INVESTIGATIONS INTO THE METHOD OF MAXIMA AND MINIMA.

(*Miscellanea Taurinensia*, t.1, 1759.)

1. Geometers have known for a long ago that when the first differential of some variable disappears without the second disappearing at the same time, it becomes always a *maximum* or a *minimum;* and in particular it is a *maximum*, if the second differential is negative, and a *minimum,* if this differential is positive. If the second differential disappears at the same time as the first, then the quantity is neither a *maximum*, nor a *minimum,* unless the third differential should disappear likewise, in which case the proposed point will become a *maximum,* if the fourth differential is negative, and a minimum, if it is positive, and so on thus. In general, for some quantity to become a *maximum* or a *minimum,* it is necessary that the successive orders of the differentials, which vanish together, must be in an odd number, and then it is definitely a *maximum* or a *minimum,* except that the differential which follows the last one vanishing is found to be negative or positive. *See* MACLAURIN, *A Treatise on Fluxions.* p.338 et 857.

2. All this is assumed and to be well understood, that Z represents an algebraic function of the variables *t, u, x, y, ...* , and that it is proposed to render from that *maximum* or a *minimum.* There shall be , according to the ordinary rules,

$$dZ = pdt + qdu + rdx + sdy + \ \ldots,$$

and at first one has the equation

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \ \ldots = 0\,.$$

But as the relation between *t, u, x, ...* is yet indeterminate, the same as that of their differentials *dt, du, dx, ...* , and which besides the given equation must be true whatever their relation may be, it is evident that to remove them completely from the equation, it is necessary that each member *pdt, qdu, rdx, ...* , separately be put equal to zero, where one extends the condition to just as many equations as there are variables, namely : $p = 0,\ q = 0, r = 0,\ \ldots.$ By means of all these equations, the value of each unknown is found *t, u, x, ...* ,which, substituted in the proposed function Z, will render that to be a *maximum* or a *minimum.*

3. Turning now to the examination of the second differential. While assuming, which is allowed, that the first differentials *dt, du, dx ...* are constants, one will have

$$d^2\mathrm{Z} = dpdt + dqdu + drdx + dsdy + \ \ldots.$$

There shall be

$$dp = \mathrm{A}dt + \mathrm{B}du + \mathrm{D}dx + \mathrm{G}dy + \ldots ,$$
$$dq = \mathrm{B}dt + \mathrm{C}du + \mathrm{E}dx + \mathrm{H}dy + \ldots ,$$
$$dr = \mathrm{D}dt + \mathrm{E}du + \mathrm{F}dx + \mathrm{I}dy + \ldots ,$$
$$ds = \mathrm{G}dt + \mathrm{H}du + \mathrm{I}dx + \mathrm{L}dy + \ldots ,$$

giving

$$d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2 + 2\mathrm{D}dtdx + 2\mathrm{E}dudx + \mathrm{F}dx^2 + 2\mathrm{G}dtdy + 2\mathrm{H}dudy + 2\mathrm{I}dxdy + \mathrm{I}dy^2 + \ldots.$$

In order to begin with the simplest case, we assume that there shall be a single variable *t*, so that $d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2$ *;* first it can be seen that, since dt^2 is always positive, the differential $d^2\mathrm{Z}$ is required to have the same sign as the magnitude A; thus, if A is positive, Z will be a *minimum*, and if A is negative it will be a *maximum;* if $\mathrm{A} = 0$ the given rules (1) are followed.

4. Two variables shall be contained in Z , namely *t* and *u;* then

$$d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2 .$$

It appears at the first glance very difficult to know if this expression d^2 Z must be positive or negative, without having the relation of *dt* to *du,* which is not given ; because, since in changing this relation, the function d^2 Z must be changed also, it appears without doubt that it also can change from positive to negative, or from negative to positive, while the magnitudes A, B, C remain the same. Nevertheless to the proposed

$$\mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2 ,$$

this form is given

$$\mathrm{A}\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}\right)du^2 ;$$

and it will be seen that, as the squares $\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}}\right)^2$ and du^2 always have the same sign + , necessarily the whole quantity will be positive if the two coefficients A and $\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ are positive, and conversely it will become negative, when these two will both become negative, whatever the relation shall be of *dt* to *du.* Thus one will have for the *minimum* case :

$$\mathrm{A}>0,\ \mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} > 0 ,$$

namely

$$C > \frac{B^2}{A} \text{ ou } CA > B^2,$$

which gives the same:

$$C > 0;$$

thus unless the quantities A, B, C do not obey these conditions

$$A > 0,\ C > 0 \text{ and } AC > B^2,$$

the proposed Z cannot be a *minimum.* In the second place one finds for the *maximum*

$$A < 0,\ C - \frac{B^2}{A} < 0,$$

namely

$$C < \frac{B^2}{A},\ CA > B^2,$$

and since A is negative, which again gives

$$C < 0;$$

thus the conditions for the *maximum* to be partially the same, and partially the exact opposites to those of the *minimum.*

5. If A or C, or both the two are equal to zero, without B also being zero, the condition that $AC > B^2$ will not be maintained, therefore the proposed quantity can never become a true *maximum* or *minimum;* the same thing will happen whenever A and C shall have opposite signs, for since B^2 is always positive the condition that $AC > B^2$ becomes impossible. Again if B should vanish at the same time as A or C, d^2Z would itself be reduced to the case of a single variable, and as a consequence would be able to be again a *maximum* or a *minimum,* or neither the one nor the other, according to what was said for the first case. Finally, if the quantity d^2Z were completely equal to zero, namely

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,$$

it would be necessary to resort to the third difference ; which if that is itself is found not to be equal to zero, the quantity Z is unable to be either a *maximum* or a *minimum;* and on the contrary, if it vanishes at the same time as the second, one searches at once the fourth ; and if it does not vanish, it will be easy, by the method we have used before, to find if it is positive or negative, which again will determine the *maximum* or the *minimum.*

6. When there are three variables, namely t, u, x, the differential d^2Z takes this form

$$d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2 + 2\mathrm{D}dtdx + 2\mathrm{E}dudx + \mathrm{F}dx^2$$

which one will reduce at first to :

$$\mathrm{A}(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}})^2 + \left(\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}\right)du^2 + 2\left(\mathrm{E} - \tfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}}\right)dudx + \left(\mathrm{F} - \tfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}}\right)dx^2 .$$

Putting

$$\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} = a,\ \mathrm{E} - \tfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}} = b,\ \mathrm{F} - \tfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}} = c$$

and one will have :

$$d^2Z = \mathrm{A}\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}}\right)^2 + adu^2 + 2bdudx + cdx^2;$$

now working on the last three terms, as we have done above (4), and the complete differential proposed d^2Z will become :

$$\mathrm{A}\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}}\right)^2 + a\left(du + \tfrac{bdx}{a}\right)^2 + \left(c - \tfrac{b^2}{a}\right)dx^2;$$

now, the squares $\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}}\right)^2$, $\left(du + \tfrac{bdx}{a}\right)^2$ and dx^2 are positive always, the whole differential will be positive from the same if the differential shall be likewise positive or the coefficients A, a and $c - \tfrac{b^2}{a}$ each have the + sign ; thus one has for the *minimum* the following conditions :

$$\mathrm{A} > 0,\ a > 0,\ ca > b^2,$$

or, on returning their values in place of a, b, c,

$$\mathrm{A} > 0,\ \mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} > 0,\ \left(\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}\right)\left(\mathrm{F} - \tfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}}\right) > \left(\mathrm{E} - \tfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}}\right)^2$$

namely,

$$\mathrm{A} > 0,\ \mathrm{CA} - \mathrm{B}^2 > 0 \text{ and } \left(\mathrm{CA} - \mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA} - \mathrm{D}^2\right) > \left(\mathrm{EA} - \mathrm{BD}\right)^2$$

from which it is apparent again, that

$$\mathrm{C} > 0,\ \mathrm{F} > 0 \text{ and } \mathrm{FA} > \mathrm{D}^2 .$$

One will find by the same principles for the *maximum*

$$\mathrm{A} < 0,\ \mathrm{CA} > \mathrm{B}^2 \text{ and } \left(\mathrm{CA} - \mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA} - \mathrm{D}^2\right) > \left(\mathrm{EA} - \mathrm{BD}\right)^2,$$

and consequently,

$$\mathrm{C} < 0,\ \mathrm{F} < 0 \text{ et } \mathrm{FA} > \mathrm{D}^2.$$

7. If the quantities A and C vanish alone, either both two, or simply one, the second condition becomes impossible; if it is F which vanishes, then the third condition becomes impossible; for $\left(\mathrm{CA} - \mathrm{B}^2\right)\left(-\ \mathrm{D}^2\right)$, which is necessarily negative because $\mathrm{CA} > \mathrm{B}^2$, must always be found to be less than $\left(\mathrm{EA} - \mathrm{BD}\right)^2$, from which it follows that Z cannot be a *maximum* or a *minimum*, if A, C, and F taken separately or together, as one wishes, are equal to zero. If by the terms vanishing the differential d^2Z shall be reduced to two terms, or to one alone, it will fall either into the second case or into the first, and one must follow the rules given (3 and following). Finally, if all the d^2Z is found to be equal to zero, and because the third differential was not likewise equal to zero, one would be certain that the proposed Z could would become neither a *maximum* nor a *minimum*; and when this third differential vanishes with the second, by some transformations similar to those which we have used, one would be able to distinguish the case of the *minimum* and of the *maximum* and those which are useless.

8. The same theory can be extended to functions of four or more variables. Anyone who will have grasped the main idea of these reductions I have used up to the present, without trouble will be able without any trouble to discover these which will be suitable for each particular case. For the rest, in order not to misunderstand me in these investigations, it is necessary to note that these transformations may well be different from these we have given already ; but in examining the matter more closely, it will be found invariably that, whatever they may be, they will be able always to be reduced to these, or at least to be included there.

9. As I believe this theory to be entirely new, it will perhaps be useful to add the following reflections. Whatever the number of variables which are present in the proposed function Z, if we look at each of these in particular, and we look for the *maximum* or *minimum* which will be appropriate for the reader while all the others remain the same, one will find separately the first differentials *pdt, qdu, rdx*, .. . , of which each being equal to zero will give us the same equations as above (2)

$$p = 0,\ q = 0,\ r = 0,\ ....$$

Passing on to the second differentials in the same manner, these would be found separately $\mathrm{A}dt^2,\ \mathrm{C}du^2,\ \mathrm{F}dx^2,\ \mathrm{L}dy^2,\ldots$, and as a consequence if all A,C, F, L, ... were positive or negative, one would be able to believe that that would suffice because the values of *t, u, x, ...* , treated in the equations $p = 0,\ q = 0,\ ....$ necessarily make the proposed Z a *minimum* or a *maximum.* It is true, in effect, because the relation to each of these variables must be treated separately, the given quantity Z must always be the greatest or the smallest; but is it certain that what applies for each taken separately must also be true for all together? We will examine this more closely.

10. The proposed Z shall contain the variables *t* and *u* only, and that can be regarded as the ordinate of a surface, of which *t* and *u* are the two other ordinates; then the question in this case reduces itself into finding the greatest or the least ordinate of a surface whose equation is given, namely by

$$dZ = pdt + qdu\ .$$

If *u* may be made constant, that is reduced at first to

$$dZ = pdt\ ,$$

and in this case it expresses all the sections of the same surface parallel to the axis of *t,* from which measure the quantity *u* receives different values. Hence let $p = 0$, and one will have (2) a value of *t* which will give the biggest or the smallest ordinate Z in each of these parallel sections ; but, since *u* is constant, if one differentiates *d*Z again, one will have

$$d^2Z = \mathrm{A}dt^2\ ,$$

and as a consequence of which, one will determine a *maximum* or *minimum* from the single value of A, after nevertheless having substituted in place of *t,* the value which provides the equation $p = 0$. Namely, if A is found to be positive or negative, whatever the value of *u* shall be, or rather if, in changing *u*, it must also change, one will conclude in the first case that all the said sections are a *maximum* or a *minimum,* and in the second case that they are a *maximum* within certain limits, within others a *minimum.* If A is equal to zero, whatever the value of the constant *u* shall be, then none of the said sections will have either a *maximum* or *minimum.* But, if A becomes equal to zero only when *u* had been given certain values, in that case only the corresponding sections will be relieved from being a *maximum* or a *minimum.* The place of all these ordinates which are a *maximum* or a *minimum,* or neither the one nor the other, will be contained in the equation $p = 0$, with regard to the variation of the variable *u* alone ; hence they will form a section on the same surface, which will be determined by the two equations jointly

$$dZ = pdt + qdu \text{ and } p = 0\ ,$$

or

$$dZ = qdu \text{ and } p = 0\ .$$

It can be seen from that, in order to find the *maximum* or the *minimum* of the whole surface, it will be required to look for the biggest or the smallest ordinate which agrees with the same section ; then again one will have $q = 0$, which will give the value of the other variable *u*.

11. Passing now to the differential of *q;* it has been assumed at first (3) to be equal to $Bdt + Cdu$ *;* but since in this case *t* is determined by *u* in the equation $p = 0$, or else in the its differential $\mathrm{A}dt + \mathrm{B}du = 0, dt$ is equal to $-\frac{\mathrm{D}du}{\mathrm{A}}$, which becomes

$$dq = \left(-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{C}\right)du \;;$$

it arises then that if $-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{C}$ is positive, namely if $\mathrm{C} > \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$, the ordinate will be the least ; if $\mathrm{C} < \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ it will be the greatest, and if $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ it will be neither the one nor the other, unless the conditions required in the kinds of higher differentials have not been fulfilled. Now, on considering that *maxima* and *minima,* it will be easy to understand that the ordinate Z will not be able to be the *maximum* among all the others, unless it shall not be the greatest of all these which are contained in the section determined by $d\mathrm{Z} = qdu$, and further that all the ordinates which compose that same section again shall not be themselves the *maxima* in the corresponding parallel sections (10). Concerning the same one will prove likewise that the quantity Z shall not be the absolute *minimum* unless it shall be *minimum* in the section which contains all the *minima.* For amongst all the others, the ordinate case may be either the greatest or the least among these which are neither the greatest nor the least, or lying between the greatest or the smallest, it will be neither the greatest nor the smallest, or again it may be the greatest amongst the smallest, or conversely, that which does not give a true *maximum* or *minimum* as one searches. From all this I conclude hence, after having derived the values of *t* and *u* from the equations $p = 0$, $q = 0$, and to have substituted these into A and into $\mathrm{C} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$, it is required, so that Z shall be a true *maximum,* that A shall be negative and

$$\mathrm{C} < \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}, \text{ namely } \mathrm{CA} < \mathrm{B}^2 \;;$$

and on the other hand, if Z must be a true *minimum,* one must find A positive and

$$\mathrm{C} > \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}, \text{ or } \mathrm{CA} > \mathrm{B}^2,$$

agreeing with the general theory explained (4. *et seq*.).

12. If, instead of first considering *u* constant and *t* variable, one had made *u* variable and *t* constant, then one would arrive at the following determinations of the *maximum,*

$$\mathrm{C} < 0 \text{ and } \mathrm{AC} > \mathrm{B}^2$$

and

$$C > 0 \text{ and } AC > B^2$$

for the *minimum*, which return the same. For the rest, this method which we come to use for finding the conditions of the *maximum* and *minimum* in functions of two variables only changing, is equally applicable to other functions composed from more variables, it also has the advantage of being more analytical and direct than the first, and that is why I will add here that development in all its generality.

13. The variables contained in Z shall be any such number wished : at first I shall consider only a single variable, and I take by the differentiation of the equation for the *maximum* or *minimum* what is appropriate for that ; then on passing to the second differential, I find the conditions which determine the proposed to be a *maximum* or a *minimum*, or neither the one nor the other. After this first operation, I substitute into Z or into its differentials simply the value of the first variable found, and I proceed to another variable in the same manner ; then, putting again the value found for this second variable into the function proposed Z, one will pass to the examination of the third variable, and hence so on, etc. Let *t* be the first variable that one wishes to consider in Z, and one will have

$$dZ = pdt \text{ and } d^2Z = Adt^2 ,$$

where $p = 0$, and $A > 0$ for the *minimum*, $A < 0$ for the *maximum* (1).
But now *t* and *u* shall be at present all the two variables, it will result in

$$dZ = pdt + qdu ,$$

which, because $p = 0$, it is reduced to

$$dZ = qdu ,$$

from which one derives

$$d^2Z = (Bdt + Cdu)du ;$$

but since $p = 0$, dp will be that too, and as a consequence

$$Adt + Bdu = 0$$

which gives ,

$$dt = -\tfrac{Bdu}{A} :$$

this value substituted into d^2Z will change that into

$$d^2Z = (-\tfrac{B^2}{A} + C)du^2$$

I will then have $q = 0$ and

$$-\tfrac{B^2}{A}+C>0$$

for the *minimum,* and

$$-\tfrac{B^2}{A}+C<0$$

for the *maximum,* namely, since A is positive in the first case and negative in the second case, on multiplying by A, it will result always in the same condition $AC>B^2$. If, as well as the two preceding variables, there is yet a third variable x to be considered, I look for the value of dZ with regard to these three variables t, u, x, and I find

$$dZ = pdt + qdu + rdx\,,$$

that which, because $p=0,\ q=0$, becomes

$$dZ = rdx\,;$$

then the second differential will be

$$d^2Z = (Ddt + Edu + Fdx)dx.$$

at present, by means of the equations

$$p=0,\ q=0\,,$$

or rather of their differentials

$$Adt + Bdu + Ddx = 0 \ \text{ and } \ Bdt + Cdu + Edx = 0\,,$$

I look for the values of dt and du in dx, and I find

$$dt = \tfrac{BE-CD}{AC-B^2}dx,\quad du = \tfrac{BD-AE}{AC-B^2}dx;$$

I substitute these into the expression of d^2Z that gives me,

$$d^2Z = \left(\tfrac{BE-CD}{AC-B^2}D + \tfrac{BD-AE}{AC-B^2}E + F\right)dx^2.$$

It follows hence in the first place for the *maximum* or *minimum*

$$r=0;$$

then

$$\tfrac{BE-CD}{AC-B^2}D + \tfrac{BD-AE}{AC-B^2}E + F > 0$$

for the *minimum*, and < 0 for the *maximum;* or rather, on removing the denominator $AC - B^2$ which, as it is always positive, one has

$$2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 + ACF > 0$$

for the *minimum*, and < o for the *maximum*. Let this expression be multiplied by A, which is positive in the first case and negative in the second, and one will have

$$2ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0,$$

for the *maximum*, and for the *minimum*, namely

$$\left(CA - B^2\right)\left(FA - D^2\right) > \left(EA - BD\right)^2.$$

One would follow the same procedure for a greater number of variables.

14. This method, being general for whatever the number of variables may be, will not be limited only to algebraic functions, but yet will be able to be extended with success to the *maxima* and *minima* which are of a higher order and which belong to these indefinite integral formulas. I delay the treatment of this subject, which I believe deserves an entirely new approach, in a special work which I am preparing on this matter, and in which, after having set out the general method and analytically in order to resolve all the problems concerning these kinds of *maxima* or *minima*, I will then deduce from that, by the principle of least amount of action, all the mechanics of bodies, be they solids or fluids.

15. I will finish this discussion with some simpler examples which will illustrate the theory which has just been established. Let there be so many bodies considered to be perfectly elastic and arranged on a straight line at rest without touching each other ; we suppose that the first collides with the second with a given speed *c*, the second with the speed acquired from the first strikes the third, and thus so on; the masses of the first and the last being given, one asks for the masses of the intermediate bodies, in order that the final receives the greatest possible speed.

Let *a* be the mass of the first, and *b* that of the last; the intermediate unknown masses shall be *t*, *u*, *x*, *y*, ... ; by the law of collisions on will find the speed communicated from the first body *a* to the second *t* to be $\frac{2ac}{a+t}$ [*i.e.* from the conserved *vis viva* and quantity of motion], that which gives a velocity to the third mass *u* equal to $\frac{2.2act}{(a+t)(t+u)}$, and thus so on ; hence the speed which the final mass *b* will receive will be expressed by

$$\frac{2\ldots 2catuxy\ \ldots\ b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots},$$

an expression which must become a *maximum.* In order to find the differential more easily, which is assumed equal to Z, and taking the logarithms of both parts, it is found

$$\left.\begin{array}{l} l2\ ...2ca + lt + lu + lx + ly.... \\ -l\left(a+t\right) - l\left(t+u\right) - l\left(u+x\right) - l(x+y) \end{array}\right\} = l\mathrm{Z}\ ,$$

which gives this by differentiation

$$\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \ . .. \ - \frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} - ... \ = \frac{d\mathrm{Z}}{Z};$$

from where, on putting together and reducing to the same denominator those terms affecting the same differentials, there is derived :

$$d\mathrm{Z} = \frac{Z\left(au - t^2\right)dt}{t\left(a+t\right)(t+u)} + \frac{\mathrm{Z}\left(tx - u^2\right)du}{u\left(t+u\right)\left(u+x\right)} + \frac{\mathrm{Z}\left(uy - x^2\right)dx}{x(u+x)\left(x+y\right)} + ...$$

Hence in the first place one will have the following equations for the *maximum* or *minimum*

$$au = t^2,\ tx = u^2,\ uy = x^2,\ ...\ ,$$

which give the ratios

$$a:t = t:u,\ t:u = u:x,\ u:x = x:y, ...\ ,$$

namely,

$$::a:t:u:x:y:...\ b;$$

from which it is seen that all the masses must make a geometric progression, of which the two end values are those given *a* and *b.* To judge now for a *maximum* or *minimum*, it shall be required to abbreviate,

$$\frac{\mathrm{Z}}{t(a+t)(t+u)} = \alpha,$$

$$\frac{\mathrm{Z}}{u(t+u)(u+x)} = \beta,$$

$$\frac{\mathrm{Z}}{x(u+x)\left(x+y\right)} = \gamma,$$

......................,

one will have

$$p=\alpha\left(au-t^2\right),$$
$$q=\beta(tx-u^2),$$
$$r=\gamma\left(uy-x^2\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

hence

$$dp=\left(au-t^2\right)d\alpha+\alpha(adu-2tdt),$$
$$dq=(tx-u^2)d\beta+\beta(xdt+tdx-2udu),$$
$$dr=\left(uy-x^2\right)d\gamma+y(ydx+udy-2xdx),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Now, since the terms $a, t, u, x, y, \ldots$ must be in a continued progression, if the constant ratio of any preceding term to it consequent term is called $1:m$, one finds

$$t=ma,\quad u=m^2a,\quad x=m^3a,\quad y=m^4a,\ldots\ldots,$$

further

$$\beta=\tfrac{\alpha}{m^3},\quad \gamma=\tfrac{\alpha}{m^6},\ldots\ldots,$$

which values substituted into the preceding expressions will reduce these to

$$dp=\alpha a\left(du-2mdt\right),$$
$$dq=\alpha a\left(dt-\tfrac{2du}{m}+\tfrac{dx}{m^2}\right),$$
$$dr=\alpha a\left(\tfrac{du}{m^2}-\tfrac{2dx}{m^3}+\tfrac{dy}{m^4}\right),$$

and thus for the others. Hence one will have

$$\mathrm{A}=-2m\alpha a,\ \mathrm{B}=\alpha a,\ \mathrm{C}=-\tfrac{2\alpha a}{m},\ \mathrm{D}=0,\ \mathrm{E}=\tfrac{\alpha a}{m^2},$$
$$\mathrm{F}=-\tfrac{2\alpha a}{m^3},\ \mathrm{G}=0,\ \mathrm{H}=0,\ \mathrm{I}=\tfrac{\alpha a}{m^4},\ldots\ldots\ldots$$

It can be seen in the first place that A is negative, and that consequently the proposed must be a *maximum* if the other conditions are fulfilled. Now

$$\mathrm{AC}=4\alpha^2a^2 \text{ and } \mathrm{B}^2=\alpha^2a^2,$$

hence

1° $$\mathrm{AC} > \mathrm{B}^2;$$

$$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2 = 3\alpha^2 a^2, \quad \mathrm{FA}-\mathrm{D}^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}, \quad \mathrm{EA}-BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m},$$

hence

$$\left(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA}-\mathrm{D}^2\right) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}, \quad \left(\mathrm{EA}-BD\right)^2 = \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2},$$

and consequently

2° $$\left(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA}-\mathrm{D}^2\right) > \left(\mathrm{EA}-\mathrm{BD}\right)^2.$$

If there are only two intermediate masses *t* and *u*, it is sufficient to consider only the first of these conditions ; if there are three, it is necessary to consider also to consider the second; if there were several more, it would be necessary to have recourse to all the conditions which there are between the variables. For what remains in this problem, everything will be found to be fulfilled if the pain is taken to extend the calculation further ; on account of which one can be assured frankly that, when the intermediary masses, whatever their number may be, are such that they form a geometric progression between the two limits given, the speed which the last receives by their means is always the greatest possible. This problem was treated first by Mr. Huygens, and later by many geometers; but without any regard to the new determinations, which we have nevertheless found necessary to assure the existence of a *maximum* or *minimum.*

16. Let the general equation for surfaces of the second order be

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy;$$

where it is proposed to find the point where the ordinate *z* is the greatest or the smallest ; it will be had, on differentiating,

$$2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy,$$

which at first provide the two following equations :

$$ax + by = \frac{e}{2},$$
$$cy + bx = \frac{f}{2},$$

from which there is determined :

$$x = \frac{ec - fb}{2(ac - b^2)},$$
$$y = \frac{eb - fa}{2(ac - b^2)}.$$

Differentiating again the differential found, and there will be had, since

$dz = 0$,

$$2zd^2z = 2adx^2 + 4bdxdy + 2cdy^2,$$

where the quantities *x, y* are no longer found. Now, before the ordinate *z* shall be a true *maximum* or *minimum*, it is necessary that *a* and *c* shall both be negative in the first case, and both be positive in the second case; further, it is again necessary that $ca > b^2$, for without that, the values found for the ordinates *x* and *y* would give neither a *maximum* nor a *minimum;* in effect, whenever *ca* is not greater than b^2, which the celebrated Mr. Euler has demonstrated in another way, in the Appendix to *l'Introduction à l' Analyse des infiniment petits,* where the proposed surface extends to infinity and becomes a conical asymptote. It then appears clearly that the method for determining the *maxima* and *minima*, when there are several variables, in only regarding them one at a time, can often be very faulty. For example, in the preceding case, at first treating *x* as variable, one finds the first differential $2(ax + by - \frac{c}{2})dx$, and the second $2adx^2$ *;* just as, on making *y* variable , on has for the first differential $2\left(cy + bx - \frac{f}{2}\right)dy$, and for the second $2cdy^2$.
Now the two first differentials placed equal to zero give the same equations that have been found, and the two second are seen which, if *a* and *c* are both two positive or both two negative, the ordinate *z* is a *maximum* or a *minimum,* if one has simply with regard to the variability of *x* and *y*, considered those separately ; but one does not have the right to conclude from that, that *z* shall be a *maximum* or a *minimum,* by providing both together, as one has just seen.

RECHERCHES SUR LA MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS.

(*Miscellanea Taurinensia*, t.1, 1759.)

1. Les Géomètres savent depuis longtemps que lorsque la première differentielle d'une variable quelconque disparaît sans que la seconde disparaisse en même temps, elle devient toujours un *maximum* ou un *minimum;* et en particulier elle est un *maximum*, si sa différentielle seconde est négative, et un *minimum,* si cette différentielle est positive. Si la différentielle seconde disparaît en même temps que la première, alors la quantité n'est ni un *maximum*, ni un *minimum,* à moins que la troisième différentielle ne disparaisse de même, dans lequel cas la proposée deviendra un *maximum*, si la différentielle quatrième est négative, et un *minimum,* si elle est positive, et ainsi de suite. En général, pour qu'une quantité soit un *maximum* ou un *minimum,* il faut que les ordres successifs des différentielles, qui s'évanouissent ensemble, soient en nombre impair, et alors elle est sûrement un *maximum* ou un *minimum,* selon que la différentielle qui suit la dernière évanouissante se trouve négative on positive. *Voyez* MACLAURIN, *Traite des Fluxions.* p.338 et 857.

2. Tout ceci supposé et bien entendu, que Z représente une fonction algébrique des variables *t, u, x, y, ...* , et qu'on se propose de la rendre un *maximum* ou un *minimum.* Soit, selon les règles ordinaires,

$$dZ = pdt + qdu + rdx + sdy + \ ...,$$

et l'on aura d'abord cette équation

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \ ... = 0\,.$$

Mais comme la relation entre *t, u, x, ...* est encore indéterminée, de même que celle de leurs différentielles *dt, du, dx, ...* , et que d'ailleurs l'équation donnée doit être vraie quel que soit leur rapport, il est evident que pour les chasser tout à fait de l'équation, il faut égaler séparement à zéro chaque membre *pdt, qdu, rdx, ...* , d'où l'on tire autant d'équations particulières qu'il y a de variables, savoir : $p = 0,\ q = 0, \mathrm{r} = 0,\ ....$ Par le moyen de toutes ces équations on trouvera les valeurs de chaque inconnue *t, u, x, ...* , qui, substituées dans la fonction proposée Z, la rendront un *maximum* ou un *minimum.*

3. Passons maintenant à l'examen de la seconde diffèrentielle. En supposant, ce qui est permis, les premières différentielles *dt, du, dx* ... constantes, on aura

$$d^2\mathrm{Z} = dpdt + dqdu + drdx + dsdy + \ ....$$

Soit

$$\begin{aligned} dp &= \mathrm{A}dt + \mathrm{B}du + \mathrm{D}dx + \mathrm{G}dy + ...\ , \\ dq &= \mathrm{B}dt + \mathrm{C}du + \mathrm{E}dx + \mathrm{H}dy + ...\ , \\ dr &= \mathrm{D}dt + \mathrm{E}du + \mathrm{F}dx + \ \ \mathrm{I}dy + ...\ , \\ ds &= \mathrm{G}dt + \mathrm{H}du + \mathrm{I}dx + \ \ \mathrm{L}dy + ...\ , \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} d^2\mathrm{Z} = {} & \mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2 + 2\mathrm{D}dtdx + 2\mathrm{E}dudx \\ & + \mathrm{F}dx^2 + 2\mathrm{G}dtdy + 2\mathrm{H}dudy + 2\mathrm{I}dxdy + \mathrm{I}dy^2 + \ .... \end{aligned}$$

Pour commencer par le cas le plus simple, supposons qu'il n'y ait qu'une seule variable *t*, de sorte que $d^2\mathrm{Z}\ = \mathrm{A}dt^2$; on voit d'abord que, puisque dt^2 est toujours positif, la différentielle d^2Z doit avoir le même signe que la quantité A; donc, si A est positif, Z sera un *minimum*, et si A est négatif il sera un *maximum;* si $\mathrm{A} = 0$ on suivra les règles données (1).

4. Les variables contenues dans Z soient deux, savoir *t* et *u;* alors

$$d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2\,.$$

Il parait au premier aspect bien difficile de connaitre si cette expression d^2 Z doit ètre positive ou négative, sans qu'on ait le rapport de *dt* à *du*, qui n'est pas donné; car, puisqu'en changeant ce rapport la fonction d^2Z doit aussi varier, il semble indubitable qu'elle pourra aussi passer du positif au négatif, et du négatif au positif, pendant que les quantités A, B, C restent les mêmes. Qu'on donne cependant à la proposée

$$\mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2$$

cette forme

$$\mathrm{A}\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}\right)du^2;$$

et on verra que, comme les carrés $\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}}\right)^2$ et du^2 ont toujours le même signe +, toute la quantité sera nécessairement positive si les deux coefficients A et $\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ sont positifs, et au contraire elle deviendra négative, lorsque ceux-ci seront tous deux négatifs, quel que soit le rapport de *dt* à *du*. On aura donc pour le cas du *minimum*

$$\mathrm{A} > 0,\ \mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} > 0,$$

savoir

$$\mathrm{C} > \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} \text{ ou } \mathrm{CA} > \mathrm{B}^2,$$

Ce qui donne de mème

$$\mathrm{C} > 0;$$

à moins donc que les quantités A, B, C n'aient ces conditîons

$$\mathrm{A} > 0,\ \mathrm{C} > 0 \text{ et } \mathrm{AC} > \mathrm{B}^2,$$

la proposée Z ne pourra pas être un *minimum*. En second lieu on trouvera pour le *maximum*

$$\mathrm{A} < 0,\ \mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} < 0,$$

savoir

$$\mathrm{C} < \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}},\ \mathrm{CA} > \mathrm{B}^2$$

puisque A est négatif, ce qui donne encore

$$C < 0;$$

donc les conditions pour le *maximum* seront en partie les mêmes, et en partie précisément contraires a celles du *minimum*.

5. Si A ou C, ou toutes deux sont égales a zéro sans que B le soit aussi, la condition de $\mathrm{AC} > \mathrm{B}^2$ ne pourra pas subsister, ainsi la quantité proposée ne deviendra jamais un vrai *maximum* ou *minimum;* la même chose arrivera toutes les fois que A et C seront de signe contraire, car puisque B^2 est toujours positif la condition de $\mathrm{AC} > \mathrm{B}^2$ devient impossible. Si B s'évanouissait encore en même temps que A ou C, $d^2\mathrm{Z}$ se trouverait réduite au cas d'une seule variable, et par conséquent pourrait être de nouveau un *maximum* ou un *minimum,* ou ni l'un ni l'autre, selon ce qu'on a dit pour le premier cas. Enfin, si la quantité $d^2\mathrm{Z}$ était toute égale a zéro, savoir

$$\mathrm{A} = 0,\ \mathrm{B} = 0,\ \mathrm{C} = 0,$$

il faudrait recourir a la différentielle troisième; que si celle-ci se trouve n'être pas égale à zéro, la quantité Z ne peut être ni un *maximum* ni un *minimum;* et au contraire, si elle évanouit en même temps que la seconde,on cherchera tout de suite la quatrième; et si elle n'est pas évanouissante, il sera facile, par la méthode dont nous nous sommes servi-devant, de connaitre si elle est positive ou négative, ce qui déterminera de nouveau le *maximum* ou le *minimum.*

6. Lorsque les variables sont trois, savoir *t, u, x,* la différentielle $d^2\mathrm{Z}$ prend cette forme

$$d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2 + 2\mathrm{D}dtdx + 2\mathrm{E}dudx + \mathrm{F}dx^2$$

qu'on réduira d'abord à

$$\mathrm{A}(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}})^2 + \left(\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}\right)du^2 + 2\left(\mathrm{E} - \tfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}}\right)dudx + \left(\mathrm{F} - \tfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}}\right)dx^2 .$$

Soit posé

$$\mathrm{C} - \tfrac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} = a,\ \mathrm{E} - \tfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}} = b,\ \mathrm{F} - \tfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}} = c$$

et on aura

$$d^2Z = \mathrm{A}\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}}\right)^2 + adu^2 + 2bdudx + cdx^2;$$

qu'on opère à présent sur ces trois derniers membres, comme un a fait ci-dessus (4), et toute la différentielle proposée $d^2\mathrm{Z}$ deviendra

$$\mathrm{A}\left(dt + \tfrac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}}\right)^2 + a\left(du + \tfrac{bdx}{a}\right)^2 + \left(c - \tfrac{b^2}{a}\right)dx^2;$$

or, les carrés $\left(dt+\frac{\mathrm{B}du}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{D}dx}{\mathrm{A}}\right)^2$, $\left(du+\frac{bdx}{a}\right)^2$ et dx^2 etant toujours positifs, toute la différentielle sera de même positive si les coefficients A, a et $c-\frac{b^2}{a}$ ont chacun le signe + ; on a donc pour le *minimum* les conditions suivantes

$$\mathrm{A}>0,\ a>0,\ ca>b^2,$$

ou, en remettant au lieu de *a, b, c* leurs valeurs,

$$\mathrm{A}>0,\ \mathrm{C}-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}>0,\ \left(\mathrm{C}-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}\right)\left(\mathrm{F}-\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}}\right)>\left(\mathrm{E}-\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}}\right)^2$$

savoir,

$$\mathrm{A}>0,\ \mathrm{CA}-\mathrm{B}^2>0 \text{ et } \left(\mathrm{CA}-\mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA}-\mathrm{D}^2\right)>\left(\mathrm{EA}-\mathrm{BD}\right)^2$$

d'où il résulte encore

$$\mathrm{C}>0,\ \mathrm{F}>0 \text{ et } \mathrm{FA}>\mathrm{D}^2.$$

On trouvera par les mêmes principes pour le *maximum*

$$\mathrm{A}<0,\ \mathrm{CA}>\mathrm{B}^2 \text{ et } \left(\mathrm{CA}-\mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA}-\mathrm{D}^2\right)>\left(\mathrm{EA}-\mathrm{BD}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\mathrm{C}<0,\ \mathrm{F}<0 \text{ et } \mathrm{FA}>\mathrm{D}^2.$$

7. Si les quantités A et C évanouissent seules, ou toutes deux, ou une simplement, la seconde condition devient impossible; si c'est F qui évanouit, alors la troisième devient impossible; car $\left(\mathrm{CA}-\mathrm{B}^2\right)\left(-\mathrm{D}^2\right)$, qui est nécessairement négatif à cause de $\mathrm{CA}>\mathrm{B}^2$, doit toujours se trouver moindre de $\left(\mathrm{EA}-\mathrm{BD}\right)^2$, d'où il suit que Z ne saurait être un *maximum* ou un *minimum*, si A, C, F prises séparément ou ensemble, comme on voudra, sont égales à zéro. Si par l'évanouissement des termes la différentielle $d^2\mathrm{Z}$ se réduisait à dèux variables, ou à une seulement, elle tomberait dans le second cas ou dans le premier, et on devrait suivre les règles données (3 et suiv.). Enfin, si toute la $d^2\mathrm{Z}$ se trouvait égale à zéro,et que la différentielle troisième ne fût pas de même égale à zéro, on serait sûr que la proposée Z ne pourrait jamais devenir ni un *maximum* ,ni un *minimum;* et quand cette différentielle troisiieme évanouirait avec la seconde, par des transformations semblables à celles que nous avons pratiquées, on pourrait dans la quatrième différentielle distinguere le cas du *minimum* et du *maximum* et ceux qui sont inutiles.

8. On peut étendre la méme théorie aux fonctions de quatre on plus variables. Quiconque aura bien saisi l'esprit des réductions que j'ai employées jusqu'ici, pourra sans peine découvrir celles qui conviendront à chaque cas particulier. Au reste, pour ne pas se méprendre dans ces recherches, il faut remarquer que les transformées pourraient bien venir différentes de celles que nous avons données; mais en examinant la chose de plus près, on trouvera infailliblement que, quelles qu'elles soient, elles pourront toujours se réduire à celles-ci, ou au moins y être comprises.

9. Comme je crois cette théorie entièrement nouvelle, il ne sera peut être pas inutile d'ajouter les réflexions suivantes. Quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction proposée Z, si on les regarde chacune en particulier, et qu'on cherche le *maximum* ou *minimum* qui lui convient pendant que toutes les autres demeurent les mêmes, on trouvera à part les premières différentielles pdt, qdu, rdx, .. . , dont chacune étant égalée à zéro nous donnerait les mêmes équations que ci-dessus (2)

$$p = 0,\ q = 0,\ r = 0,\ ....$$

De la même manière passant aux différentielles secondes, on trouverait celles-ci séparément $\mathrm{A}dt^2,\ \mathrm{C}du^2,\ \mathrm{F}dx^2,\ \mathrm{L}dy^2,\dots,$ et par conséquent si A,C, F, L, ... sont toutes positives ou négatives, on pourrait croire que cela suffit pour que les valeurs de t, u, x, ... , tirées des équations $p = 0,\ q = 0,\ ....$ rendent nécessairement la proposée Z un *minimum* ou un *maximum.* Il est vrai, en effet, que par rapport à chacune de ces variables considérées à part, la quantité donnée Z devra toujours être la plus grande ou la plus petite; mais est- il certain que ce qui vaut pour chacune prise séparément doive aussi valoir pour toutes ensemble? Examinons la chose plus intimement.

10. Que la proposée Z contienne les seules variables t et u, et on pourra la regarder comme l'ordonnée à une surface, dont t et u sont lesdeux autres; donc la question dans ce cas se réduit à trouver la plus grande ou la plus petite ordonnée d'une surface dont l'équation est donnée, savoir

$$dZ = pdt + qdu\ .$$

Si l'on fait u constant, elle se réduit d'abord à.

$$d\mathrm{Z} = pdt\ ,$$

et dans ce cas elle exprime toutes les sections de la même superficie parallèles à l'axe des t, à mesure que la quantité u reçoit des valeurs différentes. Soit donc posé $p = 0$, et on aura (2) une valeur de t qui donnera la plus grande ou la plus petite ordonnée Z dans chacune de ces sections parallèles; mais, puisque u est constant, si l'on différentie de nouveau dZ, on a

$$d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2\ ,$$

et par conséquent on jugera du *maximum* ou *minimum* par la seule valeur de A, après y avoir cependant substitué à la place de *t* la valeur que fournit l'équation $p = 0$. Savoir si A se trouve positive ou négative, quelle que soit la valeur de *u*, ou bien si, en changeant *u*, elle peut aussi changer de signe, on conclura dans le premier cas que toutes les dites sections ont un *maximum* ou un *minimum*, et dans le second qu'elles ont entre certaines limites un *maximum*, entre d'autres un *minimum*. Si A est égal à zéro, quelle que soit la valeur de la constante *u*, alors aucune des dites sections n'aura ni un *maximum* ni un *minimum*. Mais, si A devient seulement égal à zéro, lorsque *u* a de certaines valeurs données, dans ces cas seulement les sections correspondantes seront destituées du *maximum* ou du *minimum*. Le lieu de toutes ces ordonnées qui sont un *maximum* ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre, sera contenu dans l'équation $p = 0$, en ayant égard à la seule variabilité de *u;* elles formeront donc dans la même superficie une section qui sera à simple ou à double courbure, et qui sera déterminée par les deux équations conjointes

$$dZ = pdt + qdu \text{ et } p = 0,$$

ou

$$dZ = qdu \text{ et } p = 0.$$

On voit par là que, pour trouver le *maximum* ou le *minimum* de la surface entière, il faudra chercher la plus grande ou la plus petite ordonnée qui convient à cette même section; on aura donc de nouveau $q = 0$, ce qui donnera la valeur de l'autre variable *u*.

11. Passons maintenant à la différentielle de *q;* elle a été d'abord supposée (3) égale à $Bdt + Cdu$*;* mais puisque dans ce cas *t* est déterminé par *u* dans l'équation $p = 0$, ou bien dans sa différentielle $\mathrm{A}dt + \mathrm{B}du = 0, dt$ est égal à $-\frac{\mathrm{D}du}{\mathrm{A}}$, ce qui rend

$$dq = \left(-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{C}\right)du\ ;$$

il résulte donc que si $-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{C}$ est positif, savoir si $\mathrm{C} > \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$, l'ordonnée sera la moindre; si $\mathrm{C} < \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ elle sera la plus grande, et si $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ elle ne sera ni l'une ni l'autre, à moins que les conditions requises dans les différentielles des genres plus élevés ne soient remplies. Or, en réfléchissant sur ces *maximum* et *minimum*, il sera aisé de comprendre que l'ordonnée Z ne pourra pas être un *maximum* entre toutes les autres, à moins qu'elle ne soit la plus grande de toutes celles qui sont contenues dans la section déterminée par $dZ = qdu$, et de plus que toutes les ordonnées qui composent cette même section ne soient encore elles-mêmes des *maximum* dans les sections parallèles correspondantes (10). On prouvera de même que la quantité Z ne saurait être absolument un *minimum* sansqu'elle soit de même un *minimum* dans la section qui contient tous les *minimum*. Car dans tous les autres cas l'ordonnée serait ou la plus grande ou la plus petite d'entre celles qui ne sont ni les plus grandes ni les plus petites, ou bien entre les plus grandes ou les plus petites, elle ne serait ni la plus grande ni la plus petite, ou enfin elle serait la plus grande d'entre les plus petites, ou au contraire, ce qui ne donne pas un vrai *maximum* ou *minimum* comme on cherche. De tout ceci je conclus donc qu'après avoir tiré des équations $p=0,\ q=0$, les valeurs de *t* et *u*, et les avoir substituées dans A et dans $\mathrm{C}-\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$, il faut, pour que Z soit un vrai *maximum*, que A soit négatif et

$$\mathrm{C} < \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}, \text{ savoir } \mathrm{CA} < \mathrm{B}^2;$$

et au contraire, si Z doit être un vrai *minimum*, on doit trouver A positif et

$$\mathrm{C} > \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}, \text{ ou } \mathrm{CA} > \mathrm{B}^2,$$

conformément à la théorie générale expliquée (4 et suiv.).

12. Si, au lieu de considérer d'abord *u* constant et *t* variable, on avait fait *u* variable et *t* constant, on serait parvenu aux déterminations suivantes pour le *maximum*,

$$\mathrm{C} < 0 \text{ et } \mathrm{AC} > \mathrm{B}^2$$

et

$$\mathrm{C} > 0 \text{ et } \mathrm{AC} > \mathrm{B}^2$$

pour le *minimum*, ce qui revient au même. Au reste, cette méthode que nous venons d'employer pour découvrir les conditions des *maximum* et *minimum* dans les fonctions à deux seules changeantes, est également applicable à toutes les autres fonctions plus composées, elle a même l'avantage d'être plus analytique et plus directe que la première, c'est pourquoi je tâcherai ici de la développer dans toute sa généralité.

13. Soient les variables contenues dans Z en tel nombre qu'on voudra : je ne considère d'abord qu'une variable seule, et je tire par la différentiation l'équation pour le *maximum* ou *minimum* qui lui convient; puis en passant à la différentielle seconde, je trouve les conditions qui déterminent la proposée à être un *maximum* ou un *minimum*, ou ni l'un nil'autre. Après cette première opération, je substitue dans Z ou dans ses différentielles simplement la valéur de la première variable trouvée, et je procède sur une autre variable de la même manière; ensuite, mettant de nouveau dans la fonction proposée Z la valeur qu'on aura trouvée pour cette secondé variable, on passera à l'examen d'une troisième variable, et ainsi de suite, etc. Soit *t* la première variable qu'on veut considérer dans Z, et on aura

$$d\mathrm{Z} = pdt \text{ et } d^2\mathrm{Z} = \mathrm{A}dt^2,$$

d'où $p=0$, et $\mathrm{A}>0$ pour le *minimum*, $\mathrm{A}<0$ pour le *maximum* (1). Que *t* et *u* soient à présent toutes deux variables, il en résultera

$$d\mathrm{Z} = pdt + qdu,$$

qui, à cause de $p = 0$, se réduit à

$$dZ = qdu\ ,$$

d'où l'on tire

$$d^2Z = (Bdt + Cdu)du\ ;$$

mais puisque $p = 0$, dp le sera aussi, et par conséquent

$$Adt + Bdu = 0$$

ce qui donne ,

$$dt = -\tfrac{Bdu}{A}:$$

cette valeur substituée dans d^2Z la changera en

$$d^2Z = (-\tfrac{B^2}{A} + C)du^2$$

j'aurai donc $q = 0$ et

$$-\tfrac{B^2}{A} + C > 0$$

pour le *minimum*,
et

$$-\tfrac{B^2}{A} + C < 0$$

pour le *maximum*, savoir, puisque A est positif dans le premier cas et négatif dans le second, en multipliant par A, il résultera toujours la même condition de $AC > B^2$. Si, outre les deux précédentes, il y a encore une troisième variable *x* à considérer, je cherche la valeur de *dZ* eu égard à ces trois variables *t, u, x,* et je trouve

$$dZ = pdt + qdu + rdx\ ,$$

ce qui, à cause de $p = 0,\ q = 0$, se change en

$$dZ = rdx\ ;$$

donc la différentielle seconde sera

$$d^2Z = (Ddt + Edu + Fdx)dx.$$

A présent, par le moyen des équations

$$p = 0,\ q = 0\ ,$$

ou bien de leurs différentielles

$$\mathrm{A}dt + \mathrm{B}du + \mathrm{D}dx = 0 \text{ et } \mathrm{B}dt + \mathrm{C}du + \mathrm{E}dx = 0\,,$$

je cherche des valeurs de *dt* et *du* en *dx,* et je trouve

$$dt = \frac{\mathrm{BE-CD}}{\mathrm{AC-B^2}}\,dx, \quad du = \frac{\mathrm{BD-AE}}{\mathrm{AC-B^2}}\,dx;$$

je les substitue dans l'expression de $d^2\mathrm{Z}$ ce qui me donne,

$$d^2\mathrm{Z} = \left(\frac{\mathrm{BE-CD}}{\mathrm{AC-B^2}}\,\mathrm{D} + \frac{\mathrm{BD-AE}}{\mathrm{AC-B^2}}\,\mathrm{E} + \mathrm{F}\right)dx^2.$$

Il résulte donc en premier lieu pour le *maximum* ou *minimum*

$$r = 0;$$

ensuite

$$\frac{\mathrm{BE-CD}}{\mathrm{AC-B^2}}\,\mathrm{D} + \frac{\mathrm{BD-AE}}{\mathrm{AC-B^2}}\,\mathrm{E} + \mathrm{F} > 0$$

pour le *minimum,* et < 0 pour le *maximum;* ou bien, en ôtant le dénominateur $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ qui, est toujours positif, on a

$$2\mathrm{BDE} - \mathrm{CD}^2 - \mathrm{AE}^2 - \mathrm{FB}^2 + \mathrm{ACF} \;>\; 0$$

pour le *minimum,* et < o pour le *maximum.* Soit multipliée cette expression par A, qui est positif dans le premier cas et négatif dans le second, et on aura

$$2\mathrm{ABDE} - \mathrm{ACD}^2 - \mathrm{A}^2\mathrm{E}^2 - \mathrm{AB}^2\mathrm{F} + \mathrm{A}^2\mathrm{CF} \;>\; 0\,,$$

soit pour le *maximum,* soit pour le *minimum,* savoir

$$\left(\mathrm{CA} - \mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA} - \mathrm{D}^2\right) > \left(\mathrm{EA} - \mathrm{BD}\right)^2.$$

On suivra le même procédé pour un plus grand nombre de variables.

14. Cette méthode, étant générale pour quelque nombre de variables que ce soit, ne sera pas bornée aux seules fonctions algébriques, mais pourra èncore s'étendre avec succès aux *maximum* et *minimum* qui sont d'un genre plus élevé et qui appartiennent à des formules intégrales indéfinies. Je mc réserve de traiter ce sujet, que je crois d'ailleurs entièrement nouveau, dans un ouvrage particulier que je prépare sur cette matière, et dans lequel, après avoir exposé la méthode générale et analytique pour résoudre tous les problèmes touchant ces sortes de *maximum* ou m*inimum*, j'en déduirai, par le principe de la moindre quantité d'action, toute la mécanique des corps soit solides, soit fluides.

15. Je finirai ce Mémoire par quelques exemples des plus simples qui ëclaircissent la théorie qu'on vient d'établir. Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élastiques et rangés en ligne droite sans se toucher; supposons que le premier vienne choquer le second avec une vitesse donnée c, le second avec la vitesse acquise du premier choque le troisième, et ainsi de suite; les masses du premier et du dernier étant données, on demande celles des corps intermédiaires, afin que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible. Soit a la masse du premier, et b celle du dernier; soient ensuite $t, u, x, y, \ldots$ les masses intermédiaires inconnues; par les lois du choc on trouvera la vitesse communiquée par le premier corps a au second t égale à $\frac{2ac}{a+t}$, celle que donne celui-ci au troisième u égale à $\frac{2.2act}{(a+t)(t+u)}$, et ainsi de suite; donc la vitesse que recevra le dernier b sera exprimée par

$$\frac{2\ldots 2catuxy\ \ldots\ b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots},$$

expression qui doit devenir un *maximum.* Pour en trouver plus aisément la différentielle, qu'on la suppose égale à Z, et prenant les logarithmes d'une part et de l'autre, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} l2\ \ldots 2ca+lt+lu+lx+ly\ldots. \\ -l(a+t)-l(t+u)-l(u+x)-l(x+y) \end{array}\right\}=l\mathrm{Z},$$

ce qui donne par la différentiation

$$\frac{dt}{t}+\frac{du}{u}+\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\ \ldots\ -\frac{dt}{a+t}-\frac{dt+du}{t+u}-\frac{du+dx}{u+x}-\frac{dx+dy}{x+y}-\ldots\ =\frac{d\mathrm{Z}}{Z};$$

d'où, en mettant ensemble et réduisant au même dénominateur les termes affectés des mêmes différentielles, l'on tire

$$d\mathrm{Z}=\frac{Z\left(au-t^2\right)dt}{t(a+t)(t+u)}+\frac{\mathrm{Z}\left(tx-u^2\right)du}{u(t+u)(u+x)}+\frac{\mathrm{Z}\left(uy-x^2\right)dx}{x(u+x)(x+y)}+\ldots.$$

On aura donc en premier lieu pour le *maximum* ou *minimum* les équations suivantes

$$au=t^2,\ tx=u^2,\ uy=x^2,\ \ldots,$$

qui donnent les analogies

$$a:t=t:u,\ t:u=u:x,\ u:x=x:y,\ldots,$$

savoir

$$::a:t:u:x:y:\ldots b;$$

d'où l'on voit que toutes les masses doivent constituer une progression géométrique, dont les deux extrêmes sont les données *a* et *b*. Pour juger à présent du *maximum* ou *minimum*, soit fait d'abord, pour abréger,

$$\frac{Z}{t(a+t)(t+u)}=\alpha,$$
$$\frac{Z}{u(t+u)(u+x)}=\beta,$$
$$\frac{Z}{x(u+x)(x+y)}=\gamma,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura

$$p=\alpha\left(au-t^2\right),$$
$$q=\beta(tx-u^2),$$
$$r=\gamma\left(uy-x^2\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc

$$dp=\left(au-t^2\right)d\alpha+\alpha(adu-2tdt),$$
$$dq=(tx-u^2)d\beta+\beta(xdt+tdx-2udu),$$
$$dr=\left(uy-x^2\right)d\gamma+y(ydx+udy-2xdx),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, comme les termes *a, t, u, x, y, ...* doivent être en progression continue, si l'on nomme 1 : *m* la raison constante d'un antécédent quelconque à son conséquent, on trouve

$$t=ma,\quad u=m^2a,\quad x=m^3a,\quad y=m^4a,\ldots\ldots,$$

de plus

$$\beta=\frac{\alpha}{m^3},\quad \gamma=\frac{\alpha}{m^6},\ldots\ldots,$$

les quelles valeurs substituées dans les expressions précédentes les réduiront à

$$dp=\alpha a\left(du-2mdt\right),$$
$$dq=\alpha a\left(dt-\frac{2du}{m}+\frac{dx}{m^2}\right),$$
$$dr=\alpha a\left(\frac{du}{m^2}-\frac{2dx}{m^3}+\frac{dy}{m^4}\right),$$

et ainsi des autres. On aura donc

$$\mathrm{A} = -2m\alpha a,\ \mathrm{B} = \alpha a,\ \mathrm{C} = -\tfrac{2\alpha a}{m},\ \mathrm{D} = 0,\ \mathrm{E} = \tfrac{\alpha a}{m^2},$$

$$\mathrm{F} = -\tfrac{2\alpha a}{m^3},\ \mathrm{G} = 0,\ \mathrm{H} = 0,\ \mathrm{I} = \tfrac{\alpha a}{m^4},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit par là en premier lieu que A est négatif, et que par conséquent la proposée doit être un *maximum* si les autres eonditions se trouvent remplies. Or

$$\mathrm{AC} = 4\alpha^2 a^2 \text{ et } \mathrm{B}^2 = \alpha^2 a^2,$$

donc

1º $$\mathrm{AC} > \mathrm{B}^2;$$

$$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = 3\alpha^2 a^2,\quad \mathrm{FA} - \mathrm{D}^2 = \tfrac{4\alpha^2 a^2}{m^2},\quad \mathrm{EA} - BD = -\tfrac{2\alpha^2 a^2}{m},$$

donc

$$\left(\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA} - \mathrm{D}^2\right) = \tfrac{12\alpha^4 a^4}{m^2},\quad \left(\mathrm{EA} - BD\right)^2 = \tfrac{4\alpha^4 a^4}{m^2},$$

et par conséquent ;

2º $$\left(\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2\right)\left(\mathrm{FA} - \mathrm{D}^2\right) > \left(\mathrm{EA} - \mathrm{BD}\right)^2.$$

S'il n'y a que deux masses intermédiaires *t* et *u*, il suffit d'avoir égard à la première de ces conditions; s'il y en a trois, il faut encore considérer la seconde; s'il y en avait plusieurs autres, il faudrait avoir recours à autant de conditions qu'il y a de variables. Au reste, dans ce problème, on les trouvera toutes remplies si on veut bien prendre la peine de pousser plus loin le calcul; de sorte qu'on peut franchement assurer que, lorsque les masses intermédiaires, quel que soit leur nombre, sont telles qu'elles forment une progression géométrique entre les deux extrêmes données, la vitesse que reçoit la dernière par leur moyen est toujours la plus grande possible. Ce problème a été traité par M. Huyghens, le premier, et depuis par beaucoup d'autres Géomètres; mais sans avoir aucunement égard aux nouvelles déterminations, que nous avons cependant trouvées nécessaires pour s'assurer de l'existence du *maximum* ou *minimum.*

16. Soit l'équation générale pour les surfaces de second ordre

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy;$$

qu'on se propose de trouver le point où l'ordonnée *z* est la plus grande ou la plus petite; on aura, en différentiant,

$$2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy,$$

ce qui fournit d'abord les deux équations suivantes

$$ax+by=\tfrac{e}{2},$$
$$cy+bx=\tfrac{f}{2},$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{ec-fb}{2(ac-b^2)},$$
$$y=\frac{eb-fa}{2(ac-b^2)}.$$

Différentions de nouveau la différentielle trouvée, et on aura, puisque

$dz=0$,

$$2zd^2z=2adx^2+4bdxdy+2cdy^2$$

où les quantités *x*, *y* ne se trouvent plus. Or, afin que l'ordonnée z soit un vrai *maximum* ou *minimum,* il faut que *a* et *c* soient toutes deux négatives dans le premier cas, et toutes deux positives dans le seeond; de plus, il faut éncore que $ca>b^2$, car sans cela les valeurs trouvées pour les ordonnées *x* et *y* ne donneraient jamais ni un *maximum,* ni un *minimum;* en effet, toutes les fois que *ca* n'est pas plus grand que b^2 , le célèbre M. Euler a démontré par une autre voie, dans l'Appendice à *l'Introduction à l' Analyse des infiniment petits,* que la surface proposée s'étend à l'infini et qu'elle a une asymptote conique. Il parait donc elairement que la méthode pour déterminer les *maximum* et *minimum,* quand il y a plusieurs variables, en ne les regardant qu'une à la fois, peut souvent être très-fautive. Car, par exemple, dans le cas précédent, en traitant d'abord *x* comme variable, on trouve la différentielle première $2(ax+by-\tfrac{c}{2})dx$, et la seconde $2adx^2$ *;* de même, en faisant varier *y,* on a pour la différentielle première $2\left(cy+bx-\tfrac{f}{2}\right)dy$, et pour la seconde $2cdy^2$. Or les deux différentielles premières posées égales à zéro donnent les mêmes équations qu'on a trouvées, et les deux secondes font voir que si *a* et *c* sont toutes deux positives ou toutes lieux négatives, l'ordonnée *z* est un *maximum* ou un *minimum,* si on a simplement égard à la variabilité des *x* et *y* considérées séparément; mais on n'est pas en droit de conclure pour cela que *z* soit un *maximum* ou un *minimum,* par l'apport à toutes deux ensemble, comme on vient de le voir.