

PROP. V.

When a cannon-ball of 24lb. weight, fired with a full charge of powder, first issues from the piece, the resistance of the air on its surface amounts to more than twenty times its gravity.

For we have shewn, in the second proposition of the present chapter, that the resistance of the air on the surface of a bullet of $\frac{3}{4}$ of an inch diameter, moving with a velocity of 1670 feet in 1", amounted to 10 lb. Now we have seen, in the last proposition, that an iron bullet weighing 24lb. if fired with 16lb. of powder, (which is usually esteemed its proper battering charge) acquires a velocity of about 1650 feet in 1", scarcely differing from the other; whence, as the surface of this last bullet is more than sixty-four times greater than the surface of a bullet of an inch in diameter, and their velocities are nearly the same, it follows, that the resistance on the larger bullet will amount to more than 540 lb. which is near twenty-three times its own weight.

SCHOLIUM.

We have observed, in the introduction, that the theorists, who have professedly written on the subject of gunnery, have generally agreed in supposing the flight of shot and shells to be nearly in the curve of a parabola; and it is against this hypothesis that the two last propositions are particularly aimed.

For the reason, which has been given by these authors, in support of their opinion, is the supposed inconsiderable resistance of the air; since, as it is agreed on all sides, that the track of projectiles: would be a parabola, if there was no resistance; it has from thence been too rashly concluded, that the interruption, which the ponderous bodies of shells and bullets would receive from so rare a medium as the air, would be scarcely sensible, and consequently that their parabolic flight would be hereby scarcely affected.

Now the prodigious resistance of the air to a bullet of 24 lb. weight, such as we have here established it, sufficiently confutes this reasoning; for how erroneous must that hypothesis be, which neglects as inconsiderable, a force, which amounts to more than twenty times the gravity of the moving body ? However, we shall not content ourselves with having demonstrated the reality and quantity of the air's resistance, but we shall proceed to a more particular examination of the flight of bodies in that medium, where we shall evince, by many experiments, how greatly the track, described by almost every projectile, deviates in every circumstance from what it ought to be on the generally received principles; But, first, it is necessary to assume a few particulars; the demonstrations of which may be found in almost every writer on the common theory of falling bodies.

Post. 1. If the resistance of the air be so small that the motion of a projected body be in the curve of a parabola ; then the axis of that parabola will be perpendicular to the horizon, and consequently the part of the curve, in which the body ascends, will be equal and similar to that in which it descends.

Post. 2. If the parabola, in which the body moves, be terminated on a horizontal plain ; then the vertex of the parabola will be equally distant from its two extremities.

Post.3. Also the moving body will fall on that horizontal plain in the same angle and the same velocity, with which it was first projected.

Post. 4. If a body be projected in different angles, but with the same velocity ; then its greater horizontal range will be, when it is projected in an angle of 45^0 with the horizon.

Post.5. If the velocity, with which the body is projected, be known, then this greatest horizontal range may be thus found: compute, according to the common theory of gravity, what space the projected body ought to fall through to acquire the velocity, with which it is projected; then twice that space will be the greater horizontal range, or the horizontal range, when the body is projected in an angle of 45° with the horizon.

Post.6. The horizontal ranges of a body, when projected with the same velocity, at different angles, will be between themselves, as the sines of twice the angle, in which the line of projection is inclined to the horizon.

Post.7. If a body be projected in the same angle with the horizon, but with different velocities; the horizontal ranges will be in the duplicate proportion of those velocities.

These postulates contain the principles, on which the motions of projectiles are computed by the modern writers on the art of gunnery. If any of these postulates hold not true, when applied to the motion of a projectile, then that projectile deviates in its flight from a parabolic track; we shall therefore effectually destroy the common theory of projectiles, if we can shew, that, in general, none of these postulates correspond to the observed motions of those bodies.

FIRST REMARK

In this proposition the author investigates the magnitudes of the air resistance, which a half carthau-ball must sustain, thus traveling with a speed of 1650 ft. per second in air, and knows that the force of the resistance more than 20 times greater than the weight of the ball. In order to prove this, thus to be based on the former determined resistance which a ball thus only $\frac{3}{4}$ inch in diameter has endured, and itself to be traveling with a speed of 1670 ft. per second. For since these two speeds are not particularly different from one another, thus the ratio of the magnitude of the resistance of the larger to the resistance of the smaller must be as the square of the diameter of the greater to the square of the diameter of the smaller: because the ratio of the surfaces of the two spheres between themselves is as the square of their diameters. But now the author says, that the surface of the 24 pounder ball can be considered to be much greater than of the smaller ball, whose diameter was only $\frac{3}{4}$ inch, consequently the diameter of the greater ball must have been $= \frac{3}{4}\sqrt{54}$ inches, that is nearly $5\frac{1}{2}$ inches. Therefore the weight of an iron ball whose diameter is $5\frac{1}{2}$ inches is as much as 24 pounds ; and from this the diameter of an iron ball whose weight is known can be determined. But we know from the formula found above, whereby the resistance on a ball is expressed, in any case the ratio of the resistance of the air to the weight of the ball can be assigned easily. Therefore let the diameter of the ball $= c$, and $= v$ the height, from which the speed of the ball can be

generated, as we have found, thus the resistance is equal to the weight of an air column of the same width as the ball, whose height is given by

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv,$$

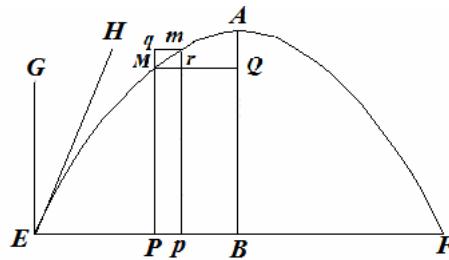
[See the Second Remark of Proposition III of Ch. 2 above ;] where h denotes a height of 28845 English ft. or of 27979 Rh. ft. Further the ball itself is equal to the width of a cylinder, whose height is $= \frac{2}{3}c$. Therefore if the matter of the ball were put n times heavier than the weight of the air, thus the weight of the ball is equal to the weight of an equally wide cylinder, whose height $= \frac{2}{3}nc$, consequently the resistance of the ball to its own weight is in the ratio as $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$ to $\frac{2}{3}nc$, that is, as $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ to 1. Thus if the ball is made of iron, so there shall be $n = 6647$, and the resistance of the ball is in the proportion to its weight, as $\frac{v(h+v)}{8863ch}$ to 1. Let us now put the speed of the ball to amount to 1650 English ft. or 1600 Rh. ft. per second, thus the height shall be $v = 40960$ Rh.ft. or 42226 Eng. ft., and $h + v = 71071$ Eng.ft. Consequently the resistance itself shall be in proportion to the weight of the ball as 11,7386 ft. to the diameter of the ball. Because now according to the author's reckoning, the diameter of the 24 pounder ball works out to be $5\frac{1}{2}$ inches, or $\frac{11}{24}$ ft, thus the resistance itself must be in the ratio to its own weight of 24 pounds, as 11,7386 to $\frac{11}{24}$ or as 25,6115 to 1, and thus this resistance is more than $25\frac{1}{2}$ heavier than the weight of the ball. It is not necessary to investigate the reason why the author found only this resistance to be 23 greater than the weight of the ball. For it can be seen at once from his discussion, that his intention then was only about showing that the resistance of the ball in the case presented was certainly to be more than 20 times greater than the weight of the same ; and therefore he had taken all the determinations a little too small, from which with more care, one might have had so much less doubt about the correctness of his propositions.

Now since the resistance of the air is so astonishingly great, thus can one still be of the common opinion that the balls move in parabolas ? The paths so being obliged to be so much shorter, since the same idea would be sufficiently disproved already, if the resistance of the air thus were equal to the weight of the ball itself. Meanwhile the incorrectness of this common opinion had been demonstrated thoroughly a long time ago, although the common artillerymen had not been embarrassed by this revelation. Therefore the author should be a little subdued in his discourse as if he were the first of to discover this error. We have already shown in our remarks to the author's forward, that this error had not only been noted for some time already, but also to be improved on to the extent that line could be determined which would actually be described by a body in air. But meanwhile, one is has the greatest reason to be obliged to the author, that this remarkable increase of the air resistance be taken to be true, if the motion is very fast ; as through which he not only freed the common herd of a gross error, but also he had laid the falseness of the ordinary accepted theory of the air resistance clearly before the eyes of the learned.

SECOND REMARK

Because the author in the following proposition is prepared to show the gross difference by experiment, which can itself be found between the true path and a parabola, that a body projected through the air describes, thus here he draws the main properties of parabolic motion into consideration. Since it is not so easy there to determine through experiment the true path which a body describes, thus it would be very difficult to observe directly the difference between this path and a parabola. On this account the author here considers the properties, with which the motion in a parabola is necessarily combined, in order to know afterwards whether these properties are actually found in the motion of a body through the air or not. For even if a single one of these properties is not found to be present in the air, thus it follows from that without dispute, that the path which such a body describes in air cannot be a parabola. Now whether these same properties are found to be proven thoroughly in countless books, thus we will still derive the same here from the first principles of motion, partially from that one can understand the truth more thoroughly, but partially especially, from that we can still determine by the same method the true motion of bodies in air so much more easily.

GALILEO had found already, that a heavy body in a vacuum, or if it encountered hardly any resistance, itself moved in a parabola ; and on this very principle most authors, who have written on artillery, have taken the path of a bomb or cannonball in air to be a parabola ; as if they had hardly any idea of the resistance, because they had believed the resistance to be so small, that the same can be considered in the motion of a body without any particular change. We will thus put in place, that the body suffers hardly any resistance, and this line to be determined from the principles of motion, after which it must proceed in its own motion, after it has been projected with a given speed at a given angle to the horizontal.



Thus, let EF be a horizontal line, from which a body is projected from the point E in the direction EH with a speed, thus acquired through a fall from a height $= b$, and the curved line $EMAF$ shall be the path introduced, along which the body itself goes, as far as the same again falls down onto the horizontal line at F . One takes the angle $HEF = \zeta$, which the direction of the body EH makes initially with the horizontal line EF . Now since the speed of the body at E shall be expressed by $\sqrt{b}$, if one imagines this motion to be split into two different parts, of which one is directed along the vertical line EG , but the other is directed along the horizontal line EF , thus the speed of the former shall be

$= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$ and the speed of the latter $= \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$. If one assumes namely that the sine of $90^\circ = 1$. Now we will put in place, that the body shall already have arrived at M , and from M the perpendicular line MP is let down, as then taking $EP = x$ and $PM = y$; moreover the time, in which the body arrives at M , shall be $= t$. In any infinitely small time dt the body shall advance through Mm , and if the distance gone divided by the time were assumed for the speed, thus the speed of the body at M becomes $= \frac{Mn}{dt}$. This motion can also be divided into two different parts along the directions Mq and Mr , of which the one is perpendicular to the horizontal, but the other is parallel to the horizontal; and because, thus one can draw the line mp parallel to MP , there becomes :

$$Mq = mr = dy \text{ and } Mr = dx,$$

thus the speed along the direction $Mq = \frac{dy}{dt}$ and along the direction $Mr = \frac{dx}{dt}$. Now since the motion of the body is altered only by its weight, the direction of which is directed along MP downwards, thus one can well see, that the speed along the direction Mr suffers no change from that, and therefore everywhere to be the same size $= \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$, which is the initial speed along the horizontal direction, which remains constant. Therefore

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta, \text{ or } dx = dt \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$$

which equation integrated gives

$$x = t \cos.\zeta \cdot \sqrt{b},$$

from which it is apparent, that the body always advances with the same speed along the horizontal direction. But the whole weight acts against the other vertical direction Mq .

Since now the speed along this direction is $= \frac{dy}{dt}$, thus the height, from which the speed arises, shall be $= \frac{dy^2}{dt^2}$, from which the differential, if dt is assumed to be constant, will be

$$= \frac{2dyddy}{dt^2}.$$

[Note that this is just $\frac{dy^2}{dt^2} = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2$; at the time of writing, the idea of the conservation of potential + kinetic energy was unknown, and lay in the future, as indeed did the concept of energy itself and its various forms. However, a precursor of kinetic energy was the *vis viva*, or *living force* principle, introduced by Leibnitz, but not used by Newton, this principle upheld the belief that the sum of the squares of the velocities by their masses of all the particles in a system was conserved amongst themselves, unless external forces acted; and indeed there are situations where this is the case. Following

Galileo, Euler had assumed in the simplest way possible, that $v^2 = h$, and his calculations were made easier by assuming the *vis viva* of a body to be proportional to the height a body had fallen from rest under uniform gravity. The change in the *vis viva* was taken to be proportional to the external force, and thus Euler asserted here :

$$\frac{dv^2}{dh} = \frac{\text{some external force acting to change } vis\ viva\ \text{of body}}{\text{weight acting to change height of body}}.$$

Thus, from this postulated equation he finds below that the acceleration of gravity to be $\frac{1}{2}$ in arbitrary units. This form of the forerunner of the conservation of energy is permissible as long as only relative proportions are to be taken; if actual values of quantities are required in an equation, then a scaling factor must be introduced to agree with the actual acceleration of gravity in any conventional units.]

This differential must itself be in the same proportion to the distance dy , which the body describes according to its motion in the time dt , as the force, which acts along the direction Mq on the body, is to its weight. But now this force is equal to the weight of the body itself ; for it is to be observed that the speed does not increase but rather decreases [i.e. on the body rising as in the diagram]. Therefore this proportion is maintained :

$$\frac{2dyddy}{dt^2} : dy = -1:1,$$

from which this equation arises :

$$2ddy = -dt^2.$$

The integral from this is

$$2\frac{dy}{dt} = C - t,$$

where always $\frac{dy}{dt}$ denotes the vertical speed after the passage of the time t . Now since in the beginning, there $t = 0$, the vertical speed was $= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, thus for this point there becomes $2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta = C$, through which the magnitude of the letter C is determined, which arose from the integration. Therefore there will be

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - t,$$

or

$$2dy = 2dt \sin.\zeta \cdot \sqrt{b} - tdt,$$

the integral of which gives

$$2y = 2t \sin.\zeta \cdot \sqrt{b} - \frac{1}{2}tt.$$

From the differential equation

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - t,$$

it appears in the first place, because $\frac{dy}{dt}$ indicates the vertical motion, that if

$t = 2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, the vertical speed of the body vanishes, and the horizontal motion contains everything. If we thus put in place, that this happens at the point *A*, thus the tangent of the curved line is horizontal at *A*. But if t were greater than $2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, thus the vertical speed $\frac{dy}{dt}$ becomes a negative value, which indicates that the body then is considered to be falling. Therefore *EA* is this part of the path *EMF*, along which the body rises up, and *AF* the part in which the body again falls down.

But in order that the nature of the curved line be known, thus it is to be noted, that

$$t = \frac{x}{\cos.\zeta \cdot \sqrt{b}}.$$

Thus one puts this value for t into the integrated equation :

$$2y = 2t \sin.\zeta \cdot \sqrt{b} - \frac{1}{2}tt,$$

thus giving

$$2y = 2x \text{ tang.}\zeta - \frac{xx}{2b \cos.\zeta^2}.$$

or

$$xx - 4bx \sin.\zeta \cos.\zeta = -4by \cos.\zeta^2.$$

From this there becomes:

$$-x + 2b \sin.\zeta \cos.\zeta = 2 \cos.\zeta^2 \cdot \sqrt{(bb \sin.\zeta^2 - by)}.$$

From this equation one sees easily, that the curved line sought *EMF* to be a parabola. If one puts $EB = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta$, thus there will be

$$BP = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta - x.$$

Following this one sets at *B* the perpendicular line $BA = b \sin.\zeta^2$ and draw *MQ* parallel to *EF*, thus here becomes

$$AQ = b \sin.\zeta^2 - y, \quad MQ = BP.$$

Now one takes $AQ = p$ and $QM = q$, thus there becomes $q = 2 \cos.\zeta \cdot \sqrt{bp}$ or

$$qq = 4bp \cos.\zeta^2,$$

which equation shows clearly, that the sought line is a parabola, whose axis is the vertical line AB . And from this the truth of the first, second, and third theorems is apparent: namely in the first place, that the axis of the parabola AB is perpendicular to the horizontal line EF , and consequently that the two parts AE and AF are equal and similar to each other. Then also it is also clear, that the furthest points of the horizontal line E and F are to be removed equally far from the highest point A . In the third place it follows from the equality of the parts AE and AF , that the angle, which the curved line at E and F makes with the horizontal line EF , to be equal to each other. Because further $EF = 2EB = 4b \sin.\zeta \cos.\zeta$, thus the vertical speed of the body at F shall be :

$$= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - \frac{x}{2\sqrt{b} \cdot \cos.\zeta},$$

if one puts for x the value $4b \sin.\zeta \cos.\zeta$, thus the speed becomes :

$$= -\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta,$$

which from the first at E is distinguishable only, that the one is directed upwards but the other downwards. Because now the horizontal motion always remains the same, thus from this it follows, that the body at F has as well that speed with which it was moving forwards at E . Further because $EB = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta$ thus there is $EB = b \sin.2\zeta$, and the width of the projection on the horizontal line, namely EF ,

$$= 2b \sin.2\zeta.$$

From which in the first place it follows that, if the speed $\sqrt{b}$ at the start E stays the same, the widths of the trajectories to be proportional to the sines of twice the angle HEF ; but if the angle FEH stays the same, and the speed $\sqrt{b}$ shall be changed, thus the widths of the trajectories EF is proportional to the square of the speed, which is b . This serves to prove the 6th and 7th theorems. Further what attains the greatest width of the trajectory, because the width has been found to be $EF = 2b \sin.2\zeta$, thus one sees at once, that the same will be the greatest, if the angle 2ζ contains ninety degrees; for if the sine shall be equal to the radius, moreover all the remaining sines, as is well known, are to be smaller than the radius. Therefore if the trajectory on the horizontal line shall reach the furthestmost, thus the angle HEB must be 45° , under which the body must be projected initially; and herein lies the fifth theorem. Now one takes the angle of HEB of 45° , thus

there will be $\sin. 2\zeta = 1$ and consequently the width of the trajectory $EF = 2b$, that is, twice the height b , from which the first speed of the body can be generated by falling. From this the truth of the fifth theorem obtains its correctness. But in all cases the range of the trajectory can be found through this Rule of Three. Namely one says, as the proportion of the sine of 90° to the sine of twice the angle HEB , which the direction of the body makes with the horizon at the beginning, thus the ratio of the height b itself doubled, from which the speed of the body has arisen, to the range of the trajectory EF , such a form as has been found. If one should wish further to determine the greatest height AB , to which the body in its ascent may reach, thus the same is $AB = b \sin.\zeta^2$ and consequently can also be found through the rule of three.

Thus if the resistance of the air had no effect on the cannon ball, thus the path described by the same would be a parabola and the motion of the ball would be found correctly from what has been set down here, and consequently can be determined easily, as almost all the instruction of artillery, which has been built on these foundations, appears to find sufficient. We could also have made our determination to be known more generally, if we had not assumed the line EF to be horizontal, as inclined at will to the horizontal. The calculation would be almost hardly more extensive, and from the same one would have seen, that if such a trajectory should reach such an inclined surface furthest, as then the first direction EH of the ball makes the angle GEF between the vertical line GE and this line EF , along which the weight acts, the same must be divided into two equal parts. But because this calculation can have hardly any use in the artillery, thus we will no longer tarry with that, as we move forwards to the author's following proposition.

ERSTE ANMERKUNG

In diesem Satz untersucht der Autor die Grösse des Widerstands der Luft, welchen eine halbe Carthaunen-Kugel, so sich darinn mit einer Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde beweget, auszustehen hat, und weiset, daß die Kraft des Widerstands über 20 mahl grösser sey, als das Gewicht der Kugel. Um dieses zu erweisen, so legt er den vorher bestimmten Widerstand, welchen eine Kugel, so nur $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hat, und sich mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in 1" beweget, leidet, zum Gründe. Denn da diese beyden Geschwindigkeiten nicht merklich von einander unterschieden sind, so muß sich der Widerstand der grössern zum Widerstand der kleinern verhalten, wie das Quadrat des Diameters der grössern zum Quadrat des Diameters der kleinern: weil sich die Oberflächen zweyer Kugeln unter sich, wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Nun aber sagt der Autor, daß die Oberfläche der 24 pfündigen Kugel mehr als mahl grösser gewesen, als der kleinern Kugel, deren Diameter nur $\frac{3}{4}$ Zoll war, folglich muß der Diameter der großen Kugel gewesen sein $= \frac{3}{4}\sqrt{54}$ Zoll, das ist beynahe $5\frac{1}{2}$ Zoll. Dahero wiegt eine eiserne Kugel, deren Diameter $5\frac{1}{2}$ Zoll groß ist, 24 Pfund; und hieraus laßt sich der Diameter einer jeglichen eisernen Kugel, deren Gewicht bekannt ist, bestimmen. Wir können aber aus der oben gefundenen Formel, wodurch der Widerstand einer Kugel ausgedrückt wird, in einem jeglichen Fall die Verhältniß des Widerstands der Luft zu dem Gewicht der Kugel leicht anzeigen. Denn es sey der Diameter der Kugel $= c$, und $= v$ die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel erzeugt werden kann, so ist, wie wir gefunden haben, der Widerstand dem Gewicht einer mit der Kugel gleich dicken Luft-Säule gleich, deren Höhe

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv,$$

wo heine Höhe von 28845 Englischen oder 27979 Rheinl. Schuhen anzeigt. Ferner ist die Kugel selbst einem gleich dicken Cylinder gleich, dessen Höhe $= \frac{2}{3}c$. Wenn also die Materie der Kugel n mahl schwehrr, als die Luft gesetzt wird, so ist das Gewicht der Kugel dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich, deren Höhe $= \frac{2}{3}nc$, folglich wird sich der Widerstand der Kugel zu ihrer eignen Schwehre verhalten, wie $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$ zu $\frac{2}{3}nc$, das ist, wie $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ zu 1. Wenn also die Kugel von Eisen ist, so wird $n = 6647$, und der Widerstand der Kugel verhält sich zu ihrer Schwehre, wie $\frac{v(h+v)}{8863ch}$ zu 1. Laßt uns nun setzen, die Geschwindigkeit der Kugel betrage 1650 Englische oder 1600 Rheinl. Schuh in einer Secunde, so wird die Höhe $v = 40960$ Rheinl. oder 42226 Engl. Schuh, und $h + v = 71071$ Engl. Schuh. Folglich wird sich der Widerstand zur Schwehre der Kugel verhalten, wie 11,7386 Schuh zum Diameter der Kugel. Weil nun nach des Autoris Rechnung der Diameter der 24 pfündigen Kugel $5\frac{1}{2}$ Zoll, oder $\frac{11}{24}$ Schuh beträgt, so muß sich der Widerstand derselben zu ihrem eigenen Gewicht von 24 u verhalten, wie

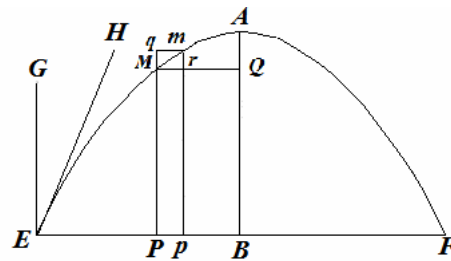
11,7386 zu $\frac{11}{24}$ oder wie 25,6115 zu 1, und ist also der Widerstand über $25\frac{1}{2}$ mahl grösser, als das Gewicht der Kugel. Es ist nicht nöthig, die Ursache zu untersuchen, warum der Autor diesen Widerstand nur 23 mahl grösser findet, als das Gewicht der Kugel. Denn man siehet aus seinem Vortrag sogleich, daß seine Absicht nur dahin gegängen, um zu zeigen, daß der Widerstand der Kugel im vorgelegten Fall gewiß über 20 mahl grösser sey, als das Gewicht derselben; und deswegen mag derselbe mit Fleiß alle Bestimmungen etwas zu klein angenommen haben, damit man um so viel weniger an der Richtigkeit seines Satzes zu zweifeln Ursache hätte.

Da nun der Widerstand der Luft so erstaunlich groß ist, so kann man der gemeinen Meynung, daß sich die Kugeln in Parabeln bewegen, um so viel weniger länger beypflichten, da dieselbe schon hinlanglich wiederlegt seyn würde, wenn auch der Widerstand der Luft nur dem Gewicht der Kugel selbst gleich wäre. Inzwischen ist die Unrichtigkeit dieser gemeinen Meynung schon längst Gründlich genug dargethan worden, obgleich der gemeine Haufe der Artilleristen sich wenig daran gekehret zu haben scheint. Dahero der Autor seine Ausdrückungen, als wenn er zu allererst diesen Fehler entdeckt hätte, etwas maßigen sollte. Wir haben schon in unsern Anmerkungen zu der Vorrede des Verfassers gewiesen, daß dieser Fehler bereits vor geraumer Zeit nicht nur bemerkt, sondern auch verbessert worden; indem man diejenige Linie, welche von einem Körper wirklich in der Luft beschrieben wird, zu bestimmen vermögend gewesen. Unterdessen aber hat man doch die größte Ursache, dem Autori verpflichtet zu seyn, daß er diesen merklichen Zuwachs des Widerstands der Luft, wenn die Bewegung sehr schnell ist, wahr genommen; als wodurch er nicht nur den gemeinen Haufen von einem groben Irrthum befreyet, sondern auch den Gelehrten die Unrichtigkeit der durchgehends angenommenen Lehre von dem Widerstand der Luft deutlich vor Augen gelegt hat.

ZWEYTE ANMERKUNG

Weil der Autor im folgenden Satz willens ist, den Grössen Unterscheid durch Versuche zu zeigen, welcher sich zwischen der wahren Bahn, so ein geworfener Körper in der Luft beschreibt, und einer Parabel befindet, so zieht er hier die fürnehmsten Eigenschaften der parabolischen Bewegung in Betrachtung. Denn da es nicht so leicht ist, die wahre Bahn, welche ein Körper beschreibt, durch die Erfahrung zu bestimmen, so würde es sehr schwehr seyn, unmittelbar den Unterscheid zwischen dieser Bahn und einer Parabel zu beobachten. Derowegen betrachtet hier der Verfasser einige Eigenschaften, mit welchen die Bewegung in einer Parabel nöthwendig verknüpft ist, um nachgehends untersuchen zu können, ob sich diese Eigenschaften bey der Bewegung eines Körpers in der Luft befinden, oder nicht. Denn wenn nur einige von diesen Eigenschaften in der Luft nicht statt finden, so folget daraus unstreitig, daß die Bahn, welche ein solcher Körper in der Luft beschreibt, keine Parabel seyn könne. Ob sich nun gleich diese Eigenschaften in unzählich viel Büchern gründlich erwiesen befinden, so wollen wir doch dieselben allhier aus den ersten Gründ-Sätzen der Bewegung herleiten, theils damit man die Wahrheit derselben desto deutlicher einsehe, theils aber fürnehmlich, damit wir hernach auf gleiche Weise die wahre Bewegung eines Körpers in der Luft desto leichter bestimmen können.

GALILEUS hat schon gefunden, daß ein schwerehr Körper in einem Luftleeren Raum, oder wenn derselbe gar keinen Widerstand antrifft, sich in einer Parabel bewege; und aus eben diesem Gründe haben die meisten Autores, welche von der Artillerie geschrieben haben, die Bahn einer Bombe oder einer StückKugel in der Luft für eine Parabel gehalten; nicht als wenn dieselben gar keinen Begriff von dem Widerstand gehabt hätten, sondern weil sie diesen Widerstand so klein zu seyn geglaubt haben, daß derselbe in der Bewegung dieser Körper keine merkliche Veränderung verursachen könnte. Wir wollen also setzen, daß der Körper gar keinen Widerstand leide, und aus den Gründ sätzen der Bewegung diejenige Linie bestimmen, nach welcher derselbe seine Bewegung fortsetzen muß, nachdem derselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit unter einem gegebenen Winkel mit dem Hörizont geworfen worden.



Es sey demnach EF eine Hörizont-Linie, auf welcher ein Körper aus dem Punkt E nach der Direction EH mit einer Geschwindigkeit, so durch den Fall aus einer Höhe $= b$ erlangt wird, geworfen worden, und die Krümme Linie $EMAF$ soll den Weg vorstellen, nach welchem sich der Körper bewegt, biß derselbe wiederum auf die Hörizont-Linie in F herunter fällt. Man nenne den Winkel $HEF = \zeta$, welchen die Direction des Körpers EH anfänglich mit der Hörizont-Linie EF macht. Da nun die Geschwindigkeit des Körpers in E durch $\sqrt{b}$ ausgedrückt wird, wenn man diese Bewegung in den Gedanken in zwey andere zertheilet, deren eine nach der Vertical-Linie EG , die andere aber nach der Hörizont-Linie EF gerichtet ist, so wird die Geschwindigkeit der erstern $= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$ und die Geschwindigkeit der letztern $= \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$. Wenn man nemlich den Sinum von $90^\circ = 1$ annimmt. Nun wollen wir setzen, der Körper sey schon biß in M gekommen, und aus M die Perpendicular-Linie MP herunter lassen, alsdenn $EP = x$ und $PM = y$ nennen; die Zeit aber, in welcher der Körper in M gekommen, sey $= t$. In einer unendlich kleinen Zeit dt wird der Körper durch Mm fortgehen, und wenn der Weg durch die Zeit dividirt für die Geschwindigkeit angenommen wird, so wird die Geschwindigkeit des Körpers in M seyn $= \frac{Mn}{dt}$. Diese Bewegung zertheile man auch in zwey andere nach den Directionen Mq und Mr , deren jene auf den Hörizont perpendicular, diese aber dem Hörizont parallel ist; und weil, nachdem man die Linie mp mit MP parallel gezogen, seyn wird

$$Mq = mr = dy \text{ und } Mr = dx,$$

so wird die Geschwindigkeit nach der Direction $Mq = \frac{dy}{dt}$ und nach der Direction

$Mr = \frac{dx}{dt}$. Da nun die Bewegung des Körpers nur allein von seiner Sehwehre verändert wird, deren Direction nach MP abwärts gerichtet ist, so sieht man wohl, daß die Geschwindigkeit nach der Direction Mr davon keine Veränderung leide, und dahero allenthalben gleich groß, das ist der ersten Geschwindigkeit nach der Hörizontal-Direction, welche war $= \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$ beständig gleich bleibe. Dahero ist

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta, \text{ oder } dx = dt \sqrt{b} \cdot \cos.\zeta$$

welche Vergleichung integrirt giebt

$$x = t \cos.\zeta \cdot \sqrt{b},$$

woraus erhellet, daß der Körper nach der Hörizontal-Direction immer gleich geschwind fortgehe. Hergegen würket aber die ganze Schwehre nach der andern Vertical- Direction Mq . Da nun die Geschwindigkeit nach dieser Direction ist $= \frac{dy}{dt}$, so wird die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeugt wird, $= \frac{dy^2}{dt^2}$, wovon das Differentiale, wenn dt unveränderlich angenommen, seyn wird

$$= \frac{2dyddy}{dt^2}.$$

Dieses Differentiale muß sich zu dem Raum dy , welchen der Körper nach dieser Bewegung in der Zeit dt beschreibt, verhalten, wie die Kraft, welche nach der Direction Mq auf den Körper würket, zu seinem Gewicht. Nun aber ist diese Kraft dem Gewicht des Körpers selbst gleich; nur ist zu merken, daß dadurch die Geschwindigkeit nicht vermehret, sondern vermindert werde. Dahero erhalten wir diese Proportion:

$$\frac{2dyddy}{dt^2} : dy = -1 : 1,$$

woraus diese Aequation entspringt:

$$2ddy = -dt^2.$$

Hiervon ist das Integrale

$$2 \frac{dy}{dt} = C - t,$$

allwo $\frac{dy}{dt}$ die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers nach Verfließung der Zeit t anzeigt.

Da nun im Anfänge, da $t = 0$, die Vertical-Geschwindigkeit war $= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, so wird für diesen Ort $2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta = C$, wodurch die Größe des Buchstabens a , welcher durch die Integration hinein gekommen, bestimmt wird. Also wird seyn

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - t,$$

oder

$$2dy = 2dt \sin.\zeta \cdot \sqrt{b} - tdt,$$

wovon das Integrale giebt

$$2y = 2t \sin.\zeta \cdot \sqrt{b} - \frac{1}{2}tt.$$

Aus der Differential-Aequation

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - t,$$

erhellet erstlich, weil $\frac{dy}{dt}$ die Vertical-Bewegung anzeigt, daß wenn $t = 2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers verschwindet, und derselbe seine Horizontal-Bewegung allein behalte. Wenn wir also setzen, daß dieses im Punct A geschehe, so wird die Tangens der Krümmen Linie in A horizontal seyn. Wenn aber t grösser wird, als $2\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta$, so bekommt die Vertical-Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ einen negativen Werth, welcher anzeigt, daß der Körper alsdenn im Herunterfallen begriffen sey. Also wird EA derjenige Theil der Bahn EMF seyn, durch welchen der Körper hinauf steigt, und AF der Theil, durch welchen der Körper wiederum herab fällt.

Um aber die Natur dieser Krümmen Linie näher zu erkennen, so ist zu merken, daß

$$t = \frac{x}{\cos.\zeta \cdot \sqrt{b}}.$$

Man setze also diesen Werth für t in der Integral-Aequation

$$2y = 2t \sin.\zeta \cdot \sqrt{b} - \frac{1}{2}tt,$$

so wird

$$2y = 2x \text{ tang.}\zeta - \frac{xx}{2b \cos.\zeta^2}.$$

oder

$$xx - 4bx \sin.\zeta \cos.\zeta = -4by \cos.\zeta^2.$$

Hieraus kommt

$$-x + 2b \sin.\zeta \cos.\zeta = 2 \cos.\zeta^2 \cdot \sqrt{(bb \sin.\zeta^2 - by)}.$$

Aus dieser Aequation sieht man nun leicht, daß die gesuchte Krümme Linie *EMF* eine Parabel sey. Denn man nehme $EB = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta$, so wird

$$BP = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta - x.$$

Hernach richte man in *B* die Perpendicular-Linie auf $BA = b \sin.\zeta^2$ und ziehe *MQ* mit *EF* parallel, so wird

$$AQ = b \sin.\zeta^2 - y, \quad MQ = BP.$$

Nun nenne man $AQ = p$ und $QM = q$, so wird $q = 2 \cos.\zeta \cdot \sqrt{bp}$ oder

$$qq = 4bp \cos.\zeta^2,$$

welche Aequation klar zeigt, daß die gesuchte Krümme Linie eine Parabel sey, deren Axe die Vertical-Linie *AB*. Und hieraus erhellet die Wahrheit des ersten, andern und dritten Lehrsatzes: nemlich erstlich, daß die Axe der Parabel *AB* auf die Hörizontal-Linie *EF* perpendicular, und daß folglich die beyden Theile *AE* und *AF* einander gleich und ähnlich seyn. Hernach ist auch klar, daß die äussersten Puncte auf der Hörizontal-Linie *E* und *F* gleich weit von dem höchsten Punct *A* entfernt seyen. Drittens folgt aus dieser Gleichheit der theile *AE* und *AF*, daß die Winkel, welche die Krümme Linie in *E* und *F* mit der Hörizontal-Linie *EF* macht, einander gleich seyen. Weil ferner $EF = 2EB = 4b \sin.\zeta \cos.\zeta$, so wird die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers in *F* seyn

$$= \sqrt{b} \cdot \sin.\zeta - \frac{x}{2\sqrt{b} \cdot \cos.\zeta},$$

wenn man für *x* den Werth $4b \sin.\zeta \cos.\zeta$ setzt. Es wird also diese Geschwindigkeit

$$= -\sqrt{b} \cdot \sin.\zeta,$$

welche von der ersten in *E* nur darinne unterschieden ist, daß jene aufwärts, diese aber abwärts gerichtet ist. Weil nun die Hörizontal-Bewegung immer einerley bleibt, so folgt hieraus, daß der Körper in *F* eben diejenige Geschwindigkeit habe, mit welcher er in *E* fortgeworfen worden. Weil ferner $EB = 2b \sin.\zeta \cos.\zeta$ so ist $EB = b \sin.2\zeta$, und die Weite des Wurfs auf der Hörizontal-Linie, nemlich *EF*,

$$= 2b \sin.2\zeta.$$

Woraus erstlich folgt, daß, wenn die Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ im Anfänge E einerley bleibt, die Weite des Wurfs dem Sinus des doppelten Winkels HEF proportional sey; wenn aber der Winkel FEH einerley bleibt, und die Geschwindigkeit $\sqrt{b}$ verändert wird, so ist die Weite des Wurfs EF dem b , das ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Dieses dienet zum Beweisthum des 6ten und 7ten Lehr-Satzes. Was ferner die gröste Weite des Wurfs anlanget, weil die Weite $EF = 2b \sin.2\zeta$ gefunden worden, so sieht man sogleich, daß dieselbe am grösten werde, wenn der Winkel 2ζ neunzig Grad hält; denn da wird sein Sinus dem Radio gleich, alle übrigen Sinus aber sind, wie bekannt, kleiner als der Radius. Wenn also der Wurf auf der Hörizontal-Linie am weitesten reichen soll, so muß der Winkel HEB , unter welchem der Körper anfänglich geworfen wird, 45° halten; und hierinne besteht der vierdte Lehr-Satz. Nimmt man nun den Winkel HEB von 45° , so wird $\sin. 2\zeta = 1$ und folglich die Weite des Wurfs $EF = 2b$, das ist, der doppelten Höhe b , aus welcher die erste Geschwindigkeit des Körpers durch den Fall erzeugt werden kann. Hieraus erhalt also der funfte Lehr-Satz seine Richtigkeit. In allen Fallen aber kann die Weite des Wurfs durch diese Regel De-tri gefunden werden. Man sage nemlich, wie sich verhält der Sinus von 90° zum Sinus des doppelten Winkels HEB , welchen die Direction des Körpers im Anfänge mit dem Hörizont machet, also verhält sich die doppelte Höhe b , woraus die Geschwindigkeit des Körpers erzeugt wird, zur Weite des Wurfs EF , welche solcher Gestalt gefunden wird. Wollte man noch ferner die gröste Höhe AB bestimmen, zu welcher der Körper in seinem Heraufsteigen gelangt, so ist dieselbe $AB = b \sin.\zeta^2$ und wird folglich auch leicht durch die Regel De-tri gefunden.

Wenn also der Widerstand der Luft auf die Canonen-Kugeln keine würkung hätte, so würde die Bahn derselben beständig eine Parabel seyn und die Bewegung der Kugel würde sich auch nach den hier gefundenen Gesetzen richten, und folglich leicht bestimmt werden können, wie fast aus allen Anleitungen der Artillerie, welche auf diese Gründe gebauet worden, zur Gnüge erhellet. Wir hätten auch leicht unsere Bestimmung allgemeiner machen können, wenn wir die Linie EF nicht horizontal, sondern auf den Hörizont nach Belieben inclinirt, angenommen hätten. Die Rechnung würde fast gar nicht weitläuftiger worden seyn, und aus derselben würde man gesehen haben, daß, wenn der Wurf auf einer solchen schiefen Fläche am weitesten reichen soll, alsdenn die erste Direction des Körpers EH den Winkel GEF , welchen die Vertical-Linie GE , als nach welcher die Schwehre würket, mit der schiefen Linie EF macht, gleichfalls in zwey gleiche Theile zerschneiden müsse. Weil aber diese Betrachtungen in der Artillerie gar keinen Nutzen haben können, so wollen wir uns daßey nicht länger aufhalten, sondern zum folgenden Satz des Autoris fortschreiten.