the bottom, which is stopped with a finger. In this case the finger will be pressed by a force which is equal to the weight of a water column, and of which the base is the width of the hole, and the height of which is equal to the height of water in the vessel. If one now draws the finger back a little from the opening, and lets the water squirt from that, so it seems to be true, that the finger experiences just as great a force on it as was put in place before. But this water squirts out with such a speed, which was expressed on the vessel through the same height : and thus the force of the water which spurts from the finger therefore is equal to the weight of a water column, of which the base is equal to the hole, and the height of which is the same as the height, through which the speed would be impressed. In this manner thus the former opinion touched upon is confirmed, that the resistance both of the air, as well as of water, be itself equivalent to the weight of a cylinder, the height of which is equal to v, by which the speed is expressed.

But in order to carry this out more clearly, from the previous firmly established principles, from which the resistance must be equal to that force, which is required to produce the motion arising in the fluid matter, thus we must consider that a body stays at rest at *CD*, and the fluid matter will move towards it along the direction *AB* with a speed $= \sqrt{b}$, or which it will acquire through the fall from a height of b. It is now clear in the first place, that if all parts of the fluid matter can maintain their speed forwards without hindrance, the body would experience no force. But because all parts of the fluid matter, as soon as they approach the body, are compelled to move out of the way, to change both their speed as well as their direction, thus the body must experience as great a suitable force, as is required to change both the speed and direction as well. We will suppose that the fluid matter, which moves in *Aa* with its speed $\sqrt{b}$ against the body, will be compelled to move sideways along *AaMm*, and we will ourselves imagine to this end, that the same flows forwards through a curved canal *AaMm*. In this circumstance now not only does its direction change constantly, but also following that, as this canal can become wider or



narrower, thus also the speed can become greater or less. Let the first width be $Aa = a$, which must be regarded as infinitely small, while one can put in place a particular canal for each streamline.

[NB. : streamline is a word introduced later; Euler used *Reihe* in German, indicating a succession of items in a row.]

Further the width may be $Mm = z$; and the speed of the flowing matter at *Mm* to be $= \sqrt{v}$. Since now the speeds themselves of fluid matter through a canal is in inverted proportion as the width of the canal, thus there is

$$a : z = \sqrt{v} : \sqrt{b}\,;$$

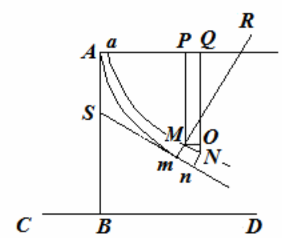
and consequently

$$z\sqrt{v} = a\sqrt{b}\,.$$

One draws a perpendicular axis *AP* from *AB*, and take the coordinates $AP = x$, $PM = y$; after that *QN* shall be parallel to *PM* and drawn infinitely near ; thus there becomes

$$PQ = MO = dx,\quad ON = dy,\quad MN = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)},$$

and the quantity of the fluid matter in *MNnm* is expressed by



$$z\sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)}\,.$$

One puts further $dy = pdx$, thus there becomes

$$MN = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)} = dx\sqrt{(1 + pp)},$$

and if *R* is taken for the centre of curvature of the canals at *MN*, thus one finds

$$MR = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Now in order to bend the increment *MNnm* according to this curvature, a force is required for that acting in the direction *MR*, which itself is in proportion to the weight of the particles themselves, as

$$2v \text{ to } \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

[Thus, here Euler assumes that the collisions of the particles along a streamline with the body, or with other particles in nearby streamlines, experience the same normal elastic force, according to an equation of the form $\dfrac{mass \times velocity^2}{radius\, of\ curvature} = central\ force$]

Thus if the weight [*i.e.* mass] of these particles is expressed by its magnitude $zdx\sqrt{(1+pp)}$, thus the force towards *MR*

$$= \frac{-2vzdp}{1+pp}.$$

Further if the width of the channel in *Mm* were greater, thus the speed would be diminished. [*i.e.* a frictional force is needed also] For this purpose a force acting in the direction *mS* is required, which touches the channel at *m*, and if this force were put $= T$, thus one finds

$$zdx\sqrt{(1+pp)} \cdot dv = -Tdx\sqrt{(1+pp)} \text{ or } T = -zdv.$$

[*i.e.* the decrease in the vis viva is equal to the work done by *T* along *ds*.]

These two forces *MR* and *mS* therefore are required for the change of the course of the fluid matter through the channel *AaMm* at some single point *M*. Therefore, in order to obtain the same force, thus we want to resolve both the forces along the fixed directions *BA* and *AP*. The first force *MR*, which was

$$= \frac{-2vzdp}{1+pp},$$

gives this force along the direction *BA* :

$$= \frac{-2vzdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}},$$

but this one along the direction *AP* :

$$= \frac{-2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}.$$

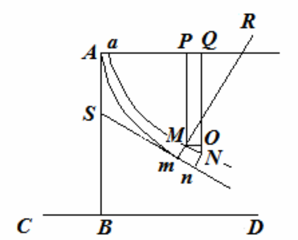
The other force *mS*, which was $= -zdv$, gives this force along the direction *BA* :

$$=\frac{-zpdv}{\sqrt{(1+pp)}},$$

but this shall be the force along the direction *AP* :

$$=\frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Thus for that increment *MNnm* the force required along the direction *BA* will be :



$$=-\frac{2vzdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}-\frac{zpdv}{\sqrt{(1+pp)}},$$

but this will be required along the direction *AP*

$$-\frac{2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}+\frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

But as we have shown before, there is $z=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$; and thus the force arising from the motion of the small part *MNnm* along the direction *BA* is :

$$=-\frac{2adp\sqrt{bv}}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}-\frac{apdv\sqrt{b}}{\sqrt{v(1+pp)}}.$$

The integral of this is :

$$-\frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}}+C;$$

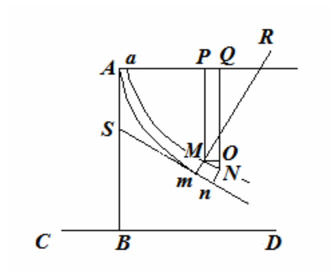
and the force is given in the direction *BA*, which will be required for the change of the motion of all the fluid matter, thus held in the channel *AaMm*, if now the quantity *C* will be determined correctly. But in order to determine this quantity correctly, thus it is to be note, that if one takes $AP=0$, in which case *p* will be indefinitely great, and $v=b$, the whole force must vanish : thus one puts $p=\infty$, so there becomes $C-2ab=0$, and consequently $C=2ab$. Therefore a force along the direction *BA* will be required for the change in the direction of the fluid matter contained in the channel *AaMm*, which is

$$= 2ab - \frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}} = 2ab\left(1 - \frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{b(1+pp)}}\right).$$

But it is known that $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ is the cosine of the angle *MNO*, or of the angle mSB, if the radius were assigned the value 1: and from this the above force will be

$$= 2ab\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos.mSB\right),$$

and with this suitable force the body *CD* will be driven in the direction *AB*. But it is known that *2ab* is the weight of a cylinder of fluid matter, of which the base is $= Aa = a$, and of which the height $= 2b$; if $\sqrt{b}$ indicates the speed, with which the fluid matter strikes against the body, or which equally is by how much the body presses against the fluid matter. This force, and consequently the resistance, thus is based in part on the direction *Sm*, towards which the fluid matter will be deflected sideways, also in part on the speed, which the same obtains from the interaction.



From this it is apparent, that if the fluid matter moving around the body will be deflected by as much as a right angle from its natural direction *AB*, of such a form that the angle $mSB = 90°$, thus the force will be found $= 2ab$*:* and if this happens with all the fluid matter, which stands in the way of the body *CD*, thus from this arises just the same resistance, which we have found in the first case. The same happens also, if the fluid matter by the collision loses all its motion. But should the fluid matter bounce back along the original direction with a greater speed, thus the angle becomes $mSB = 180°$, and $\sqrt{v} = \sqrt{b}$*:* therefore the force will be 4*ab,* as found in the other case of the previous remark. If one could know also, in which way each streamline of fluid matter *Aa* which travels against the body *CD*, avoids the body, both with respect to the speed and direction, thus one can also determine the force from this, which acts on the body. But to this end one has no need, to know everywhere the width and the curvature of the channels *AaMm*, in which the streamline itself *Aa* will have started to move against the body ; as it is enough, if these things shall be known in the last point of the channel : while the force originating from the part *AaMm* in the direction *AB* will be expressed by this formula

$$2ab\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos.mSB\right),$$

or since

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{a}{z},$$

through this

$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.mSB\right),$$

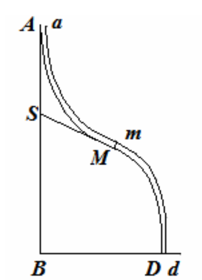
everywhere *z* indicates the width at the last point *M*, and the angle *mSB* will be determined by the course of the last part *MNnm*. Here it arises also that only where the channel ends should be considered. One goes so wide, and as far as the fluid matter flowing all around the body, and the first direction of which has again become $z=a$, and the angle *mSB* vanishes, therefore the cosine itself shall be $=1$. In that case the force acting on the body in the direction *AB* would be

$$=2ab(1-1)=0,$$

and the body suffered no resistance at all ; from which it is apparent, that one can assume for the last point taken for water and air, where the motion behind the body begins again fully with the first. Now in order from this to investigate the causes, thus we must consider in particular the origin of this force acting on the body. If we have only paid attention to the part of the channel *AaM m*, thus the force is that which acts on the body in the direction *AB* :

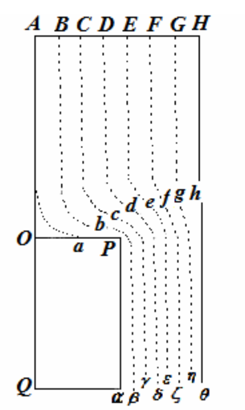
$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.mSB\right)$$

and this consequently will always increase, as long as the angle *mSB* becomes greater, as long as one moves forwards from the beginning *Aa*. That is, as long as this channel itself curves upwards from the body, thus the force taken from that increases, which acts on the body in the direction *AB* forwards. But if this channel, as in the diagram, its curvature turns around and flips over as far as from *M* to *D* against the body, thus the angle *MSB* always is reduced from *M* to *D*, and hence the force again will be reduced; in such a manner, that if the channel at *Dd* runs parallel with *Aa*, and also is the same width, the whole force will become zero. Now if the channel had such a shape, thus one must consider both the same parts *AM* and *MD* in particular, of which that one *AM* curves downwards towards the body *BD*, but that part *MD* has curved itself against the body. From the first part *AM* a force is put in place, which drives the body in the direction *AB*, and will be expressed by $2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.MSB\right)$. But from the other part *DM,* a force is put in place, which is contrary to that, and by which the body should be pulled back in the direction *BA.* Since now no body can be set in motion, except by a real pressure, thus also this last force only works to such an extent on the body, that the pressure from the fluid matter behind is strong enough, to drive the body forwards. Now since in air and water the pressure from the



front is not only equal to the pressure from the rear, as it is still commonly greater, thus one can well see, that the force put in place by the part of the channel *MD* can have hardly any action or effect on the body. And this will be the force arising from the whole channel *AMD*, which indeed acting, to be nearly equal to that, which arises from the part *AM*, and consequently will be expressed by $2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.MSB\right)$. But from this one sees equally, that if a fluid matter were provided thus, for which the force resulting from the part *MD* put in place pulling the body backwards was able to exert its full effect, the body from the impact of such fluid matter being endured completely without a force, and consequently also no resistance would be encountered by itself. This circumstance can be found, if the fluid matter were indefinitely loosely bound together, and to be compressed by an infinitely large force. Perhaps the subtle celestial matter in which the planets and comets themselves move is formed with such a property, and therefore these are the reasons why by this property one does not sense any change in their motions. But it is seen by the opposite effect that these properties do not find a place in the air, water and other known fluid matters, and at the same time their very considerable resistance itself comes mainly from that provided by the part *CD*, which presents its concavity to the body, not being able to draw the body to itself because likewise it is pushed away by the other part AM, which together produce the whole effect.

Now in order to be able to judge thoroughly from the magnitude of the resistance, thus we will consider a cylinder, against which such a fluid matter flows with a given speed. Therefore let *OPaQ* be the half of this cylinder, and *AOQ* the Axe of the same; because, what can be said of one half, is equally valid for the other. One introduces this cylinder into an enclosed channel, of which the half width may be signified by *AH*, and through this channel air or water should be flowing against the body with a given speed. In thought, one separates this flowing matter into infinitely many infinitely small streamlets *AB, BC, CD, DE* etc. and considering, what any of these will take as a way round the body ; thus one sees easily, that the curves must be about as the figure itself indicates. Further it can be noted in the same diagram the points *a, b, c, d, e, f* etc., where the same again begin to curve against the body, and calculate the forces from the direction *AO,* which from the curvatures of these streams, as far as arising from the points *a, b, c, d, e* etc.; thus all these forces taken together give the resistance. But one sees clearly, that the first streamlet *ABab* must bend as far as to a right angle, and therefore the resistance arising will be $=2ab$, namely if *a* indicates the thickness of the streamlet *AB,* and *b* be the height, from which the speed of the same will arise. The following streamlet *BCbc* already experiences a smaller curvature, and consequently from that a smaller force arises : and in such a manner will the forces arising from the subsequent streamlets *CD, DE, EF* etc. always become smaller, and not at all noticeable any more for the last. From which it appears, that the total resistance must be smaller, than the weight of a cylinder of the flowing matter, of which the width is equal to the width of the body itself, and the height of which is equal to the doubled height *b,* by which the speed will be expressed.



What has been said here from a cylinder, or such a body, the foremost part of which is a plane, and here from a cylinder, or such a body, of which the forwards part is plane, and pushed straight by the fluid matter, also itself easily can be acted on by any shape. But one sees thus at once, that if the front surface of the body were not planar, but either convex, or very pointed, the resistance must be smaller than in the previous case. Then since not once does the first streamlet curve as far as a right angle, and the curvatures of the following will be still smaller, than the previous. Therefore we cannot agree with the author in this part, when he says, that in such compressed fluid matter the resistance does not depend on the shape of the body, but only on the width of the same. Truly concerning this matter, it is very probable that the resistance, which bodies experience thus from different shapes in the compressed fluid matter, still follow the designated rule, which has been given before : and that to be distinguishable only in that besides, that in the present case for the resistance to be much smaller then in the previous case. One has also reason to suspect, that the resistance of a ball in this case only to be half as much as that of an equally thick cylinder. But one is in the position using experiments, to understand the most about both the resistance of air as well as of water, if one assumes that the resistance of a cylinder, thus with its length along the direction of motion, to be equal to the weight of an equally thick cylinder of the fluid matter arising, of which the height is equal to that by which the speed will be expressed.

FOURTH REMARK

[The reader unfamiliar with shock waves may wish to look *e.g.*, in the article on shock waves in *Wikipedia*, or elsewhere ; thus, a shock or bow wave 'piles up' the fluid in front when the body travels faster than the speed of waves in the medium, rather than leaving a vacuum behind, as Euler contends here.]

But only that part of the resistance can be understood, which arises from the impulse of the body acting on the particles the fluid matter, and of which all the discussion has been mentioned hitherto. But it can happen, as has been indicated, this resistance can be increased through a particular occurrence, namely if the body be pressed from the front harder than from behind. But as long as the pressure around the body is about the same size, as happens in all not too fast motions, thus the body experiences no other resistance, than that which arises from the actual impact of the body against the particles of the fluid matter, and that has been determined previously. But if the body moves for example in air so rapidly, that the space which must be abandoned by the body is not able to be followed by the air and to be again occupied equally, thus the body is hardly pressed from behind at all, and consequently the pressure from the front therefore is made more considerable ; thus the previous resistance must be increased by the pressure from the front.

Thus it comes to this, how quickly can the air follow after a body, or at what level of speed does the air leave an empty space behind. This speed is based on the elasticity of the air, which we have expressed above by the weight of an air column, of which the height $= 29100$ Rh. ft.; consequently the air is pulled into an empty space with a speed, which a body acquires falling from a height of 29100 ft., and thus works out to be 1348 ft. per second. [By elementary calculations ; the same follows from Newton's formula for finding the speed of sound, described elsewhere in these translations.] Therefore if a cylinder itself consequently moves along its axis with a speed of 1348 ft. per second, thus the air can just follow, so that no space will be left void behind the cylinder. But in this case the air exerts hardly any pressure on the rear end of the cylinder. Since now from the front end, in the first place the resistance, which is equal to the weight of an equally thick air column, of which the height $=29100$, as by which its speed will be expressed, and still also that pressure of the atmosphere has to be overcome which is just as great, thus the whole resistance is twice as great as the resistance which originates from the impact of this body alone on the air particles. But should the cylinder move with a still greater speed, thus also not only would no pressure be found at the rear, but always a vacuum would remain behind. If one thus indicated by h the above height of 29100 ft., by which the speed of the air would be subsequently expressed, and the height corresponding to the actual speed of the cylinder be indicated by v, to be of such a form that v is greater than h, thus the resistance is the height of an air column, of which the height $=v$, as indicated before ; but the ordinary pressure is equal to an air column, of which the height $=h$. Now since this cylinder senses hardly any pressure behind, thus the full resistance is equal to an air column, of which the height $=h+v$; but if this body were impressed equally strongly from the front and rear, the resistance would be expressed only by the height v. Therefore in this case, as the author notes, the resistance would be found to be far greater than from the common rules.

But if the speed of the cylinder is smaller than the speed with which the air is capable of flowing subsequently, that is if v is smaller than h, thus the cylinder would still sense a pressure from behind, which shall be smaller than h , the smaller the height v is. In order to find the pressure, thus one can work out the speed, with which the subsequent speed of the body maintains, and which is equal to the difference between the speed of the air $\sqrt{h}$, and of the body $\sqrt{v}$. It is thus just as great, as if the air from the rear of the body were pushing with a speed :

$$\sqrt{h}-\sqrt{v}$$

and since the height, by which this speed will be indicated, is $=h-2\sqrt{hv}+v$, thus it also appears that the pressure from the rear to be equal to the weight of an air column, of which the height

$$=h-2\sqrt{hv}+v\,.$$

But this body will be pushed back as before at the front, with a force, which it equal to the weight of an air column, of which the height $=h+v$. Thus if we designate the forwards driving force from this, which the body experiences from behind, thus for the resistance there remains the weight of an air column of which the height $=2\sqrt{hv}$. Also if this conclusion were correct, thus the resistance would not be, as we have found before, as the squares of the speed of the body, but only to be proportional to the speed $\sqrt{v}$ itself ; as long namely as the body goes forwards with such a smaller speed that the air is able to follow behind. But the base of these conclusions rests on this, that the forces of the pressures always are to be proportional to the square of the speed, by which the particles of air collide with the body, if one assumes that the particles themselves actually move with the speed, which they had gained, if they had been drawn into a vacuum. Since in that case the pressure of the air acting on a body has just the same strength as if the same should rebound with as great a speed from the body; thus it appears that the above reasoning cannot be unfounded.

At the very least, since the nature of the flowing matter is still not so fully understood, that one can determine the circumstances from theory alone entirely without recourse to experiments, thus it will not be inconvenient, that this idea of the action of the air and of other fluid matters on hard bodies be carried out further, the same irrespective of how soon it may be shown to be inconsistent with experiment. But from this method also the pressure from the front of the cylinder, which moves along its length with a speed $=\sqrt{v}$ in air, comes out differently from that previously found. Thus if we put in place, that the air itself, arising from its compression, moves against the cylinder with a speed $\sqrt{h}$, thus the relative speed with which the particles of air are thrust from the front of the cylinder, is $=\sqrt{h}+\sqrt{v}$,and the height from which this speed will originate, $=h+2\sqrt{hv}+v$. Thus the pressure at the front of the cylinder to be equal to the weight of an air column, the height of which is

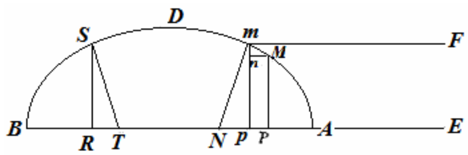
$$=h+2\sqrt{hv}+v.$$

Now if the speed of the cylinder is greater than that of the air subsequently, that is, if $v>h$, thus the body experiences from behind hardly any pressure, and consequently the resistance will be equal to the weight of an air column, the height of which $=h+2\sqrt{hv}+v$. But if the speed of the cylinder $\sqrt{v}$ is smaller than $\sqrt{h}$, so is the pressure from behind, as we have seen , $=h-2\sqrt{hv}+v$, which taken from the former pressure gives a pressure $=4\sqrt{hv}$, thus in that case the resistance would be proportional to the speed of the body itself $\sqrt{v}$. Also one sees from this, that the resistance must be so much greater, as the compression of the fluid matter is increased.

Therefore if the resistance of water were provided in such a manner, so would the resistance also of the same cylinders, if the same were moving with the same speed at different depths in the water : thus to be so much greater, the deeper the cylinder had dived under the water. The resistance would be namely taken from the square root of the depth under the water, of such a form, that at a depth four times as great the resistance would have doubled. Thus a fish, which swims 40 feet deep in water, meets twice as much resistance, than if the same were itself moving with the same speed only 10 feet under the water ; provided only that its speed were smaller than that which a body falling from a height of 10 ft. would attain. Therefore it were to be wished that one should try hard to perform such like experiments on the resistance of bodies underwater at different depths.

[Clearly Euler himself has some doubts about these observations ! It is understood implicitly in all of Euler's derivations here, that he is merely investigating mathematically the outcomes of the various physical assumptions introduced; thus, as he indicates a little later here, much experimental work needed to be done before theory could predict with confidence the outcome of some particular experiment.]

This form of the resistance itself changes also according to quite different laws, if the form of the body is not cylindrical ; and hereupon it comes not only from the front part of the body, which in principle comes only interacts with the particles of the fluid matter, but also the shape of the hindmost part must thereby also nevertheless be drawn into the calculation. We will thus, in order that the nature of this resistance be investigated in the correct manner, consider a rounded body, which is established by through the rotation of the curved line *AMSB* around the axis *AB*, and which itself must be moving along the direction of the axis *AB*, in air, or some other compressed fluid matter. Thus the speed



shall be $\sqrt{b}$, with which this body currently progresses along the direction *AE*, and $\sqrt{h}$ shall be the speed, with which the fluid matter would penetrate into an empty space, and from which we consider this notion of the resistance at the place of the actual pressure. Now because this pressure is perpendicular everywhere on the body, thus one sees the element *Mm* to be perpendicular to the line *mN*, thus the same will be pushed down just along this direction, as if the air were acting in a straight line with a speed $=\sqrt{h}$. But since further the body will be placed to be driven forwards along the direction *mF* with a speed $=\sqrt{b}$, and the pressure from that is equally on the perpendicular *Mm*, so the speed itself must be resolved along this perpendicular direction, since then for the same there becomes

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b};$$

namely if one draws from *M* and *m* the lines *MP* and *mp* perpendicular to the axis *AB* and *Mn* parallel to the axis. Now let $AP = x, PM = y$, thus there becomes

$$Pp = Mn = dx,\ mn = dy \text{ and } Mm = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)}.$$

Putting $dy = pdx$, thus there will be $Mm = dx\sqrt{(1+pp)}$ and

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b} = \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Therefore the element *Mm* experiences part of the pressure, the part of the force from the interaction, just as if the air from the same were pushed along the direction *mN* with a speed

$$=\sqrt{h}+\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

: and consequently impressed , as if from the same single air column, the height of which

$$=h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

But because the direction of this force acts along *mN*, so must this part be taken from that, which has the same direction as the motion of the body, and this will be

$$=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Now since the whole ring, which is put in place from the element $Mm=dx\sqrt{(1+pp)}$ rotated around the axis *AB*, experiences just this force, but the area of this ring is

$$=2\pi ydx\sqrt{(1+pp)},$$

if one assumes $1:\pi$ for the ratio of the diameter to the periphery, thus putting in place the force of this ring, by which the motion of the body will be diminished, to be

$$=2\pi ypdx\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{1+pp}\right).$$

And the integral taken of this express the magnitude of the resistance, which arises from the part *AM* of the solid formed rotated around the axis. Thus in order to find the whole resistance, thus one must extend the integral to the whole body, namely if the air acts on the whole body , which happens, if the speed of the body $\sqrt{b}$ is smaller than $\sqrt{h}$. But it is to be observed hereby, that the value of the expressed integral increases from *A* as far as it goes, as long as the applied line *y* increases, which happens as far as to *D*. But if one progresses further from *D* towards *B*, because then the letter $p=\frac{dy}{dx}$ will be negative, thus the resistance from there will be diminished, because in this region of the body the pressure of the air will be acting forwards. In this case also in the expression

$$h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

the other term

$$\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

has a minus sign. Therefore if $b<h$, so one acquires the whole resistance, if one has extended the above integral

$$2\pi\int ypdx\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$$

to the whole line *ADB*.

But if the speed of the body $\sqrt{b}$ is greater than $\sqrt{h}$, and consequently the air from behind cannot wholly follow, so a part *BS* of the latter part is found, from which the air hardly exerts any pressure. In order to find this part, thus one only must search for the point *S*, where the pressure of the air ceases, which happens, if

$$\sqrt{h}+\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}=0;$$

that is, if one draws at *S* the perpendicular line *ST* to the curved line, because then there is

$$\frac{RT}{ST}=\frac{-p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

thus the point *S* is found, where

$$\sqrt{h}=\frac{RT}{ST}\sqrt{b}\ \text{ or where }\ \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}=\frac{RT}{ST}.$$

Now that one has found this point *S*, thus the limit of the above integral cannot be taken further behind than this. From this it is apparent, that if the curved line formed through *B* is sharpened to a point, that as far as *B* the fraction $\frac{RT}{ST}$ is invariably greater than $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, as then the integral also must be taken through the whole curved line. Because now the resistance must diminish through the pressure, thus happening from the rear, thus one seed easily, that the greater the body is pointed from the rear, thus the smaller the resistance will be, namely if $\sqrt{b} > \sqrt{h}$. Various authors want to have observed this circumstance actually from experience, and assert that the resistance of a ship does not depend only on the shape of the bow, but that also the shape of the stern contributes to the resistance, if the same should be well pointed. Now whether it is possible that such experiments could be carried out diligently, thus this new theory on the resistance of flowing matter would be on that account confirmation even if this circumstance were only partially correct.

Meanwhile we will calculate from the above rule of resistance, which a ball finds in the air. Thus let the diameter of the ball be $AB = 2a$, thus there becomes

$$yy = 2ax - xx \text{ and } Mm = \frac{ady}{\sqrt{(aa-yy)}}.$$

Now because $pdx = dy$, thus there is

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(aa-yy)}}{a},$$

and the integral formula will be

$$\pi \int ydy \left(h + \frac{2\sqrt{bh(aa-yy)}}{a} + \frac{b(aa-yy)}{aa} \right),$$

from which the integral will be found :

$$\pi hyy - \frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a} + \frac{4\pi aa\sqrt{bh}}{3} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Now if $b < h$, so one must extend this integral as far as *B*, and consequently setting $y = 0$, on noting whereby, that if the abscissa x were taken greater than the radius a, the expression $\sqrt{(aa-yy)}$ must become a $-$sign. For that reason if one reverses the sign of the second term, and sets $y = 0$, thus the resistance is found

$$= \tfrac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}.$$

But πaa is the area of a great circle of this ball. If one thus designates this area by cc, thus the resistance will become

$$= \tfrac{8}{3}cc\sqrt{bh}.$$

But above we have seen, that if a cylinder itself, of which the base $=cc$, moves in the air with an equal speed, its resistance would be

$$=4cc\sqrt{bh};$$

therefore the resistance of a ball itself to the resistance of a cylinder of equal thickness will be in the ratio, as 2 to 3. But this is only true, if $b<h$; but if $b>h$, thus must the integral must not be taken as far as to the point *B*, but only as far as to the point *S*, where

$$\sqrt{h}=\frac{-p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

or

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}=\frac{-\sqrt{(aa-yy)}}{a}.$$

But since this point *S* falls behind *D*, thus $\sqrt{(aa-yy)}$ will be negative, and the integral will be expressed thus:

$$\pi hyy+\frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a}+\frac{4\pi aa\sqrt{bh}}{3}+\pi byy-\frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Thus one puts here

$$\sqrt{(aa-yy)}=\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{b}} \text{ and } aa-yy=\frac{aah}{b},$$

and

$$yy=\frac{aa(b-h)}{b} \text{ and } y^4=\frac{a^4(b-h)^2}{bb},$$

thus the ratio of the resistances becomes from here

$$=\pi aa\left(\tfrac{1}{2}b+\tfrac{4}{3}\sqrt{bh}+h-\frac{hh}{6b}\right)$$

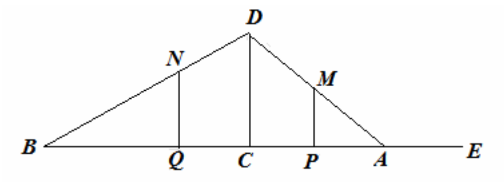
or

$$=\tfrac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}+\frac{\pi aa}{6b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{h}\right)^3\left(3\sqrt{b}+\sqrt{h}\right)$$

From which it is apparent that, if $\sqrt{b}=\sqrt{h}$, the resistance as in the former case will be found

$$=\tfrac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}\,.$$

Let there be, as still a further example, a round body which itself moves along the direction of its axis *BAE* with the speed $\sqrt{b}$ in air, as taken between two cones, in the shape of the figure in place,



if the triangle *ADB* will have circular cross-sections along the axis *AB*. One calls the height $DC = a,$ the section $AD = m$ and $BD = n$, so for the front part *ACD* there will be

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{a}{m},$$

and for the resistance of the front part

$$2\pi\int ydy\left(h+\frac{2a\sqrt{bh}}{m}+\frac{aab}{mm}\right)=\pi aa\left(h+\frac{2a\sqrt{bh}}{m}+\frac{aab}{mm}\right).$$

But the pressure of the air on the rear part, if $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, will push the body forwards with a force

$$=\pi aa\left(h-\frac{2a\sqrt{bh}}{n}+\frac{aab}{nn}\right).$$

This force removed from the former, leaves the small resistance acting on this body, which will be

$$=\pi a^2\left(\frac{2a(m+n)\sqrt{bh}}{mn}+\frac{aab(nn-mm)}{mmnn}\right)=\frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh}+\frac{ab(n-m)}{mn}\right).$$

But if $\sqrt{h} < \frac{a\sqrt{b}}{n}$, thus the rear part experiences hardly any resistance, and the resistance is thus

$$=\pi aa\left(h+\frac{2a\sqrt{bh}}{m}+\frac{aab}{mm}\right).$$

If $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$ thus the resistance is just so much smaller, the longer the rear part becomes, and if the same were without end, thus the resistance

$$= \pi aa\left(\frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

But if the body now were reversed, and with the part itself *DBC* now moving into the air with the same speed, thus the resistance itself becomes

$$= \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab(m-n)}{mn}\right),$$

namely if $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$. Whereby it is apparent, that if both cones shall be of unequal lengths, the resistance of the body will be smaller, if the sharper point were going forwards.

From this idea of accounting for the resistance of fluid matter still other finer consequences can come to light, but which we will not investigate at present, since it is still very uncertain whether it agrees with experiment or only partially or not at all. Meanwhile also here from the author's propositions it is confirmed, that if a ball travels with such a great speed, that the air is unable to follow, the resistance becomes far greater than one would have believed otherwise. Thus, if $\sqrt{b} > \sqrt{h}$, thus to the resistance $\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}$, which has arisen here, if $\sqrt{b}$ is not greater than $\sqrt{h}$, still this quantity $\frac{\pi aa}{6b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{h}\right)^3\left(3\sqrt{b}+\sqrt{h}\right)$ must be added on. But this or some other explanation of the resistance of the air may be valid, since still another circumstance must be taken into consideration, by which the resistance may be made still greater. This is based on that, that the air itself will contract as well into a smaller space as well as expand into a greater one. Thus it happens, that if a body moves very quickly in the air, the air before the same has been compressed more, and consequently is denser, but behind the same is compressed less, and consequently will be lighter. Because of the first circumstance thus the resisting force will be greater, but because of the other the forwards driving force will be smaller ; therefore the resistance of the air also on this basis will be greater as far as fast motions are concerned, rather than by slow ones.

ERSTE ANMERKUNG

Weil ein Korper, welcher sich in einer flüßigen Materie beweget, nicht fortgehen kann, ohne die ihm im Wege stehenden Theilchen derselben Materie in Bewegung zu setzen, so muß dadurch nöthwendig die Geschwindigkeit desselben vermindert werden. Denn da keine Bewegung ohne Kraft hervor gebracht werden kann, so wird zu Fortstossung der Theilchen der flüßigen Materie eine Kraft erfordert. Eben diese Kraft würkt aber hinwiederum rückwarts auf den Körper selbst, und vermindert folglich seine Bewegung. Dieses folget auch aus dem bekannten Gründsätz der Mechanic, daß kein Körper einem andern eine Bewegung mittheilen könne, ohne zugleich selbst eben so viel von seiner eigenen Bewegung zu verliehren; und hierauf gründen sich die allgemeinen Regeln, nach welchen die Bewegungen zweyer auf einander stossenden Körper nach dem Stoß verändert werden.

Fragt man aber weiter nach der ersten Ursache dieser Veranderungen, so beruhet dieselbe auf dem Vermögen, welches alle Körper, in so ferne dieselben aus Materie bestehen, haben, in ihrem Zustande unverändert zu verharren. Dieses Vermögen ist nehmlich eine wesentliche Eigenschaft der Materie, und derselben eben so eigen, als die Ausdehnung selbst, dergestalt, daß gleichwie die Materie ohne Ausdehnung nicht bestehen kann, dieselbe eben so wenig ohne dieses Vermögen, in ihrem Zustande unverändert zu verharren, bestehen kann. Dieses Vermögen außert sich eben so wohl in ruhenden, als bewegten Körpern. Denn ein ruhender Körper muß kraft dieses Vermögens bestandig in Ruhe bleiben, und kann nimmer eine Bewegung erhalten, wofern keine außerliche Kraft dazu kommt, wodurch derselbe in Bewegung gesetzt wird. Gleicher gestalt, wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, so muß derselbe bestandig eben diese Bewegung unverändert fortsetzen, wofern keine außerliche Kraft darinne eine Veranderung verursachet. So oft nun entweder ein Körper, welcher vorher stille gestanden, in Bewegung gesetzt wird, oder ein bewegter Körper in seiner Bewegung eine Veranderung leidet: so kann man immer versichert seyn, daß eine ausserliche Kraft darauf gewürket habe. Es kommen aber bey einer jeglichen Bewegung zwey Stücke zu betrachten vor, nehmlich die Geschwindigkeit, und die Richtung oder Direction derselben, und daher hat auch ein jeglicher Körper kraft seines Wesens das Vermögen, diese beyden Stücke, als wodurch sein Zustand bestimmet wird, unverändert zu erhalten. Wenn also ein Körper einmahl in Bewegung gesetzet worden, und keine außerliche Kraft auf denselben würket, so behalt derselbe bestandig so wohl einerley Geschwindigkeit, als auch einerley Richtung. Wenn man aber wahrnehmen solte, daß entweder die Geschwindigkeit oder die Richtung derselben, oder beide Stücke zugleich geandert würden: so kan man daraus den sichern Schluß ziehen, daß eine solche Veranderung von einer fremden Kraft verursachet worden. Da nun in der Welt alle Augenblicke dergleichen Veranderungen vorgehen, und darinnen weder eine bestandige Ruhe, noch eine gleichformige Bewegung angetroffen wird, so wird hier billig die Frage aufgeworfen, woher alle diejenigen Kräfte kommen, von welchen diese Veranderungen entspringen.

Um diese Frage zu beantworten, haben verschiedene weltweise behauptet, daß die Körper noch außer dem Vermögen in ihrem Zustande unverändert zu verharren, mit einer Kraft beGÄBEt seyn, ihren Zustand immerfort zu verandern. Ausser dem aber, daß auf diese Weise der Materie zwey ganz wiederwartige Eigenschaften zugeschrieben werden, so wird man dadurch auch nicht einmahl in Stand gesetzt, die geringste Veranderung, welche in der Welt vorgehet, zu erklaren. Die Natur hat auch zu diesem Ende keine besondern Kräfte nöthig, sondern wie dieselbe in allen ihren Würkungen bestandig den einfaltigsten und Kürzesten Weg erwehlet, also bedienet sich dieselbe zu Hervorbringung aller Veranderungen keiner andern Kräfte, als eben des vorhergemeldten Vermögens, womit alle Körper begabt sind, in ihrem Zustande zu verharren.

Dieses scheinet zwar dem ersten Anblick nach etwas wiedersprechendes in sich zu enthalten, indem man schwerlich begreifen kan, wie eine Kraft, welche die Körper in ihrem Zustande zu erhalten bestimmet ist, zugleich auch alle Veranderungen hervor bringen könne. Wenn man aber diese Sache in reifere Erwegung zieht, so sieht man bald, daß diese wesentliche Eigenschaft aller Körper, wodurch sie sich in ihrem Zustand zu erhalten bemühet sind, nicht nur vermögend seyn könne. Veranderungen zu verursachen, sondern daß auch in der That alle Veranderungen, welche wir zu erklaren im Stande sind, von nichts anders, als dieser allgemeinen Eigenschaft herrühren.

Um diese Würkung begreiflich zu machen, so darf man sich nur zwey Körper vorstellen, deren einer stille steht, der andere aber mit einem gewissen Grad der Geschwindigkeit auf den erstern loßgehet. Wir wollen um der Deutlichkeit willen den erstern Körper, welcher stille steht, mit dem Buchstaben *A,* den andern aber, welcher gegen diesen lauft, mit dem Buchstaben *B* bemerken. Der erstere Körper *A* hat nun ein Vermögen, in seiner Ruhe unverändert zu verbleiben, der andere aber *B* hat ein Vermögen, gleichfalls in seinem Zustande zu verharren, das ist, mit seiner Geschwindigkeit nach seiner Richtung oder nach einer geraden Linie fortzugehen. Wenn nun der Körper *B* würklich zu dem Körper *A* kommt, so sieht man wohl, daß keiner von beyden in seinem Zustande verbleiben könne, ohne daß zugleich der Zustand des andern sehr merklich verändert werde. Denn solte der Körper *A* in seinem Stillstande verharren; weil der andere durch diesen nicht durchdringen kann, so müßte derselbe entweder auch plötzlich stille stehen, oder zurück prellen, oder seitwärts abwelchen; in allen Fallen aber würde sein voriger Zustand gar sehr verändert. Solte aber der Körper *B* seine Bewegung unverändert fortsetzen, so muße derselbe den Körper *A* vor sich her stossen; und folglich würde der Körper *A* aus seinem vorigen Zustande gebracht werden. Da es nun nicht möglich ist, daß diese beyden Körper zugleich in ihrem vorigen Zustande verharren, und auch keine Ursache vorhanden ist, warum nur vielmehr in einem, als dem andern allein eine Veranderung vorgehen sollte, so folget nöthwendig, daß beyde Körper zugleich eine Veranderung ihres Zustandes leiden müssen. Der Körper *A* wird nehmlich in Bewegung gesetzt, die Geschwindigkeit aber des Körpers *B* vermindert werden. Weil nun die Ursache, wodurch ein Körper in seinem Zustand verändert wird, eine Kraft genennet zu werden pflegt, so ist klar, daß die Kräfte, wodurch in dem erzehlten Fall der Zustand beyder Körper *A* und *B* verändert wird, in nichts anders bestehen, als in dem Vermögen, welches ein jeder Körper hat, in seinem Zustande zu verharren. Also ist das Vermögen, welches der Körper *A* hat, in seinem Zustande zu verharren, die Ursache und folglich die Kraft, welche in dem Zustand des Körpers *B* die Veranderung hervor bringt; und hinwiedrum ist das Vermögen, womit der Körper *B* beGÄBEt ist, in seinem Zustande zu verbleiben, die Ursache und also die Kraft, durch welche in dem Körper *A* eine Veranderung vorgehet.

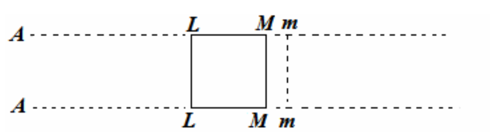
So lange also ein Körper seinen Zustand unverändert erhalten, das ist entweder in seinem Ruhestand verbleiben, oder seine Bewegung unverrückt fortsetzen kann, so äußert sich darinne nichts anders, als das Vermögen in seinem Zustande zu verharren; so bald aber dieser Körper einen Wiederstand antrift, welcher verhindert, daß derselbe in seinem Zustand nicht verbleiben kann, so wiederstehet eben dieses Vermögen der Veranderung, so darinne vorgehen soll, und übet eine Kraft aus, die Hindernisse aus dem Weg zu räumen. Es entstehen demnach alle Kräfte, welche sich in der Welt befinden, aus nichts anders, als aus dem Vermögen, womit alle Körper beGÄBEt sind, in ihrem Zustand zu verharren, und welches sich in eine Kraft verwandelt, so bald der Zustand zweyer oder mehrerer Körper dergestalt gegen einander lauft, daß keiner beybehalten werden kann, ohne zugleich die übrigen zu verandern. Weil nun dergleichen Zufälle in der Welt unaufhörlich vorkommen, da entweder auf einen ruhenden Körper andere stossen, oder verschiedene in Bewegung gesetzte Körper einander begegnen, so äussern sich auch bestandig solche Kräfte, wodurch der Zustand eines jeglichen Körpers verändert wird. Und hieraus sieht man, daß alle Veranderungen, welche in der Welt geschehen, bloß allein von dem Vermögen, welches alle Körper haben, in ihrem Zustand unverändert zu verharren, hervorgebracht werden können. Wenn man diese Sache genauer untersucht, so wird man in der That finden, daß der Zustand eines jeglichen Körpers nur in so ferne verändert wird, als derselbe andere Körper antrift, welche ihren Zustand nicht erhalten können, ohne daß in demselben eine Veranderung vorgehe. Wie groß nun in einem jeglichen Fall, wenn zwey Körper dergestalt Zusammen kommen, daß nicht beyde in ihrem Zustand verbleiben können, die Veranderung sey, welche in einem jeden ins besondere vorgeht, wird in der Mechanic bestimmet.

Auf diesem Gründe beruhet nun die ganze Lehre von dem Wiederstand der Körper, Welche sich in einer flüßigen Materie, als Wasser oder Luft, bewegen. Denn wenn ein Körper in einer solchen flüßigen Materie seine Bewegung unverruckt fortsetzte, so mußte nöthwendig eine ziemliche Menge Theilchen, woraus die flüßige Materie bestehet, fortgestossen und in Bewegung gebracht werden. Da nun diese Theilchen gleichfalls mit einem Vermögen, in ihrem Zustande zu verharren, beGÄBEt sind, so wiederstehen sie einer solchen Aenderung: und dahero muß in dem Zustande der Körper selbst auch eine Veranderung vorgehen, welche um so viel grosser seyn wird, je mehr Theilchen der flüßigen Materie in Bewegung gesetzt werden müssen, und je grosser die Veranderung ist, so darinne vorgehen muß. Wenn also die Veranderung, welche in der flüßigen Materie verursacht wird, bekannt wäre, so konte man nach den Gründsätzen der Mechanic ausrechnen, wie groß die Veranderung, welche in dem Körper selbst vorgeht, seyn mußte. Hierinne besteht nun der Wiederstand, welchen ein bewegter Körper in einer flüßigen Materie leidet, und muß folglich aus den mechanischen Gründsätzen bestimmet werden.

ZWEYTE ANMERKUNG

Der Autor betrachtet erstlich eine solche flüßige Materie, deren Theilchen dergestalt von einander abgesondert sind, daß ein jegliches davon die ihm eingedrückte Bewegung einige Zeit unverändert fortsetzen kann, ohne von den umliegenden darinnen gestoret zu

werden. Ob nun gleich dieser Begrif der Natur aller flüßigen Materien entgegen ist, und in der ganzen Welt keine solche Materie gefunden wird, so dienet derselbe doch den Gründ zur Erkenntnis des Wiederstandes zu legen. Wenn sich nun ein Körper in einer solchen flüßigen Materie beweget, so stosset derselbe bestandig auf neue Theilchen; weil diejenigen, welche schon vorher den Stoß ausgehalten, die ihnen eingedrückte Bewegung fortsetzen, ohne den Zustand der übrigen zu verrücken: und wenn diese flüßige Materie für sich still zu stehen angenommen wird, so befinden sich alle Theilchen derselben, worauf der Körper in einem jeden Augenblick stößt, in einer vollkommenen Ruhe. Die Berechnung des Wiederstands, welchen der Körper in dieser flüßigen Materie leidet, beruhet also darauf, daß man bestimme, wie viel ein Körper in einem jeglichen Augenblick von seiner Bewegung verliere, wenn derselbe bestandig auf eine gewisse Anzahl kleiner Theilchen stößt; welche stille stehen, und deren Dichte in Ansehung des Körpers bekannt ist. Dieses laßt sich dahero durch die bekannten Regeln, nach welchen die Bewegung zweyer aneinander stossenden Körper verändert wird, ausmachen wenn man nur vorher weiß, ob diese Theilchen, nebst dem Körper, elastisch sind, und nach dem Stoß von einander prallen, oder nicht, in welchem Fall dieselben nach dem Stoß beisammen bleiben. Wir wollen hier diese beyden Fälle, als von welchen in dem Wiederstande ein sehr grosser Unterscheid entsteht, ins besondere in Betrachtung ziehen.
Es soll also für das erste keine elastische Kraft vorhanden seyn, dergestalt, daß die Theilchen, welche von dem Körper schon in Bewegung gesetzet worden, vor demselben hergehen, dennoch aber in den übrigen keine Verandarung verursachen. Damit man nun, um sich dieses deutlicher vorzustellen, keine Schwierigkeiten finde, so darf man sich nur einbilden, daß diejenigen Theilchen, welche schon den Stoß vom Körper ausgehalten, plötzlich verschwinden oder zernichtet werden, damit in dem Zustand der übrigen keine Veranderung vorgehe, ehe der Körper gleichfalls an dieselben stößt. Denn weil der ganze Begrif einer solchen flüßigen Materie bloß allein in der Einbildungs-Kraft besteht, so



steht es uns frey auch noch diese Bedingung hinzusetzen: als wodurch der Endzweck, weswegen man eine solche flußige Materie betrachtet, um so viel leichter erhalten wird. Wir wollen also setzen, daß der Vordertheil des Körpers *MM*, mit welchem derselbe auf die Theilchen der flüßigen Materie stößt, flach, und zugleich auf die Richtung *AM*, nach welcher der Körper fortgehet, perpendicular sey. Es sey der Innhalt dieser vordern Fläche $MM = cc$, die Lange des Körpers, welcher als ein Cylinder betrachtet werden kan, $LM = a$; und die Geschwindigkeit, womit derselbe anjetzt würklich fortgehet, soll durch $\sqrt{v}$ ausgeruckt werden, oder v bedeutet die Höhe, aus welcher ein fallender Körper eine gleiche Geschwindigkeit erlangt. Die Dichte des Körpers werde ferner durch m, und die Dichte der flüßigen Materie durch n ausgedrückt. Hieraus wird die Massa des Körpers $= macc$. Indem nun der Körper durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortrucket, so muß derselbe die Theilchen der flüßigen Materie, welche in diesem Raum *MmmM* enthalten sind, fortstossen; und da die Massa dieser Theilchen ist $= nccdx$, so kommt es hier auf die Auflösung dieser Frage an: um wie viel die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ eines Körpers, dessen Massa = *macc*, vermindert werde, wenn derselbe auf einen andern still stehenden Körper, dessen Massa ist $= nccdx$, stößt. Vor dem Stoß ist also die Größe der Bewegung $= macc\sqrt{v}$, und da nach dem Stoß die Geschwindigkeit des Körpers ist

$$\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}},$$

welche derselbe mit den Theilchen der flüßigen Materie *nccdx*, so inzwischen fortgestossen worden, gemein hat, so wird die Grosse der Bewegung beyder Cörper zugleich nach dem Stoß seyn

$$= (macc + nccdx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

welche nach den Gesetzen der Mechanic der vorigen Grosse der Bewegung $= macc\sqrt{v}$ gleich seyn muß. Hieraus entspringt also diese Vergleichung

$$macc\sqrt{v} = (macc + nccdx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

welche in diese verwandelt wird:

$$0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{v},$$

woraus man bekommt

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx.$$

Hieraus erhellet, daß die Bewegung des Körpers eben so vermindert werde, als wenn das Gewicht eines aus der flüßigen Materie bestehenden Cylinders dagegen drückte, dessen Basis oder Dicke $= cc$, und dessen Höhe $= 2v$; denn die Massa, und folglich das Gewicht eines solchen Cylinders, wird seyn $= 2nccv$, und da die Massa des Körpers ist *macc*, so muß die Bewegung desselben, indem derselbe durch den Weg *dx* fortrucket, um so viel vermindert werden, als diese Aequation

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx$$

anzeiget, welche mit der obigen vollkommen überein kommt. Wenn sich also ein solcher Körper in einer solchen flüßigen Materie beweget, so ist die Kraft des Wiederstands gleich dem Gewicht eines aus dieser flüßigen Materie bestehenden Cylinders, dessen

Basis mit der Oberfläche des Körpers $MM = cc$ einerley, und dessen Höhe gleich ist der doppelten Höhe $2v$, wodurch die Geschwindigkeit des Körpers ausgedrückt wird. Da nun die Höhe v dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so siehet man, daß der Wiederstand einer solchen flüßigen Materie den Quadraten der Geschwindigkeit der darinn bewegten Körper proportional sey; wenn nehmlich die vordere Fläche des Körpers *MM* perpendicular auf die Theilchen der flüßigen Materie stösset.

Solchergestalt verhält sich also der Wiederstand einer solchen flüßigen Materie, wenn keine Elasticitat vorhanden ist, und folglich keine Zurückprallingprallung nach dem Stoß geschieht. Wenn aber so vohl der Körper, als die Theilchen der flüßigen Materie, mit einer vollkommenen Elasticitat beGÄBEt sind, so muß die im vorigen Fall entstehende Würkung nach den Gesetzen der aneinander stossenden elastischen Körper berechnet werden. In diesem Fall prellen nun die Theilchen der flüßigen Materie von dem Körper zurück, und bekommen folglich einen grösseren Grad der Geschwindigkeit, als der Körper selbst hat. Dahero sind in diesem Fall zwey Sachen unbekannt, erstlich die Geschwindigkeit des Körpers, und denn auch die Geschwindigkeit der Theilchen der flüßigen Materie nach dem Stoß. Um diese beyden Sachen zu bestimmen, so muß mit dem vorher gebrauchten Gründsätz, kraft welchem einerley Quantitat der Bewegung vor und nach dem Stosse erhalten wird, noch dieser andere Gründsätz verknüpfet werden, daß bey vollkommenen elastischen Körpern auch einerley sogenannte lebendige Kraft vor und nach dem Stoß erhalten werde. Die lebendige Kraft eines Körpers aber wird gefunden, wenn man die Massam durch das Quadrat der Geschwindigkeit multipliciret. Wenn wir also, wie vorher, die Geschwindigkeit des Körpers, dessen Massa ist $= macc$, vor dem Stoß durch $\sqrt{v}$, nach dem Stoß aber durch

$$\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}},$$

ausdrucken, die Geschwindigkeit der flüßigen Materie hingegen, deren Massa ist $= nccdx$, auf welche der Körper stößt, indem derselbe durch den Raum $Mm = dx$ fortgehet, nach dem Stoß durch $\sqrt{u}$ angezeigt wird, als welche vor dem Stoß $= 0$ gewesen: so wird die Grosse der Bewegung vor dem Stoß seyn

$$= macc\sqrt{v},$$

nach dem Stoß aber

$$= macc\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right) + nccdx\sqrt{u}.$$

Woraus diese Gleichheit nach dem erstern Gründ-Satz entspringet:

$$0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{u}.$$

Die lebendige Kraft vor dem Stoße wird seyn $= maccv$, nach dem Stoß aber

$$= macc(v + dv) + nccudx,$$

aus deren Vergleichung man erhalt $0 = maccdv + nccudx.$ Da nun aus der erstern Aequation gefunden wird

$$\sqrt{u} = \frac{-madv}{2ndx\sqrt{v}}$$

und allso

$$u = \frac{m^2a^2dv^2}{4nndx^2v},$$

die andere Aequation aber giebt

$$u = \frac{-madv}{ndx},$$

so bekommt man

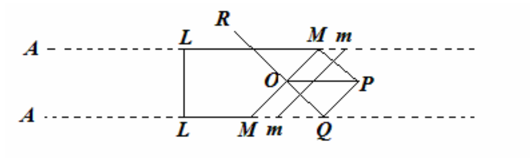
$$\frac{madv}{4nvdx} = -1 \text{ oder } dv = \frac{-4nccvdx}{macc}.$$

Dahero ist in diesem Fall der Wiederstand eben so groß, als wenn gegen den Körper das Gewicht eines aus der flüßigen Materie bestehenden Cylinders drückte, dessen Basis der Dicke des Körpers $MM = cc$ gleich ist, und dessen Höhe viermahl so groß, als diejenige v, wodurch die Geschwindigkeit des Körpers ausgedrückt wird. Da nun in dem vorigen Fall die Höhe des entgegen druckenden Cylinders nur $= 2v$ gefunden worden, so siehet man, daß in dem gegenwartigen Fall wegen der Elasticitat der Wiederstand zweymahl so groß sey, als in dem vorigen, wo keine Elasticitat vorhanden gewesen. In beyden Fallen aber, wenn sich eben derselbe Körper mit verschiedenen Graden der Geschwindigkeit in eben derselben flüßigen Materie beweget, so ist der Wiederstand immer den Quadraten der Geschwindigkeit proportional. Wenn aber die Dichtigkeit der flüßigen Materie grosser oder kleiner wird: so wird auch der Wiederstand um eben so viel grosser oder kleiner. Weil nun auf diese Art die Veranderung der Geschwindigkeit des Körpers leicht gefunden wird, so kann auch daher die ganze Bewegung desselben, so wie selbige nach und nach abnimmt, ohne Schwierigkeit bestimmet werden.

Wir haben aber hier nur den Fall betrachtet, wenn der vordere Theil des Körpers, welcher auf die Theilchen der flüßigen Materie stößt, nicht nur eine Fläche, sondern auch auf die Direction der Bewegung perpendicular ist. In diesem Fall ist die Gewalt des Wiederstands der Bewegung des Körpers schnurstracks entgegen, und vermindert folglich nur die Geschwindigkeit derselben, ohne seine Direction zu verandern. Dahero ein solcher Körper seine Bewegung nach einer graden Linie fortsetzt, und sein Zustand nur allein in Ansehung der Geschwindigkeit verändert wird. Es ist also noch übrig, daß wir den Wiederstand bestimmen, wenn die vordere Fläche des Körpers mit seiner

Direction einen schiefen Winkel macht, als woraus nachgehends auch der Wiederstand für alle so wohl gerade, als krummlinichte Figuren, ausgefunden werden kann.

Wir wollen also setzen, die Figur des Körpers sey also beschaffen, wie die Fig. 12 ausweiset, dergestalt, daß der Körper *LLMM,* welcher sich nach Fig. der Direction *OP* in der flüßigen Materie beweget, mit seiner schiefen Fläche *MM* auf die Theilchen der



flüßigen Materie stosse. Indem also dieser Körper durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortgehet, so muß derselbe die in dem Raum *MMmm* enthaltene flüßigen Materie fortstossen. Wenn nun wie vorher die vordere Fläche des Körpers *MMcc* gesetzt ·wird, so ist die Menge der flüßigen Materien nicht mehr wie vorher $= ccdx$ *:* sondern dieselbe muß nach der Verhaltniß des Radii zum Sinu des Winkels *MOP*, unter welchem der Vordertheil des Körpers auf die flüßigen Materie stosset, vermindert werden. Wenn also der Radius $= 1$, und der Sinus des Winkels $MOP = q$ gesetzt wird, so wird die Menge der flüßigen Materie, welche in Bewegung gesetzt werden muß, indem der Körper durch den Weg $Mm = dx$ fortrucket, durch $ccqdx$ ausgedrücket, und müßte der vorher gefundene Wiederstand noch mit q multipliciret werden, wenn nehmlich sonsten die Würkung einerley wäre. Allein da der Körper nicht gerade, sondern schief auf diese flüßigen Materie stosset, so ist auch der Wiederstand nicht so groß, als in dem vorhergehenden Fall, und muß folglich noch aus diesem Gründe nach den Regeln der Mechanic durch q multipliciret werden. Dahero verhält sich der Wiederstand der Fläche cc, wenn dieselbe perpendicular auf die flüßigen Materie stößt, zu dem Wiederstand, wenn eben dieselbe unter einem schiefen Winkel, dessen Sinus $= q$, fortgehet, wie das Quadrat des Radii 1 zum Quadrat des Sinus qq. Da aber ferner die flüßige Materie nur in so fern wiedersteht, als die Bewegung des Körpers gerade auf *MM* gerichtet ist, so ist die Direction der wiederstehenden Kraft perpendicular auf die Fläche *MM*. Wenn also die schwindigkeit des Körpers durch die Höhe v ausgedrückt wird, so ist die wiederstehende Kraft, deren Direction *OR* perpendicular ist auf *MM*, gleich dem Gewicht eines aus eben dieser flüßigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Basis $= cc$, und die Höhe entweder $= 2qqv$ oder $= 4qqv$, je nach dem sich der Stoß nach den Regeln der nicht elastischen, oder vollkommen elastischen Körper richtet. Weil nun in dem gegenwartigen Fall der Körper nach der Linie *OR,* welche auf die vordere Fläche *MM* perpendicular ist, zurück gestossen wird, diese Direction aber mit der Direction der Bewegung einen schiefen Winkel macht, so wird dadurch nicht nur die Geschvindigkeit des Körpers vermindert, sondern es wird auch seine Direction verändert. Denn wenn wir diese Kraft, welche entweder durch $2nccqqv$ oder durch $4nccqqv$ ausgedrückt wird, wenn nehmlich wie vorher n die Dichte der flüßigen Materie anzeigt, nach zwey Directionen auflösen, davon eine der Direction der Bewegung gerade entgegen gesetzt, die andere aber auf dieselbe perpendicular ist, so wird die erstere $=^{2}_{4}\, nccq^{3}v$, die letztere aber

$$=_4^2 \; nccqqv\sqrt{(1-qq)}\ .$$

Durch jene wird die Geschwindigkeit des Körpers vermindert, durch diese aber, die Direction der Bewegung verändert. Wir wollen für die zwey Zahlen $\frac{2}{4}$ den Buchstaben μ setzen, welcher folglich, wenn die Körper keine Elasticitat haben, durch 2, wenn aber eine vollkommene Elasticitat vorhanden ist, durch 4 ausgedrückt wird, und P soll die Massam, oder das Gewicht des bewegten Körpers anzeigen. Hieraus ist nun klar, daß, indem der Körper durch $Mm = dx$ fortgehet, erstlich seine Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ dergestalt vermindert werde, daß

$$dv = \frac{-\mu nccq^3 vdx}{P}.$$

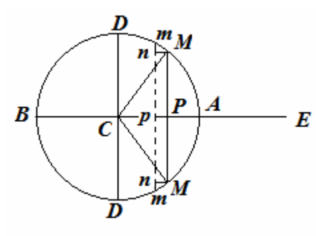
Hernach wird auch inzwischen die Direction dergestalt verändert werden, daß der Körper nach der Krümmung eines Zirkelbogens fortgehen wird, wovon der Radius

$$= \frac{2P}{\mu nccqq\sqrt{(1-qq)}}.$$

So bald aber der Körper seine Direction verändert, so wird auch die Schiefe, womit derselbe auf die Theilchen der flüßigen Materie stößt, verändert, und bekommt folglich der Sinus q einen anderen Werth. Ueber dieses wird sich auch der Körper selbst umkehren, und also bald mit einem andern Theil seiner Oberfiache an die Theilchen der flüßigen Materie anstossen. Solchergestalt, da der Wiederstand alle Augenblicke verändert wird, so wird der Körper daher auch eine sehr verwirrte Bewegung bekommen.

Aus dem Wiederstand, welchen eine schief bewegte Fläche in einer flüßigen Materie leidet, kann nun der Wiederstand eines jeglichen Körpers, was für eine Figur derselbe immer haben mag, berechnet werden. Allhier sind aber insonderheit die runden Körper, welche sich nach der Direction ihrer Axe bewegen, vor andern merkwurdig, weil in denselben nur allein die Geschwindigkeit vermindert wird, die Direction aber unverändert bleibet. Denn da ein solcher Körper rings herum gleich stark auf alle Seiten getrieben wird, so zernichten sich alle diese Kräfte unter einander, daß daher gar keine Würkung in der Bewegung des Körpers entstehen kann.

Ein runder Körper entstehet nun, wenn eine beliebige Figur um eine Axe herum gedrehet wird. Es sey dahero ADB die Figur, aus deren Herumdrehung um die Linie AB der Körper entsteht, dessen Wiederstand wir hier untersuchen wollen, wenn sich derselbe nach der Direction seiner Axe BAE in einer flüßigen Materie bewegt. Man siehet also leicht, daß wenn die Figur ADB ein halber Zirkul ist, der daher entstehende Körper eine Kugel seyn werde. Wir wollen aber erstlich die Rechnung insgemein auf eine jegliche krumme Linie, welche für ADB angenommen werden kan, richten.



Vor allen Dingen muß man nun denjenigen Theil des Umfangs, welcher auf die flüßigen Materie stößt, von dem übrigen Theil wohl unterscbeiden. Dieser Theil des Umfangs, auf welchen der Wiederstand geschieht, entsteht aber aus dem Theil *AMD* der angenommenen krummen Linie, und erstreckt sich von *A* bis *D,* wo sich der Umfang rückwärts zu schwingen anfängt, das ist gemeiniglich, wo die Tangens der Axe *AB* parallel wird. Man nehme nun nach Belieben eine Perpendicular-Linie *MP* auf die Axe *AB*, und setze $AP = x,\ PM = y$; ferner sey *mp* der vorigen *MP* unendlich nahe, und zugleich parallel, und ziehe *Mn* der Axe parallel, so wird

$$Pp = Mn = dx, \quad mn = dy \text{ und } Mm = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)};$$

man setze aber Kürze halber $Mm = ds$. Durch die Herumdrehung dieses Linichens *Mm* um die Axe *AB* entstehet ein Ring, dessen aussere Fläche seyn wird $= 2\pi yds$, wenn $1:\pi$ die Verhaltniß andeutet zwischen dem Diameter eines Zirkuls und seinem Umkreiß. Dieser Ring stößt nun allenthalben auf die Theilchen der flüßigen Materie gleich schief auf, nehmlich unter einem Winkel $= mMn$, dessen Sinus folglich ist $= \frac{dy}{ds}$, und Cosinus $= \frac{dx}{ds}$. Wenn also die Geschwindigkeit des Körpers durch $\sqrt{v}$, und die Dichte der flüßigen Materie durch *n* ausgedrückt wird: so ist der Wiederstand des obgedachten Rings (wenn man nehmlich $2\pi yds$ für *cc* und $\frac{dy}{ds}$ für *q* setzet)

$$\mu n \cdot 2\pi yds \cdot \frac{dy^2}{ds^2} \cdot v = \frac{2\mu\pi nvydy^2}{ds},$$

dessen Direction nach der Linie *MC*, so auf *Mm* perpendicular ist, gerichtet ist. Hieraus erwachst also der Wiederstand nach der Direction der Bewegung

$$= \frac{2\mu\pi nvydy^3}{ds^2};$$

und das Integrale hiervon

$$= 2\mu\pi nv \int \frac{ydy^3}{ds^2}$$

giebt den ganzen Wiederstand, welchen der Theil des Umfangs, so aus dem Bogen *AM* erzeuget wird, leidet: und wenn man das Punkt *M* bis in *D* fortrücket, so kommt der gesuchte Wiederstand heraus, wodurch die Bewegung des Körpers vermindert wird.

Um nun hieraus den Wiederstand einer Kugel zu finden, so darf man nur für die krumme Linie *AMD* den vierten Theil eines Zirkuls setzen. Es sey der Radius der Kugel $AC = CD = a$; so wird $CP = \sqrt{(aa - yy)}$ und

$$Mm = ds = \frac{ady}{\sqrt{(aa-yy)}}.$$

Folglich ist

$$ds^2 = \frac{aady^2}{aa-yy},$$

und der oben gefundene Wiederstand wird

$$= 2\mu\pi nv\int \frac{ydy\left(aa-yy\right)}{aa} = 2\mu\pi nv\left(\tfrac{1}{2}yy - \frac{y^4}{4aa}\right).$$

Man setze nun, um den volligen Wiederstand zu finden, $y = a$, so bekommt man

$$2\mu\pi nv \cdot \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{2}\mu\pi naav.$$

. Nun aber drückt πaa den Inhalt eines grossen Zirkuls dieser Kugel, oder die Dicke derselben aus, für welchen wenn man setzt *cc*, so kommt der Wiederstand

$$\tfrac{1}{2}\mu nccv.$$

Wenn aber ein solcher Zirkul, oder ein gleich dicker Cylinder, sich seiner Lange nach in eben dieser flüßigen Materie bewegte, so würde sein Wiederstand seyn

$$= \mu nccv;$$

woraus erhellet, daß der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß ist, als der Wiederstand eines gleich dicken Cylinders, so sich mit einer gleichen Geschwindigkeit in eben derselben flüßigen Materie seiner Lange nach beweget .

DRITTE ANMERKUNG

Eine solche flüßigen Materie aber, dergleichen wir hier betrachtet haben, findet sich nicht nur nicht in der Welt, sondern ist auch nicht einmahl möglich: dahero auch der Wiederstand, welchen Körper in solchen flüßigen Materien, die in der Welt würklich angetroffen werden, findet, anders beschaffen seyn muß, als in der vorigen Anmerkung gefunden worden. Wir wollen unsere Betrachtung haupsächlich auf die Luft richten. als deren Wiederstand allhier gesuchet wird. Hierbey ist nun vor allen Dingen zu merken, daß die Luft nicht nur eine flüßige Materie ist, sondern sich auch in einem zusammen gedrückten Zustand befindet, dergestalt, daß ein jeglicher Körper, so mit Luft umgeben ist, rings herum von der Luft zusammen gedrückt wird; ·weil aber diese zusammendruckende Kraft allenthalben gleich groß ist, so wird der Körper davon nicht in Bewegung gesetzt, wenn derselbe vorher stille gestanden. Wenn aber der Körper schon eine Bewegung hat, so leidet derselbe nicht nur die vorige zusammendruckende Kraft, sondern er ist noch über dieses der Kraft, welche aus dem Stoß desselben auf die

Theilchen der Luft entstehet, ausgesetzt. Wenn zwar die vorigen Kräfte sich im Gleichgewicht halten, so kommt die Verminderung der Bewegung gantz allein auf die letztere an; welches geschieht, wenn die Bewegung des Körpers nicht allzu schnell ist. Wenn sich aber der Körper sehr geschwind bewegt, so wird die Luft um denselben in eine merkliche Bewegung gesetzt, wodurch der Druck derselben ziemlich verändert, und rings in den Körper herum nicht mehr einerley ist. In diesem Fall wird also der Zustand des Körpers nicht nur von der wiederstehenden Kraft der Luft, sondern auch von dem ungleichen Druck derselben, verändert. Insonderheit hat man hier auf den hintern Theil des Körpers zu sehen, welcher, so lange der Körper still steht, von dem Druck der Luft so stark vorwarts, als der vordere Theil hinterwarts, gedrückt wird. Wenn sich aber der Körper so geschwind bewegt, daß die Luft demselben nicht einmahl zu folgen vermögend ist, so kann auf den hintern Theil desselben gar kein Druck geschehen: dahero in diesem Fall der Druck von vornen nicht aufgehoben wird, und also den Wiederstand sehr merklich vermehret. Hieraus sieht man also leicht, daß wenn gleich die Geschwindigkeit des Körpers kleiner ist, der Druck von hinten dennoch kleiner seyn müsse, als von vornen: weswegen in diesem Fall die Bewegung des Körpers nicht nur von dem eigentlichen Wiederstand, so von dem Stoß auf die Theilchen der Luft herrühret, vermindert wird, sondern auch von dem Druck der Luft, welchen dieselbe auf das Vordertheil ausübet, in so fern derselbe von dem Gegen-Druck von hinten nicht im Gleichgewicht gehalten wird.

Hernach kommt bey der Luft noch ein besonderer Umstand zu betrachten vor, welcher sich bey dem Wasser und anderen flüßigen Körpern nicht ereignet. Dieser bestehet darinne, daß sich die Luft so wohl in einen kleineren Raum zusammen drucken, als in einen großeren ausdehnen laßt, und dahero in Ansehung ihrer Dichte sehr verschieden seyn kann. Wenn sich also ein Corper sehr schnell durch die Luft beweget, und dieselbe vor sich her wegstößt, so ist klar, daß die Luft vor dem Körper immer etwas dichter, hinter demselben aber etwas dünner seyn müsse; und um dieser Ursache willen findet der Körper von vornen so wohl einen starkern Gegendruck, als auch einen starkeren Wiederstand: hingegen aber wird der Druck von hinten etwas schwacher. Da nun alle diese Umstande die Geschwindigkeit des Körpers vermindern, und um so viel betrachtlicher werden, je schneller sich der Körper beweget, so wird dadurch die Meynung des Verfassers auf das nachdrucklichste bekräftiget, daß der Wiederstand der Luft auf sehr geschwinde Bewegungen weit grosser sey, als alle bißherigen Theorien anzeigen.

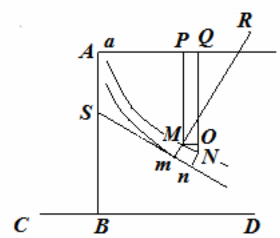
Aus diesem allem erhellet also, daß ein jeder Körper, so sich in der Luft beweget, einer doppelten Kraft ausgesetzt sey, wovon eine aus dem Stoß desselben gegen die Theilchen der Luft entspringet, und den eigentlichen Wiederstand oder die Resistenz ausmachet; die andere Kraft aber kommt von dem ungleichen Druck der Luft auf den Körper her. Ob nun gleich diese beyden Kräfte zusammen in Erwegung gezogen werden müssen, wenn man die Bewegung des Körpers bestimmen will, so muß doch die Grosse einer jeden, da dieselben aus gantz verschiedenen Ursachen herrühren, ins besondere untersuchet werden.

Wir wollen zu diesem ende erstlich die erstere von diesen beiden Kräften betrachten, welche aus dem Stosse des Körpers auf die Theilchen der Luft entsteht. Aus diesem Gründe leidet der Körper in so fern einen Abgang an seiner Geschwindigkeit, als in den umliegenden Theilen der Luft eine Bewegung hervor gebracht werden muß: denn so viel Kraft zu dieser Bewegung in der Luft erfordert wird, eben so viel Kraft würket hinwiederum auf den Körper zurück. Hier sieht man nun leicht, daß dieser Wiederstand der Luft kleiner seyn müsse, als in beiden Fallen der vorigen Anmerkung. Im letzteren Fall, da die Theilchen der flüßigen Materie zurück springen, war der Wiederstand dem Gewicht eines Cylinders gleich, dessen Höhe $=4v$, im erstern aber, da die Theilchen mit dem Körper einerley Geschwindigkeit bekommen, war der Wiederstand gleich dem Gewichte eines Cylinders, dessen Höhe $=2v$. Wenn aber ein Körper auf die Theilchen der Luft stößt, so springen dieselben weder von dem Körper zurück, noch werden dieselben vor dem Körper her getrieben; sondern sie welchen seitwärts aus, und erhalten keine merkliche Bewegung, wenn sich der Körper nicht sehr schnell bewegt. Weil also den Theilchen der Luft eine weit kleinere Bewegung mitgetheilt wird, als in den beyden vorher erklarten Fallen, so muß auch der Wiederstand kleiner seyn, als ein Cylinder, dessen Höhe entweder $4v$, oder nur $2v$; und um dieser Ursache willen hat man angenommen, daß der Wiederstand der Luft, welchen eine Fläche $=cc$ leidet, so sich mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ perpendicular gegen die Luft beweget, dem Gewicht einer Luft-Säule gleiche, deren Basis $=cc$, und deren Höhe $=v$. Man hat auch durch die Erfahrung befunden, daß ein Körper in dem Wasser einen gleichen Wiederstand leide, welcher durch das Gewicht einer Wasser-Säule deren Höhe v, ausgedrückt werde: und da die Theilchen des Wassers und der Luft einem darinn bewegten Körper auf eine gleiche Art auswelchen, so hat man geschlossen, daß der Wiederstand auf eine ähnliche Art in diesen beyden flüßigen Materien beschaffen sey.

Um dieses deutlicher darzuthun, so ist zu merken, daß der Wiederstand, welchen ein Körper, der mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich in einer stillstehenden flüßigen Materie beweget, antrift, bestandig derjenigen Kraft gleich seyn müsse, welche eben derselbe Körper leiden würde, wenn derselbe stille stunde, hingegen aber die flüßige Materie mit einer gleichen Geschwindigkeit gegen denselben beweget würde. Man stelle sich nun ein Gefäß voll Wasser vor, an dessen Boden ein Loch befindlich, welches mit einem Finger zugehalten wird. In diesem Fall wird der Finger von einer Kraft gedrucket werden, welche dem Gewicht einer Wasser-Säule gleich ist, deren Basis der Weite des Lochs, und deren Höhe der Höhe des Wassers in dem Gefässe gleich ist. Wenn man nun den Finger vor dem Loch etwas zurück ziehet, und das Wasser darauf sprützen laßt, so scheinet der Wahrheit gemäß zu seyn, daß der Finger eine eben so grosse Kraft, als vorhin ausstehen werde. Das Wasser sprützet aber mit einer solchen Geschwindigkeit heraus, welche durch die Höhe desselben in dem Gefäße ausgedrückt wird: und also ist die Kraft des auf den Finger heraus sprützenden Wassers gleich dem Gewichte einer Wasser-Säule, deren Basis gleich dem Loch, und deren Höhe mit der Höhe, wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, einerley ist. Auf diese Art wird also die vorher erwehnte Meynung bekräftiget, daß der Wiederstand so wohl der Luft, als des Wassers, dem Gewicht eines Cylinders gleiche, dessen Höhe der Höhe v, wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, selbst gleich sey.

Um aber dieses aus den vorher fest gesetzten Gründen, nach welchen der Wiederstand derjenigen Kraft gleich seyn muß, welche zur Hervorbringung der in der flüßigen Materie entstehenden Bewegung erfordert wird, deutlicher auszufuhren, so wollen wir betrachten, daß ein Körper in CD still stehe, und die flüßigen Materie auf denselben nach der

Direction *AB* mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{b}$, oder welche durch den Fall aus der Höhe *b* erlangt wird, beweget werde. Es ist nun erstlich klar, daß wenn alle Theile der flüßigen Materie ihre Bewegung ungehindert fortsetzen könnten, der Körper keine Kraft empfinden würde. Weil aber alle Theile der flüßigen Materie, so bald sich dieselben dem Körper nahen, genöthiget werden auszuwelchen, und so wohl ihre Geshwindigkeit, als ihre Richtung zu verandern, so muß der Körper eine eben so große Kraft empfinden, als zu dieser Veranderung so wohl in der Geschwindigkeit, als der Richtung der Theilchen, erfordert wird. Wir wollen setzen, daß die flüßige Materie, welche bey *Aa* mit ihrer Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ gegen den Körper beweget wird, genöthiget werde, seitwärts nach *AaMm* auszuwelchen, und wir wollen uns zu diesem Ende einbilden, als wenn dieselbe durch den krummen Canal *AaMm* fortgienge. In diesem Zustande wird nun nicht nur die Direction derselben bestandig verändert, sondern nachdem dieser Canal weiter oder enger wird, so wird auch die Geschwindigkeit grosser oder kleiner. Es sey die erste Weite $Aa = a$, welche als unendlich klein angesehen werden muß, indem man sich für eine jede Reihe einen besonderen Canal vorstellen kann. Ferner sey die Weite $Mm = z$; und die Geschwindigkeit der flüßigen Materie bey *Mm* sey $=\sqrt{v}$. Da sich nun die Geschwindigkeiten einer durch einen Canal bewegten flüßigen Materie umgekehrt verhälten, wie die Weite des Canals, so ist



$$a : z = \sqrt{v} : \sqrt{b};$$

und folglich

$$z\sqrt{v} = a\sqrt{b}.$$

Man ziehe eine Axe *AP* perpendicular auf *AB*, und nenne die Coordinaten $AP = x$, $PM = y$; hernach werde *QN* mit *PM* parallel und unendlich nah gezogen; so wird

$$PQ = MO = dx, \quad ON = dy, \quad MN = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)},$$

und das Theilchen der flüßigen Materie *MNnm* durch

$$z\sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)}$$

ausgedrückt werden. Man setze ferner $dy = pdx$, so wird

$$MN = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)} = dx\sqrt{(1 + pp)},$$

und wenn *R* für das Centrum der Krümmung des Canals in *MN* angenommen wird, so bekommt man

$$MR = \frac{-dx\left(1+pp\right)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Um nun den Lauf dieses Theilchens *MNnm* nach dieser Krümmung zu beugen, dazu wird eine Kraft nach der Direction *MR* erfordert, welche sich verhält zum Gewicht desselben Theilchens, wie

$$2v \text{ zu } \frac{-dx\left(1+pp\right)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Wenn also das Gewicht dieses Theilchens durch seine Grosse $zdx\sqrt{\left(1+pp\right)}$ ausgedrückt wird, so ist die Kraft nach *MR*

$$\frac{-2vzdp}{1+pp}.$$

Ferner wenn die Weite des Canals in *Mm* grosser wird, so nimmt die Geschwindigkeit ab. Hierzu wird eine Kraft nach der Direction *mS*, welche den Canal in *m* berührt, erfordert, und wenn diese Kraft $=T$ gesetzt wird, so bekommt man

$$zdx\sqrt{(1+pp)}\cdot dv = -Tdx\sqrt{(1+pp)} \text{ oder } T = -zdv.$$

Diese zwey Kräfte *MR* und *mS* werden also zu Veranderung des Laufs der flüßigen Materie durch den Canal *AaMm* in einem jeglichen Punkt *M* erfordert. Dahero, um die sämtliche Kraft zu bekommen, so wollen wir diese beyden Kräfte nach den bestandigen Directionen *BA* und *AP* auflösen. Die erstere Kraft *MR*, welche war

$$= \frac{-2vzdp}{1+pp}.$$

giebt nach der Direction *BA* diese Kraft

$$= \frac{-2vzdp}{\left(1+pp\right)\sqrt{\left(1+pp\right)}},$$

nach der Direction *AP* aber diese

$$= \frac{-2vzpdp}{\left(1+pp\right)\sqrt{\left(1+pp\right)}}.$$

Die andere Kraft *mS*, welche war $=-zdv$, giebt nach der Direction *BA* diese Kraft

$$= \frac{-zpdv}{\sqrt{\left(1+pp\right)}},$$

nach der Direction *AP* aber diese

$$=\frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Für das Theilchen *MNnm* wird also nach der Direction *BA* diese Kraft

$$=-\frac{2vzdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}-\frac{zpdv}{\sqrt{(1+pp)}},$$

nach der Direction *AP* aber diese

$$-\frac{2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}+\frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}$$

erfordert. Es ist aber, wie wir vorher gewiesen, $z=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$; und folglich ist die aus der Bewegung des Theilchens *MNnm* entstandene Kraft nach der Direction *BA*

$$-\frac{2adp\sqrt{bv}}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}-\frac{apdv\sqrt{b}}{\sqrt{v(1+pp)}}.$$

Hiervon ist das Integrale

$$-\frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}}+C;$$

und giebt die Kraft nach der Direction *BA*, welche zur Veranderung der Bewegung aller flüßigen Materie, so in dem Canal *AaMm* enthalten ist, erfordert wird, wenn nur die Quantitat *C* recht bestimmet wird. Um aber diese Quantitat recht zu bestimmen, so ist zu merken, daß, wenn $AP=0$ genommen wird, in welchem Fall *p* unendlich groß wird, und $v=b$, die ganze Kraft verschwinden müsse: man setze also $p=\infty$, so wird $C-2ab=0$, und folglich $C=2ab$. Dahero wird zur Veranderung der Bewegung der im Canal *AaMm* enthaltenen flüßigen Materie eine Kraft nach der Direction *BA* erfordert, welche ist

$$=2ab-\frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}}=2ab\left(1-\frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{b(1+pp)}}\right).$$

Es deutet aber $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ den Cosinum des Winkels *MNO* oder des Winkels *mSB* an, wenn der Radius durch 1 angedeutet wird: und hieraus wird die obige Kraft

$$=2ab\left(1-\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos.mSB\right),$$

und mit eben dieser Kraft wird der Körper *CD* nach der Direction *AB* fortgestossen. Es bedeutet aber *2ab* das Gewicht eines Cylinders flüßiger Materie, dessen Basis ist $=Aa=a,$ und dessen Höhe $=2b$; wenn $\sqrt{b}$ die Geschwindigkeit, womit die flüßige Materie gegen den Körper, oder welches gleich viel ist, womit der Körper gegen die flüßigen Materie stöst, anzeigt. Diese Kraft, und folglich der Wiederstand, beruhet also theils auf der Direction *Sm*, nach welcher die flüßigen Materie seitwärts abgelenket wird, theils auch auf der Geschwindigkeit, welche dieselbe nach dem Stoß behalt.

Hieraus erhellet, daß wenn die flüßige Materie, um dem Körper auszuwelchen, bis auf einen rechten Winkel von ihrer naturlichen Direction *AB* abgelenket wird, dergestalt, daß der Winkel $mSB=90°$ wird, so kommt die gefundene Kraft $=2ab$*:* und wenn dieses bey aller flüßigen Materie, welcher der Körper *CD* im Wege steht, geschieht, so kommt eben der einige Wiederstand heraus, welchen wir in der vorigen Anmerkung im erstern Fall gefunden haben. Eben dieses geschiehet auch, wenn die flüßige Materie alle ihre Bewegung durch den Stoß verlieret. Solte aber die flüßigen Materie nach dem Stoß nach der vorigen Direction mit gleicher Geschwindigkeit zurück prellen, so wird der Winkel $mSB=180°$, und $\sqrt{v}=\sqrt{b}$ *:* dahero die Gewalt seyn wird $4ab$, wie im andern Fall der vorhergehenden Anmerkung gefunden worden. Wenn man also wissen könnte, auf was Art ein jeglicher Strahl der flüßigen Materie *Aa* welcher gegen den Körper *CD* fahrt, sowohl in Ansehung der Geschwindigkeit, als der Direction, dem Körper ausweiche, so könnte man auch hieraus die Kraft bestimmen, welche auf den Körper Würkt. Man hat aber zu diesem Ende nicht nöthig, die Weite und die Krümmung des Canals *AaMm,* in welchem sich der Strahl *Aa* gegen den Körper zu bewegen gesetzt worden, allenthalben zu wissen; sondern es ist genug, wenn diese Sachen in dem letzten Punkt des Canals bekannt sind: indem die aus dem Stück *AaMm* entstehende Kraft nach der Direction *AB* durch diese Formul

$$2ab\left(1-\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos.mSB\right),$$

oder da

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{a}{z},$$

durch diese

$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.mSB\right)$$

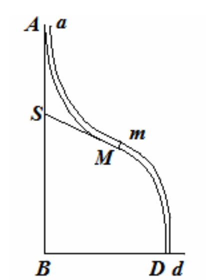
ausgedrückt wird, allwo z die Weite des Canals im letzten Punkt M andeutet, und der Winkel mSB durch die Lage des letzten Stückleins $MNnm$ bestimmt wird. Hier kommt es also nur darauf an, wo das Ende des Canals angenommen werden soll. Geht man so weit, biß die flüßige Materie um den Körper vollig vorbey geflossen, und ihren vorigen Lauf wiederum erlanget hat, so wird $z = a$, und der Winkel mSB verschwindet, dahero der Cosinus desselben $=1$ wird. In diesem Fall würde also die auf den Körper nach der Direction AB Würkende Kraft

$$= 2ab(1-1) = 0,$$

und der Körper litte gar keinen Wiederstand; woraus erhellet, daß man für Wasser und Luft nicht denjenigen Punkt des Canals, wo die Bewegung hinter dem Körper mit der ersten wiederum vollig übereinkommt, für den letzten annehmen könne. Um nun hiervon die Ursache zu untersuchen, so durfen wir nur den Ursprung dieser Kraft, welche auf den Körper würket, genauer betrachten. Wenn wir nur auf den Theil des Canals $AaMm$ Acht haben, so ist die Kraft, welche daraus auf den Körper nach der Direction AB entspringet,

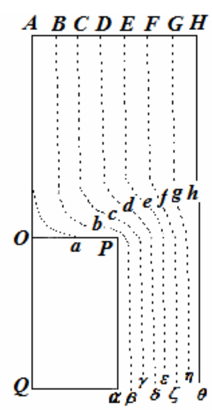
$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.mSB\right)$$

und diese wird folglich immer grösser, so lang der Winkel mSB grosser wird, je weiter man von dem Anfang Aa fortgehet. Das ist, so lange sich dieser Canal von dem Körper abwarts krümmet, so lange nimmt die daher entstehende Kraft, welche den Körper nach der Direction AB fortstosset, zu. Wenn aber dieser Canal, wie in Fig., seine Krümmung umschwinget, und von M biß D gegen den Körper zu wendet, so nimmt von M biß D der Winkel MSB immer ab, und hierdurch wird die Kraft wiederum vermindert; dergestalt, daß wenn der Canal in Dd mit Aa parallel lauft, und auch daselbst gleich weit ist, die ganze Kraft zernichtet wird. Wenn nun der Canal eine solche Figur hat, so muß man denselben nach seinen beyden Theilen AM und MD ins besondere betrachten, wovon jener AM seine Krümmung von dem Körper BD abwarts, dieser aber MD gegen den Körper zugekehret hat.



Aus dem ersteren Theil AM entstehet eine Kraft, welche den Körper nach der Direction AB fortstößt, und durch $2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.MSB\right)$ ausgedrückt wird. Aus dem andern Theil DM aber entstehet eine Kraft, welche jener entgegen ist, und von welcher der Körper nach der Direction BA zurück gezogen werden sollte. Da nun kein Körper anders, als durch einen würklichen Druck in Bewegung gesetzt werden kann, so kann auch diese letztere Kraft nur in so ferne auf den Körper Würken, als der Druck der flüßigen Materie von hinten stark genug ist, den Körper vorwarts zu stossen. Da nun in Luft und Wasser der Druck von vornen nicht nur dem Druck von hinten gleich, sondern noch gemeiniglich grosser ist, so sieht man wohl, daß die aus dem Theil des Canals MD entstehende Kraft auf den Körper gar keine oder zum wenigsten nur eine sehr geringe Würkung haben könne. Und also wird die aus dem ganzen Canal *AMD* entstehende Kraft, welche auf den Körper in der That würket, beynahe derjenigen gleich sein, welche aus dem Theil *AM* entspringt, und folglich durch $2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos.MSB\right)$ ausgedrückt werden. Man siehet aber hieraus auch zugleich, daß wenn eine flüßige Materie also beschaffen wäre, daß die aus dem Theil *MD* entstehende und den Körper zurück ziehende Kraft, ihre vollige Würkung ausüben könnte, der Körper von dem Anstosse einer solchen flüßigen Materie ganz und gar keine Gewalt ausstehen, und folglich auch keinen Wiederstand in derselben antreffen würde. Dieser Fall könnte Platz finden, wenn die flüßige Materie unendlich flüßig, und zugleich von einer unendlichen Kraft zusammen gedrückt wäre. Vielleicht ist die subtile Himmels-Materie, in welcher sich die Planeten und Cometen bewegen, von einer solchen Eigenschaft, und dahero dieses die Ursache, daß man in diesen Körpern keinen Abgang in ihrer Bewegung verspühren kann. Daß aber diese Eigenschaft in der Luft, dem Wasser und andern bekannten flüßigen Materien, nicht stattfinde, bezeuget der sehr betrachtliche Wiederstand derselben: und da dieselben wegen ihrer gegen den Körper gewandten Krümmung *MD* denselben an sich zu ziehen nicht vermögend sind, so übet die aus der wiederwartigen Krümmung *AM* entstehende Kraft ihre vollige Würkung aus, und eben daher entspringt auch der grosse Wiederstand derselben.

Um nun von der Grosse dieses Wiederstands gründlicher urtheilen zu können, so wollen wir einen Cylinder betrachten, auf welchen eine solche flüßige Materie mit einer gegebenen Geschwindigkeit fliesset. Es sey dahero *OPaQ* die Helfte dieses Cylinders, und *AOQ* die Axe desselben; weil, was von einer Helfte gesagt wird, zugleich auch von der andern gilt. Man stelle sich diesen Cylinder in einem Canal eingeschlossen vor, dessen halbe Weite durch *AH* angedeutet wird, und durch diesen Canal soll Luft oder Wasser mit einer gegebenen Geschwindigkeit gegen den Körper zufliessen. Man zertheile in Gedanken diese zufliessende Materie in unendlich viel kleine Strahlen *AB, BC, CD, DE* etc. und erwege, was ein jeglicher derselben für einen Weg um den Körper nehmen werde; so wird man leicht sehen, daß sich dieselben ungefehr, wie die Figur anzeiget, Krümmen müssen. Ferner bemerke man in denselben die Punkte *a, b, c, d, e, f* etc., wo sich dieselben wiederum gegen den Körper zu krümmen anfangen, und berechne die Kräfte nach der Direction *AO,* welche aus der Krümmung dieser Strahlen, bis zu den Punkten *a, b, c, d, e* etc. entspringen; so werden alle diese Kräfte zusammen genommen, den Wiederstand geben. Man siehet aber leicht, daß sich der erste Strahl *ABab* bis auf einen rechten Winkel beugen müsse, und dahero wird der daraus entstehende Wiederstand seyn $=2ab$, wenn nehmlich *a* die Dicke des Strahls *AB,* und *b* die Höhe, woraus die Geschwindigkeit desselben erzeuget wird, andeutet. Der folgende Strahl *BCbc* leidet schon keine so grosse Beugung, und folglich entsteht daraus eine kleinere Kraft: und solchergestalt werden die aus den nachfolgenden Strahlen *CD, DE, EF* etc. entstehenden Kräfte immer kleiner, und zuletzt gar nicht mehr merklich. Woraus erhellet, daß der sämtliche Wiederstand weit kleiner seyn müsse, als das Gewicht eines Cylinders flüßiger Materie, dessen Weite mit dem Körper einerley, und dessen Höhe der doppelten Höhe *b,* wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, gleich ist.



Was hier von einem Cylinder, oder einem solchen Körper, dessen Vorder Theil flach ist, und gerade auf die flüßige Materie stößt, gesagt worden, laßt sich leicht auch auf andere Figuren ziehen. Man sieht aber also bald, daß wenn der Vorder-Theil des Körpers nicht flach, sondern entweder erhaben, oder gar zugespitzt ist, der Wiederstand kleiner seyn müsse, als in dem vorigen Fall. Denn da wird nicht einmahl der erste Strahl *AB* bis auf einen rechten Winkel gebogen, und die Beugung der folgenden wird noch geringer, als vorher. Dahero wir in diesem Stück dem Autori nicht beypflichten können, wenn er sagt, daß in solchen zusammen gedrückten flüßigen Materien der Wiederstand nicht von der Figur des Körpers, sondern nur von der Dicke desselben, abhange. Um dieser Ursache willen, ist es sehr wahrscheinlich, daß der Wiederstand, welchen Körper von verschiedenen Figuren auch in zusammen gedrückten flüßigen Materien leiden, nach eben der Regel, welche vorher ist gegeben worden, bestimmet werden könne: und daß der Unterscheid nur darinne bestehe, daß in dem gegenwartigen Fall der Wiederstand viel kleiner sey, als in dem vorigen. Man hat auch Ursache zu vermuten, daß der Wiederstand einer Kugel in diesem Fall nur halb so gros sey, als eines gleich dicken Cylinders. Man ist aber im Stande, die meisten über den Wiederstand sowohl der Luft, als des Wassers, angestellten Experimente zu erklaren, wenn man annimmt, daß der Wiederstand eines Cylinders, so sich seiner Lange nach beweget, gleich sey dem Gewicht eines gleich dicken und aus der flüßigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Höhe gleich ist derjenigen, wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird.

VIERTE ANMERKUNG

Dieses muß aber nur von demjenigen Theil des Wiederstandes verstanden werden, welcher aus dem würklichen Anstoß des Körpers an die Theilchen der flüßigen Materie entspringt, und von welchem bisher allein die Rede gewesen. Es kann aber, wie schon bemerket worden, dieser Wiederstand noch durch einen besondern Zufall vermehret werden, wenn nehmlich der Körper von vorne starker von der flüßigen Materie gedrückt wird, als von hinten So lange aber der Druck rings um den Körper herum gleich groß ist, wie bey allen nicht allzuschnellen Bewegungen geschieht, so leidet der Körper keinen andern Wiederstand, als welcher von dem würklichen Stoß des Körpers gegen die Theilchen der flüßigen Materie entstehet, und vorher bestimmt worden ist. Wenn sich aber der Körper zum Exempel in der Luft so geschwind bewegt, daß dieselbe nicht vermögend ist zu folgen, und die von dem Körper verlassenen Platze gleich wieder einzunehmen, so wird der Körper von hinten gantz und gar nicht gedrückt, und folglich der Druck von vorne dadurch nicht aufgehoben; dahero denn der vorige Wiederstand noch mit dem Druck von vorne vermehret werden muß.

Es kommt also hier darauf an, wie geschwind die Luft einem Körper nachfolgen könne, oder mit was für einem Grad der Geschwindigkeit die Luft in einen Luft-leeren Raum hineindringe. Diese Geschwindigkeit beruht auf der Elasticitat der Luft, welche wir oben durch das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= 29100$ Rheinlandische Schuh, ausgedrückt haben; folglich dringt die Luft in einen Luft-leeren Raum mit einer Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper aus der Höhe von 29100 Schuhen erlangt, und also in einer Secunde 1348 Schuh betragt. Wenn sich dahero ein Cylinder seiner Lange nach mit einer Geschwindigkeit von 1348 Schuhen in einer Secunde bewegt, so kann demselben die Luft just nachfolgen, daß kein Raum hinter demselben ledig gelassen wird. In diesem Fall übet aber die Luft von hinten auf den Cylinder gar keinen Druck aus. Da nun derselbe von vorne erstlich den Wiederstand, welcher dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule, deren Höhe $=29100$, als wodurch die Geschwindigkeit desselben ausgedrückt wird, gleich ist, und noch ausser dem den Gegendruck der Atmosphare, welcher eben so groß ist, zu überwinden hat, so ist die sämtliche Resistenz zweymahl so groß, als der Wiederstand allein, welcher aus dem Anstoß dieses Körpers an die Lufttheilchen entstehet. Solte sich aber der Cylinder mit einer noch grossern Geschwindigkeit bewegen, so würde derselbe von hinten nicht nur gleichfals keinen Druck empfinden, sondern es würde so gar immer hinter demselben ein Luft-leerer Raum bleiben. Wenn man also die obige Höhe von 29100 Schuhen, wodurch die Geschwindigkeit der nachfolgenden . Luft ausgedrückt wird, durch h, und die Höhe der würklichen Geschwindigkeit des Cylinders durch v andeutet, dergestalt daß v grosser ist als h, so ist der Wiederstand dem Gewicht einer Luft-Sau le gleich, deren Höhe $=v$, wie vorher angezeiget worden; der Gegendruck aber ist einer Luft Säule gleich, deren Höhe $=h$. Da nun dieser Cylinder von hinten gar keinen Druck empfindet, so ist der vollige Wiederstand gleich einer Luft-Säule, deren Höhe $=h+v$; dahingegen, wenn dieser Körper von vorne und von hinten gleich starck gedrückt würde, der Wiederstand nur durch die Höhe v ausgedrückt werden würde. Dahero in diesem Fall, wie der Autor angemerket, die Resistenz weit grosser ist, als nach den gemeinen Regeln gefunden wird.

Wenn aber die Geschwindigkeit des Cylinders kleiner ist, als die Geshwindigkeit, mit welcher die Luft nachzufolgen vermögend ist, das ist, wenn v kleiner als h, so wird derselbe von hinten noch einen Druck empfinden, welcher um so viel grosser seyn wird, je kleiner die Höhe v ist, als h. Um diesen Druck zu finden, so kann man die Geschwindigkeit betrachten, mit welcher die nachfolgende Luft den Körper einhohlet, und welche gleich ist dem Unterscheid zwischen der Geschwindigkeit der Luft $\sqrt{h}$, und des Körpers $\sqrt{v}$. Es ist also eben so viel, als wenn die Luft von hinten auf den Corper mit einer Geschwindigkeit

$$\sqrt{h}-\sqrt{v}$$

stiesse: und da die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeuget wird, ist $=h-2\sqrt{hv}+v$, so scheinet auch der Druck von hinten dem Gewicht einer Luft-Säule gleich zu seyn, deren Höhe

$$=h-2\sqrt{hv}+v.$$

Von vorne wird aber dieser Körper, wie vorher zurück getrieben, mit einer Kraft, welche dem Gewicht einer Luft-Sttule, deren Höhe $=h+v$, gleich ist. Wenn wir also hiervon die forttreibende Kraft, welche der Körper von hinten empfindet, abziehen, so bleibt für den Wiederstand das Gewicht einer LuftSäule übrig, deren Höhe $=2\sqrt{hv}$. Wenn also dieser Schluß richtig wäre, so würde der Wiederstand nicht, wie wir vorher gefunden haben, den Quadraten der Geschwindigkeit des Körpers, sondern nur der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ selbst proportional seyn; so lange nehmlich der Körper mit einer geringeren Geschwindigkeit fortgehet, als die Luft zu folgen vermögend ist. Der Gründ dieses Schlusses aber beruhet darauf, daß die Starke des Drucks immer dem Quadrat der Geschwindigkeit, womit die Theilchen der Luft auf den Körper stossen, proportional sey, wenn man annimmt, daß sich die Theilchen würklich mit der Geschwindigkeit bewegen, welche sie erlangen würden, wenn sie in einen leeren Raum hineindringen. Denn da der Druck der Luft auf einen Körper eben so stark ist, als wenn dieselbe mit einer so grossen Geschwindigkeit, als aus dem Druck entstehen kann, auf den Körper stiesse, so scheinet das obige Raisonnement nicht ungegründet zu seyn.

Zum wenigsten, da dieNatur der flüßigen Materien noch nicht so vollkommen bekannt ist, daß man darinne ohne Versuche bloß allein aus der Theorie alle Umstande bestimmen könnte, so wird es nicht undienlich seyn, diesen Begriff von der Würkung der Luft und anderer flüßigen Materien auf harte Körper weiter auszufuhren, ungeachtet derselbe, wie bald gezeigt werden soll, mit der Erfahrung unmöglich bestehen kann. Auf diese Art wird aber auch der Druck von vome auf einen Cylinder, welcher sich seiner Lange nach mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{v}$ in der Luft bewegt, anders heraus kommen, als vorher. Denn wenn wir setzen, daß sich die Luft statt des Drucks mit einer Geschwindigkeit, so dem Druck gemäß ist, nehmlich mit $\sqrt{h}$ gegen den Cylinder bewege, so ist die relative Geschwindigkeit, womit der Cylinder von vorne auf die Theilchen der Luft stößt,

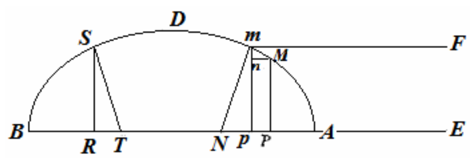
$$=\sqrt{h}+\sqrt{v},$$

und die Höhe, woraus diese Geschwindigkeit erzeuget wird, $=h+2\sqrt{hv}+v$. Also wird der Druck von vorne dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$=h+2\sqrt{hv}+v.$$

Wenn nun die Geschwindigkeit des Cylinders grosser ist, als die Geschwindigkeit der nachfolgenden Luft, das ist, wenn $v>h$, so leidet der Körper von hinten gar keinen Druck, und folglich wird der Wiederstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $=h+2\sqrt{hv}+v$. Wenn aber die Geschwindigkeit des Cylinders $\sqrt{v}$ kleiner ist, als $\sqrt{h}$, so ist der Druck von hinten, wie wir gesehen, $=h-2\sqrt{hv}+v$, welcher von dem vorigen Druck abgezogen den Wiederstand giebt$=4\sqrt{hv}$, also daß in diesem Fall der Wiederstand der Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{v}$ selbst proportional seyn würde. Man siehet auch hieraus, daß der Wiederstand um so viel grosser seyn müsse, je starker die flüßigen Materie zusammen gedrückt ist. Dahero wenn der Wiederstand des Wassers solchergestalt beschaffen wäre, so würde der Wiederstand eben desselben Cylinders, wenn derselbe mit einerley Geschwindigkeit in verschiedenen Tiefen unter dem Wasser bewegt würde, um so viel grosser seyn, je tiefer der Cylinder unter das Wasser getauchet würde. Der Wiederstand würde nehmlich nach den Quadrat-Wurzeln der Tiefe unter dem Wasser zunehmen, dergestalt, daß in einer viermahl grossern Tiefe der Wiederstand zweymahl so groß seyn müßte. Also würde ein Fisch, welcher 40 Schuh tief unter dem Wasser schwimmet, eine zweymahl grossere Resistenz antreffen, als wenn sich eben derselbe nur 10 Schuh tief mit eben derselben Geschwindigkeit unter dem Wasser bewegte; wofern nur seine Geschwindigkeit kleiner wäre, als diejenige, welche ein fallender Körper aus der Höche von 10 Schuhen erlangt. Es wäre dahero zu wunschen, daß man sich die Mühe GÄBE, dergleichen Experimente über den Wiederstand der Körper in verschiedenen Tiefen unter dem Wasser anzustellen.

Diese Art des Wiederstandes verändert sich auch nach ganz andern Gesetzen, wenn die Figur des Korpers nicht cylindrisch ist; und hierbey kommt es nicht allein auf den Vordertheil des Körpers, welcher eigentlich nur auf die Theilchen der flüßigen Materie stößt, an, sondern die Figur des Hintertheils muß dabey auch insonderheit in Betrachtung gezogen werden. Wir wollen also, um die Beschaffenheit dieses Wiederstands genauer zu



untersuchen, einen runden Körper betrachten, welcher durch die Herumdrehung der krummen Linie *AMSB* um die Axe *AB* entstehet, und welcher sich nach der Direction der Axe *AB*, in der Luft, oder einer andern zusammen gedrückten flüßigen Materie, bewegen soll. Es sey also $\sqrt{b}$ die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Körper anjetzo nach der Direction *AE* fortgehet, und $\sqrt{h}$ sey die Geschwindigkeit, mit welcher die flüßige Materie in einen leeren Raum hineindringen würde, und welche wir nach diesem Begriff von dem Wiederstande an statt des würklichen Drucks betrachten. Weil nun dieser Druck auf den Körper allenthalben perpendicular ist, so ziehe man auf das Element *Mm* die Perpendicular-Linie *mN*, so wird dasselbe nach dieser Direction eben so gedrückt werden, als wenn die Luft auf, dasselbe gerade mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{h}$ stiesse. Da aber ferner der Körper nach der Direction *mF* mit der Geschwindigkeit $=\sqrt{b}$ fortzugehen gesetzt wird, und der Druck davon gleichfals auf *Mm* perpendicular ist, so muß dieselbe Geschwindigkeit nach dieser Perpendicular-Direction aufgelöset werden, da denn für dieselbe heraus kommt

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b};$$

wenn man nehmlich aus *M* und *m* auf die Axe *AB* die Perpendicular-Linien *MP*, *mp* und *Mn* der Axe parallel zieht. Es sey nun $AP = x, PM = y$, so wird

$$Pp = Mn = dx,\ mn = dy \text{ und } Mm = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)}.$$

Man setze $dy = pdx$, so wird $Mm = dx\sqrt{\left(1+pp\right)}$ und

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b} = \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{\left(1+pp\right)}}.$$

Dahero leidet das Element *Mm* theils von dem Druck, theils von dem Stoß eben die Kraft, als wenn die Luft nach der Direction *mN* mit einer Geschwindigkeit

$$=\sqrt{h}+\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

auf dasselbe stiesse: und folglich, als wenn auf dasselbe eine Luft-Säule, deren Höhe

$$=h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

drückte. Weil aber die Direction dieser Kraft nach *mN* gehet, so muß daraus derjenige Theil genommen werden, welcher mit der Bewegung des Körpers einerley Direction hat, und dieser wird

$$=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Da nun der ganze Ring, welcher aus dem Element $Mm=dx\sqrt{(1+pp)}$ durch die Herumdrehung um die Axe *AB* entstehet, eben diese Gewalt leidet, die Oberfläiche dieses Rings aber ist

$$=2\pi ydx\sqrt{(1+pp)},$$

wenn man $1:\pi$ für die Verhaltniß des Diameters zur Peripherie annimmt, so wird die aus dem Ring entstehende Kraft, wodurch die Bewegung des Körpers vermindert wird, seyn

$$=2\pi ypdx\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Und hiervon das Integrale genommen, wird die Grosse des Wiederstands, welcher aus dem Stück *AM* um die Axe gedreht, entspringet, anzeigen. Um also den ganzen Wiederstand zu finden, so muß man dasselbe Integrale auf den ganzen Körper ausdehnen, wofern nehmlich die Luft auf den ganzen Körper würket, welches geschieht, wenn die Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{b}$ kleiner ist, als $\sqrt{h}$. Es ist aber hierbey zu merken, daß der Werth des gedachten Integralis, von *A* an weiter zu gehen, so lange zunehme, als die Applicatae *y* wachsen, welches bis in *D* geschiehet. Wenn man aber von *D* weiter gegen *B* fortgehet, weil alsdenn der Buchstabe $p=\frac{dy}{dx}$ negativ wird, so wird die vorige Kraft des Wiederstands dadurch vermindert, indem in diesen Gegenden der Körper von dem Druck der Luft vorwarts gestossen wird. In diesem Fall bekommt also auch in der Expression

$$h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

das andere Glied

$$\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

das Zeichen $-$. Wenn dahero $b<h$, so bekommt man den ganzen Wiederstand, wenn man das obige Integrale

$$2\pi\int ypdx\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{bpp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$$

auf die ganze krumme Linie *ADB* ausdehnet.

Wenn aber die Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{b}$ grosser ist, als $\sqrt{h}$, und folglich die Luft von hinten nicht ganzlich nachfolgen kann, so findet sich von hinten ein Theil *BS*, auf welchen die Luft gar nicht drucket. Um diesen Theil zu finden, so darf man nur das Punkt *S* suchen, wo der Druck der Luft ganzlich aufhöret, welches geschiehet, wenn

$$\sqrt{h}+\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}=0;$$

das ist, wenn man in *S* die Perpendicular-Linie *ST* auf die krumme Linie ziehet, weil alsdenn ist

$$\frac{RT}{ST}=\frac{-p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

so muß das Punkt *S* gefunden werden, wo

$$\sqrt{h}=\frac{RT}{ST}\sqrt{b} \text{ oder wo } \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}=\frac{RT}{ST}.$$

Hat man nun dieses Punkt *S* gefunden, so muß das obige Integrale nicht weiter, als bis dahin genommen werden. Hieraus erhellet, daß wenn die krumme Linie bey *B* dergestalt zugespitzt ist, daß bis in *B* der Bruch $\frac{RT}{ST}$ bestandig grosser ist, als $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, alsdenn das Integrale auch durch die ganze krumme Linie genommen werden müsse. Weil nun der

Wiederstand durch den Druck, so von hinten geschieht, vermindert wird, so sieht man leicht, daß je mehr der Körper von hinten zugespitzt ist, der Wiederstand um so viel kleiner werde, wenn nehmlich $\sqrt{b} > \sqrt{h}$. Verschiedene Autores wollen diesen Umstand würklich durch die Erfahrung wahrgenommen haben, und behaupten, daß der Wiederstand eines Schiffs nicht allein auf der Figur des Vordertheils beruhe, sondern daß die Figur des Hintertheils, wenn dasselbe wohl zugespitzt wird, sehr viel zur Verminderung der Resistenz beytrage. Ob nun gleich hierüber keine Experimente mit allem Fleiß angestellet worden, so würde doch diese neue Lehre von dem Wiederstande der flüßigen Materien dadurch nicht wenig bekräftiget werden, wenn dieser Umstand nur einiger massen richtig wäre.

Wir wollen inzwischen nach der obigen Regel den Wiederstand, welchen eine Kugel in der Luft antrift, ausrechnen. Es sey also der Diameter der Kugel $AB = 2a$, so wird

$$yy = 2ax - xx \text{ und } Mm = \frac{ady}{\sqrt{(aa - yy)}}.$$

Weil nun $pdx = dy$, so ist

$$\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a},$$

und die Integral-Formul wird

$$\pi \int ydy \left(h + \frac{2\sqrt{bh(aa - yy)}}{a} + \frac{b(aa - yy)}{aa} \right)$$

wovon das Integrale gefunden wird:

$$\pi hyy - \frac{4\pi(aa - yy)\sqrt{bh(aa - yy)}}{3a} + \frac{4\pi aa\sqrt{bh}}{3} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Wenn nun $b < h$, so muß man dieses Integrale biß auf B ausdehnen, und folglich setzen $y = 0$, wobey zu merken, daß wenn die Abscissa x grosser, als der Radius a genommen wird, die Expression $\sqrt{(aa - yy)}$ das Zeichen $-$ bekomme. Derohalben wenn man das Zeichen des andern Glieds umkehrt, und $y = 0$ setzt, so kommt der Wiederstand

$$= \tfrac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}.$$

Es ist aber πaa die Fläche eines grossen Zirkels dieser Kugel. Wenn man also diese Fläche durch cc andeutet, so wird der Wiederstand

$$=\tfrac{8}{3}cc\sqrt{bh}\,.$$

dahero sich der Wiederstand einer Kugel zum Wiederstand eines gleich dicken Cylinders verhälten wird, wie 2 zu 3. Dieses ist aber nur wahr, wenn $b<h$; wenn aber $b>h$, so muß das Integrale nicht bis zum Punkt *B*, sondem nur bis *S* genommen werden, wo

$$\sqrt{h}=\frac{-p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}=\frac{-\sqrt{(aa-yy)}}{a}.$$

Da aber dieses Punkt *S* hinter *D* fallt, so wird $\sqrt{(aa-yy)}$ negativ, und das Integrale wird also ausgedrlickt:

$$\pi hyy+\frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a}+\frac{4\pi aa\sqrt{bh}}{3}+\pi byy-\frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Alhier setze man also

$$\sqrt{(aa-yy)}=\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{b}}\ \text{ und }\ aa-yy=\frac{aah}{b},$$

folglich

$$yy=\frac{aa(b-h)}{b}\ \text{ und }\ y^4=\frac{a^4(b-h)^2}{bb},$$

so kommt der verlangte Wiederstand heraus

$$=\pi aa\left(\tfrac{1}{2}b+\tfrac{4}{3}\sqrt{bh}+h-\frac{hh}{6b}\right)$$

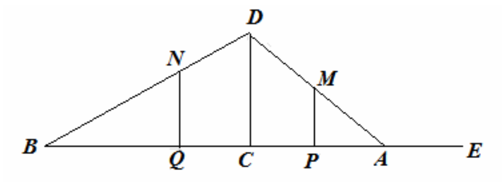
oder

$$=\tfrac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}+\frac{\pi aa}{6b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{h}\right)^3\left(3\sqrt{b}+\sqrt{h}\right)$$

Woraus erhellet, daß, wenn $\sqrt{b}=\sqrt{h}$, der Wiederstand wie in dem vorigen Fall gefunden werde

$$=\tfrac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}\,.$$

Es sey, um noch ein Exempel anzuführen, der runde Körper, welcher sich nach der Direction seiner Axe *BAE* mit der Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ in der Luft beweget, aus zween Kegeln zusammen gesetzt, dergleichen Figur



entsteht, wenn das Triangulum *ADB* um die Axe *Aß* herum gedrehet wird. Man nenne die Höhe $DC = a,$ die Seiten $AD = m$ und $BD = n$, so wird für den Vordertheil *ACD* seyn

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{a}{m},$$

und der Wiederstand des Vordertheils

$$2\pi\int ydy\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right) = \pi aa\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Der Druck der Luft aber auf den Hintertheil, wenn $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, wird den Körper vorwarts stossen mit einer Kraft

$$= \pi aa\left(h - \frac{2a\sqrt{bh}}{n} + \frac{aab}{nn}\right).$$

Diese Kraft von der vorigen abgezogen, laßt den würklichen Wiederstand dieses Körpers über, welcher seyn wird

$$= \pi a^2\left(\frac{2a(m+n)\sqrt{bh}}{mn} + \frac{aab(nn-mm)}{mmnn}\right) = \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab(n-m)}{mn}\right).$$

Wenn aber $\sqrt{h} < \frac{a\sqrt{b}}{n}$, so empfindet der Hintertheil gar keinen Druck, und ist also der Wiederstand

$$= \pi aa\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Wenn $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$ so ist die Resistenz um so viel kleiner, je langer das Hintertheil ist, und wenn dasselbe unendlich lang wird, so wird die Resistenz

$$= \pi aa\left(\frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Wenn aber eben dieser Körper umgekehrt würde, und sich mit dem Theil *DBC* in der Luft mit eben der Geschwindigkeit bewegte, so würde der Wiederstand desselben seyn

$$= \frac{\pi a^3\left(m+n\right)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab\left(m-n\right)}{mn}\right),$$

wenn nehmlich $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$. Woraus erhellet, daß wenn die beyden Kegel ungleich spitzig, der Wiederstand des Körpers am kleinsten seyn werde, wenn der spitzigere Theil voraus geht.

Es könten aus diesem Begrif von dem Wiederstand der flüßigen Materien noch viele andere schone Folgen hergeleitet werden, welche wir aher billig übergehen, da es noch sehr ungewiß ist, ob derselbe mit der Erfahrung auch nur einiger massen überein kommt oder nicht. lnzwischen wird auch hierdurch der Satz des Verfassers bestatiget, daß wenn sich eine Kugel mit einer grössern Geschwindigkeit, als die Luft zu folgen vermögend ist, beweget, der Wiederstand weit grosser werde, als man sonsten glaubt. Denn, wenn $\sqrt{b} > \sqrt{h}$, so muß zu dem Wiederstand $\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}$, welcher herauskommt, wenn $\sqrt{b}$ nicht grosser ist als $\sqrt{h}$, noch diese Quantitat $\frac{\pi aa}{6b}\left(\sqrt{b} - \sqrt{h}\right)^3\left(3\sqrt{b} + \sqrt{h}\right)$ hinzugethan werden. Es mag aber für die Luft diese oder eine andere Erklarung des Wiederstands gelten, so kommt doch dabey noch ein anderer Umstand zu betrachten vor, wodurch der Wiederstand noch mehr vergrossert wird. Dieser beruhet darauf, daß sich die Luft so wohl in einen kleinern Raum einschranken, als in einen grossern ausdehnen laßt. Dadurch geschieht, daß wenn sich ein Körper in der Luft sehr schnell beweget, die Luft vor demselben mehr zusammen gedrückt, und folglich dichter, hinter demselben aber weniger zusammen gedrückt, und folglich dünner wird. Wegen des ersteren Umstands wird also die wiederstehende Kraft von vorne starker, wegen des andern aber die forttreibende Kraft von hinten schwacher; dahero der Wiederstand der Luft auch aus diesem Gründe bey schnellen Bewegungen weit grosser wird, als bey langsamen.