PROP. II.

To determine the resistance of the air to projectiles by experiments.

By means of the machine described in the 8th proposition, I have it in my power to determine the velocity, with which a ball moves in any part of its track, provided I can direct the piece so as to cause the bullet to impinge on the pendulum placed in that part ; and therefore charging a musket-barrel three times successively with a leaden-ball of $\frac{3}{4}$ of an inch diameter, and about half its weight of powder, and taking such precaution in the weighing of the powder, and placing it, that I was assured, by many previous trials, that the velocity of the ball could not differ by 20 feet in 1" from its medium quantity, I fired it against the pendulum placed at 25 feet at 75 feet, and at 125 feet distance from the mouth of the piece respectively; and I found that it impinged against the pendulum in the first case with a velocity of 1670 feet in 1", in the second case with a velocity of 1550 feet in 1", and in the third case with a velocity of 1425 feet in 1"; so that in passing through 50 feet of air, the bullet lost a velocity of about 120 or 125 feet in 1" ; and the time of its passing through that space being about $\frac{1}{32}$ or $\frac{1}{30}$ of 1", the medium quantity of resistance must, in these instances, have been about 120 times the weight of the ball, which, (as the ball was nearly $\frac{1}{12}$ of a pound) amounts to about 10 lb. avoirdupoise.

Now if a computation be made according to the method laid down for compressed fluids in the 38th proposition, lib. 2. of Sir *Isaac Newton's Principia*, supposing the weight of water to be to the weight of air, as 850 to 1, it will be found, that the resistance to a globe of $\frac{3}{4}$ of an inch diameter, moving with a velocity of about 1600 feet in 1", will not, on those principles, amount to any more than a force of $4\frac{1}{6}$ lb. avoirdupoise; whence, as we know, that the rules contained in that proposition are very accurate in flow motions, we may hence conclude, that the resisting power of the air in flow motions is less than in swift motions in the ratio of $4\frac{1}{6}$ to 10, a proportion between that of 1 to 2 and 1 to 1 to 3 Again, I charged the same piece, a number of times, with equal quantities of powder, and balls of the same weight, taking all possible care to give to every shot an equal velocity ; and firing three times against the pendulum, placed 25 feet only distant from the mouth of the piece, the medium of the velocities with which the ball impinged, was nearly that of 1680 feet in 1": then removing the piece 175 feet from the pendulum, I found, taking the medium of five shots, that the velocity, with which the ball impinged at this distance, was that of 1300 feet in 1" ; whence the ball, in passing through 150 feet of air, lost a velocity of about 390 feet in 1"; and the resistance computed from these numbers comes out something more than in the preceding instance, it amounting here to between 11 and 12 pounds, avoirdupoise; whence, according to these experiments, the resisting power of the air to swift motions is greater than in slow ones in a ratio, which approaches nearer to the ratio of 3 to 1, than in the preceding experiments.

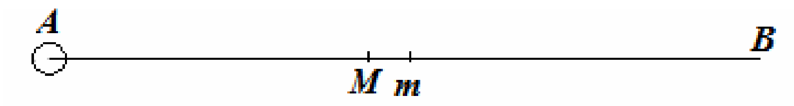
Having thus ascertained the resistance to a velocity of near 1700 feet in 1 ", which must be allowed to be more than sufficient for leaving a *vacuum* behind the ball, I next examined the resistance to smaller velocities ; and for this purpose I charged the same barrel with balls of the same diameter, but with less powder; and placing the pendulum at 25 feet distance from the piece, I fired against it five times with an equal charge each time ; the medium velocity, with which the ball impinged, was that of 1180 feet in 1" ; then removing the pendulum to the distance of 250 feet, the medium velocity of five shots made at this distance was that of 950 feet in 1"; whence the ball, in passing through 225 feet or air, lost a velocity of 230 feet in 1"; and as it passed through that interval in about $\frac{3}{14}$ of 1", the resistance to the middle velocity will come out to be near $33\frac{1}{2}$ times the gravity of the ball, or 2 lb. 10 oz. avoirdupoise. Now the resistance to the same velocity, according to the laws observed in slower motions, amounts to $\frac{7}{11}$ of the same quantity; whence, in a velocity of 1065 feet in I", the resisting power of the air is augmented in no greater a proportion than that of 7 to 11; whereas we have seen in the former experiments, that to still greater degrees of velocity, the augmentation approached very near to the ratio of 1 to 3.

But farther I fired three shot, of the same size and weight with those already mentioned, over a large piece of water; so that their dropping into the water being very discernible, both the distance and time of their flight might be accurately ascertained ; each shot was discharged with a velocity of 400 feet in 1" ; and I had satisfied myself, by many previous trials of the same charge with the pendulum, that 1 could rely on this velocity to 10 feet in 1". The first shot flew 313 yards in $4''\frac{1}{4}$, the second flew 319 yards in 4", and the third 373 yards in $5''\frac{1}{2}$. According to the theory of resistance established for flow motions, the first shot ought to have spent no more than 3",2, in its flight, the second 3",28, and the third 4" ; whence it is evident, that every shot was retarded considerably more than it ought to have been, had that theory taken place in its motion ; consequently, the resisting power of the air is very sensibly increased, even in so small a velocity as that of 400 feet in 1".

From all that we have related then, it appears, that the theory of the resistance of the air, established in slow motion by Sir *Isaac Newton*, and confirmed by many experiments, is altogether erroneous, when applied to the swifter motions of musket or cannon-shot ; for that, in these cases, the resisting power of the medium is augmented to near three times the quantity assigned by that theory; that, however, this increased power of resistance diminishes as the velocity of the resisted body diminishes, till at length, when the motion is sufficiently abated, the actual resistance coincides. with that supposed in the theory ; that therefore the resistance is not in the duplicate proportion of the velocity of the moving body, as is usually asserted, but varies from that proportion according to the different compression of the fluid compared with the velocity; consequently, from the consideration of these particulars, we may venture to assert, that whilst the resistance of the air was thus imperfectly and faultily conceived, the track of musket and cannon-shot through that medium could not be ascertained with the least degree of certainty ; and therefore the art of gunnery could not but continue extremely imperfect : however, it is not sufficient to have shewn the resistance to be augmented in great velocities, beyond what has been usually supposed; but, that we may be enabled more definitely to compute the motion of projectiles, it is necessary that we should assign the rate of this augmentation according to the different velocities of the resisted body. This shall be the subject of our next proposition.

FIRST REMARK

The author provides us here with several very noteworthy experiments, from which the actual resistance of the air for rapidly moving bodies can become known. Because if now one has equally been led to the matter of the speed of the ball, which the author has presented here, some measure of doubt can be drawn, while not all of the necessary circumstance appear themselves to have been seen, and again his reckoning can be used on these according to an incorrect rule: thus we have been obliged still, because the error cannot be as great, to assume the same to be more or less correct, since for want of a full description of these experiments with the pendulum, it is probably not possible to correct the expected mistakes. Now in order to consider before all else, how much the common theory of air resistance employed by the author in these deviates from the truth, thus we will calculate from the same, how much of its speed the ball must lose which begins its



motion with a given speed, while it proceeds along a given path. But equally if this path, which the ball describes, indeed has a curvature, thus yet the same will be very small, and one sees easily, that one can leave the curvature unattended in the current investigation. We will also put in place the figure showing a ball moving along the straight line *AB;* and its weight to the weight of the air shall be in the ratio, as n to 1. If one now assumes, that water to be 850 times more heavy than air, thus the letter n gives for the different materials, how much heavier the ball can be according to the different materials, from which the ball can be composed, from the following values :

Material of ball	Heavier than rain water	The value of the letter n
Gold	19,080	16218
Silver	10,480	8908
Lead	11,350	9647
Copper	8,840	7514
Iron	7,820	6647
Brass	8,412	7150
Ivory	1,826	1552
Marble	2,710	2303

Now let c be the diameter of the ball, thus the ball will weigh just as much as an equally thick cylinder of air, of which the height $=\frac{2}{3}nc$. The speed of the ball at A further shall be $\sqrt{b}$, or b shall be the designated height, from which a body falling has the same speed; and from which the ball has progressed forwards through the distance $AM = x$, thus the speed $\sqrt{v}$ shall be assigned to the same at M. Now if the ball suffers just as great a resistance as an equally thick cylinder, thus the resistance would be equal to an air column, of which the height $=v$; but since the resistance of a ball after the customary theory shall be only half as great, thus the same will be expressed through an equally thick air column of which the height $=\frac{1}{2}v$; consequently the resistance itself will be in proportion to the weight of the ball, as $\frac{1}{2}v$ to $\frac{2}{3}nc$, or as $\frac{3v}{4nc}$ to 1. While thus the ball progresses through the infinitely small space $Mm=dx$, thus one will obtain this equation :

$$dv=\frac{-3vdx}{4nc},$$

or if one integrates, this

$$\frac{3x}{4nc}=l\frac{b}{v},$$

where $l\frac{b}{v}$ signifies the hyperbolic Logarithm of $\frac{b}{v}$. Or there becomes :

$$\frac{3x}{4nc}=2l\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}};$$

but if e were the number put in place, of which the hyperbolic logarithm $=1$, thus one has

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}}=e^{3x:8nc} \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=e^{-3x:8nc}.$$

Now because in the present example, $\frac{3x}{8nc}$ is an equally small fraction, thus there will be approximately :

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=1-\frac{3x}{8nc}+\frac{9xx}{128nncc},$$

consequently,

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{3x}{8nc}-\frac{9xx}{128nncc}.$$

From these formulas in the first place we will calculate thus the author's first example. The ball was made of lead, and thus $n=9647$. Further the diameter of the ball was given by $c=\frac{3}{4}$ inches and the speed of the same at A taken to be 1670 ft. per second, which number we can take here for $\sqrt{b}$, since it arises only from the ratio between $\sqrt{b}$ and $\sqrt{v}$. Further the ball ran through 50 ft. in the first experiment 50, and maintained a speed of 1550 ft. per second. Also there was $x = 50$ ft., and $\frac{x}{c} = 800$, consequently

$$\frac{3x}{8c} = 300 \text{ and } \frac{3x}{8nc} = \frac{300}{9647} = 0,03109.$$

Therefore the term

$$\frac{9xx}{128nncc} = 0,00048.$$

Since now

$$\sqrt{b} = 1670 \text{ and } \sqrt{v} = 1550,$$

thus there becomes

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{120}{1670} = 0,07185,$$

which number should be equal to the original number 0,03061. But since this is twice as great as than that, thus so it follows from that, that the resistance was twice as great than was assumed, which is almost in complete agreement with the author's remark. We have put in place at this point, that the resistance of a ball to be only half as great as of a cylinder of equal thickness; but the author wants that both bodies suffer an equal resistance. Thus, if we had assumed the resistance of this body to be twice as great, in stead of the number 0,03061 we would have found 0,06026, which approaches much closer to the other 0,07185; consequently the ordinary theory would not depart very far from the truth, and the compression of the air before the ball can be assumed sufficient to cause the increase in the resistance. But nevertheless the author's reasoning assumes, that a ball experiences the same resistance as a cylinder of the same thickness, is not in accordance with the truth, and thus we would prefer to assign the increase of the resistance to some other cause than that. But afterwards we will calculate the resistance for slow motions according to this method, in order to see if the resistance of a ball must be assumed from the whole height *v*, or only from half of the same.

The author's second experiment gives the previous ball, which after it had travelled as far as 100 ft., had a speed of 1425 ft. per second. Thus, according to the former rule there was $\sqrt{b} = 1670$, $\sqrt{v} = 1425$, consequently

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{245}{1670} = 0,14670.$$

Further $\frac{3x}{8nc} = 0,06220$, and there must also be $0,14670 = 0,06030$, from which again it is apparent, that the resistance assumed is to be too small. From this by the example the ratio given is almost double the true resistance from which was assumed ; then both give the ratio, that the assumed resistance itself to the true, to be as 1 to 2,40.

The third example has been done just with the last ball, which had an initial speed at *A* of 1690 ft. in 1" , and after it had moved forwards through a space of 150 ft., it still had a speed of 1300 ft. per second. Thus there was $\sqrt{b} = 1690$ and $\sqrt{v} = 1300$, consequently

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{390}{1690} = 0,23077.$$

Further there $\frac{3x}{8nc} = 0,09329$, and thus there must be 0,23077 = 0,08907 ; from which it follows, that the resistance itself assumed to the true resistance, to be in the proportion 1 to 2,59. This experiment thus shows that it does not agree with the former experiments, and since in this case the ball traveled further, so that, from the author's own reasoning, the difference should be smaller; while the more the speed assumed of the ball, also the resistance should agree closer with the theory.

The fourth experiment was made with a similar ball ; but the same has a speed at *A* of only 1180 ft. per second ; from which now the same has traveled as far as 225 ft., thus with the speed assumed still to be 950 ft. in 1". Thus there was

$$\frac{x}{c} = 3600 \text{ and } \frac{3x}{8nc} = 013994.$$

Further, $\sqrt{b} = 1180$ and $\sqrt{v} = 950,$ consequently according to the theory there must be

$$0,13994 = l\frac{1180}{950} = l\frac{118}{95} = 0,21681.$$

Thus in this case also the assumed resistance is too small, and the ratio itself to the true value, to be as 1 to 1,493, which corresponds quite closely with that of the author's ratio as 7 to 11. Since now the difference according thus will be found to be much closer, the smaller the speed of the ball becomes, thus from this it is apparent, that one cannot fail to note, if one for very slow motion for the resistance of the ball only assumes half as much, as of an equally thick cylinder.

The investigation of the following experiment allows another method of reckoning; because in the same both the speed, that the ball has been given at *A* at the start of the motion, as well as the time to be given, within which the same travel through a given path. Thus if as before the speed at $A = \sqrt{b}$, at $M = \sqrt{v}$ and the path $AM = x$ were given, thus we have found this equation :

$$\sqrt{v} = e^{-3x:8nc}\sqrt{b}.$$

Now one puts the time, in which the ball goes as far as *M* from *A*, $= t$, thus there will be

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{3x:8nc}dx}{\sqrt{b}},$$

from which the integral found will be :

$$t=\frac{8nc\left(e^{3x:8nc}-1\right)}{3\sqrt{b}}=\frac{8nc}{3b}\left(e^{3x:8nc}-1\right)\sqrt{b}.$$

Thus to use this formula, one expresses *b* in thousandth parts of Rh.ft., and then divides the time outcome by 250; thus the quotient will be the number of seconds designated to which the time *t* pertains. But we have seen above, that if one divides $\sqrt{b}$ by 4, after one had expressed *b* in thousandths of Rh.ft., the quotient indicates how many feet the ball with the speed $\sqrt{b}$ is able to travel through in a second.
[Because of the height speeds involved, Euler defines the unit of length as $\frac{1}{1000}^{\text{th}}$ Rh.ft., and the unit of time as $\frac{1}{250}^{\text{th}}$ second; thus the speed in these units is $\frac{1}{1000}\times 250=\frac{1}{4}\times$ speed in Rh.ft/sec.]
Thus if the ball with its initial speed at *A* had traveled m Rh. ft. in 1", thus there will be $\frac{\sqrt{b}}{4}=m$ and $b=\frac{16mm}{1000}$ Rh.ft, or $\frac{16mm}{970}$ English ft., and the time found will become

$$t=\frac{8nc}{3b}\left(e^{3x:8nc}-1\right)\frac{m}{62,5}$$

seconds. Thus if the time t were expressed in seconds, thus one has

$$e^{3x:8nc}=1+\frac{1875bt}{80mnc}$$

or

$$\frac{3x}{8nc}=l\left(1+\frac{1875bt}{80mnc}\right).$$

After which if the equation finds a use in an experiment, thus it is a sign that the resistance is assumed correctly; but where this does not happen, thus one will see at once, if the assumed resistance were too large or too small, and also by how much this is the case. If $\frac{3x}{8nc}$ is a very small number, thus the first equation is allowed to become :

$$t=\frac{mx}{65,5b}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{etc.}\right),$$

or $b=\frac{16mm}{970}$ English ft., thus in which case there will be

$$t=\frac{97x}{100m}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{etc.}\right).$$

But if the first speed $\sqrt{b}$ also were given in English ft., and the same such feet m were worked out, thus there becomes :

$$t=\frac{x}{m}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{etc.}\right)$$

In the second case, in which the formula is much the same, only if the magnitudes x, m and c are taken according to the same measure, while it arises only from the same ratio. Further it is to be noted here, that the absolute magnitude of the resistance will be indicated by $\frac{3}{8n}$. Thus if the assumed resistance were found to be too small, thus one must consider only, what greater fraction must be assume for $\frac{3}{8n}$, whereupon the equality would hold, and as then the same indicates the true magnitude of the resistance.

In these final trials of the author now as before $c=\frac{3}{4}$ inches was cited, and $n=9647$. Further the initial speed was 400 ft. per second : therefore if we put in place $m=400$, thus we must also express the remaining magnitudes with the same measure. The first shot going 313 Yards in $4\frac{1}{4}$" ; there is 3 English ft. in a Yard 3, consequently $x=939$ ft and $\frac{x}{m}=2,3475,$ further

$$\frac{x}{c}=15024 \text{ and } \frac{3x}{8nc}=0,58401.$$

If one now puts these values into the above equation, thus there arises $4,25=3,18643$ from which it is apparent, that the assumed resistance is too small. The author now finds for this case from the theory 3,2", which time comes into close agreement with ours. Now in order that a single equality can be maintained, thus one must put in place a resistance nearly as much again. But it appears, that one could not very well depend on this experiment, since in following experiment the ball went around 6 Yards more in a shorter time, namely in 4", from where therefore the increase of the resistance from this must be smaller. Thus we will consider this experiment more carefully. Now here there will be $x=957$ ft., and therefore $\frac{x}{m}=2,3925$, further

$$\frac{x}{c}=15312 \text{ and } \frac{3x}{8nc}=0,59521.$$

From which one obtains $4 = 3,2696$. Therefore if here also an equality should come from this, thus the resistance and therefore the term $\frac{3x}{8nc}$ must be made greater. One puts $\frac{3x}{8nc} = z$, thus there must be :

$$\frac{4}{2,3925} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \text{etc.} = 1,6719$$

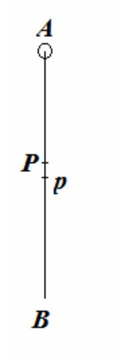
or

$$\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.} = 1,6719$$

One finds from this that $z = 0,9528$ and the ratio itself thus assuming the resistance to be true, to be as 0,59521 to 0,9528 that is as 1 to 1,6008. Which difference still appears much too big, because in the above 4th experiment, since the speed of the ball at the start was almost five times greater than was here, the ratio was found to be there as 1 to 1,493. But here it arises in all the parts of a particular determination, that the smallest differences can cause a marked final difference. Therefore these experiments cannot be used other than only to show mainly, that the true resistance which a fast moving ball endures in air, to be much greater than the theory used here indicates, and that, the greater the speed of the ball becomes, this theory departs further from the truth.

SECOND REMARK

In order that this theory of the resistance of bodies in air can be made complete, thus we want also to investigate the slower motions, such as can be observed in falling bodies. In such cases the magnitude of the resistance lets itself be determined, if one notes the time in which a given body falls down through a given height. Since there one knows in how long a time a body in a vacuum falls through any height by virtue of its weight, thus this time in the air will be greater: and from the difference in place one is in a position to deduce the magnitude of the resistance. But here the air has a double action ; because not only will the weight of the body be reduced so much by the air resistance, but also to be reduced by an equal weight of air.



Let *A* be a ball as in the figure, which falls directly down from the point *A* along the line *AB* ; the diameter of the same shall be $= c$, and its weight shall be in proportion to the weight of air as *n* to 1: consequently the weight of the same will be diminished by $\frac{1}{n}$ part. We wish to put the ball in place, to have fallen down already as far as *P*, the height *AP* to be $= x$, and the speed at *P* to be $= \sqrt{v}$. Now here at *P* the force of the weight diminished by $1 - \frac{1}{n}$, but the force of the resistance impressed will be $\frac{3v}{8nc}$: therefore the law of the acceleration will be contained in the following equation will be :

$$dv = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{3v}{4nc}\right)dx$$

From this one obtains:

$$\frac{3dx}{4nc} = \frac{3dv}{4nc - 4c - 3v},$$

the integral of which is

$$\frac{3x}{4nc} = l\,\frac{4(n-1)c}{4(n-1)c - 3v}.$$

Now if *e* may be taken for the number, of which the hyperbolic Logarithm $=1$, or if $e = 2,718281828459$, thus there becomes

$$e^{3x:4nc} = \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c - 3v}$$

or

$$1 - \frac{3v}{4(n-1)c} = e^{-3x:4nc},$$

and from this one comes upon

$$v = \frac{4(n-1)c}{3}\left(1 - e^{-3x:4nc}\right),$$

and consequently

$$\sqrt{v} = \sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1 - e^{-3x:4nc}\right)}.$$

Further if the time, in which the ball has fallen down from *A* as far as to *P*, be signified by *t*, of the form that *t* shall be expressed in seconds, thus there will be

$$dt = \frac{dx}{250\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1 - e^{-3x:4nc}\right)}},$$

and

$$t = \frac{\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1 - e^{-3x:4nc}\right)}}.$$

Moreover the integration gives

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\,\frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}},$$

or

$$t=\frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}\right)+\frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}.$$

If the fraction $\frac{3x}{4nc}$ is very small, thus one can put for brevity $\frac{4nc}{3}=m$,

and there becomes

$$e^{-\frac{x}{m}}=1-\frac{x}{m}+\frac{x^2}{2m^2}-\frac{x^3}{6m^3}+\frac{x^4}{24m^4}-\text{etc.}$$

consequently

$$l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{-x}{m}}\right)}\right)=l\left(1+\sqrt{\left(\frac{x}{m}-\frac{x^2}{2m^2}+\frac{x^3}{6m^3}-\frac{x^4}{24m^4}+\text{etc.}\right)}\right).$$

But if one now expresses this logarithm by the approximation, and apply it to the above equation, thus there becomes :

$$t=\frac{2n\sqrt{cx}}{125\sqrt{3(n-1)m}}\left(1+\frac{x}{12m}+\frac{xx}{480m^2}-\frac{x^3}{2688m^3}-\text{etc.}\right)$$

or

$$t=\left(1+\frac{x}{12m}+\frac{xx}{480m^2}-\frac{x^3}{2688m^3}-\frac{x^4}{92160m^4}-\text{etc.}\right)\cdot\frac{1}{125}\sqrt{\frac{nx}{n-1}}\ ,$$

where always in the appended term $\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$, the height x must be expressed in thousandth parts of Rh.ft.

Now in order to illustrate this formula through an example, and to see at the same time, how precisely the same agrees with the above experiments, thus we will take to this end one experiment from Newton's *Princ. Phil. Nat.*, where in St. Paul's Cathedral, he had let a glass ball drop through a height of 220 English feet. The ball had a diameter of 5 inches and weighed 483 grains. An equally large ball of water had a weight of 16600 grains ; thus if air was put to be 850 times lighter than water, thus an equally large ball of air must have a weight of $\frac{16600}{850}$ that is 19,53 grains. As $c = 5$ inches, and since this ball in a vacuum would have a weight of 502,53, thus $n = \dfrac{502,53}{19,53} = 25,73$ and $x = 220$ ft. Further there will be $m = 171,5$ inches, and since $x = 2640$ inches, thus there will be

$$\frac{x}{m} = \frac{26400}{1715} = 15,3935.$$

Now since here $\frac{x}{m}$ is not such a small number, that the above approximation could be used, so we must use the first equation found :

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}},$$

where c must be expressed in thousandth parts of Rh. ft. Thus there will be $c =$ 404,166 and therefore

$$\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} = 0,48044.$$

For brevity one puts

$$\frac{x}{m} = 15,3935 = \alpha,$$

so one has

$$t = 0,48044\, l\, \frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-\alpha}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-\alpha}\right)}}$$

seconds. Let there be $e^{-\alpha} = z$, thus there will be $lz = -\alpha le$; now since e = 2,718281828, thus according to the common logarithm $le = 0,43429448$, and therefore

$$lz = -15,3935 \cdot 0,43429448 = -6,6853,$$

consequently

$$z = \frac{1}{4845100}.$$

Now since $z = e^{-\alpha}$ thus is a very small number, thus there becomes

$$\sqrt{(1-z)} = 1 - \frac{1}{9690200}$$

and

$$t = 0,48044\, l 19380400$$

seconds. The common log. of 19380400 is 7,287363, which multiplied with 2,30258509 gives the hyperbolic logarithm : therefore this will be 16,7797, and from here there arises

$$t = 8,0616$$

seconds. But NEWTON had observe this time with the greatest care, and found the same to be 8,2". The ball had the fore taken a little more time, in order to fall vertically from a height of 220 ft., than had been found by the theory, therefore the same had encountered a little greater resistance than would be assumed according to theory. Nevertheless the difference is so small that perhaps a smaller error could easily have crept into the observation, thus the true magnitude of the resistance cannot be determined very well from that. NEWTON had calculated this and still other similar experiments by a different method, while he sought the height according to a given time, through which the body must fall vertically. But he finds always this height to be greater than the same in fact was the case, from which therefore he frugally assumed, that the resistance in fact must be greater, than such was put in place according to the theory. Hereby thus the author's opinion was strengthened much more, that the theory specified the resistance to be too small for the most rapid motion; since also in this experiment the speed was not given smaller at the end of the fall, and came out to be approximately 29 ft. per second, which speed already must experience a somewhat greater resistance.

The calculation of this and of other similar examples, where $e^{-3x:4nc}$ is a very small number, can consequently adopt in an easier form. Since there is without error

$$\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)} = 1-\tfrac{1}{2}e^{-3x:4nc},$$

thus there becomes

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\, \frac{2-\tfrac{1}{2}e^{-3x:4nc}}{\tfrac{1}{2}e^{-3x:4nc}} = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l 4e^{-3x:4nc}$$

or

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l4 + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)}}.$$

Now since $l4 = 1,38629436$, thus there becomes

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{(n-1)}}\left(0,0064030 + 0,0034641\frac{x}{nc}\right)$$

seconds. Moreover in this case one can find the height *x* from the given time *t*, thus there becomes

$$0,0034641\frac{x}{nc}=\frac{t\sqrt{c}}{n\sqrt{(n-1)}}-0,0064030$$

and thus

$$x=288,675t\sqrt{c(n-1)}-1,8484nc,$$

or

$$\frac{x}{nc}=288,675\cdot\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}}-1,8484,$$

where in the part $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}}$ the time *t* must be expressed in seconds, and the diameter *c* in thousandth parts of Rh. ft. Now since in the former example there was calculated $t=8,2''$, $c=404,166$ and $n=25,73$, thus there will be $nc=128,65$ Engl. inches, or 10,72 Engl. ft. From this one finds:

$$\frac{x}{10,72}=20,9086 \text{ or } x=224,14$$

Engl. ft, and therefore this is greater than the height 220 ft., which this ball describes in fact in this time. But the difference is only 4 ft., which the ball can travel through in $\frac{1}{7}''$. Now since so small a part of the time cannot be determined precisely, thus one sees from this, that Mr. Newton's customary theory handles not too fast motions very precisely, but for rapid motions the resistance is assumed to be too small.

THIRD REMARK

Thus here it is apparent to be sufficient, and through other experiments it can again be demonstrated that for all not too rapid motions, that the known theory of air resistance, thus the same as presented by the great NEWTON and previously used by investigators, to be accurately in accord with the truth. In such cases it is arranged thus : in the first place, that the resistance of a body be proportional to the square of the speed of the same ; and that in the second case, the resistance of a cylinder which moves along its length in air is equal to the weight of an equally thick cylinder of air, the height of which is the same as that through which a heavy body thus falling vertically has the same speed as the moving cylinder. In the third place it is also the case, that the resistance of a ball is to be only half as great as of an equally thick cylinder. Now from this one can also be fairly sure to conclude, that for bodies of the different shapes provided, the resistance can calculated as shown in the above manner; although equally it may be very hard to perform such experiments correctly with such bodies, in order to know the equation between the height and the motion.

Now because in this calculation only the front figure of the body has been drawn into the calculation, thus it follows from this, perhaps the hindmost figure of the same body may contribute much to the magnitude of the resistance : therefore if that were the case, the principles cited in the added remarks in the previous proposition would seem to be losing much of their strength. The method that has led us to conclude that the resistance is proportional to the speed has to be abandoned : as the resistance cannot be proportional to the speed of the body itself and also to its square. Because in effect it may be possible that in the whole motion there may be a degree of motion in which each of the two proportions gives the same resistance, it is certain always that for all the other degrees, it will result in different degrees: that is to say, for a much greater speed, a much greater resistance will result from the hypothesis of the square of the speeds ; and conversely for a body that moves much slower, the ratio of the simple speeds will give a much greater resistance than from the square of the speeds. According to this view one can form the opinion thus, that often both these different resistances need to be put in place, and thus both theories found can be in accordance with the truth. Nevertheless the last opinion appears to give rise to a new force, that in the slow motion will provide a greater resistance than the ordinary theory indicates: in any case one will attribute this common circumstance to a property of flowing matter.

[Recall that Newton in Book II of the *Principia* had considered the possibility of the resistance depending partially on the speed of the ball through the air, as well as on the square of the speed ; thus accommodating the case where the collision processes need not be completely either inelastic or elastic, but a mixture of both.]

But so that one can judge from that much more thoroughly, thus we will calculate another example according to this theory. Therefore let c be the diameter of the ball, and $\sqrt{b}$ its speed, moreover $\sqrt{h}$ will be the speed, with which the air is able to get through into an empty space behind the ball ; thus the resistance of a cylinder of the same thickness [as the ball] is equal to the weight of an air cylinder of equal thickness, the height of which $=4\sqrt{bh}$. But if $b<h$, the resistance of the ball is equal to the weight of an air cylinder of which the height namely $=\tfrac{8}{3}\sqrt{bh}$,. But if $b>h$, thus must the height of an equal weight of cylinder be taken

$$=\tfrac{8}{3}\sqrt{bh}+\frac{1}{6b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{h}\right)^{3}\left(3\sqrt{b}+\sqrt{h}\right);$$

but $h=29100$ Rh. ft. always, and this last case occurs, if the speed of the ball works out to be more than 1348 ft. per second. According to the customary theory the resistance of the ball is equal to the weight of an air column, of which the height $=\tfrac{1}{2}b$. Thus in order to see, if the ball must suffer a single resistance according to both these theories, thus one must only put in place $\tfrac{1}{2}b=\tfrac{8}{3}\sqrt{bh}$, and there becomes $\sqrt{b}=\tfrac{16}{3}\sqrt{h}$ *;* or the ball must travel with a speed of 7189 ft. per second ; at a smaller speed thus the speed $\tfrac{8}{3}\sqrt{bh}$ is always greater than $\tfrac{1}{2}b$, and that around $\tfrac{16}{3}\sqrt{h}$. Thus at a speed of 30 ft. per second, the resistance would according to this new idea come out to be 239 greater than according to the customary method. Now since this latter method comes to be in close agreement with the truth, thus it is clear, that the new idea must depart horribly from the truth. If now one wants to say that the speed of the air with which it moves behind into an empty space, is not as great as we have supposed, because of some other hidden circumstances, thus something very incongruous still would always arise. Then if also one were to assume $\sqrt{h}=100$ or still greater, thus not only would the resistance not be found so great at very low speeds, but also one would very high speed motions always fine such a smaller resistance, that following the customary theory, since still after this in such cases the resistance will be found to be much too small. On that account it would be unnecessary to refute this last idea about resistance through more examples, since the incorrectness of the same clearly has been shown. One can draw the conclusion from this, that one must use the utmost caution at any time in these investigations : so that it is not so easy to be fooled into using the same defective method. But meanwhile this serves to be put beyond all doubt the theories for the resistance of a flowing body used for slow movements concerning which thus so much more must be confirmed. Moreover in order that the theory may be improved for very fast speeds, and must be brought to full perfection, such will be done in the following.

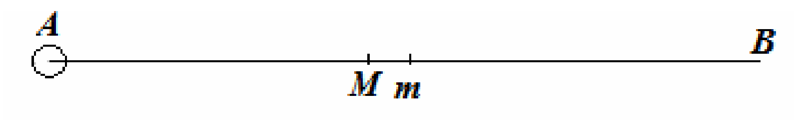
ERSTE ANMERKUNG

Der Verfasser liefert uns hier einige sehr merkwurdige Versuche, wodurch der würkliche Wiederstand der Luft für schnelle Bewegungen erkannt werden kann. Ob man nun gleich wegen der oben angeführten Ursachen die Geschwindigkeit der Kugel, welche der Autor heraus gebracht, einiger maßen in Zweifel ziehen könnte, indem derselbe nicht auf alle nöthige Umstande gesehen zu haben scheint, und noch über dieses seine Rechnung nach einer unrichtigen Regel angestellet: so sind wir doch genöthiget, dieselben, weil der Fehler nicht sonderlich groß seyn kann, um so vielmehr als richtig anzunehmen, da aus Ermangelung einer vollstandigen Beschreibung dieser Versuche mit dem Pendulo nicht möglich ist, den etwa im rechnen begangenen Fehler zu verbessern. Um nun vor allen Dingen zu sehen, wie viel die gemeine Lehre von dem Wiederstand der Luft in diesen von dem Verfasser angestellten Versuchen von der Wahrheit abweiche, so wollen wir nach derselben berechnen, wie viel die Kugel, welche mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich zu bewegen anfangt, indem dieselbe durch einen gegebenen W eg fortgehet, von ihrer Geschwindigkeit verlieren müsse. Ob aber gleich dieser W eg, welchen die Kugel beschrieben, in der That eine Krummung gehabt, so war doch dieselbe sehr geringe, und man siehet leicht, daß man dieselbe beyder gegenwartigen Untersuchung ganzlich aus der Acht laßen könne. Wir wollen also setzen, es bewege sich eine Kugel in der Luft nach der geraden Linie *AB;* und die Schwehre derselben verhälte sich zu der Schwehre der Luft, wie n zu 1. Wenn man nun annimmt, daß das Wasser 850 mahl schwehrer sey, als die Luft, so bekommt der Buchstabe n nach den verschiedenen Materien, woraus die Kugel bestehen kann, nachfolgende Werthe:

Materie der Kugel	Schwehrer als Regen-Wasser	Der Werth des Buchstabens n

Gold fein	19,080	16218
Silber fein	10,480	8908
Bley	11,350	9647
Kupfer	8,840	7514
Eisen	7,820	6647
Meßing	8,412	7150
Helfenbein	1,826	1552
Marmel	2,710	2303

Es sey nun c der Diameter der Kugel, so wird die Kugel so viel wägen, als ein gleich dicker Cylinder Luft, dessen Höhe $=\frac{2}{3}nc$. Die Geschwindigkeit der Kugel in A sey ferner $\sqrt{b}$, oder b soll die Höhe bedeuten, aus welcher ein fallender Körper mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält; und nachdem die Kugel durch den *Weg* $AM = x$



fortgelaufen, so soll $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit derselben in M anzeigen. Wenn nun die Kugel einen eben so grössen Wiederstand litte, als ein gleich dicker Cylinder, so würde der Wiederstand dem Gewicht einer Luft-Saule gleich seyn, deren Höhe $=v$ *;* da aber der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß seyn soll nach der gewohnlichen Lehre, so wird derselbe durch das Gewicht einer gleich dicken Luft-Saule ausgedrückt werden, deren Höhe $=\frac{1}{2}v$ *;* folglich wird sich der Wiederstand zur Schwehre der Kugel verhälten, wie $\frac{1}{2}v$ zu $\frac{2}{3}nc$, oder wie $\frac{3v}{4nc}$ zu 1. Indem also die Kugel durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortrücket, so wird man diese Aequation bekommen:

$$dv = \frac{-3vdx}{4nc},$$

oder wenn man integrirt, diese

$$\frac{3x}{4nc} = l\frac{b}{v},$$

wo $l\frac{b}{v}$ den hyperbolischen Logarithmum von $\frac{b}{v}$ andeutet. Oder es ist

$$\frac{3x}{4nc} = 2l\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}};$$

wenn aber e für die Zahl gesetzt wird, deren hyperbolischen Logarithmus $=1$, so hat man

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}}=e^{3x:8nc} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=e^{-3x:8nc}.$$

Weil nun in den gegenwartigen Exempeln $\frac{3x}{8nc}$ ein ziemlich kleiner Bruch ist, so wird beynahe sein:

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=1-\frac{3x}{8nc}+\frac{9xx}{128nncc},$$

folglich

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{3x}{8nc}-\frac{9xx}{128nncc}.$$

Aus diesen Formuln wollen wir also erstlich die ersten Exempel des Autoris berechnen. Die Kugel war von Bley, und also $n=9647$. Ferner war der Diameter der Kugel $c=\frac{3}{4}$ Zoll und die Geschwindigkeit derselben in *A* betrug 1670 Schuh in einer Secunde, welche Zahl wir hier für $\sqrt{b}$ annehmen können, da es nur auf die Verhältniß zwischen $\sqrt{b}$ und $\sqrt{v}$ ankommt. Ferner lief die Kugel in dem ersten Versuche durch 50 Schuh, und behielt eine Geschwindigkeit von 1550 Schuhen in einer Secunde. Also war $x=50$ Schuh, und $\frac{x}{c}=800$, folglich

$$\frac{3x}{8c}=300 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc}=\frac{300}{9647}=0,03109.$$

Dahero der Terminus

$$\frac{9xx}{128nncc}=0,00048.$$

Da nun

$$\sqrt{b}=1670 \quad \text{und} \quad \sqrt{v}=1550,$$

so wird

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{120}{1670}=0,07185,$$

welche Zahl gleich seyn solte der vorigen 0,03061. Da aber jene mehr als zweymal grösser ist, als diese, so folget daraus, daß der Wiederstand mehr als zweymahl grösser gewesen, als angenommen worden, welches fast mit des Autoris Anmerkung ganzlich übereinkommt. Wir haben hierbey gesetzt, daß der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders; der Autor aber will, daß beyde Körper einen gleichen Wiederstand leiden. Wenn wir also den Wiederstand dieser Körper zweymahl so groß angenommen hätten, so würden wir an statt der Zahl 0,03061 diese 0,06026 gefunden haben, welche der andern 0,07185 weit naher kommt; folglich würde die gemeine Lehre nicht mehr so viel von der Wahrheit abgehen, und die Verdickerung der Luft vor der Kugel könnte hinreichend scheinen, diese Vermehrung des Wiederstands zu verursachen. Inzwischen scheinet aber doch die Meynung des Autoris, daß eine Kugel mit einmn gleich dicken Cylinder einerley Wiederstand leide, der Wahrheit nicht gemäß zu seyn, und wir wollen dahero lieber mit dem Autore diese Vermehrung des Wiederstands einer andern Ursache zuschreiben, als dieser. Wir werden aber hernach auch langsame Bewegungen nach dieser Methode berechnen, um zu sehen, ob der Wiederstand einer Kugel aus der gantzen Höhe *v*, oder nur aus der Helfte derselben, bestimmet werden müsse.

Das zweyte Experiment des Autoris geht auf die vorige Kugel, welche, nachdem dieselbe 100 Schuh weit gelaufen, eine Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde behälten. Es war also nach der obigen Regel $\sqrt{b}=1670,\ \sqrt{v}=1425,$ folglich

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{245}{1670}=0{,}14670.$$

Ferner war $\frac{3x}{8nc}=0,06220$, und mußte also seyn $0{,}14670=0,06030$, woraus wiederum erhellet, daß der Wiederstand allzuklein angenommen worden. Aus diesen beyden Exempeln kommt fast einerley Verhältniß zwischen dem wahren Wiederstand, und dem angenommenen heraus; denn beyde geben, daß sich der angenommene Wiederstand zu dem wahren verhälte, wie 1 zu 2,40.

Das dritte Exempeln ist mit eben der vorigen Kugel gemacht worden, welche anfanglich in *A* eine Geschwindigkeit von 1690 Schuhen in 1" hatte, und nachdem dieselbe durch einen Raum von 150 Schuhen fortgelaufen, noch eine Geschwindigkeit von 1300 Schuhen in einer Secunde behälten. Es war also $\sqrt{b}=1690$ und $\sqrt{v}=1300$ folglich

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{390}{1690}=0,23077.$$

Ferner war $\frac{3x}{8nc}=0,09329$, und mußte also seyn 0,23077 = 0,08907 ; woraus folgt, daß sich der angenommene Wiederstand zu dem wahren verhalten, wie 1 zu 2,59. Dieses Experiment stimmet also mit den vorigen nicht recht überein, und da in diesem die Kugel weiter gelaufen, so hatte, nach des Autoris eigener Meynung, der Unterscheid kleiner seyn sollen, als vorher, indem je mehr die Geschwindigkeit der Kugel abnimmt, auch der Wiederstand mit der Theorie naher übereintressen sollte.

Das vierte Experiment war mit einer gleichen Kugel angestellt; dieselbe hatte aber in *A* nur eine Geschwindigkeit von 1180 Schuhen in einer Secunde; nachdem nun dieselbe 225 Schuh weit gelaufen, so betrug ihre Geschwindigkeit noch 950 Schuh in 1". Also war

$$\frac{x}{c}=3600 \text{ und } \frac{3x}{8nc}=013994.$$

Ferner war $\sqrt{b}=1180$ und $\sqrt{v}=950$, folglich mußte nach der Theorie seyn

$$0{,}13994 = l\frac{1180}{950} = l\frac{118}{95} = 0{,}21681.$$

In diesem Fall ist also auch der angenommene Wiederstand zu klein, und verhält sich zu dem wahren, wie 1 zu 1,493, welches mit des Autoris Verhältniß wie 7 zu 11 ziemlich genau übereintrift. Da nun der Unterscheid um so viel kleiner gefunden wird, je kleiner die Geschwindigkeit der Kugel wird, so erhellet hieraus, daß man nicht fehle, wenn man für sehr langsame Bewegungen den Wiederstand einer Kugel nur halb so gross annimmt, als eines gleich dicken Cylinders.

Die Untersuchung der folgenden Exempel erfordert eine andere Art der Rechnung; denn in denselben wird außer der Geschwindigkeit, so die Kugel im Anfange der Bewegung in A gehabt, die Zeit gegeben, innerhalb welcher dieselbe einen gegebenen Weg durchgelaufen. Wenn also wie vorher die Geschwindigkeit in $A=\sqrt{b}$, in $M=\sqrt{v}$ und der Weg $AM=x$ gesetzt wird, so haben wir diese Aequation gefunden

$$\sqrt{v} = e^{-3x:8nc}\sqrt{b}.$$

Man setze nun die Zeit, in welcher die Kugel von A biß M gekommen, $=t$, so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{3x:8nc}dx}{\sqrt{b}},$$

wovon das Integrale gefunden wird:

$$t = \frac{8nc\left(e^{3x:8nc}-1\right)}{3\sqrt{b}} = \frac{8nc}{3b}\left(e^{3x:8nc}-1\right)\sqrt{b}.$$

Welche Formul also zu gebrauchen ist: man drücke b in tausendsten Theilen eines Rheinlandischen Schuhes aus, und dividire alsdenn die herauskommende Zahl durch 250; so wird der Quotient die Anzahl der Secunden, aus welchen die Zeit t bestehet, anzeigen. Wir haben aber oben gesehen, daß wenn man $\sqrt{b}$, nachdem man b in tausendsten Theilen eines Rheinlandischen Schuhes ausgedrückt hat, durch 4 dividirt, der Quotient anzeige, wie viel Schuh die Kugelmit der Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ in einer Sekunde durchzulaufen vermögend ist. Wenn also die Kugel mit ihrer ersten Geschwindigkeit in A m Rheinlandsche Schuhe in 1" hatte zurück legen können, so wird
$\frac{\sqrt{b}}{4}=m$ und $b=\frac{16mm}{1000}$ Rheinländer, oder $\frac{16mm}{970}$ Englische Schuh, und die gesuchte Zeit wird

$$t=\frac{8nc}{3b}\left(e^{3x:8nc}-1\right)\frac{m}{62,5}$$

Secunden. Wenn also die Zeit t in Secunden ausgedrückt wird, so hat man

$$e^{3x:8nc}=1+\frac{1875bt}{80mnc}$$

oder

$$\frac{3x}{8nc}=l\left(1+\frac{1875bt}{80mnc}\right).$$

Wenn demnach diese Aequation bey einem Experiment statt findet, so ist es ein Zeichen, daß der Wiederstand recht angenommen worden; wo aber nicht, so wird man bald sehen, ob der angenommene Wiederstand zu groß oder zu klein, und dieses auch um wie viel. Wenn $\frac{3x}{8nc}$ eine sehr kleine Zahl ist, so laßt sich die erstere Aequation auf diese bringen:

$$t=\frac{mx}{65,5b}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{etc.}\right),$$

oder $b=\frac{16mm}{970}$ Englishe Schuh, so wird

$$t=\frac{97x}{100m}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{etc.}\right).$$

Oder wenn die erste Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ auch in englischen Schuhen gegeben wird, und dieselbe m solche Schuhe in einer Secunde betragt, so kommt

$$t=\frac{x}{m}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{etc.}\right)$$

Secunden, in welcher Formul es gleich viel ist, wenn nur die Grössen x, m und c nach einerley Maaß-Stab genommen worden, indem es nur auf die Verhältniß derselben ankommt. Ferner ist hier zu merken, daß die absolute GroBe des Wiederstands durch $\frac{3}{8n}$ angedeutet wird. Wenn also der angenommene Wiederstand zu klein gefunden wird, so darf man nur sehen, was für einen grössern Bruch man für $\frac{3}{8n}$ annehmen müsse, damit die Gleichheit erhälten würde, und alsdenn wird derselbe die wahre Größe des Wiederstands anzeigen.

In diesen letztern von dem Verfasser angefuhrten Versuchen war nun wie vorher $c = \frac{3}{4}$ Zoll, und $n = 9647$. Ferner war die anfangliche Geschwindigkeit 400 Schuh in einer Secunde: wenn wir also setzen $m = 400$, so müssen wir auch die übrigen Grössen nach diesem Maaß ausdrücken. Der erstere Schuß gieng 313 Yards in $4\frac{1}{4}$" ; es hält aber ein Yard 3 englische Schuh, folglich wird $x = 939$ Schuh und $\frac{x}{m} = 2,3475$, ferner

$$\frac{x}{c} = 15024 \text{ und } \frac{3x}{8nc} = 0,58401.$$

Wenn man nun diese Werthe in der obigen Vergleichung setzt, so kommt $4,25 = 3,18643$ woraus erhellet, daß die angenommene Resistenz zu klein ist. Der Autor findet für diesen Fall aus eben der Theorie 3,2", welche Zeit mit der unsrigen sehr genau überein kommt. Um nun eine vollige Gleichheit zu erhälten, so müßte man den Wiederstand beynahe noch so groß setzen. Es scheinet aber, daß man sich auf dieses Experiment nicht allzuwohl verlassen könne, da in dem folgenden Experiment die Kugel um 6 Yards weiter in einer kürzern Zeit, nehmlich in 4" gegangen, woraus folglich der Zuwachs des Wiederstands kleiner heraus kommen muß. Wir wollen also dieses Experiment genauer erwegen. Hier wird nun $x = 957$ Schuh, und folglich $\frac{x}{m} = 2,3925$, ferner

$$\frac{x}{c} = 15312 \text{ und } \frac{3x}{8nc} = 0,59521.$$

Woraus man bekommt $4 = 3,2696$. Wenn also auch hier eine Gleichheit heraus kommen soll, so muß der Wiederstand, und folglich der Terminus $\frac{3x}{8nc}$ grösser angenommen werden. Man setze $\frac{3x}{8nc} = z$, so muß seyn

$$\frac{4}{2,3925} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \text{etc.} = 1,6719$$

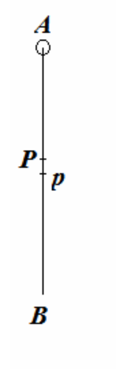
oder

$$\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.} = 1,6719$$

Hieraus findet man $z = 0,9528$ und verhält sich also die angenommene Resistentz zu der wahren, wie 0,59521 zu 0,9528 das ist wie 1 zu, 1,6008. Welcher Unterscheid doch noch viel zu groß scheint, weil oben in dem 4ten Experiment, da die Geschwindigkeit der Kugel im Anfang fast fünfmahl grösser, als hier gewesen, die Verhältniß wie 1 zu 1,493 heraus gebracht worden. Es kommt aber hierinne auf eine solche genaue Bestimmung in allen Stücken an, da die geringste Unrichtigkeit einen sehr merklichen Unterscheid verursachen kann. Dahero können diese Experimente nicht anders gebraucht werden, als nur überhaupt zu zeigen, daß der wahre Wiederstand, welch eine schnell bewegte Kugel in der Luft leidet, viel grösser sey, als die hier gebrauchte Theorie anzeigt, und daß, je grösser die Geschwindigkeit der Kugel ist, diese Theorie um so viel mehr von der Wahrheit abweiche.

ZWEYTE ANMERKUNG

Um diese Abhandlung von dem Wiederstand der Körper in der Luft vollstandig zu machen, so wollen wir auch langsamere Bewegungen untersuchen, dergleichen in fallenden Körpern beobachtet werden. In solchen Fallen läßt sich die Größe des Wiederstands bestimmen, wenn man die Zeit bemerkt, in welcher ein gegebener Körper durch eine gegebene Höhe herunter fallt. Denn da man weiß, in wie langer Zeit ein Körper in einem Luft-leeren Raum durch eine jegliche Höhe kraft seiner Schwehre fallt, so wird diese Zeit in der Luft grösser: und aus dem Unterscheid ist man im Stande, die Große des Wiederstands herzuleiten. Die Luft hat aber hiebey eine doppelte Würkung; denn außer dem Wiederstand wird auch das Gewicht des Körpers um so viel vermindert, als eine mit demselben gleich grösse Müsse Luft wiegt.



Es sey *A* eine Kugel, welche aus dem Punkt *A* nach der senkelrechten Linie *AB* herunter fällt; der Diameter derselben sey $=c$, und ihre Schwehre verhälte sich zu der Schwehre der Luft, vie *n* zu 1: folglich wird das Gewicht derselben um $\frac{1}{n}$ Theil vermindert. Wir wollen setzen, die Kugel sey schon biß in *P* herunter gefallen, die Höhe *AP* sey $=x$, und die Geschwindigkeit in *P* sey $=\sqrt{v}$. Hieraus wird nun in *P* die Kraft der Schwehre durch $1-\frac{1}{n}$, die Kraft des Wiederstands aber durch $\frac{3v}{8nc}$ ausgedrückt werden: dahero die Acceleration in folgender Aequation enthälten seyn wird:

$$dv=\left(1-\frac{1}{n}-\frac{3v}{4nc}\right)dx$$

Hieraus bekomm man:

$$\frac{3dx}{4nc}=\frac{3dv}{4nc-4c-3v},$$

wovon das Integrale ist

$$\frac{3x}{4nc}=l\,\frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}.$$

Wenn nun *e* für die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithmus $=1$, oder wenn $e=2,718281828459$, so wird

$$e^{3x:4nc} = \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}$$

oder

$$1-\frac{3v}{4(n-1)c} = e^{-3x:4nc},$$

und hieraus bekommt man

$$v = \frac{4(n-1)c}{3}\left(1-e^{-3x:4nc}\right),$$

und folglich

$$\sqrt{v} = \sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}.$$

Wenn ferner die Zeit, in welcher die Kugel aus A bis zu P herunter gefallen, durch t angedeutet wird, dergestalt, daß t in Secunden ausgedrückt werden soll, so wird

$$dt = \frac{dx}{250\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}},$$

und

$$t = \frac{\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}.$$

Die Integration aber giebt

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\,\frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}},$$

oder

$$t = \frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}\right)+\frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}.$$

Wenn der Bruch $\frac{3x}{4nc}$ sehr klein ist, so setze man Kurze halber $\frac{4nc}{3} = m,$

und da wird

$$e^{-\frac{x}{m}} = 1 - \frac{x}{m} + \frac{x^2}{2m^2} - \frac{x^3}{6m^3} + \frac{x^4}{24m^4} - \text{etc.}$$

folglich

$$l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{-x}{m}}\right)}\right) = l\left(1+\sqrt{\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{6m^3} - \frac{x^4}{24m^4} + \text{etc.}\right)}\right).$$

Wenn man nun diesen Logarithmum durch die Näherung ausdrücket, und in obiger Aequation anbringt, so kommt

$$t = \frac{2n\sqrt{cx}}{125\sqrt{3(n-1)m}}\left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{xx}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \text{etc.}\right)$$

oder

$$t = \left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{xx}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \frac{x^4}{92160m^4} - \text{etc.}\right) \cdot \frac{1}{125}\sqrt{\frac{nx}{n-1}} ,$$

allwo in dem Glied $\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$ die Höhe x in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhs ausgedrücket werden muß.

Um nun diese Formul durch ein Exempel zu erläutern, und zugleich zu sehen, wie genau dieselbe mit der Erfahrung überein stimmt, so wollen wir zu diesem Ende aus den *Princ. Phil. Nat.* des Hrn. NEWTONS eines nehmen, wo derselbe eine glaserne Kugel in der St. Paul-Kirche durch eine Höhe von 220 Englischen Schuhen hat herunterfallen lassen. Die Kugel hielt in ihrem Diameter 5 Zoll, und wog 483 Gran. Eine gleich grösse Kugel von Wasser würde gewogen haben 16600 Gran; wenn also die Luft 850 mahl leichter gesetzt wird, als Wasser, so mußе eine gleich grösse Kugel von Luft gewogen haben $\frac{16600}{850}$ das ist 19,53 Gran. Also war $c = 5$ Zoll, und da diese kugel in einem Luftleeren Raum würde 502,53 Gran gewogen haben, so wird $n = \frac{502,53}{19,53} = 25,73$ und $x = 220$ Schuh. Ferner wird $m = 171,5$ Zoll, und da $x = 2640$ Zoll, so wird

$$\frac{x}{m} = \frac{26400}{1715} = 15,3935.$$

. Da nun hier $\frac{x}{m}$ keine so kleine Zahl ist, daß die obige Näherung Statt finden könnte, so müssen wir die erst gefundene Aequation gebrauchen:

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\,\frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}\,,$$

wo c in tausendsten Theilen eines Rheinlandischen Schuhes ausgedrückt werden muß. Es wird also $c=$ 404,166 und folglich

$$\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}=0,48044.$$

Man setze Kurze halber

$$\frac{x}{m}=15,3935=\alpha,$$

so hat man

$$t=0,48044\,l\,\frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-\alpha}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-\alpha}\right)}}$$

Secunden. Es sey $e^{-\alpha}=z$, so wird $lz=-a\,le$; da nun e = 2,718281828, so ist nach den gemeinen Logarithmis $le=0,43429448$, und also

$$lz=-15,3935\cdot 0,43429448=-6,6853,$$

folglich

$$z=\frac{1}{4845100}.$$

Da nun $z=e^{-\alpha}$ eine so sehr kleine Zahl ist, so wird

$$\sqrt{(1-z)}=1-\frac{1}{9690200}$$

und

$$t=\ 0,48044\ l19380400$$

Secunden. Der gemeine log. von 19380400 ist 7,287363, welcher mit 2,30258509 multiplicirt den hyperbolischen Logarithmum giebt: dieser wird also seyn 16,7797, und da kommt heraus

$$t=8,0616$$

Secunden. NEWTON hat aber diese Zeit auf das genaueste beobachtet, und dieselbe befunden 8,2''. Die Kugel hat also etwas mehr Zeit gebraucht, um aus der Höbe von 220 Schuhen herunter zu fallen, als durch die Theorie gefunden wird, folglich hat dieselbe einen etwas grösseren Wiederstand angetroffen, als nach der Theorie angenommen worden. Inzwischen ist der Unterscheid so geringe, daß, da in der Observation leicht ein so kleiner Fehler könnte eingeschlichen seyn, die wahre Grösse des Wiederstands daraus nicht wohl bestimmt werden kann. NEWTON hat dieses und noch mehr dergleichen Experimente auf eine andere Art ausgerechnet, indem er aus der gegebenen Zeit die Höhe gesuchet, durch welche der Körper nach der Theorie hatte herunter fallen müssen. Er findet aber diese Höhe immer etwas grösser, als dieselbe in der That gewesen, woraus folglich genugsam erhellet, daß der Wiederstand in der That etwas grösser gewesen seyn müsse, als solcher nach der Theorie gesetzt worden. Hierdurch wird also die Meynung des Verfassers noch um so viel mehr bekräftiget daß bey schnellen Bewegungen die Theorie den Wiederstand zu klein angebe; denn auch in diesen Versuchen war gegen das Ende des Falls die Geschwindigkeit nicht mehr klein, und betrug ungefehr 29 Schuh in einer Secunde, welche Geschwindigkeit schon einen etwas grössern Wiederstand leiden muß.

Die Berechnung dieses und anderer dergleichen Exempel, wo $e^{-3x:4nc}$ eine so sehr kleine Zahl ist, kan folgender gestalt bequemer angestellt werden. Denn da ohne Fehler ist

$$\sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}=1-\tfrac{1}{2}e^{-3x:4nc},$$

so wird

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\,\frac{2-\frac{1}{2}e^{-3x:4nc}}{\frac{1}{2}e^{-3x:4nc}}=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l4e^{-3x:4nc}$$

oder

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l4+\frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)}}.$$

Da nun $l4=1,38629436$, so wird

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{(n-1)}}\left(0,0064030+0,0034641\frac{x}{nc}\right)$$

Secunden. Will man aber in diesen Fallen aus der gegebenen Zeit *t* die Höhe *x* finden, so kommt

$$0,0034641\frac{x}{nc}=\frac{t\sqrt{c}}{n\sqrt{(n-1)}}-0,0064030$$

und also

$$x=288,675t\sqrt{c(n-1)}-1,8484nc,$$

oder

$$\frac{x}{nc} = 288,675 \cdot \frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 1,8484,$$

wo in dem Glied $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}}$ die Zeit t in Secunden, und der Diameter c in tausendsten Theilen eines Rheinl. Schuhes ausgedrückt werden muß. Da nun in dem vorher berechneten Exempel war $t = 8,2''$, $c = 404,166$ und $n = 25,73$, so wird $nc = 128,65$ Engl. Zoll, oder 10,72 Engl. Schuhe. Hieraus bekommt man:

$$\frac{x}{10,72} = 20,9086 \text{ oder } x = 224,14$$

Engl. Schuhe, und ist dahero grösser als die Höhe 220 Schuhe, welche diese Kugel in dieser Zeit in der That beschrieben. Der Unterscheid ist aber nur 4 Schuh, welche die Kugel in $\frac{1}{7}''$ durchlaufen könnte. Da nun ein so geringer Theil der Zeit nicht genau bemerket werden kann, so sieht man hieraus, daß die gewohnliche Theorie des Herrn NEWTONS bey nicht allzu schnellen Bewegungen sehr genau übereintreffe, bey schnellen Bewegungen aber den Wiederstand allzuklein anzeige.

DRITTE ANMERKUNG

Hieraus erhellet also zur Gnüge, und es könnte auch noch durch andere Experimente dargethan werden, daß für nicht allzu schnelle Bewegungen die bekannte Lehre von dem Wiederstand der Luft, so wie dieselbe von dem grössen NEWTON vorgetragen, und bißher von den Gelehrten gebrauchet worden, mit der Wahrheit sehr genau übereinstimme. In solchen Fallen ist also ausgemacht: erstlich, daß der Wiederstand eines Körpers den Quadraten der Geschwindigkeit desselben proportional sey, und daß zweytens der Wiederstand eines Cylinders, welcher sich seiner Lange nach in der Luft beweget, dem Gewicht eines gleich dicken Cylinders Luft gleich sey, dessen Höhe so groß ist, daß ein schwehrer Körper, so aus derselben herunter fallt, mit dem bewegten Cylinder einerley Geschwindigkeit erhält. Drittens ist auch gewiß, daß der Wiederstand einer Kugel nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders. Hieraus kan man nun auch ziemlich sicher schliessen, daß bey Körpern von andem Figuren der Wiederstand so beschaffen seyn werde, wie die oben gelehrte Art, den Wiederstand zu berechnen, anzeigt; ob es gleich sehr schwehr ist, mit solchen Körpern richtige Experimente anzustellen, um derselben Bewegung mit der Hechnung vergleichen zu können. Weil nun in dieser Rechnung bloß allein die vordere Figur des Körpers in Betrachtung gezogen wird, so folgt hieraus, daß die hintere Figur desselben nicht viel zur Grösse des Wiederstands beytrage: dahero die, in den dem vorigen Satz bey gefügten Anmerkungen, angeführten Gründe alle Kraft fast ganzlich zu verlieren scheinen. Insonderheit fallt die letztere daselbst gegebene Art den Wiederstand zu bestimmen, wo derselbe der Geschwindigkeit selbst proportional gefunden worden, ganzlich weg: indem der Wiederstand nicht zugleich den Geschwindigkeiten des Körpers selbst, und auch ihren

Quadraten, proportional seyn kann. Denn ungeachtet es bey einem jeden Körper einen solchen Grad der Geschwindigkeit giebt, für welchen nach beyden Proportionen einerley Wiederstand heraus kommt, so muß derselbe doch bey allen übrigen Graden der Geschwindigkeit verschieden seyn. Wenn sich nehmlich der Körper geschwinder bewegt, so geben die Quadrata der Geschwindigkeit einen grösseren Wiederstand, als die Geschwindigkeiten selber: und umgekehrt, wenn sich der Körper mit einem geringeren Grad der Geschwindigkeit beweget, so geben die Geschwindigkeiten selbst einen grössern Wiederstand, als ihre Quadrata. Aus dieser Betrachtung könnte man also einwenden, daß sich ofters diese beyden Unterscheide ersetzen, und also beyde Theorien der Wahrheit gemäß gefunden werden könnten. Insonderheit scheinet die letztere Meynung noch dadurch eine neue Kraft zu erhalten, daß in sehr langsamen Bewegungen der Wiederstand grösser befunden wird, als die Theorie anzeigt: ungeachtet man gemeiniglich diesen Umstand einer Zahigkeit der flüßigen Materie zuschreiben will.

Damit man aber hiervon desto gründlicher urtheilen könne, so wollen wir nach dieser Theorie einige Exempel berechnen. Es sey also c der Diameter der Kugel, und $\sqrt{b}$ ihre Geschwindigkeit, $\sqrt{h}$ aber die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft in einen leeren Raum hinein zu dringen vermögend ist; so wird der Wiederstand eines gleich dicken Cylinders dem Gewicht eines Cylinders von Luft gleich seyn, dessen Höhe $=4\sqrt{bh}$. Der Wiederstand der Kugel wird aber dem Gewicht eines gleich dicken Cylinders Luft gleich seyn, dessen Höhe $=\frac{8}{3}\sqrt{bh}$, wenn nehmlich $b<h$. Wenn aber $b>h$, so muß die Höhe eines gleich schweren Cylinders genommen werden

$$=\tfrac{8}{3}\sqrt{bh}+\frac{1}{6b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{h}\right)^{3}\left(3\sqrt{b}+\sqrt{h}\right);$$

es ist aber $h=29100$ Rheinl. Schuhe, und dieser letztere Fall findet statt, wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde mehr, als 1348 betragt. Nach der gemeinen Lehre würde der Wiederstand dieser Kugel dem Gewicht einer Luft-Saule gleichen, deren Höhe $=\frac{1}{2}b$. Um also zu sehen, wenn die Kugel nach diesen beyden Theorien einerley Wiederstand leiden mußte, so darf man nur setzen $\frac{1}{2}b=\frac{8}{3}\sqrt{bh}$, und da kommt $\sqrt{b}=\frac{16}{3}\sqrt{h}$; oder die Kugel mußte sich mit einer Geschwindigkeit von 7189 Schuhen in einer Secunde bewegen; bey kleinern Geschwindigkeiten würde also $\frac{8}{3}\sqrt{bh}$ immer grösser seyn, als $\frac{1}{2}b$, und das um $\frac{16}{3}\sqrt{h}$. Bey einer Geschwindigkeit also von 30 Schuhen in einer Secunde, würde der Wiederstand nach diesem neuen Begrif 239 mahl grösser heraus kommen, als nach der gewohnlichen Art. Da nun dieser mit der Wahrheit sehr genau überein kommt, so ist klar, daß der neue Begrif gar entsetzlich von der Wahrheit abwelchen müsse. Wenn man auch sagen wolte, daß die Geschwindigkeit der Luft, womit dieselbe in einen leeren Raum hinnein dringt, wegen anderer uns verborgenen Umstande nicht so groß wäre, als wir hier angenommen, so würde doch immer noch etwas sehr ungereimtes heraus kommen. Denn wenn auch $\sqrt{h}=100$ oder noch weniger angenommen würde, so würde nicht nur bey sehr langsamen Bewegungen der Wiederstand noch weit zu groß gefunden werden, sondern man wurde auch bey sehr geschwinden Bewegungen den Wiederstand immer viel kleiner finden, als nach der ublichen Lehre, da doch nach dieser in solchen Fallen der Wiederstand viel zu klein gefunden wird. Es würde derowegen unnöthig seyn, diesen letztern Begrif von dem Wiederstand durch mehr Exempel zu wiederlegen, da die Unrichtigkeit desselben Sonnen-klar dargethan worden. Man kan hieraus den Schluß ziehen, daß man beydergleichen Untersuchungen jederzeit die ausserste Behutsamkeit gebrauchen muße: da es nicht so leicht die Augen falt, wie in der daselbst gebrauchten Methode gefehlet worden. Inzwischen dienet aber dieses, die gebrauchliche Lehre von dem Wiederstand der flüßigen Körper auf langsame Bewegungen um so viel mehr zu bekräftigen, und ausser allen Zweifel zu setzen. Wie aber dieselbe für sehr schnelle Bewegungen verbessert, und zur Vollkommenheit gebracht werden müsse, solches wird im folgenden dargethan werden.