PROP. III.

To assign the different augmentations of the resisting power of the air according to the different velocities of the resisted body.

As no large shot are ever projected in practice with velocities exceeding that of 1700 feet in 1", I have not as yet made any experiments on the resistance of bodies which have moved with a swifter motion than this, esteeming the determination of the variation of the resistance to all lesser velocities, to be sufficient for the purposes of this treatise.

According to the trials I have made, the resisting power of the air to velocities less than

that of 1700 feet in 1", may be thus nearly exhibited. Let AB be taken to AC in the ratio of the velocity of 1700 feet in 1", to the given velocity to which the resisting power of the air is required ; continue the line AB to D, so that BD may be to AD, as the resisting power of the air to flow motions is to its resisting power to a velocity of 1700 feet in 1", then shall CD be to AD, as the resisting power of the air to flow motions is to its refilling power to the given velocity represented by AC.

FIRST REMARK

Thus after the common theory of air resistance for moderate motions has been firmly established and demonstrated at the same time, that for very fast motions according to the same theory for this gives too small a resistance, thus one must in this case increase the resistance, in order that this theory is established fully in accordance with the truth. We have also observed clearly enough the cause of this increase, which is based on these two causes, that in the first place with the very fast motions, the air is not able to follow the ball, by which as a consequence the resistance will be increased with the pressure of the air acting from the front. Then also in these cases the air in front of the ball is much denser, whereby the backwards pressure as well as the resistance will increase. Now if these two circumstances may be determined precisely from the nature of air, thus one would have in place the theory of the same resistance itself brought to perfection. But since our understanding about this is by no means adequate, thus one must be content that these necessary improvement as far as possible may be derived from experiment, both accurately and correctly. The author had chosen this way, in order to determine the resistance of the air in this proposition of very fast motions: and since his experiments judged no speed to be greater than 1700 ft per second, thus he was himself content to give such a rule, which indicated even thus the resistance for all lesser degrees of speed, such as he had found through the trials.

Now in order to understand thoroughly the basis of this rule, thus we will in the first place in treating motion, consider the slowest motion with which the theory has been shown to be in complete agreement. Thus if a ball moved in air with such a speed, as would be gained by the fall from a height = v, thus the resistance is equal to the weight of an air column, of which the height $=\frac{1}{2}v$: and from this method one always comes to the correct magnitude of the resistance, if the height v is not very great. But if the height v is so great, that from that a speed of 1000 or more ft. per second arises, thus we have seen that the resistance in fact is far greater than $\frac{1}{2}v$; and in that case, if the speed worked out to be 1700 ft. per second, to be expressed by an air column of which the height was about $=\frac{3}{2}v$. Thus we will put in place, in order to make our expression general, that the true resistance of a ball is equal to the weight of an air column of an equal thickness, of which the height $=\theta v$: and thus it is clear, that θ must be such a variable magnitude, that the same, if v is not very large, always to be $\frac{1}{2}$: but if v were much greater, it will assume a greater value, and finally becomes $=\frac{3}{2}$, if the speed of the ball increased to 1700 ft. per second, that is, if v were as great as 46400 English ft. Thus the whole matter arises from this, that one must find such an expression for θ which, if v is not considered to be too great, is always $\frac{1}{2}$, but if $v = 46400$, as then gives $\frac{3}{2}$. Thus this letter θ is the one, which the author calls the resistance force of the air, and for which he determines a certain value for each case. Now in order to bring out his given rule in the value of the letter θ from this, thus f shall be the height, from which the speed of 1700 ft. per second is gained, or there shall be $\sqrt{f} = 1700$, and the speed $\sqrt{v}$, for which the resisting force or the value of θ may be found. Further it is clear the value a for θ, if $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, is of such a form that in the case α must be around $\frac{3}{2}$; but if $\sqrt{v}$ is very small, thus there must be $\theta = \frac{1}{2}$. Now

one calls the line $AB = a$, thus the author makes the first proportion :

$$AB(a) : AC = \sqrt{f} : \sqrt{v},$$

from which ,

$$AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}.$$

The author's second Proportion thus proposes :

$$BD : AD = \tfrac{1}{2} : \alpha,$$

which will change into this:

$$AB : AD = \alpha - \tfrac{1}{2} : \alpha;$$

from which there becomes

$$AD = \frac{2\alpha a}{2\alpha - 1}.$$

Now since $AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}$, thus

$$CD = \frac{2\alpha a\sqrt{f} - (2\alpha - 1)a\sqrt{v}}{(2\alpha - 1)\sqrt{f}}.$$

Finally he says, let there be

$$CD : AD = \tfrac{1}{2} : \theta$$

and consequently

$$\theta = \frac{AD}{2CD}.$$

From which there becomes

$$\theta = \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}} ;$$

and the resistance of a ball, which moves with the speed $\sqrt{v}$ in the air, will be equal to the weight of an air column, the height of which is

$$= \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}} v.$$

This value found for θ now has the required characteristic. For if the speed $\sqrt{v}$ were very small, thus the term $(2\alpha - 1)\sqrt{v}$ vanishes before $2\alpha\sqrt{f}$, and therefore there becomes $\theta = \tfrac{1}{2}$; but if the speed $\sqrt{v}$ amounted to 1700 ft. per second, or is the same as $\sqrt{f}$, thus there arises $\theta = \alpha$, as to be required. For smaller speeds θ arises with smaller values, as in the attached table shows , where we have assumed $\alpha = \tfrac{3}{2}$.

If the speed of the ball amounts to so many English ft. per second:	Thus is the resistive force of the air, or the value of the letter θ :
0	0,5000
100	0,5204
200	0,5425
300	0,5667
400	0,5930
500	0,6219
600	0,6538
700	0,6892
800	0,7286
900	0,7727
1000	0,8226
1100	0,8793
1200	0,9444
1300	1,0200
1400	1,1087
1500	1,2143
1600	1,3421
1700	1,5000

Moreover one sees easily, that one cannot use this value of the letter θ for greater speeds. For if $\sqrt{v} = \frac{2\alpha\sqrt{f}}{2\alpha - 1}$ above [in the denominator], that is, if the speed 2550ft. per second should be delivered, then θ must be indefinitely great, and in this case the resistance shall be infinitely great, which would be entirely inconsistent. Now since equally the author has been well aware of this, and his expressed rule restricted only to smaller grades of speed, as less than 1700 ft. per second, thus one sees still, that since these at greater speeds depart greatly from the truth, also these at a somewhat smaller speed accordingly cannot in truth be known fully. And since one can find with hardly any trouble endless suchlike formulas for θ, which even put in place these two properties, that firstly for small speeds $\theta = \frac{1}{2}$, and for the speed of 1700 ft. per second from this there comes $\theta = \frac{3}{2}$, thus one would come closer to the truth, if one from the same created one such formula, which is not subject to this inconsistency. Thus it appears much more, that one should express the true resistance through such a formula as :

$$\tfrac{1}{2}v + pv^n ,$$

where p is a very small number, and n is greater than 1. Because by this method on can obtain the required conditions, that if v is very small, the term pv^n vanishes in comparison to $\frac{1}{2}v$, and if v is very large, such as 46400 ft., so then the term pv^n thus must be twice as great as the first term $\frac{1}{2}v$. In order that the first condition can be made sufficient, it will be inevitable that the number n be greater than 1. Thus from that this arises only if one should take $\frac{3}{2}$ or 2 for n : in the first case this term pv^n in addition would be proportional to the cube of the speed, but in the other case proportional to the fourth power of the speed. If one wished the first to arise, thus this difficulty is found, that if the body goes backwards, and consequently one takes the speed $\sqrt{v}$ to be negative, the resistance $\frac{1}{2}v - pv\sqrt{v}$ would come from this, since the same even still must be thus $\frac{1}{2}v + pv\sqrt{v}$, as well as in the first case.

This difficulty now has disappeared, if we take the number 2 for n, so that the resistance is expressed in the form

$$\tfrac{1}{2}v + pv^2 .$$

Because here it is much the same, whether the speed itself, $\sqrt{v}$, will be taken positive or negative ; further also from this method the above difficulty does not emerge, that for a finite increase in the speed the resistance will become infinitely large. This form also is present here with no less confirmation, that the resistance for very slow is a little greater than $\frac{1}{2}v$, which is attributed to the cohesion of the air particles. But as the great NEWTON understood, the force of attraction is neither proportional to the speed nor the speed squared, but always stays the same. Thus if this cohesive force were expressed by δ, thus from this according to the ordinary theory the whole resistance comes to be expressed by $\delta + \frac{1}{2}v$, where δ is so small a magnitude, that if v is not greater than the smallest amount, the same in regard to $\frac{1}{2}v$ can be completely left out of the consideration; as if for example δ meant only the thousandth part of a foot, thus the same vanishes, because v will be as large as several inches. Now because this expression $\delta + \frac{1}{2}v$ still does not express the whole resistance, if v is very large, and consequently must be put equal to one term alone, thus the same cannot be supposed of no other form than of this form pv^2. But since we can omit the first term δ for rapid motions, here we have come upon that at the same time, we can equally omit this term, so the resistance must be expressed thus $\frac{1}{2}v + pv^n$. Therefore if we were wise, that for a speed of 1700 ft. per second, or if $v = 46400$ ft, the true resistance would be three times greater than from the ordinary theory, thus from this the letter p would be able to be determined. For since there must be

$$\tfrac{1}{2}\cdot 46400 + p\cdot 46400^2 = \tfrac{3}{2}.46400,$$

consequently

$$p = \tfrac{1}{46400}.$$

But if the resistance is for a speed of 1900 ft., thus it would be 3 times as great, thus one obtained $p = \frac{1}{58200}$, whereby to note, that 58200 ft. gives twice the height h, which above was used to express the elasticity of the air. But because the value for p is still not known, thus for the same we put $\frac{1}{2g}$, of such a kind that the true magnitudes of the resistances shall be

$$\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2g}v^2;$$

and we will determine the true value of g from the experiment itself. If one assumes in the remaining the above fraction $\frac{1}{46400}$ for $\frac{1}{2g}$, thus the same resistance arises for almost all the lesser values of the speed, as from the author's rule. For here if we again indicate the resistive force of the air by θ, thus there will be

$$\theta = \tfrac{1}{2} + \frac{v}{46400},$$

or if the ball made n ft. per second, thus there becomes

$$\theta = \tfrac{1}{2} + \frac{nn}{2890000}.$$

Thus if there is $n = 100$, thus $\theta = 0,5034$, which is smaller than according to the author's rule ; but if $n = 800$, thus there becomes $\theta = 0,7214$ almost as much as by the author ; but if $n > 800$ as far as $n = 1700$, thus greater values of θ are arising than from the author, which seem to be not far from the truth.

SECOND REMARK

Thus we will assume the true resistance, with which a ball itself moves through the air with a speed $\sqrt{v}$, to be equal to an equally thick cylinder of which the height

$$= \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2g}v^2,$$

and we will determine the form the letter g assumes, which calculation agrees with the experiments of the author, as far as possible. Therefore let the diameter of the ball be $= c$, which itself shall be moving along the straight line AB in such a way that its speed at the start of the motion at A shall be $= \sqrt{b}$; from which one shall determine the speed of the same at a certain point M, which shall be $= \sqrt{v}$. One puts the path $AM = x$, and the ball to be made from such a material, which shall be n times as heavy as air, therefore the weight of the ball is equal to the weight of an air cylinder, of which the height $= \tfrac{2}{3}nc$: and the weight of the ball thus will be to the resistance at M in the ratio, as $\tfrac{2}{3}nc$ to $\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2g}v^2$ or

$$\text{as 1 to } \frac{3v}{4nc} + \frac{3v^2}{4ncg}.$$

Thus while the ball progresses through and indefinitely small space $Mm = dx$, thus there shall be :

$$dv = \frac{-3dx}{4nc}\left(v + \frac{vv}{g}\right)$$

or

$$\frac{3dx}{4nc} = \frac{-gdv}{gv+vv} = \frac{-dv}{v} + \frac{dv}{g+v},$$

of which the whole quantity integrated gives

$$\frac{3x}{4nc} = l\,\frac{b(g+v)}{v(g+b)},$$

or if e shall be the number taken, of which the hyperbolic logarithm $=1$, thus there shall be

$$e^{3x:4nc} = \frac{b(g+v)}{v(g+b)}$$

or

$$e^{3x:4nc}bv + e^{3x:4nc}gv = bg + bv,$$

from which one obtains

$$g = \frac{\left(e^{3x:4nc}-1\right)bv}{b - e^{3x:4nc}v},$$

from which it is to be noted, that if $\frac{3x}{4nc}$ is a small fraction, then there shall be approximately

$$e^{3x:4nc} = 1 + \frac{3x}{4nc} + \frac{9xx}{2\cdot 16n^2c^2} + \text{etc.}$$

Now in the example cited by the author, because the ball was made from lead, there was $n = 9647$, and the diameter of the ball $c = \frac{3}{4}$ inch. Further initially the ball had a speed of 1670 Eng. ft. per second, whereby $b = 41990$ Rh. ft. or 43237 Eng. ft. We will draw this second example of the author into the calculation, in which the ball, after the same had traveled through a distance of 100 ft., still kept a speed of 1425 ft. per second. Thus it had the ratio $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1670 : 1425$; and $b : v = 103 : 75$ approximately. After that, $x = 100$ ft., thus

$$\frac{3x}{4nc} = 0{,}12439,$$

consequently

$$e^{\frac{3x}{4nc}} = 1,13242$$

and therefore

$$g = \frac{0,13242 \cdot 75}{103 - 75 \cdot 1,13242} b = \frac{9,93150}{18,0685} b,$$

or since $b = 41990$ Rh. ft., thus there will be $g = 23080$ Rh. ft.

In the third example there was $\sqrt{b} = 1690$ ft., $x = 150$ ft., and $\sqrt{v} = 1300$ ft., therefore $\frac{3x}{4nc} = 0,18654$ and $e^{\frac{3x}{4nc}} = 1,20507$ and consequently

$$g = \frac{0,20507v}{b - 1,20507v} b.$$

Now since $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 13:10$ and $b : v = 169:100$, thus there becomes

$$g = \frac{20,507}{48,493} b.$$

But one has $b = 42981$ Rh.ft., and thus there will be $g = 18176$ Rh.ft.

Now we want still to determine the value of g from the 4th experiment, in which, as in the previous, there was $c = \frac{3}{4}$ inch, and $n = 9647$. But the speed of the ball at A was $\sqrt{b} = 1180$ ft., and after space traversed $x = 225$ ft., the same was $\sqrt{v} = 950$ ft. From this there will be $\frac{3x}{4nc} = 0,27986$ and $e^{\frac{3x}{4nc}} = 1,32294$ and thus $e^{3x:4nc} = 1,32294$, consequently

$$g = \frac{0,32294v}{b - 1,32294v} b.$$

But there is $b : v = 13924 : 9025$ and therefore one finds

$$g = \frac{2914,5335}{1984,4665} b.$$

But now here there is $b = 20958$ Rh. ft., on account of which $g = 30781$ Rh.ft.

From these three experiments of the author we have found three different values of the letter g, namely :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & g=23080\\ \text{II.} & g=18176\\ \text{III.} & g=30781\end{array}\right\}\text{Rh.ft.}$$

If one now takes a mean between these three, thus there arises $g = 24012$. But since in the third case the ball went a greater distance, than in the two others described, and also the difference between the speeds at A and M was greater, thus the uncertainty had in the measurement in the last experiment cannot have such a great influence as in the others, and therefore the last value found of g appears to be the most in accordance with the truth. But because one still has reason to suspect, that the same is still a little to large, as the height of a natural air column, which is equal to the elastic force of the air, has been found to be a little smaller, thus the truth seems to be, that this letter g to be equally accurate for this height. Moreover we have assume this height to be a little too great above, because there we have taken the air to be 864 times lighter than water. Thus if we take for the height a column of mercury 30 Eng. inches or $2\frac{1}{2}$ ft., of which the elasticity of the air is equal to the weight; but mercury is 13,575 times heavier than water, and 11538 times heavier that the air put in place, thus if we take for g the height of a natural air column, of which the weight is equal to the elasticity of the air, $= 28845$ Eng. ft., or 27979 Rh.ft., and thus we shall be not far from the truth, if we take this height for g. Now since we have used the letter h for this height until now, which consequently will have this value

$$h = 28845$$

Engl.ft. or

$$h = 27979$$

Rh. ft., thus there will be $g = h$, and therefore the resistance of a ball is equal to the weight of an equally thick air column, the height of which $= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$. The resistive force of the air, which here is expressed by $\frac{1}{2} + \frac{v}{2h}$, thus is so much greater, the faster the ball moves, and which is almost equal according to the rule which the author has given. The speed of the ball worked out after our rule, the resistance of which is three times greater than following the common rule, 1870 Rh. ft or 1926 Eng. ft. Indeed the author seems to be of the opinion that if this already happens to have a speed of 1700 ft. per second ; the difference moreover is uncertain by just so much, which subjected to experiments are not to be so great, that the same deserve to be taken into consideration in the motion. In the remaining corroboration this correspondence of the letters g and h itself strengthens the truth of our formula, because one has seen before that the addition $\frac{1}{2h}vv$ found must be determined through the elasticity of the air. Since then this increase of the resistance, arises partially from the increased condensation of the air before the ball, and partially from the rarefaction of the air behind the same; moreover both these circumstances are based on the elasticity of the air, thus the considered increase can have no other causes than that ascribed to the elasticity of the air. Further one sees also, that the greater the elasticity of the air, the smaller the extent of the increased condensation must be before the ball, and the rarefaction behind the same; as then the air has more force to put the surrounding air into equilibrium. Thus from this it follows, that the greater the elasticity of the air, the smaller the increase of the resistance becomes, and that the same must disappear completely, if the elasticity were indefinitely great. Now this is pointed out from the formula found $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2h}vv$, in which the added term $\frac{1}{2h}vv$ thus will become much smaller, the greater the height h assumed, through which the elasticity of the air is measured ; and if h should be put in place thus indefinitely great, the appended part $\frac{1}{2h}vv$ would disappear completely, such as the nature of the matter indicates. Now these same properties shall indeed find a place, if one should put in place h instead of g, or either $2h$ or $3h$, or even $\frac{1}{2}h$; it is easy to see from the above calculation alone, that according to the experiment there is a sufficiency achieved for g, where neither $\frac{1}{2}h$ nor $2h$, nor again as much as $3h$ should be assumed for g. Therefore this simplicity, that just the nearest height h can be taken for the value of g, can strengthen so much more the certainty of our formula found, as far as to characterize the expression as a law of nature. Thus if this rule of ours, in order to determine the resistance of the air, corresponds generally with the truth, the same can be derived here merely from experience, thus there is still no doubt that one cannot turn out the same from theory alone. And since one is assured of the truth of the same, thus the observation alone cannot contribute much to a full understanding of the nature, and the true causes of the resistance is still very incomplete, apart from what has been contributed above which appeared sufficient.

ERSTE ANMERKUNG

Nachdem also die gemeine Lehre von dem Wiederstand der Luft auf mittelmäßige Bewegungen fest gesetzt, und zugleich dargethan worden, daß für sehr schnelle Bewegungen nach derselben der Wiederstand zu klein heraus komme, so muß man in diesen Fällen den Wiederstand vermehren, um diese Lehre der Wahrheit vollig gemäß einzurichten. Wir haben auch oben schon die Ursache dieser Vermehrung deutlich genug eingesehen, welche auf diesen zweyen Gründen beruhet, daß erstlich bey sehr schnellen Bewegungen, die Luft nicht vermögend ist, der Kugel zu folgen, wodurch folglich der Wiederstand noch mit dem Druck der Luft von vorne vermehret wird. Hernach wird auch in diesen Fällen die Luft vor der Kugel viel dicker, wodurch so wohl der Gegendruck, als der Wiederstand vermehret wird. Wenn sich nun diese beyden Umstande aus der Natur der Luft genau bestimmen liessen, so wäre man in Stande, die Lehre von dem Wiederstand derselben zur Vollkommenheit zu bringen. Da aber unsere Erkenntniß hierzu keineswegs hinreichend ist, so muß man sich begnügen, aus der Erfahrung diese nöthige Verbesserung, so viel als möglich, genau und der Wahrheit gemäß herzuleiten. Diesen Weg hat auch der Verfasser erwehlet, um den Wiederstand der Luft auf sehr schnelle Bewegungen in diesem Satz zu bestimmen: und da seine Versuche auf keine grössere Geschwindigkeiten, als von 1700 Schuh en in 1'' gerichtet sind, so hat er sich begnüget, eine solche Regel zu geben, welche für alle geringere Grade der

Geschwindigkeit den Wiederstand eben so, wie er solchen durch die Erfahrung befunden hatte, anzeigte.

Um nun den Gründ dieser Regel deutlicher zu erklaren, so wollen wir erstlich die langsamen Bewegungen, mit welchen die Theorie ganzlich übereinzustimmen gezeigt worden, in Betrachtung ziehen. Wenn sich also eine Kugel in der Luft mit einer solchen Geschwindigkeit, welche durch den Fäll aus einer Höhe = v erlangt wird, beweget, so ist der Wiederstand dem Gewicht einer gleich dick en Luft-Säule gleich, deren Höhe $=\frac{1}{2}v$: und auf diese Art bekommt man immer die wahre Grösse des Wiederstands, wenn die Höhe v nicht sehr groß ist. Ist aber die Höhe v so groß, daß daraus eine Geschwindigkeit von 1000 und mehr Schuhen in 1" entspringt, so haben wir gesehen, daß der Wiederstand in der That weit grösser sey, als $\frac{1}{2}v$; und daß derselbe, wenn die Geschwindigkeit 1700 Schuh in 1" betragt, ungefehr durch eine Luft-·Säule, deren Höhe $=\frac{3}{2}v$, ausgedrückt worden. Wir wollen also, um unsere Ausdrückung allgemein zu machen, setzen, daß der wahre Wiederstand einer Kugel dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleiche, deren Höhe $=\theta v$: und da ist klar, daß θ eine solche veranderliche Grösse seyn musse, daß dieselbe, wenn v nicht sehr groß ist, immer $\frac{1}{2}$ sey: wenn aber v sehr groß wird, einen grössern Werth bekomme, und endlich gar $=\frac{3}{2}$ werde, wenn die Geschwindigkeit der Kugel auf 1700 Schuh in 1" anwächst, das ist, wenn v ungefehr 46400 Englische Schuh groß wird. Die ganze Sache kommt also darauf an, daß man für θ eine solche Ausdrückung finde, welche, wenn v nicht merklich groß ist, allezeit $\frac{1}{2}$, wenn aber $v = 46400$, als denn $\frac{3}{2}$ gebe. Dieser Buchstabe θ ist also dasjenige, was der Autor die wiederstehende Kraft der Luft nennet, und welche er in diesem Satz für einen jeglichen Fäll bestimmet. Um nun aus seiner gegebenen Regel den Werth dieses Buchstabens θ heraus zu bringen, so sey f die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde erlangt wird, oder es sey $\sqrt{f} = 1700$, und $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, für welche die wiederstehende Kraft oder der Werth des θ gesucht wird. Es bedeute ferner a den Werth für θ, wenn $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, dergestalt, daß in diesem Fäll α ungefehr $\frac{3}{2}$ seyn muß; wenn aber $\sqrt{v}$ sehr klein, so muß seyn $\theta = \frac{1}{2}$. Man nenne nun die Linie $AB = a$, so macht der Verfasser erstlich diese Proportion

$$AB(a) : AC = \sqrt{f} : \sqrt{v} \, ,$$

hieraus wird,

$$AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}.$$

Die zweyte Proportion des Autoris verhält sich also : $BD : AD = \frac{1}{2} : \alpha$, welche in diese verwandelt wird:

$$AB : AD = \alpha - \tfrac{1}{2} : \alpha \, ;$$

hieraus wird

$$AD = \frac{2\alpha a}{2\alpha - 1}.$$

Da nun $AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}$, so wird

$$CD = \frac{2\alpha a\sqrt{f} - (2\alpha - 1)a\sqrt{v}}{(2\alpha - 1)\sqrt{f}}.$$

Endlich sagt er, werde seyn

$$CD : AD = \tfrac{1}{2} : \theta$$

und folglich

$$\theta = \frac{AD}{2CD}.$$

Hieraus wird

$$\theta = \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}};$$

und der Wiederstand einer Kugel, welche sich mit der Gesehwindigkeit $\sqrt{v}$ in der Luft beweget, wird dem Gewieht einer gleich dicken Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$= \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}} v.$$

Dieser gefundene Werth für θ hat nun die erforderten Eigenschaften. Denn wenn die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ sehr klein ist, so verschwindet der Terminus $(2\alpha - 1)\sqrt{v}$ vor $2\alpha\sqrt{f}$, und wird also $\theta = \tfrac{1}{2}$; wenn aber die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$, 1700 Schuhe in 1" betragt, oder dem $\sqrt{f}$ gleich wird, so kommt $\theta = \alpha$, wie erfordert worden. Für kleinere Geschwindigkeiten bekommt θ kleinere Werthe, wie aus beygefügter Tabelle, wo wir $\alpha = \tfrac{3}{2}$ angenommen haben, erhellet.

Wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde so viel Englische Schuhe beträgt :	So ist die wiederstehende Kraft der Luft, oder der Werth des Buchstabens θ :

0	0,5000
100	0,5204
200	0,5425
300	0,5667
400	0,5930
500	0,6219
600	0,6538
700	0,6892
800	0,7286
900	0,7727
1000	0,8226
1100	0,8793
1200	0,9444
1300	1,0200
1400	1,1087
1500	1,2143
1600	1,3421
1700	1,5000

Man siehet aber leicht, daß man diesen Werth des Buchstabens θ nicht für grössere Geschwindigkeiten gebrauchen könne. Denn wenn $\sqrt{v}=\frac{2\alpha\sqrt{f}}{2\alpha-1}$, das ist, wenn die Geschwindigkeit 2550 Schuh in einer Secunde austragen solte so würde θ unendlich groß, und mußte in diesem Fäll der Wiederstand unendlich groß seyn, welches ganz und gar ungereimt wäre. Ob nun gleich der Verfasser dieses wohl eingesehen, und seine Regel nur für kleinere Grade der Geschwindigkeit, als von 1700 Schuhen in 1" Ausdrücklich einschranket, so siehet man doch, daß, da dieselbe von der Wahrheit bey grössern Geschwindigkeiten so sehr abweicht, dieselbe auch bey etwas kleineren der Wahrheit nicht vollig gemäß seyn könne. Und da man mit leichter Mühe unendlich viel dergleichen Formuln für θ finden kann, welche eben diese zwey Eigenschaften besitzen, daß erstlich für ganz kleine Geschwindigkeiten $\theta=\frac{1}{2}$, und für die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1" heraus komme $\theta=\frac{3}{2}$, so wird man der Wahrheit naher kommen, wenn man aus denselben eine solche erwehlet, welche dieser Ungereimtheit nicht unterworfen ist. Es scheinet also vielmehr, daß man den wahren Wiederstand durch eine solche Formul

$$\tfrac{1}{2}v+pv^{n}$$

Ausdrücken solte, wo p eine sehr kleine Zahl, und n grösser ist, als 1. Denn auf diese Art kann man gleichfals die nötbigen Bedingungen erhalten, daß wenn v sehr klein ist, der terminus pv^{n} in Ansehung des $\frac{1}{2}v$ verschwinde, und wenn v sehr groß, nehmlich 46400 Schuh, daß alsdenn der terminus pv^{n} zwey mahl so groß werde, als der erste $\frac{1}{2}v$. Um der ersten Bedingung ein Genügen zu leisten, wird unumgänglich erfordert, daß die Zahl n grösser sey, als 1. Es kommt also nur darauf an, ob man für dieselbe $\frac{3}{2}$ oder 2 annehmen wolle: im erstem Fäll würde dieser Zusätz pv^n Cubis der Geschwindigkeit, im andern aber den Quadrato-quadratis proportional seyn. Wolte man das erstere erwehlen, so findet sich diese Schwierigkeit, daß wenn der Corper zuruck gienge, und man folglich die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ negativ annahme, der Wiederstand $\frac{1}{2}v - pv\sqrt{v}$ heraus kommen würde, da derselbe doch eben sowohl, als im ersteren Fäll $\frac{1}{2}v + pv\sqrt{v}$ seyn mußte.

Diese Schwierigkeit fällt nun weg, wenn wir für n die Zahl 2 annehmen, dergestalt, daß der Wiederstand durch

$$\tfrac{1}{2}v + pv^n$$

ausgedrückt wird. Denn hier ist es gleich viel, ob die Geschwindigkeit selbst, $\sqrt{v}$, affirmative oder negative angenommen wird; ferner kommt auch auf diese Art die obige Schwierigkeit nicht zum Vorschein, daß für einen endlichen Grad der Geschwindigkeit der Wiederstand unendlich groß wird. Diese Form erhalt auch daher keine geringe Bekraftigung, daß bey sehr langsamen Bewegungen der Wiederstand etwas grösser, als $\frac{1}{2}v$ werde, welche Würkung der Zahigkeit der Luft zugeschrieben wird. Es ist aber, wie der grosse NEWTON gewiesen, die Kraft der Zahigkeit weder den Geschwindigkeiten, noch ihren Quadraten, proportional, sondern sie bleibt immer einerley. Wenn also diese Zahigkeit durch δ angedeutet wird, so kommt nach der ordentlichen Lehre der ganze Wiederstand also ausgedrückt $\delta + \frac{1}{2}v$ heraus, wo δ eine so kleine Grösse ist, daß wenn v nicht über die massen klein ist, dieselbe in Ansehung des $\frac{1}{2}v$ ganzlich aus der Acht gelassen werden kann; als wenn zum Exempel δ nur den tausendsten Theil eines Schuhes bedeutete, so verschwindet dasselbe, so bald nur v etliche Zoll groß wird. Weil nun diese Expression $\delta + \frac{1}{2}v$ noch nicht den ganzen Wiederstand ausdrückt, wenn v sehr groß ist, und folglich zu derselben noch ein Terminus gesetzt werden muß, so kann derselbe, allem Vermuthen nach, nicht anders als von dieser Form pv^2 seyn. Da wir aber den ersten Terminum δ bey geschwinden Bewegungen, dergleichen wir hier betrachten, ganzlich weglassen können, so wird der Wiederstand also $\frac{1}{2}v + pv^n$ ausgedrückt werden müssen. Wenn wir dahero gewiß wüsten, daß für eine Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1", oder wenn $v = 46400$ Schuh, der wahre Wiederstand dreymahl grösser wäre, als nach der gemeinen Regel, so würde sich hieraus der Buchstabe p bestimmen lassen. Denn da müste seyn

$$\tfrac{1}{2}\cdot 46400 + p\cdot 46400^2 = \tfrac{3}{2}.46400,$$

folglich

$$p = \tfrac{1}{46400}.$$

Wenn aber der Wiederstand erst für eine Geschwindigkeit von 1900 Schuhen 3 mahl so groß würde, so bekame man $p = \frac{1}{58200}$, wobey zu merken, daß 58200 Schuh die doppelte

Höhe h geben, welche oben zu Ansdrückung der Elasticitat der Luft ist gebraucht worden. Weil uns aber dieser Werth für p noch nicht bekannt ist, so wollen wir für denselben $\frac{1}{2g}$ setzen, dergestalt, daß die wahre Grösse des Wiederstands seyn soll

$$\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2g}v^2\,;$$

und wir wollen den wahren Werth von g aus den Experimenten selbst bestimmen. Wenn man im übrigen für $\frac{1}{2g}$ den obigen Bruch $\frac{1}{46400}$ annimmt, so kommt für alle niedrigere Grade der Geschwindigkeit fast eben der Wiederstand heraus, als aus des Autoris Regel. Denn wenn wir hier wiederum die wiederstehende Kraft der Luft durch θ andeuten, so wird

$$\theta = \tfrac{1}{2} + \frac{v}{46400},$$

oder wenn die Kugel n Schuh in einer Secunde macht, so wird

$$\theta = \tfrac{1}{2} + \frac{nn}{2890000}.$$

Ist also $n = 100$, so wird $\theta = 0{,}5034$, welches kleiner ist, als nach des Autoris Regel; wird aber $n = 800$, so kommt $\theta = 0{,}7214$ fast wie bey dem Autore; wenn aber $n > 800$ bis $n = 1700$, so sind die hieraus entstehenden Werthe des θ grösser, als nach dem Autore, welches der Wahrheit nicht entgegen zu seyn scheinet.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir wollen also annehmen, der wahre Wiederstand, welchen eine Kugel, die sich mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ in der Luft beweget, sey gleich einem gleich dicken Cylinder Luft, dessen Höhe

$$= \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2g}v^2,$$

und wir wollen den Buchstaben g dergestalt bestimmen, daß die Rechnung mit den Experimenten des Verfassers, so viel als möglich, übereinkommt. Es sey dahero der Diameter der Kugel $= c$, welche sich nach der geraden Linie AB in der Luft dergestalt bewegen soll, daß ihre Geschwindigkeit in dem Anfang der Bewegung in A sey $= \sqrt{b}$; woraus man die Geschwindigkeit derselben in einem jeglichen Punkt M bestimmen solle, welche sey $= \sqrt{v}$. Man setze den Weg $AM = x$, und die Kugel bestehe aus einer solchen Materie, welche n mahl schwerer sey, als die Luft, folglich wird die Schwehre der Kugel einer gleich dicken Luft-Säule gleichen, deren Höhe $= \tfrac{2}{3}nc$: und die Schwehre der Kugel wird sich also zu dem Wiederstand in M verhälten, wie $\tfrac{2}{3}nc$ zu $\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2g}v^2$ oder wie 1 zu $\dfrac{3v}{4nc} + \dfrac{3v^2}{4ncg}$. Indem also die Kugel durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortgehet, so wird seyn:

$$dv = \frac{-3dx}{4nc}\left(v + \frac{vv}{g}\right)$$

oder

$$\frac{3dx}{4nc} = \frac{-gdv}{gv+vv} = \frac{-dv}{v} + \frac{dv}{g+v},$$

welches gehöriger massen integrirt gibt

$$\frac{3x}{4nc} = l\,\frac{b(g+v)}{v(g+b)},$$

oder wenn *e* für die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithmus $=1$, so wird

$$e^{3x:4nc} = \frac{b(g+v)}{v(g+b)}$$

oder

$$e^{3x:4nc}bv + e^{3x:4nc}gv = bg + bv,$$

woraus man erhalt

$$g = \frac{\left(e^{3x:4nc}-1\right)bv}{b - e^{3x:4nc}v},$$

wobey zu merken, daß wenn $\frac{3x}{4nc}$ ein sehr kleiner Bruch, alsdenn beynahe sey

$$e^{3x:4nc} = 1 + \frac{3x}{4nc} + \frac{9xx}{2\cdot 16n^2c^2} + \text{etc.}$$

In den von dem Autore angefuhrten Exempeln war nun, weil die Kugel von Bley gewesen, $n = 9647$, und der Diameter der Kugel $c = \frac{3}{4}$ Zoll. Ferner hatte die Kugel anfanglich eine Geschwindigkeit von 1670 Engl. Schuhen in einer Secunde, dahero $b = 41990$ Rheinl. Schuhe oder 43237 Engl. Schuhe. Wir wollen hierzu das zweyte Exempel des Autoris in Betrachtung ziehen, worinne die Kugel, nachdem dieselbe einen Weg von 100 Schuhen durchgelaufen, noch eine Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde behalten. Also verhält sich $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1670 : 1425$; und $b : v = 103 : 75$ bey nahe. Hernach da $x = 100$ Schuh, so wird

$$\frac{3x}{4nc} = 0{,}12439,$$

folglich

$$e^{\frac{3x}{4nc}} = 1{,}13242$$

und dahero wird

$$g = \frac{0{,}13242 \cdot 75}{103 - 75 \cdot 1{,}13242} b = \frac{9{,}93150}{18{,}0685} b,$$

oder da $b = 41990$ Rheinl. Schuhe, so wird $g = 23080$ Rheinl. Schuhe.

Im dritten Exempel war $\sqrt{b} = 1690$ Schuh, $x = 150$ Schuh, und $\sqrt{v} = 1300$ Schuh, dahero $\frac{3x}{4nc} = 0{,}18654$ und $e^{\frac{3x}{4nc}} = 1{,}20507$ und folglich

$$g = \frac{0{,}20507v}{b - 1{,}20507v} b.$$

Da nun $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 13 : 10$ und $b : v = 169 : 100$, so wird

$$g = \frac{20{,}507}{48{,}493} b.$$

Es ist aber $b = 42981$ Rheinl. Schuh, und wird also $g = 18176$ Rheinl. Schuh.

Wir wollen nun den Werth von g noch aus dem 4ten Experiment untersuchen, in welchem, wie in den vorhergehenden, war $c = \frac{3}{4}$ Zoll, und $n = 9647$. Die Geschwindigkeit der Kugel in A aber war $\sqrt{b} = 1180$ Schuh, und nachdem dieselbe den Raum $x = 225$ Schuh durchlauffen, war $\sqrt{v} = 950$ Schuh. Hieraus wird $\frac{3x}{4nc} = 0{,}27986$ und $e^{\frac{3x}{4nc}} = 1{,}32294$ und also $e^{3x:4nc} = 1{,}32294$, folglich

$$g = \frac{0{,}32294v}{b - 1{,}32294v} b.$$

Es ist aber $b : v = 13924 : 9025$ und dahero wird

$$g = \frac{2914{,}5335}{1984{,}4665} b.$$

Nun aber ist hier $b = 20958$ Rheinl. Schuh, derowegen wird $g = 30781$ Rheinl. Schuh.

Aus diesen drey Experimenten des Autoris haben wir also drey verschiedene Werthe für die Buchstaben g bekommen, nehmlich

$$\left.\begin{aligned} \text{I.}g &= 23080 \\ \text{II.}g &= 18176 \\ \text{III.}g &= 30781 \end{aligned}\right\}\text{Rheinl. Schuh.}$$

Wenn man nun zwischen diesen ein Mittel nimmt, so kommt heraus $g = 24012$. Da aber in dem dritten die Kugel einen weit grösseren Weg, als in den beyden andern beschrieben, und auch der Unterscheid zwischen den Geschwindigkeiten in A und M grösser gewesen, so hat die Unrichtigkeit der Ausmessungen in dem letzten Experiment keinen so grossen Einflüß haben können, als in den andern, und dahero scheinet der letzt gefundene Werth des g der Wahrheit am meisten gemaß zu seyn. Weil man aber doch Ursache zu vermuthen hat, daß derselbe noch etwas zu groß ist, die Höhe einer naturlichen Luft-Säule aber, welche der elastischen Kraft der Luft gleich ist, etwas kleiner gefunden wird, so scheinet der Wahrheit gemaß zu seyn, daß dieser Buchstabe g dieser Höhe accurat gleich sey. Wir haben aber oben diese Höhe etwas zu groß angesetzt, weil wir daselbst die Luft 864 mahl leichter, als das Wasser genommen haben. Wenn wir also für die Höhe einer Quecksilber-Säule, deren Gewicht der Elasticitat der Luft gleich ist, 30 Englische Zoll oder $2\frac{1}{2}$ Schuh annehmen, das Quecksilber aber 13,575 mahl schwehrer, als Wasser, und 11538 mahl schwehrer, als Luft setzen, so kommt die Höhe einer naturlichen Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticitat der Luft gleich ist, $= 28845$ Englische, oder 27979 Rheinl. Schuh, und also werden wir uns am allerwenigsten von der Wahrheit entfernen, wenn wir für g diese Höhe annehmen. Da wir nun bisher den Buchstaben h für diese Höhe gebraucht haben, welcher folglich diesen Werth haben wird

$$h = 28845$$

Engl. Schuh oder

$$h = 27979$$

Rheinl. Schuh, so wird $g = h$, und dahero ist der Wiederstand einer Kugel gleich dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule, deren Höhe $= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$. Die wiederstehende Kraft der Luft, welche hier durch $\frac{1}{2} + \frac{v}{2h}$ ausgedrückt wird, ist also um so viel grösser, je geschwinder sich die Kugel bewegt, und das fast nach eben der Regel, welche der Autor gegeben. Nach unserer Regel betragt die Geschwindigkeit der Kugel, deren Wiederstand dreymahl grösser ist, als nach der gemeinen, 1870 Rheinl. oder 1926 Engl. Schuh. Der Autor scheinet zwar der Meynung zu seyn, als wenn dieses schon bey einer Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1" geschähe; der Unterscheid ist aber bey so vielen Unrichtigkeiten, welchen die Versuche unterworfen sind, nicht so groß, daß derselbe in Betrachtung gezogen zu werden verdiente. Im übrigen bekräftiget diese Uebereinstimmung der Buchstaben g und h die Wahrheit unserer Formul nicht wenig, weil man vorher hatte sehen können, daß der gefundene Zusätz $\frac{1}{2h}vv$ durch die Elasticitat der Luft bestimmet werden mußte. Denn da diese Vermehrung des Wiederstands, theils von der Verdickerung der Luft vor der Kugel, theils von der Verdünnerung hinter derselben herkommt, diese beyden Umstande aber auf der

Elasticitat der Luft beruhen, so kann die gedachte Vermehrung keiner andern Ursache, als der Elasticitat der Luft, zugeschrieben werden. Man siehet auch ferner, daß je grösser die Elasticitat der Luft ist, je geringer die entstehende Verdickerung vor der Kugel, und die Verdünnerung hinter derselben seyn müsse; indem alsdenn die Luft mehr Kraft hat, sich mit der umliegenden ins Gleichgewicht zu setzen. Hieraus folget also, daß je grösser die Elasticitat der Luft ist, je kleiner der Zuwächs des Wiederstands werden, und daß derselbe, wenn die Elasticitat unendlich groß wäre, völlig verschwinden müsse. Eben dieses weiset · auch die gefundene Formul $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2h}vv$, in welcher der Zusätz $\frac{1}{2h}vv$ um so viel kleiner wird, je grösser man die Höhe *h,* wodurch die Elasticitat der Luft ausgemessen wird, annimmt; und wenn *h* gar unendlich groß gesetzt werden solte, so würde das Glied $\frac{1}{2h}vv$ ganzlich verschwinden, wie solches die Natur der Sache zu erkennen giebt. Eben diese Eigenschaften würden zwar auch Statt finden, wenn man für *g* an Statt *h,* entweder 2 *h* oder 3*h,* oder auch $\frac{1}{2}h$ setzen solte; allein es ist aus den obigen Rechnungen leicht zu sehen, daß, um den Experimenten ein Genügen zu leisten, für *g* weder $\frac{1}{2}h$ noch 2*h*, noch viel weniger 3*h* angenommen werden könne. Dahero diese Simplicität, daß just die Höhe *h* dem Werth von *g* am nächsten gekommen, die Gewißheit unserer gefundenen Formul um so vielmehr bestärket, indem dergleichen Ausdrücke der Natur immer am meisten gemaß befunden werden. Wenn also diese unsere Regel, um den Wiederstand der Luft zu bestimmen, mit der Wahrheit ganzlich übereinstimmt, ungeachtet dieselbe hier bloß aus der Erfahrung hergeleitet worden, so ist doch kein Zweifel, daß man dieselbe nicht auch aus der Theorie allein solte heraus bringen können. Und da man von der Wahrheit derselben zum voraus versichert ist, so kann die Betrachtung derselben nicht wenig zu einer vollkommenern Erkenntniß der Natur und wahren Ursache des Wiederstands, als welche, wie aus dem obigen zur Gnüge erhellet, noch sehr unvollstandig ist, beytragen.