RESEARCHES INTO THE NATURE AND PROPAGATION OF SOUND.

(Miscellanea Taurinensia, Book I. 1759.)

INTRODUCTION.

Although the science of the Calculus has been carried in these recent times to a high degree of perfection, however there does not appear to have been much advances in its application to natural phenomena. The theory of fluids, which is certainly one of the most important for Physics, is still very imperfect in its elements, despite the efforts of several great men who have tried to deepen it. The same can be said of the matter that I undertake to examine here, and that one can regarded with good reason as one of the principle points of this theory. For sound consists of nothing more than certain vibrations impressed on sounding bodies, and communicated to the elastic medium which surrounds them, and it is only by a knowledge of the movements of this fluid that one can hope to uncover its true nature, and to determine there the laws which it must follow in its propagation.

Newton was the first to submit fluids to calculation, and he succeeded there in determining the speed by a formula which does not depart far from experiment. But if this theory has been able to satisfy the Physicists, the greater part of whom have adopted it, it is not the same of Geometers, who in studying the demonstrations on which it rests, have not found that degree of solidity, and indeed of the evidence which characterizes the remainder of his works. Yet nobody, as far as I know, has ever undertaken to discover and to make known the principles which can render these insufficient; still less has anyone undertaken to substitute for these others more sure and rigorous (*).

[*A Different Interpretation of Ch.VIII. Part II, Newton's Principia.*

It should be remarked here that in part Lagrange himself may have been at fault, as indeed most if not all the translators of Newton's work from Motte onwards to date, in that what Newton was discussing at the beginning of Ch. 8 of Sect. II had little to do with sound, but was in fact ***oscillations of the atmosphere itself****, a topic still evolving, and now generally considered to be involved in the production of gravity waves, as distinct from gravitational waves, caused in part by variations in gravity due to the positions of the moon and the sun: atmospheric tides if you like; together with other factors affecting air pressure, such as changes in the air humidity, temperature differences, the influence of mountain ranges in disturbing air flow, etc. The barometer had been discovered by Torricelli some time previously, and variations in atmospheric pressure were known in Newton's day to be related to weather changes. Thus, it did not take much original thought by Newton, one presumes, to consider that if the pressure were falling at some place, then it would be rising somewhere else, and thus barometers at these places could be considered as representing the legs of a giant U tube, within which the atmosphere itself was oscillating, supposedly in a simple harmonic manner, albeit rather slowly: this is how the chapter starts off, with the preliminary discussion of water in a U tube executing S.H.M., before attending to fluids in general ; presumably Newton did not think* *it needed any elaboration. On these suppositions, Lagrange made the mistake of ignoring this initial part of the chapter, which one can presume he did not understand, as little or no discussion by Newton was given about this phenomenon, and Lagrange seemed to assume the reasoning for that applied to the speed of sound calculations, diagrams for the one phenomenon are confused with diagrams for the other, a vertical diagram becomes horizontal, etc ……., and hence all the unnecessary invective by Lagrange against Newton.*

If my interpretation does not accord with the reader's views, then it can be ignored, as it does not influence the translation of Lagrange's dissertation, which would be misinformed. Back to Lagrange.]

The commentators of the *Principia* have tried to re-establish the truth in this part by a purely analytical method, but, as they have only considered the question from a quite particular point of view, besides, their calculations are so complicated and contained in infinite series, it does not appear that one could in any fashion agree with their conclusions which they have been forced to deduce from that.

Hence I have thought it necessary to take the whole question from its foundations and to treat it as an entirely new subject, without borrowing anything from those who have worked there until now.

Such is the objective I have proposed to myself in the following investigations. To make that known better, I begin by giving some idea of M. Newton's theory, and the difficulties to which it is subjected.

[(*) Here is how someone talks [d'Alembert] of the most celebrated Geometers of our times in his excellent *Traité des Fluides* (art. 219): " This would be the place to give here the methods for the determination of the speed of sound, but I confess that I have not yet reached the point of finding anything that satisfies me about this matter. I know only of two authors at present who have given formulas for the speed of sound, to wit, Newton in his *Principia,* and Euler in his *Dissertation sur le Feu,* who took a part of the prize of the Academy in 1738. The formula given by M. Euler without demonstration is quite different from that of M. Newton, and I am ignorant of the path by which he was led to it ; with regard to M. Newton's formula, it is demonstrated in his *Principia,* but it is perhaps the most obscure and difficult part of that work. M. Jean Bernoulli the son, in his *Pièce sur la Lumière,* who carried off the prize of the Academy in 1736, said that he did not dare to flatter himself by extending that place in the *Principia.*"]

All this theory is to be found contained in Section VIII of Book II of the *Principia*. At first the author considers the propagation of movement in elastic fluids, and makes that consist of successive expansions and compressions, which form so many pulsations, and which are spread around by all the fluid. He continues on to examine how these pulsations are able to be produced by the vibrations of the parts of some sound-producing body. He imagines therefore that one particle of fluid impelled by the nearby vibrations of the body compresses the following particles by a certain distance, until the compression has reached a maximum, then the same particles begin to expand away from each other in both directions, which, according to him, form an infinity of sound filaments [*i.e.* half wavelengths] which all depart from the same point as a common centre. He wishes further that each of these initial filaments creates another equal in length from its extremity, when it has completed a whole oscillation, and that a third, and hence so forth in succession, forming such a kind of spherical vaults around the body, as one may say, which are going always to enlarge themselves, just the same as the waves which disturb the surface of still water, by the agitation from any foreign body that may be present.

That is what is happening according to this illustrious author, concerning the movements of the particles of the air which produce and propagate the sound. But Newton has gone even further, as he has calculated all the particular movements which compose each of the pulses. To arrive at that, he considers the elastic fibers of air as composed from an infinitude of physical points arranged along a straight line, and at an equal distance from each other. The method which he uses to determine the oscillations of these points consists of supposing these in the first place to be isochronous always and to be always the same in each of those. Newton then proves this hypothesis entirely in accord with the laws of mechanics, which depend on the mutual actions which these points exert on each other by the nature of their elasticity; from which he concludes that in effect these movements are such as he had assumed for them, and as at each oscillation it must produce according to him a new fiber equal and similar to the first, he finds the distance which the sound has travelled through in a give time, by calculating only the duration of a simple vibration.

Johan Bernoulli the son, in his excellent work *Piece sur la Lumière,* has determined the speed of sound also, after the same hypothesis ; yet his procedure differed from that of Newton, in that at first he had assumed that the vibrations of the particles are perfectly synchronous, which that great Geometer had himself proposed to demonstrate. Also it is not surprising that these two authors should have came to the same formula for the speed of sound, and the apparent agreement of their calculations cannot be offered as a proof of the foundations of the theory that is going to be expounded here (*).

With regard to the first propositions on the formation of elastic fibers, and especially with their comparison with waves, I think to be unnecessary for me to stop to examine these further. Because, as several other authors have shown already how little solidity there would be in doing that, and the very insufficiency for that explanation of phenomena of sound (**), the manner in which these have been presented in the *Principia* evidently shows how the author only adopted these as a simple hypothesis to simplify the nature of a problem composed indeed by himself. And even if these hypothesis should be true, have we not the right to demand a demonstration? But this demonstration must depend necessarily on the general resolution of the problem proposed.

[(*) M. Bernoulli proves the truth, in the work cited, that any body which is held in equilibrium by two equal forces and acting in opposite directions, if it should happen to be displaced a little, must make simple and regular oscillations about its point of rest. But this theory is hardly applicable to the single case where there is nothing other than a moveable body. In order to make sense, we suppose at first, according to this author, that the body must be acted on along two opposite directions by equal forces P and Q : it is clear that these forces can be functions only of the distance of the body from some fixed point ; then, if one makes that travel through an infinitely small distance ds, the sum of the increments of these two forces must be expressed by pds, that which will give consequently the accelerative force which carries the body towards its point of equilibrium; and as one can consider only infinitely small movements, it may be supposed that p is constant, from which the force given must become proportional to the distance to be traversed ds, and the oscillations will be made according to the known laws of isochronism. But it will not be the same if there shall be several bodies mutually supporting each other in equilibrium, and which are all arranged on the same straight line. In this case the forces P, Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2, ... which act against each other will be functions of their intermediary distances ; thus, ds_1, ds_2, ds_3,…. represent the infinitesimal displacements of all the bodies, one will have these expressions of this form $pds_1 + qds_2 + rds_3 + ...$ for the accelerative forces of these expressions, where *p, q, r, ...*can be regarded as constants. From which it easy to understand that the movements of the bodies are no longer restrained to simple isochronism ; and it is properly what happens to the particles of the elastic fibers of the air. It is also for this reason that the calculation found in the commentary of the *Principia* would still be insufficient, even if it did not contain approximations, because there one considered no more than three or four moving particles. d'Alembert has made this position known in the case of a vibrating string laden with several small weights, see p. 359 of the *Mémoires de l'Académie de Berlin,* for the year 1750.

(**) *See* the rest of the article cited above ; *see* also the memoir of de Mairan in the *Mémoires de l'Académie de Pari,* for the year 1737; the *Physique* of Perrault, and others.]

It must be admitted that Newton's theory would be, even in this regard, quite some way from being able to satisfy entirely its objective. But there is more, the theorem on which he determines the laws of the oscillation of particles is based on insufficient and even faulty principles .

The celebrated Euler seems to have been aware of that in the year 1727, as can be seen in his *Thesis on Sound,* undertaken in Basle in the same year. Nevertheless I think, Cramer is the first who has given a strong and convincing proof of that (See his Commentaires des *Principes.*). It can be shown that the procedure of Newton can be applied equally to demonstrate that other, namely : that the elastic particles follow in their motions the laws of a heavy body which rises and falls freely, which is quite incompatible with the isochronism of the oscillations which the illustrious English author has claimed to establish. This remark alone would appear sufficient to let the whole theory in question fall. Nevertheless, as great men must not be judged after the most exact and rigorous examination, it would be wrong to reject that before having demonstrated the insufficiency in a manner leaving nothing more to be desired.

Here is the first step that I have thought ought to be made in beginning the examinations that I have considered to myself on the nature and propagation of sound.

Hence I have began to study Newton's propositions with all attention of which I am capable, and in effect I have found that they are based between themselves on incompatible suppositions, and which by necessity are false. That is what I have attempted to show in two ways in the first chapter of the following dissertation . This object thus fulfilled, I have applied myself to finding the direct and general methods for resolving the proposed problem, without using principles other than those which pertain immediately to the known laws of dynamics.

In order to give the greatest generality possible to my investigations, and to make these at the same time applicable to these things which actually happen in nature, at first I have considered the question from the same point of view as that adopted by all the geometers and physicists up until now, and I doubt if anyone would ever be able to reduce the problem of the motions of air which produce sound to a simper statement than that which follows, namely :

Being given an indefinite number of elastic particles arranged in a straight line, which maintain themselves in equilibrium by virtue of their mutual forces of repulsion, to determine the motions which these particles must follow in the circumstance that they have been disturbed, as it were, without leaving the same straight line.

In order to facilitate the resolution, I suppose only that these particles are all of the same size and endowed with the same elastic force, and furthermore, that their movements are always infinitely small: conditions which I do not think will in the least be able to detract from the physical nature of the problem envisaged.

On examining the equations found after these given for air alone, I soon observed that they did not differ at all from these which appertain to the vibrations of strings, provided we suppose the same corpuscles to be set out in the same manner in the one case as well as the other ; from which it follows that if one increases their number to infinity, and diminishes their masses in the same ratio, the sound of a vibrating [air] fiber, of which the elastic particles are mutually in contact, may be compared to that of a corresponding vibrating string.

[Here we must do justice to the celebrated d'Alembert, as it is necessary to note that he had already found this relation between the two problems mentioned in section XLVI of his first *Mémoire sur les Cordes vibrantes* published in the *Mémoires de l'Académie de Berlin;* but he had not, at least as far as I know, made any use of that.]

This has then led me to discuss the theories that the great geometers Taylor, d'Alembert and Euler, have given on this subject. I have explained their differences in a few words, and the objections which Daniel Bernoulli had made concerning the latter two; and, after having carefully examined the reasons of the ones and the others, I have concluded that the calculations made until now cannot decide such questions, and that it is necessary to refer to the general solution which we have in mind.

Thus I undertake this work the analysis of which appears to me in itself to be new and interesting, since there is an indefinite number of equations to be resolved at the same time. Fortunately the method that I have followed has led me to formulas which are not too involved, having regard to the great number of operations through which I was obliged to pass. Initially I consider these formulas in the case where the number of bodies is finite, and , from that I have extracted easily all the theory of the miscellany of the theory of simple and regular vibrations, which Daniel Bernoulli only found by particular and indirect ways. I pass then to the case of an infinite number of moving bodies, and, after having proven the insufficiency of the preceding theory in this case, I have established the same solution of the problem from my own formulas of vibrating strings, which Euler has given, and which have been so strongly contested by d'Alembert. I give further all the generality to this construction of which it is possible, and as an application which I have made for musical strings, I obtain a general and rigorous demonstration of this truth from experiment, namely : that whatever shape may be given initially to the string, the time of the oscillations nevertheless will always be found to be the same.

[The learned d'Alembert cited above, in section III of his addition to *Mémoire sur les Cordes vibrantes,* published in the volume of the *Mémoires de l'Académie de Berlin,* for the year 1750, made the following remark about this proposition : " It is very likely that in general, whatever figure a string may take, the time of an oscillation will always be the same, and that appears to be confirmed by experience, but that would be very difficult, perhaps even impossible to demonstrate rigorously by calculation ." I am only mentioning the words of so great a geometer for giving the idea of so much difficulty to a problem that I have resolved.]

On this occasion, I have developed the general theory of harmonic sounds which result from the same string, likewise these for wind instruments. Although these two theories have already been proposed, the one by Sauveur and the other by Euler, yet I believe to be the first who has deduced these from analysis immediately.

I arrive now at the principal object of my investigations, namely to the laws governing the propagation of sound. I imagine that a particle of air receives some impulse from the sound-producing body, and I find by the application of my formulas that a motion is communicated from one particle to another which is not instantaneous, and which does not depend at all on the force of the first shaking motion. The speed with which that communication happens is determined by the same that Newton had already given for the speed of sound, and of which the results agree quite well with experiment. The calculation has led me here to treat simple and composite echoes, and the theory I have established is not subject to any of the difficulties that physicists encounter in the explanations they have given up to the present. These investigations are followed by an examination of a mixture of sounds, and the manner with which they spread out in the same space without trouble or confusing each other in any manner. Finally, I extract from my formulas a rigorous and incontestable explanation of the resonance and natural vibrations of harmonic strings to the main source of the noise; phenomena known for a long time, and for which several systems have been invented, without being able to give a satisfactory reason for giving them.

These are the principal items that I have examined in the present treatise, and which lack of time and some other unforeseen obstacles have prevented me from explaining with more order and clarity. I am more inclined to believe that it contains a complete theory on the nature and propagation of sound; but at least that will have contributed to the advancement of the physico-mathematical sciences, because it has been shown by several true calculations which up to the present have appeared to be inexplicable in nature, and the agreement of my results with experiment will serve perhaps to remove these prejudices for those who seem to despair that mathematics can ever shine true lights on physics. That is one of the main aims that I have proposed for the present.

FIRST SECTION.

INVESTIGATIONS INTO THE NATURE OF SOUND.

FIRST CHAPTER.

ON THE OSCILLATIONS OF ADJOINING PARTS OF ELASTIC FLUIDS.

1. I undertake before everything to examine the theory that Newton has included in Sect. VIII of Book II of the *Mathematical Principles.* Leaving aside the whole discussion on the formation of waves and of sound fibers of which he speaks in the introduction, I attach myself mainly to the analysis of the theorem, in which he pretends to establish that each particle in a homogeneous fluid follows in its motions the same laws as a cycloid [inverted] describes of which the length is equal to the total excursion of the particle, and where the driving weight is equivalent to the natural elasticity of the fluid. To show that this proposition is true, let us suppose at first, says Newton, that this shall be the case, and let us see what will follow from that. Then he searches, after a like supposition, for the accelerative force of the particles, and he finds that this force is precisely the same as that which makes a pendulum move in these arcs of the given cycloid. In order to produce a better understanding of the inexactitude and the insufficiency of the proceeding which has led to this conclusion, I have thought it necessary to change the theorem into a problem, in supposing at first the law that it is proposed to find, to be unknown or indeterminate. For that there are no other changes that need to be made to Newton's

propositions other than to substitute on place of the circle, the arcs of which express the times, and the strokes the arcs traversed, some other curve which performs the same function.

Hence here I will replace the proposition in question, and I will need to make use of the author's same expressions, as far as that may be possible.

Proposition XLVII, *Book.* II. *Problem.*

2. *To find the law for the propagation of pulses through an elastic fluid, by which the individual particles of the fluid in the shortest possible reciprocal motion, are to be retarded on moving out and accelerated on moving in .*

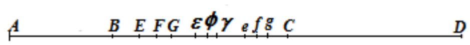


Fig. 1.

[Newton's original diagram is vertical, with slightly different lettering, and represents the vertical displacement of a parcel of air both by convection and an added small part due to the wave passing through it, which need not be a sound wave, but a low frequency oscillation associated with a gravity wave. The simple facts that the original line is vertical and very long, and the length of the pendulum is taken as the height of the atmosphere should have been sufficient notice that Newton was not dealing with sound waves, which are relegated to a Scholium. It is at this point only that Newton states that these results can be applied to sound waves….]

AB, BC, CD, ... (*fig.* 1) shall designate a series of successive equidistant pulses, ABC the direction of the motion of the pulses propagated from A towards B ; E, F, G three physical points of the resting medium on the line AC placed in turn at equal distance from each other ; E*e,* F*f,* G*g* very short equal distances, through which points the pulses from the individual vibrations pass through and return, with that reciprocal motion noted ; $\varepsilon, \phi, \gamma$ denote some intermediate positions of these points ; and EF, FG small physical lines, or the middle linear parts placed between these points, and successively translated to the places $\varepsilon\varphi, \phi\gamma$ and to ef, fg . The right line PS may be drawn equal to E*e* ; *and around these that the closed curve* PHS*h*P (*fig.* 2) *is drawn*. Through the whole of its periphery from its parts

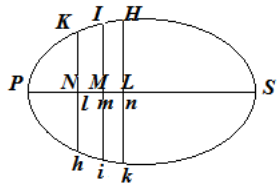


Fig. 2.

the total time of one vibration is expressed, as from its proportional parts, thus so that in some time completed PH, or PHS*h*, if the perpendicular HL may be sent to PS , or *hl,* and Eε may be taken equal to PL or *Pl,* the physical point E will be found at ε ; by this rule some point E will perform individual vibrations by passing along from E through ε to *e,* and hence by returning through ε to E, *provided the nature of the curve proposed shall be* PHS*h*P *is a curve of this kind required to be found.* Equal arcs HI, IK may be taken on the periphery PHS*h*, or *hi, ik* have that ratio to the whole periphery, which the equal right lines EF, FG have to the length of the total pulse BC, and with the perpendiculars IM, KN, or *im,kn,* dropped, because the points E, F, G are being disturbed by successive similar motions, and their whole vibrations from going out to returning in meanwhile are composed while the pulse is being transferred from B to C, if PH, or PHS*h* if the time of the point E from the start of the motion will be PI, or PHS*i* shall be the time from the start of the motion from the point G, and therefore Eε, Fϕ, Gγ will be equal respectively to PL, PM, PN on the journey out of the points, or to PI, P*m*, P*n* in the return of the points. From which εγ or $\mathrm{EG}+\mathrm{G}\gamma-\mathrm{E}\varepsilon$ in the outward journey of the points will be equal to $\mathrm{EG}-\mathrm{LN}$, but equal to $\mathrm{EG}+ln$ in the return journey; but εγ is the width, or the expansion of the middle part EG at the place εγ; and therefore the expansion of this part on the outward journey is to its mean expansion, as $\mathrm{EG}-\mathrm{LN}$ to EG, and on the return journey as $\mathrm{EG}+ln$, or as $\mathrm{EG}+\mathrm{LN}$ to EG ....

From which the elastic force of the point F at the place εγ is to its mean elastic force at the place EG as $\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{LN}}$ to $\frac{1}{\mathrm{EG}}$ on the journey out; truly on the return as $\frac{1}{\mathrm{EG}+ln}$ to $\frac{1}{\mathrm{EG}}$; and by the same argument the elastic forces of the physical points E, and G on the journey out are as $\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{MR}}$ and $\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{QM}}$ to $\frac{1}{\mathrm{EG}}$, evidently (*fig.* 3) with the perpendiculars DR, FQ drawn, which intercept the arcs FH, KD equal to

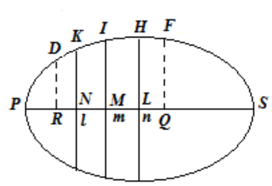


Fig. 3.

HI, IK, and the difference of the forces to the average elastic force, as $\frac{\mathrm{QM}-\mathrm{MR}}{(\mathrm{EG}-\mathrm{MR})(\mathrm{EG}-\mathrm{QM})}$ to $\frac{1}{\mathrm{EG}}$; that is as $\frac{\mathrm{QM}-\mathrm{MR}}{\mathrm{EG}^2}$ to $\frac{1}{\mathrm{EG}}$, or as $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$ to EG, but only if we may assume (on account of the narrow boundaries of the vibrations) MR, QM to be indefinitely smaller than the magnitude EG; whereby since the magnitude EG may be given, the difference of the forces is as $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$. But that difference (that is the excess of the elastic force of the point ε above the elastic force of the point γ) is the force by which the incremental physical line inserted εγ is accelerated, and therefore the accelerating force of the incremental physical line εγ is, as *the difference of the lines* QM *and* MR; *therefore from the principles of mechanics the difference must be the same as the second derivative* [fluxion] *of the distance which is described by the increment εγ, evidently with the first derivative* [fluxion] *of the time taken as constant. Now truly because from the hypothesis the times are expressed by the arcs, and the distances by the corresponding abscissas will be* MR, *and QM the first derivatives of the distances* PR, PQ, *and therefore* $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$ *will be equal to the second derivative of the distance* PR, *or also of* PM, *which differs from that by an infinitely small amount; and thus when the sections of the arcs* DI**,** IF *will be equal to each other, we will have that following identical equation for determining the curve* PHSh, $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}=\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$, *or* $0=0$ *which indicates nothing.*

3. This vague and indeterminate conclusion that we come upon, thus shows us clearly the reason why Newton's principles can lead us equally to these very different results from those, which Cramer has shown most ingeniously according to the hypothesis that the elastic particles follow the same law in their movements as heavy bodies rising and falling alternatively.

[In Newton's case, the particles execute s.h.m. according to Boyle's Law, where the force varies inversely as the compression/expansion of the gas. In addition, particles executing s.h.m have a period independent of the amplitude, as does the cycloidal pendulum of Huygens, which is presumably why Newton chose this particular mode. Later, in Part III of the *Principia*, he investigated the projection of circular motion on to the axis, as an s.h.m., as does Hermann in his *Phoronomia*, a work ignored completely by Lagrange. Unfortunately, it appears at least to me, that Lagrange has not understood what Newton was doing in this section; he has changed the diagrams to suit himself, changed an important diagram in which Newton calculated the period of an oscillating atmosphere, as mentioned above. See the relevant sections of the on-line translation on this website for more details, although I have not mentioned the idea of gravity waves there, though it did occur to me that that was probably the case.]

But we still follow Newton's theory, and pass on to Prop. XLIX, in which he determines the time taken in which each particle must make a complete oscillation. Now, just as from the preceding proposition it came about that the whole closed curve PHS*h*P could equally express the relation between distances and times, we can just as easily substitute a circle in that proposition in place of some curve, and apply there generally the same reasoning that Newton with regard to his own particular hypothesis. Hence there becomes:

Proposition XLIX. *Problem.*

4. *For a given density and elastic force of the medium, to find the velocity of the pulses.*

We may consider a medium to be compressed by the incumbent weight [*i.e.* considered to be the pressure, as stated here and elsewhere] as in the manner of our air**,** and A shall be the height of our homogeneous medium, the weight of which may be made equal to

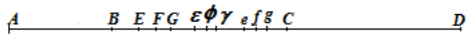


Fig. 1

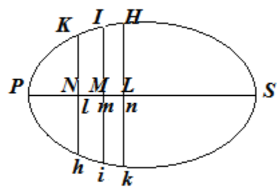


Fig. 2

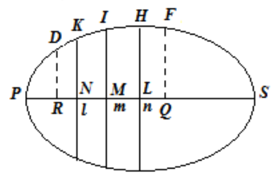


Fig. 3

the incumbent weight, and of which the density shall be the same as the density of the compressed medium, in which the pulses are propagated. Moreover a pendulum is understood to be constructed, whose length between the point of suspension and the centre of oscillation shall be A, and in the time that the pendulum performs a complete oscillation composed from the outward and return motions, the pulse completes the same distance around the circumference of the circle described with the same radius A. For with these items remaining, which have been constructed in Prop. XLVII, if some incremental physical line EF, by the individual vibrations describing the distance PS, may be urged into some place εϕ by an elastic force, which generally shall be the same, as the diagram PHS*h*P requires of distances and times, or by the force $\frac{\mathrm{QM-MR}}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\mathrm{M}$, with M denoting the mass; or the weight of the physical incremental line EG, will perform these individual vibrations in the time PHS, and whole oscillations in the time PHS*h*P; so that, because equal forces impel equal corpuscles likewise they are impelled through equal distances. ..... But the elastic force, by which the incremental physical line EG will be pressed upon to be at some place $\varepsilon\gamma$ will be (as in the demonstration Prop. XLVII) to its total elastic force, as $\mathrm{QM-MR}$ to EG; and this total force, that is the incumbent weight , by which the incremental line EG is compressed, is to the weight of the incremental line , as the weight of the incumbent height A to the length of the incremental line EG, and thus from this equation the force, by which the line increment EG is compressed at some position γ, is to the weight of that line increment, as $(\mathrm{QM-MR})\mathrm{A}$ to $\overline{\mathrm{EG}}^2$; hence that force will be to the above force found $\frac{\mathrm{QM-MR}}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\mathrm{M}$, as $\frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{EG}}^2}$ to $\frac{1}{\overline{\mathrm{HK}}^2}$. Again,

$$\mathrm{HK} = 2\mathrm{KI} \text{ and } \mathrm{EG} = 2\mathrm{EF};$$

so that there will be found from the previous proposition:

$$\frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}{\mathrm{BC}},$$

there will be also

$$\frac{HK}{EG}=\frac{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}{\mathrm{BC}};$$

from which the ratio of the forces above will be transformed into this :

$$\frac{\frac{A}{\overline{\mathrm{BC}}^2}}{\frac{1}{\overline{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}^2}}.$$

Whereby since the times, by which equal bodies are being acted on through equal distances shall be in the inverse ratio of the square root of the forces, the time of one vibration by the action of that elastic force will be to the time PHS*h*P in the square root ratio of

$$\frac{\frac{\overline{\mathrm{BC}}^2}{\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}^2}\text{, or as }\frac{\frac{BC}{\sqrt{A}}}{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}.$$

And thus since consequently the same shall be equal in this ratio before and after; hence the time of one vibration of one of the incremental lines EG *with the elastic force acting shall be* $\frac{BC}{\sqrt{A}}$. But in the time of one vibration, composed from the outward and inward motion, the pulse completes its width BC; therefore the time, in which a pulse traverses the distance BC will be $\frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{\mathrm{A}}}$. But the time, in which the pulse traverses the distance BC is to the time, in which it traverses the distance of the circumference of the circle, of which the radius is A is equal to the ratio, clearly as $\frac{\mathrm{BC}}{\pi\mathrm{A}}$ (clearly putting π for the ratio of the circumference to the radius), and therefore this time will be $\frac{\pi A}{\sqrt{A}}=\pi\sqrt{A}$; *but from the theory of the pendulum of length A, the time of one oscillation is found also to be* $\mathrm{A}=\pi\sqrt{\mathrm{A}}$; and thus in the time of such an oscillation a pulse can traverse a length equal to this circumference.

5. Here then is a new paradox deduced from Newton's principles, namely that, whatever the law governing the movements of the particles may by, the period of the oscillations nevertheless is always the same. These two propositions that we have just detailed, contain all the theory that the author has given concerning the movements of air which form the main object of the present dissertation; that's why we are going to examine them with all the care possible. In order that one may reflect a little on the nature of the preceding demonstrations, it can be seen without trouble that the failings of this theory depend less on the sequence of the arguments but rather on the principles and of these given conditions which the author adopts tacitly for the solution of the problem. These conditions can be reduced to the following :

1° That these movements of all the particles may be expressed by the same locus, from which it follows that they are all of the same kind;

2° That these particles communicate the movements between each other in equal times, in order that they all come to pass successively through the same degrees of motion.

It is agreed that one cannot admit any of these suppositions, if it has not been shown before that they are necessary consequences of the given conditions of the problem. Now as far as necessary in our case the choice must be thus, so that they are the opposite of these conditions which destroy the entire mutual dependence which the parts exercise on each other by virtue of their repulsive forces [we would now consider these forces to be attractive rather than repulsive]. In order to resolve this difficulty fully, just as the importance of the matter and the authority of the great man, whose very aberrations seem to require our instructions, I am going to give a pure and exact analysis of the problem in question, such as the first principles of mechanics can provide.

6. According to Newton's first suppositions, (*fig.* 1,p. 48), E, F, G, ... shall be some of the physical points which compose the elastic medium when it is at rest; then the same points shall have become ε, φ, γ, of such a kind that nevertheless they remain on the same straight line BC; where the rectilinear distances traversed are denoted by Eε, Fφ and Gγ or by $y_1, y_2, y_3,$ and supposing that the first distance EF, FG between these points shall be equal to *r,* one will have

$$\varepsilon\varphi = r + y_2 - y_1,$$
$$\varphi\gamma = r + y_3 - y_2;$$

now the natural elastic force which acts between these points E, F, G is expressed by $\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{r}$, as shown in *Prop.* XLIX above, where M denotes the weight of each particle, and A is the height of a homogeneous column of the same fluid, of which the weight is equal to the natural spring of the particles; hence, when the points E, F, G come to be moved to ε, φ, γ, this elastic force will be changed into

$$\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{\varepsilon\varphi} = \frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{r+y_2-y_1}.$$

for the points ε and φ, and into

$$\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{\varphi\gamma} = \frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{r+y_3-y_2}$$

for the points φ and γ, and hence likewise ; as a consequence the difference of these two forces will give the motive force of the intermediary particle *φ,* which will be found to be equal to $\mathrm{AM}\left(\frac{1}{r+y_2-y_1} - \frac{1}{r+y_3-y_2}\right)$, that is to say, equal to

$$\mathrm{AM}\frac{y_3-2y_2+y_1}{(r+y_2-y_1)(r+y_3-y_2)}.$$

But, as the particles are supposed to be making very small excursions, the difference $y_2 - y_1$ and $y_3 - y_2$ these distances vanish in comparison with the quantity *r,* from which the motive force F for the particle results :

$$\mathrm{AM}\frac{y_3-2y_2+y_1}{r^2},$$

which is that which enables the distance y_2 to be traversed. In the same manner the expressions of the motive forces for all the other particles can be found similar to this one ; from which, if the time lapsed is called t since the start of the motion of the particle E, and if the distances dt are made constant, the following equation will be obtained from the principles of mechanics which contains the laws of the motion of the particle F, to wit :

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2} \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r^2},$$

where h is the distance that a heavy body passes through freely in falling for the time T; the same equation will be had for the particle following the G equation:

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2} \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{r^2},$$

and thus for the others.

In general, if the index for y always expresses the place which holds the particle which traverses the distance y, in reckoning from the first F, the general equation will be found for the motion of the particle, of which the order in the ranking is m,

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2} \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{r^2}.$$

These equations, as it is easy to see, are of the same number as that of the mobile particles of which the motions are required; that is why, as the problem has been completely determined already by their means, one is obliged to remain there, and to consider what kind of different conditions would need to be introduced there in order that the solution should not be lacking to render the solution insufficient or even faulty. But in order to know precisely what approach must be taken to transport the analysis explained above to the particular hypothesis explained above that Newton has considered, in order perhaps to make the problem easier, which in its own nature is very difficult, we are going to reduce these hypotheses in the formulas.

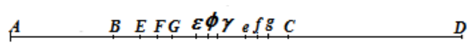


Fig. 1

7. In order to do that we begin by noting that if t is the time passed since the start of the motion of the particle E, it will be necessary, because of the second hypothesis, that a time $t + dt$ shall have passed before the following particle F had been able to move during the time t; it will take a time $t + 2dt$ for a similar movement of the following particle G, and thus for the others; from which it follows that, since all the particles are supposed to follow the same laws by the first hypothesis, the distance traversed by the point F, during the time t will be equal to the space traversed by the particle G during the time $t + dt$, and likewise the distance traversed by the point E during the time t will be the same as the distance traversed by the particle G in the time $t + 2dt$; now y_1, y_2, y_3

express the distance traversed by the particles E, F, G, ... , in the same time *t;* thus one will have

$$y_2 = y_3 + dy_3,\ y_1 = y_3 + 2dy_3 + d^2y_3;$$

now on substituting these values of y_1 and of y_2 into the expression $y_3 = 2y_2 + y_1$, the equation which contains the movement of the particle F will be changed into this :

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{d^2y_3}{r^2}$$

but

$$y_2 = y_3 + dy_3,$$

and as a consequence

$$d^2y_2 = d^2y_3 + d^3y_3;$$

hence we will obtain the equation

$$\frac{d^2y_3 + d^3y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{d^2y_2}{r^2}$$

or rather, by ignoring the term d^3y^3, and dividing everything by d^2y^3, we will have

$$\frac{1}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2r^2},$$

an equation which, as can be seen, no longer contains any of the variables $y_{1,}\ y_2, y_3, \ldots$. It will be found by similar reasoning that all the other equations again can be reduced to that, which consequently must be true, whatever the values of y may be, provided that we may have $dt^2 = \frac{\mathrm{T}^2r^2}{2\mathrm{A}h}$. Now, if the time for a complete oscillation is called θ, one will have (*fig.* 2, p. 48)

$$\theta = \mathrm{PHS}h\mathrm{P} \text{ and } dt = \mathrm{KI};$$

consequently, $\frac{dt}{\mathrm{EF}} = \frac{\theta}{\mathrm{BC}}$ by *Prop.* XLIX, to wit:

$$dt = \frac{r\theta}{\mathrm{BC}} \text{ and } dt^2 = \frac{r^2\theta^2}{\mathrm{BC}^2} = \frac{T^2r^2}{2\mathrm{A}h};$$

from which we can express

$$\theta^2 = \frac{\overline{\mathrm{BC}}^2 \times T^2}{2\mathrm{A}h} \text{ and } \theta = \frac{T \times \overline{\mathrm{BC}}}{\sqrt{2\mathrm{A}h}},$$

which is reduced to the same expression which we have found already for the measure of time in *Prop.* XLIX.

In effect, having supposed (4) that the motive force in the figure PHShP is simply $\frac{\mathrm{QM}-\mathrm{MR}}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\mathrm{M}$, the same motive forces of the particles can be expressed by $\frac{\mathrm{M}d^2y}{dt^2}$ or equally be assuming $\frac{2h}{\mathrm{T}^2}=1$.

All that we have come to show suffices enough, it seems to me, to make known from the foundations the insufficiency and the falseness of Newton's method. We are going now to look for another way which leads us to a solution of the problem in question, based on sure and incontestable principles.

8. In order initially to envisage the question from the simplest and most general point of view that it is possible, I consider with Newton elastic fluids as of a pile of corpuscles which flee from each other according to the known laws of elasticity. Thus we imagine a collection of bodies which had all the same mass, and which shall be arranged on the same straight line, at equal distances from each other; supposing further that these bodies shall mutually repel each other by the elastic forces which follow the inverse ratio to the distances ; and, in order to contain the continual action of these forces of repulsion which tend without ceasing to remove the bodies from each other, we consider the two extreme bodies as fixed and immovable, so that, whatever the motion excited in their system, it remains always closed up between the two given ends . Now, let the number o mobile bodies be equal to $m-1$, their mass be M, the force of the natural spring equal to ; on conserving the other suppositions above (6), the motions of the whole system will be found to be contained by the following equations :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_2-2y_1}{r},$$
$$\frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_3-2y_2+y_1}{r},$$
$$\frac{d^2y_3}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_4-2y_3+y_2}{r},$$
....

These equations shall be to the number $m-1$, namely the same number as that of the moveable bodies, and furthermore all similar, except the first and the last, in which the quantities y_0 and y_m , which represent according to the order established the distances traversed by the first and the last, must be equal to zero, because of the fixed nature of these bodies ; the last of these equations thus is found to be:

$$\frac{d^2y_{m-1}}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{-2y_{m-1}+y_{m-2}}{r}.$$

It is on integrating all these equations, and on integrating these values for each unknown y_1, y_2, y_3, , ... , expressed by the same variable *t*, that one may reach the determination of all the motions of the bodies which compose the proposed system; but before entering into these investigations, it is necessary to examine the causes which can produce such disturbances in the inner parts of these elastic fluids. Here we confine ourselves to vibrating strings, of which the motions are well known, and which perhaps, are the only ones that can be analyzed.

CHAPTER II.

THE VIBRATIONS OF STRINGS.

9. AB *(fig.* 4) shall be a string only a little extensible, and which can be considered weightless and without stiffness; we consider that it shall be fixed to the two immoveable points A and B which hold it with a force equal to a weight of P. Further, let this string be

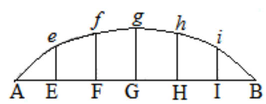


Fig. 4.

loaded with as many small bodies E, F, G, ... as one could wish, which all have the same mass M, and which shall be separated from each other by the equal distances AE, EF, ... It is evident, by the principles of mechanics, which, if the points E, F, G, ... come to be moved away from the straight line, in such a manner that they describe the incremental lines *Ee*, *Ff*, Gg, ... , each of these points *f* will be pressed towards F by a force equal to $\mathrm{P}\sin efg$. Now, if we call the departures *Ee, Ff, ...*of the bodies E, F, ... are called $y_1, y_2, \ldots,$ and if we make the constant interval $\mathrm{AE} = \mathrm{EF} = r$, we will have

$$\sin efg = -\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r}$$

from which the equation can be expressed for the motion of the body F,

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r};$$

the same will be found, for the motion of the following body G, the equation

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{r}$$

et thus for the others. As a consequence, if the number of bodies attached to the string shall be $m-1$, then in general the following equations will be had for their motions, whatever they may be :

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_2 - 2y_1}{r}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r}$$

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{r},$$

....

of which the last number again shall be $m-1$, and the motion of the last body shall be expressed by :

$$\frac{d^2 y_{m-1}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \frac{-2y_{m-1}+y_{m-2}}{r}$$

It is seen that all these equations are entirely similar to those that we have found for the motions of elastic bodies, and it is necessary only to put $P = E$, so that these become completely the same; from which it follows that the two problems which correspond there are of the same kind, and that by resolving one the other is resolved at the same time.

10. We can consider that the number of the bodies, in both cases, be increased indefinitely and that their massed decrease in the same proportion: the globules arranged in a straight line will form the elastic fibers, such as can be considered in ordinary air, and the string will become of uniform thickness along all its length, such as musical strings; hence the same relation will exist still between the oscillations of the parts of both : as a consequence, the theory of the motions of strings being known, one will be able by a simple modification to deduce from these the motions of the air that produce sound. Thus, these two problems are inter-related, not only by their common nature, but also by the principles on which their solutions depend. Since the matter of the vibrations of strings has been treated already by the great geometers, it will be convenient to recount here briefly the principle methods that have been considered for that. I will enter into this detail more willingly than those authors who have little agreement on the principles and in these results, which could lead to doubts about the generality and rigor of their solutions.

11. The first person who has attempted to submit the movement of strings to calculation is the celebrated Brook Taylor in his excellent work *De Methodo incrementorum.*
He assumes at first, and even asserts to demonstrate, that the string always adopts the shape of such figures, that all its points arrive at the right-line situation at the same time ; from which he deduced that such figures can be none other than a kind of elongated cycloid, which he calls *companions of the cycloid.* Here is his procedure :

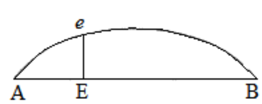


Fig. 5

Calling *x* the value of some abscissa AE, (*fig.* 5), and *y* the ordinate E*e* which denotes the distance of the point E of the string from the axis at some time *t,* it can be demonstrated by the same reasoning (9) that the accelerating force of the point *e* towards E is expressed by $-\frac{P}{M}\frac{d^2y}{dx}$. Let *a* the length of the whole string, and S its total weight, one will have $M = \frac{Sdx}{a}$; and consequently the accelerative force at *e* will become:

$$-\frac{Pa}{S}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Now, in order that the whole string may be able to regain its rectilinear shape, the author assumes this force to be proportional to the distance E*e,* which the point must traverse ; thus, on making K equal to some line, he obtains the equation

$$-\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{\mathrm{K}};$$

where, on making $\frac{\mathrm{S}}{a\mathrm{PK}}=f$, it comes about by known methods, that

$$x\sqrt{f}=\arcsin\frac{y}{\mathrm{Y}}$$

and

$$y=\mathrm{Y}\sin\left(x\sqrt{f}\right),$$

the equation of the curve for some time *t,* where Y is the maximum ordinate. Now, since the point, in traversing the distance *e*E, is pressed on continually by an accelerative force proportional to the distance which remains to be traversed, one will have

$$-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2h}{T^2}\frac{y}{\mathrm{K}},$$

from which, if one wants to abbreviate $\frac{2h}{T^2}=g,$ one obtains again

$t\sqrt{\mathrm{g}}=\arcsin\frac{y}{\mathrm{Y}_1}$ and $y=\mathrm{Y}_1\sin\left(t\sqrt{\mathrm{g}}\right),$ an equation which gives for some time *t* the ratio of the elongation *y* of the point *e* from the axis to its greatest elongation Y_1; then, if one puts in place of Y_1, the value of *y* which agrees with the greatest curve A*e*B, and which we have found above, $\mathrm{Y}\sin\left(x\sqrt{f}\right)$, the general expression will arise of *y* for all times *t* and for each section *x,* to wit,

$$y=\mathrm{Y}\sin\left(x\sqrt{f}\right)\sin\left(t\sqrt{\mathrm{g}}\right),$$

and such is the equation of the vibrating string in Taylor's hypothesis, in assuming that it shall be as straight line at the beginning of its motion.

If the string first had had the figure of an elongated trochoid, then later, with *t* increasing, and *y* being diminished, one would have found

$$y=\mathrm{Y}\sin\left(x\sqrt{f}\right)\cos\left(t\sqrt{\mathrm{g}}\right),$$

where $y=\mathrm{Y}\sin\left(x\sqrt{f}\right)y$ would express the initial figure of the string.

In order to determine the constant K which enters into the quantities *f* and *g,* it must be observed that *y* be equal to zero, as long as *x* shall be equal to zero or *a,* whatever the value should be of *t.* Now, on putting $x=0,$ at first $y=0,$ because $\sin 0=0$. Then let us put $x=a$ and $\sin\left(a\sqrt{f}\right)=0$; if $\frac{1}{\omega}$ is the ratio of the radius of a circle to its circumference [*i.e.* $\bar{\omega}=2\pi$], we know that $\sin\frac{s\bar{\omega}}{2}=0$, taking some whole number for *s*; which is why we will have

$$a\sqrt{f}=\frac{s\bar{\omega}}{2}\text{ and }\sqrt{f}=\frac{s\bar{\omega}}{2a};\text{ now }\sqrt{f}=\sqrt{\frac{S}{a\mathrm{PK}}},$$

which gives

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{K}}}=\frac{s\bar{\omega}}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{Sa}},$$

and consequently

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{K}}} = \frac{s\bar{\omega}}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{Sa}}.$$

12. This solution which we have just explained, besides being based on the entirely gratuitous hypothesis that all the points of the string are extended at the same time in a straight line, is still a long way from being general, even according to this hypothesis, since it would be necessary yet to show that it is in this case alone that the accelerative forces shall be proportional to the distances of the points of the string from the axis, so that all the points were able to touch the axis at the same instant. It is in order to supplement this defect that the celebrated d'Alembert has considered another method of resolving the problem of vibrating strings, taken in the most general sense that it shall be possible. This method, which is surely one of the most ingenious that anyone has performed until now in analysis, is found set out in two memoirs which the author has given in the volume of the Prussian Royal Academy of which we have made mention previously. Here I shall give only the principles on which it is based, and the

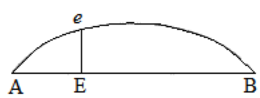


Fig. 5

consequences which arise from the theory in question, and the consequences which arise from that for the theory in question.

We have seen (11) that the accelerative force of the point E displaced to *e* is expressed generally by $-\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2}$ [recalling that $\frac{\mathrm{S}}{a}$ is the line density of the string, and P is the tension], whatever the curve of the string extended to A*e*B shall be*;* hence, since this force tends to act passing through the point E, the distance $e\mathrm{E} = y$, it must be equal to $-\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2}$; one will then have the general equation for the curve, that at some time *t*,

$$\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

At first it is necessary to note that in this equation the differential of the first part d^2y must be taken with respect to *x* only as the variable, but in the second part the differential d^2y it is the time *t* only which must be varied. Geometers have been accustomed to put such expressions between brackets in the following manner, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, in order that it can be judged, by a simple inspection, which of the variables *x* or *t* must be changing in the differentiation of *y*. In order to abridge, $\frac{2\mathrm{P}ah}{\mathrm{ST}^2} = c$, and one will have, for the whole equation, [we would of course now write c^2 rather than *c*, which would then become the square of the speed of the wave down the string; it seems strange to us now that the idea of dimensions of quantities was not understood very well at the time.]

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Now d'Alembert finds, by a new and ingenious analysis, that the final equation corresponding to the above is

$$y=\Psi\left(t\sqrt{c}+x\right)+\Gamma(t\sqrt{c}-x),$$

where Ψ and Γ express some functions of the quantities $t\sqrt{c}+x$ and $t\sqrt{c}-x$. So what will the general equation be of the curve that can be formed by a stretched string. With regard to the nature of the functions expressed by Ψ and by Γ, they are between themselves indeterminate; but, since the two ends of the string are considered to be fixed, it is evident that they must satisfy these to conditions, to wit : that *y* must be equal to zero when $x=0,$ and when $x=a$, whatever the time *t* shall be *;* one will have from these two equations :

$$\Psi\left(t\sqrt{c}\right)+\Gamma(t\sqrt{c})=0$$

and

$$\Psi\left(t\sqrt{c}+a\right)+\Gamma(t\sqrt{c}-a)=0\,;$$

from the first there becomes:

$$\Gamma=-\Psi$$

and thus for the second :

$$\Psi\left(t\sqrt{c}+a\right)-\Psi(t\sqrt{c}-a)=0\,,$$

which must be true from the nature of the same function Ψ. Thus considering some function Ψ which must be such, that whatever the value of *t,* one will have generally the equation for the extended string :

$$\Psi\left(t\sqrt{c}+a\right)=\Psi(t\sqrt{c}-a).$$

It is known that any function can be represented by the ordinate of a curve, of which the abscissa shall be the variable held by the proposed function ; hence, if some curve is described which may have equal ordinates , for all the abscissas expressed by $t\sqrt{c}+a$ and $t\sqrt{c}-a$, this curve will give a very simple construction of the proposed equation, for one has only to take the ordinates which correspond to the abscissas $t\sqrt{c}+x$ and $t\sqrt{c}-x$, the difference of which will give the ordinate of the curve which forms the string resonating at some time *t.* Now, since the function Ψ must remain the same, whatever one should add or take for the change in $t\sqrt{c}$ for the quantity *a*, if we suppose in the general equation

$$y=\Psi\left(t\sqrt{c}+x\right)-\Psi(t\sqrt{c}-x)\,,$$

that the time *t* must be increased by the amount $\frac{2a}{\sqrt{c}}$, the value of y will not be changed in any way, and if the string, at the end of a time equal to $\frac{2a}{\sqrt{c}} = 2\mathrm{T}\sqrt{\frac{\mathrm{S}a}{2\mathrm{P}h}}$, always will take the figure which it had at the beginning of that time ; but, if the string finds itself once extended along the straight line, it will be returning to that situation after each time *t*, which will be containing a certain number of times the exact time $\mathrm{T}\sqrt{\frac{\mathrm{S}a}{2\mathrm{P}h}}$; hence there is an infinite number of other curves different from the *companion of the elongated trochoid* , given by Taylor, which are endowed with this property, that all their points can be found at the same time on the axis. d'Alembert subsequently has made a good many investigations into the nature of these curves, which he has called *generators*, and on the manner in which the are able to be brought about; but since these discussions have not an immediate connection to the subject we have in mind, we are satisfied to send the reader to the memoirs cited.

13. Euler then treated the same problem in the following volume following a method analogous to the one we have discussed. He arrived at this equation:

$$y = \varphi\left(x + t\sqrt{c}\right) + \varphi(x - t\sqrt{c}),$$

in which the function φ must be such, that

$$\varphi\left(t\sqrt{c}\right) + \varphi(-t\sqrt{c}) = 0 \text{ and } \varphi\left(a + t\sqrt{c}\right) + \varphi(a - t\sqrt{c}) = 0,$$

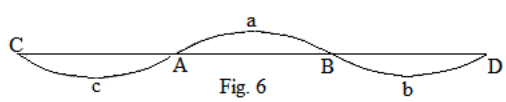


Fig. 6

whatever the value of *t* should be, which does not differ essentially from that which had been found previously. Euler concluded from the whole eel-shaped curve C*c*A*a*B*b*D (*fig. 6*), continued from one part to another to infinity by similar parts C*c*A, A*a*B, B*b*D, ... , situated alternatively above and below the axis, would be capable of representing the function φ, whether the curve were regular or irregular. From which it follow, since for the beginning of the motion the equation of the curve is $y = 2\varphi(x)$, it will be sufficient to consider the initial curve of the string A*a*B, whatever that shall be, and if one reiterates its description above and below the axis indefinitely from part to part, half the sum of the ordinates, which correspond to the abscissas $x + t\sqrt{c}$, $x - t\sqrt{c}$ in the composite curve C*c*A*a*B*b*, will be the ordinate for the abscissa *x* in the curve of the taut string after some time *t*.

14. This construction of Euler evidently is much more general than that d'Alembert had considered, himself having considered always that the curve generated would be regular,

and that it could be locked into an on-going equation. It was regarding this idea that this great geometer had believed that such a construction would be insufficient whenever on the curve generated the law of continuity could not be followed, and he had been content to avoid publishing that in an addition to his memoirs, printed in the year 1750.

Euler has tried to respond to this objection in the volume for the year 1753; here he retraces the whole analysis of the problem, and he maintains constantly against d'Alembert that from the correctness of the construction given, it is not necessary to take account of the law of continuity in the function φ, which depends on the initial curve of the string. But as d'Alembert had not brought up any particular reason to discount his objection, neither had Euler raised any, from which it follows that the question remains still undecided. d' Alembert promised that in the new edition of the excellent *Traite de Dynamique* of last year a rather extensive writing on this matter; but I do not know if it is yet available ; meanwhile, that allows me to make the following reflections on this dispute.

15. It is certain that the principles of differential and integral calculus depend on the consideration of variable algebraic functions ; thus it does not appear that we can give a greater scope to the conclusions drawn from these principles which does not compromise the very nature of these functions. Now no one can doubt that in these algebraic functions all their different values shall be connected together by the law of continuity ; that is why it appears beyond doubt that these consequences, which are deduced from the rules of the differential and integral calculus, always will be illegal in all these cases where this law is not supposed to have a place. It follows from that, since Euler's construction is deduced at once from the integration of the given differential equation, that this construction is applicable by its very nature only to continuous curves, and which may be able to be expressed by some function of the variable t and x. I conclude hence that all the proofs that one can bring to decide such a question, in assuming at first that the ordinate y of the curve must be a function of t and u, just as d'Alembert and Euler have done here, and that it is only by a calculation, such as the one we have in mind, in which we consider the movements of the points of the rope, each one individually, that we can hope to reach a conclusion that is in free from any division.

16. During the course of such a dispute between the two greatest geometers of our century, a third adversary has been raised against both two : that is the celebrated Daniel Bernoulli, so advantageously known by his excellent works. The very same, in a memoir published amongst those of the Royal Academy of Berlin of the year 1753, professed to have demonstrated that the solution of Taylor *Concerning vibrating strings* is the only one capable of satisfying all the cases possible for such a problem, and he had established this general proposition, that, whatever the motion of a stretched string might be able to be, it can only form elongated trochoids always, or else its figure would be a mixture of two or more curves of that same kind. Now, we have found already above (11) that, according to Taylor's hypothesis, the general equation of a vibrating string is :

$$y = \mathrm{Y}\sin\left(\frac{s\bar{\varpi}x}{2a}\right)\cos\left(\frac{s\bar{\varpi}t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right);$$

hence, putting different constants $\alpha, \beta, \gamma, ...$ for Y, and putting the numbers 1, 2, 3, ... , in place of s, the general equation of the string becomes, according to Bernoulli,

$$
\begin{aligned}
y = {} & \alpha \sin\left(\tfrac{\bar{\omega} x}{2a}\right)\cos\left(\tfrac{\bar{\omega} t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\tfrac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\
& + \beta \sin\left(\tfrac{2\bar{\omega} x}{2a}\right)\cos\left(\tfrac{2\bar{\omega} t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\tfrac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\
& + \gamma \sin\left(\tfrac{3\bar{\omega} x}{2a}\right)\cos\left(\tfrac{3\bar{\omega} t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\tfrac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\
& + \delta \sin\left(\tfrac{4\bar{\omega} x}{2a}\right)\cos\left(\tfrac{4\bar{\omega} t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\tfrac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

The author deduced this ingenious theory by a kind of induction which he has drawn from the consideration of the motions of a number of bodies which are supposed to perform regular and isochronous vibrations ; he shows that if there is only a single body, it must follow the known laws of isochronism ; that if there shall be two there, their vibrations can be agreed to be composed from two vibrations of the first kind, and hence so on ; from which he concludes that the general equation set out above will be appropriate to express all these kinds of motions, by taking just as many terms as there are bodies; and that, in the case of an extended string, the number of terms must be infinite ; he supports his feelings more on experience that has taught us that the same string can produce several harmonious sounds, which correspond, so to speak, to each term of his equation. Finally he extends this theory to all the infinitely small motions reciprocating, which have a place in nature, and he believes it possible to deduce many important consequences from that. All these matters are set out in detail by the author in the piece cited, to which we direct readers; it will be sufficient for me to have given in general a rather neat idea.

Bernoulli's design therefore was to show that the calculations of d'Alembert and Euler bring us nothing more than that what can be deduced from those of Taylor, and even that these calculations, although extremely simple, were able to shine a light on the vibrations of strings which one would have to wait for in vain from the abstract and delicate analysis of these two geometers.

17. One of the two, namely Euler, hastened to respond to these objections in the same dissertation cited, which is printed following that of Bernoulli. He objected in turn to the other that his equation for the sounding curve, although continued to infinity, never the less was unable to express all the motions possible of a stretched string ; for, if one puts $t = 0$, the equation of the curve will become

$$y = \alpha \sin\left(\tfrac{\bar{\omega} x}{2a}\right) + \beta \sin\left(\tfrac{2\bar{\omega} x}{2a}\right) + \gamma \sin\left(\tfrac{3\bar{\omega} x}{2a}\right) + ...$$

As a consequence it would be necessary that this equation would contain all the figures that one was able to give to a stretched string, to wit all the curves possible, that which

did not appear to be because of certain properties which seem to distinguish the curves taken in this equation from all the other curves that one could imagine; these properties are the same as d'Alembert required in his generating curves, namely, wherein by increasing or diminishing the abscissa by some multiple of the axis, the value of the ordinate *y* does not change. In effect, it seems to me, that one can show that all the curves endowed with these properties are able to be reduced to the above equation. From which it follows that, although d'Alembert has found the analysis of Taylor insufficient to draw a general resolution, nevertheless it appears to agree with Bernoulli in the foundations of the thing, namely, that the problem can be solved only in these two cases of the trochoid or in a mixture of several trochoids.
[In general a trochoid is a curve traced out by a point somewhere on the radius of a circle rolling along a straight line, the cycloid being one limiting case.]

18. From that it can be seen that the objections of Bernoulli and d'Alembert against Euler, however these may different from each other, nevertheless are based on the same principles. Moreover, neither Bernoulli nor Euler had been able to see directly if all the curves that a stretched string is able to form are contained are contained or not in the equation reported; because, since each term in this equation corresponds, so to speak, to the motions of each point of the string, it would be necessary for that in the first place to give a general solution to the problem of the string vibrating under the hypothesis that it was laden with an infinite number of bodies ; a solution that even Bernoulli admitted never to have seen, and further he believed that no one had ever given.

It comes about from all this discussion that the analysis we have proposed in the preceding chapter is , perhaps, the only one which may be able to shed sufficient light on these dark matters to clarify the doubts that one might form from one part or another. Hence I am going to undertake this analysis, and I shall try to develop it to its full extent, not only because it must satisfy all the objectives that we have in mind here, but also because, it seems to me, to be entirely new, since it is necessary to determine the motions of as many bodies as one would wish to suppose, without understanding at first what law of continuity there may be by which any two may be connected, so to speak, and contained in the same formula.

RECHERCHES
sur
LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

(Miscellanea Taurinensia, t.I 1759.)

INTRODUCTION.

Quoique la science du Calcul ait été portée dans ces derniers temps auplus haut degré de perfection, il ne parait cependant pas qu'on se soit beaucoup avancé dans l'application de cette science aux phénomènes de la Nature. La théorie des fluides, qui est assurément une des plus importantes pour la Physique, est encore très-imparfaite dans ses éléments, malgrè les efforts de plusieurs grands hommes qui ont tenté de l'approfondir. Il en est de même de la matière que j'entreprends d'examiner ici, et qu'on peut avec raison regarder comme un des principaux points de cette théorie. Car le son ne consistant que dans de certains ébranlements imprimés aux corps sonores, et communiqués au milieu élastique qui les environne, ce n'est que par la connaissance des mouvements de ce fluide qu'on peut espérer de découvrir sa véritable nature, et de determiner les lois qu'il doit suivre dans sa propagation.

Newton, qui a entrepris le premier de soumettre les fluides au calcul, a aussi fait sur le son les premières recherches, et il est parvenu à en déterminer la vitesse par une formule qui ne s'éloigne pas beaucoup de l'expérience. Mais si cette théorie a pu contenter les Physiciens, dont la plupart l'ont adoptée, il n'en est pas de même des Géomêtres qui, en etudiant les démonstrations sur lesquelles elle est appuyée, n'y ont pas trouvé ce degré de solidité et d'évidence qui caractérise d'ailleurs le reste de ses Ouvrages. Cependant aucun, que je sache, ne s'est jamais attaché à découvrir et à faire connaître les principes qui peuvent les rendre insuffisantes; encore moins a-t-on entrepris de leur en substituer de plus sùrs et de plus rigoureux (*).

Les Commentateurs des *Principes* ont à la vérité tâché de rétablir cet endroit par une méthode purement analytique, mais, outre qu'ils n'ont envisagé la question que sous un point de vue tout à fait particulier, leurs calculs sont d'ailleurs si compliqués, et embarrassés dans des suites infinies, qu'il ne parait pas qu'on puisse en aucune façon acquiescer aux conclusions qu'ils se sont efforcés de n déduire.

J'ai donc cru qu'il était nécessaire de reprendre toute la question dans ses fondements et de la traiter comme un sujet entièrement nouveau, sans rien emprunter de ceux qui peuvent y avoir travaillé jusqu'à présent.

Tel est l'objet que je me suis proposé dans les Recherches suivantes. Pour le faire mieux connaître, je commence par donner une idée de la théorie de M. Newton, et des difficultés auxquelles elle est sujette.

(*) Voici comment parle un des plus célèbres Géomêtres de notre lemps dans son excellent *Traité des Fluides* (art. 219): " Ce serait ici le lieu de donner des méthodes pour déterminer la vitesse du son, mais j'avoue que je ne suis point encore parvenu à trouver sur ce sujet rien qui pût me satisfaire. Je ne connais jusqu'à présent que deux Auteurs qui aient donné des formules pour la vitesse du son, savoir M. Newton dans ses *Principe,* et M.Euler dans sa *Dissertation sur le Feu,* qui a partagé le prix de l'Académie en 1738. La formule donnée par M. Euler sans démonstration est fort différente de celle de M. Newton, et j'ignore quel chemin l'y a conduit; à l'égard de la formule de M. Newton, elle est démontrée dans ses *Principes,* mais c'est peut-être l'endroit le plus obscur et le plus difficile de cet ouvrage. M. Jean Bernoulli le fils, dans la *Pièce sur la Lumière,* qui a remporté le prix de l'Académie en 1736, dit qu'il n'oserait pas se flatter de ntendre cet endroit des *Principes.*"

C'est dans la Section VIII du Livre II des *Principes* que se trouve renfermée toute cette théorie. L'Auteur considère d'abord la propagation du mouvement dans les fluides élastiques, et la fait consister dans des dilatations et des compressions successives, qui forment comme autant de pulsations, et qui se répandent à la ronde par tout le fluide. Il passe ensuite à examiner comment ces pulsations peuvent être produites par le frémissement des parties d'un corps sonore quelconque. Il imagine pour cela qu'une particule du fluide poussée par les vibrations du corps contigu condense par une certaine distance les particules suivantes, jusqu'à ce que, la condensation étant devenue la plus grande, les mêmes particules commencent à se dilater de part et d'autre, ce qui forme selon lui une infinité de fibres sonores qui partent toutes du même point comme d'un centre commun. Il veut de plus que chacune de ces premières fibres en engendre une autre égale à son extrémité, lorsqu'elle a achevé une oscillation entière, et celle-ci une troisième, et ainsi successivement, de sorte qu'il se forme, pour ainsi dire, autour du corps sonore plusieurs voûtes sphériques, qui aillent toujours en s'élargissant, tout de même comme l'on observe dans les ondes qui s'excitent sur la surface d'une eau tranquille, par l'agitation de quelque corps étranger que ce soit.

Voilà quels doivent être selon cet illustre Auteur les mouvements des particules de l'air qui produisent et propagent le son. Mais M. Newton est encore allé plus loin, il a calculé tous les mouvements particuliers qui composent chacune des pulsations. Pour y parvenir il regarde les fibres élastiques de l'air comme composées d'une infinité de points physiques disposés en ligne droite et à égale distance les uns des autres. La méthode qu'il emploie pour déterminer les oscillations de ces points consiste à les supposer d'abord isochrones et toujours les mêmes dans chacun de ux. M. Newton prouve ensuite que cette hypothèse s'accorde entièrement avec les lois mécaniques qui dépendent de l'action mutuelle que les points exercent en vertu de leur ressort; d'où il conclut qu'en effet ces mouvements sont tels qu'il les a supposés, et comme à chaque oscillation il doit s'engendrer selon lui une nouvelle fibre égale et semblable à la première, il trouve l'espace que le son parcourt dans un temps donné, en calculant seulement la durée d'une simple vibration.

M. Jean Bernoulli le fils, dans son excellente *Piece sur la Lumière,* a aussi déterminé, d'après les mêmes hypothèses, la vitesse du son; son procédé diffère pourtant de celui de M. Newton en ce qu'il a d'abord supposé que les vibrations des particules sont parfaitement isochrones, ce que ce grand Géomètre s'était proposé de démontrer. Aussi n'est-il pas surprenant que ces deux Auteurs soient arrivés à la même formule pour la vitesse du son, et l'accord apparent de leurs calculs ne peut être apporté comme une preuve des fondements de la théorie qu'on vient d'exposer (*).

A l'égard des premières propositions sur la formation des fibres élastiques, et surtout de leur comparaison avec les ondes, je crois inutile de m'arrêter davantage à les examiner. Car, outre que plusieurs Auteurs en ont déjà fait voir le peu de solidité et l'insuffisance même pour l'explication des phénomènes du son (**), la manière avec laquelle elles sont présentées dans les *Principes* fait voir évidemment que l'Auteur ne les adoptait que comme de simples hypothèses pour simplifier la nature d'un problème assez composé de lui-même. Et quand même ces hypothèses seraient vraies, ne serait-on pas en droit de n exiger une démonstration? Or cette démonstration doit nécessairement dépendre de la résolution

(*) M. Bernoulli prouve à la vérité, dans l'ouvrage cité, que tout corps qui est tenu en équilibre par deux puissances égales et directement contraires, s'il vient à être tant soit peu déplacé, doit faire autour de son point de repos des oscillations simples et régulières. Mais cette théorie n'est guère applicable qu'au seul cas où il n'y ait qu'un corps mobile. Pour le faire sentir, supposons d'abord, selon cet Auteur, que le corps soit sollicité selon deux directions contraires par les forces égales P et Q : il est clair que ces forces ne pourront être que des fonctions de la distance du corps à un point fixe quelconque; donc, si on lui fait parcourir un espace infiniment petit ds, la somme des accroissements de ces deux forces sera exprimée par pds, ce qui donnera par conséquent la force accélératrice qui porte le corps vers son point d'équilibre; et comme on ne veut considérer que les mouvements infiniment petits, on supposera p constant, d'où la force donnée deviendra proportionnelle à la distance à parcourir ds, et les oscillations se feront selon les lois connues de l'isochronisme. Mais il n'en sera pas de même s'il y a plusieurs corps qui se soutiennent mutuellement en équilibre, quoique rangés tous sur la même droite. Dans ce cas les forces P, Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2, ... qui agissent sur chacun de ux seront des fonctions de leurs distances intermédiaires; ainsi, ds_1, ds_2, ds_3,…. représentant les déplacements infiniment petits de tous les corps, on aura pour les forces accélératrices des expressions de cette forme $pds_1 + qds_2 + rds_3 + ...$ où *p, q, r, ...* peuvent être regardées comme constantes. D'où il est aisé de comprendre que les mouvements des corps ne seront plus astreints au simple isochronisme; et c'est proprement ce qui arrive aux particules des fibres élastiques de l'air. C'est aussi par cette raison que le calcul qu'on trouve dans le Commentaire des *Principes* serait encore insuffisant, même quand il ne renfermerait pas des approximations, puisqu'on n'y considère que trois ou quatre particules mobiles. M. d'Alembert a fait sentir cette difficulté pour le cas d'une corde vibrante chargée de plusieur petits poids, p. 359 des *Mémoires de l'Académie de Berlin,* pour l'année 1750.

(**) *Voyez* la suite de l'article des fluides cité ci-dessus; *voyez* encore le Mémoire de M. de Mairan dans les *Mémoires de l'Académie de Pari,* année 1737; la *Physique* de Perrault, et d'autres

générale du problème proposé. Il faut donc avouer que la théorie de M. Newton serait, même à cet égard, bien éloignée de pouvoir entièrement satisfaire à son objet. Mais il y a plus, le théorème dans lequel il détermine les lois des oscillations des particules est fondé sur des principes insuffisants et même fautifs.

Le célèbre M. Euler paraît s'en être aperçu dès l'année 1727, comme l'on voit dans une *Thèse sur le Son,* soutenue à Bâle la même année. Cependant M. Cramer est, je crois, le premier qui en ait donné une preuve solide et convaincante (*Voyez* les Commentaires des *Principes.*). Il fait voir que le procédé de M. Newton peut également s'appliquer à démontrer cette autre proposition, savoir : que les particules élastiques suivent dans leurs mouvements les lois d'un corps pesant qui monte et qui tombe librement, ce qui est tout à fait incompatible avec l'isochronisme des oscillations que l'illustre Auteur anglais a prétendu établir. Cette remarque seule paraîtrait suffire pour faire tomber entièrement la théorie en question. Cependant, comme les grands hommes ne doivent être jugés que d'après l'examen le plus exact et le plus rigoureux, on aurait tort de la rejeter avant que de'n avoir demontré l'insuffisance d'une manière qui ne laisse plus rien à désirer.

Voilà le premier pas que j'ai pensé devoir faire en entrant dans les Recherches que je m'étais proposées sur la nature et la propagation du son.

J'ai donc commencé par étudier avec toute l'attention dont j'ai été capable les propositions de M. Newton dont il s'agit, et j'ai trouvé en effet qu'elles sont fondées sur des suppositions incompatibles entre elles, et qui portent nécessairement à faux. C'est ce que j'ai tâché de faire voir par deux voies différentes dans le Chapitre I[er] de la Dissertation suivante. Cet objet ainsi rempli, je me suis appliqué à rechercher des méthodes directes et générales pour résoudre le problème proposé, sans employer d'autres principes que ceux qui tiennent immédiatement aux lois connues de la Dynamique.

Pour donner à mes Recherches le plus de généralité qu'il est possible, et pour les rendre en même temps applicables à ce qui se passe réellement dans la nature, j'ai d'abord envisagé la question sous le même point de vue sous lequel tous les Géomêtres et les Physiciens l'ont regardée jusqu'ici, et je doute qu'on puisse jamais réduire le problème sur les mouvements de l'air qui produisent le son à un énoncé plus simple que celui-ci, savoir :

Ètant donné un nombre indefini de particules élastiques rangees en ligne droite, qui se soutiennent en equilibre en vertu de leurs forces mutuelles de répulsion, determiner les mouvements que ces particules doivent suivre dans le cas qu'elles aient été, comme que ce soit, derangées, sans sortir de la même droite.

Pour en faciliter la résolution, je suppose seulement que les particules sont toutes de même grandeur et douées d'une même force élastique, et, de plus, que leurs mouvements sont toujours infiniment petits: conditions que je ne crois pas pouvoir porter la moindre atteinte à la nature du problème envisagé physiquement.

En examinant les équations trouvées d'après ces seules *donnees,* je me suis bientôt aperçu qu'elles ne différaient nullement de celles qui appartiennent au problème *de chordis vibrantibus,* pourvu qu'on suppose les mêmes corpuscules disposés de la même manière dans un cas que dans l'autre; d'où il s'ensuit qu'en augmentant leur nombre à l'infini, et diminuant les masses dans la même raison, le mouvement d'une fibre sonore dont les particules élastiques se touchent mutuellement doit être comparé à celui d'une corde vibrante correspondante (*).

Ceci m'a donc condoit à parler des théories que les grands Géomêtres, MM. Taylor, d'Alembert et Euler, ont données sur ce sujet. J'expose en peu de mots leurs différends, et les objections que M. Daniel Bernoulli a faites aux deux derniers; et, après avoir soigneusement examiné les raisons des uns et des autres, j'en conclus que les calculs qu'on a faits jusqu'à présent ne sauraient décider de telles questions,

(*) C'est une justice que l'ou doit ici au célèbre M. d'Alembert, que de faire remarquer qu'il avait déjà trouvé ce rapport entre les deux problèmes mentionnés dans l'Article XLVI de son premier *Mémoire sur les Cordes vibrantes* inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin;* mais il ne parait pas, du moins que je sache, qu'il en ait jamais fait aucun usage.

et que c'est nécessairement à la solution générale que nous avons en vue qu'il faut s'en rapporter.

J'entreprends donc cette solution dont l'analyse me paraît en elle même neuve et intéressante, puisqu'il y a un nombre indéfini d'équations à résoudre à la fois. Heureusement la méthode que j'ai suivie m'a mené à des formules qui ne sont pas fort composées, eu égard au grand nombre d'opérations par où j'ai été obligé de passer. Je considère d'abord ces formules dans le cas où le nombre des corps mobiles est fini, et , j'en tire aisément toute la théorie du mélange des vibrations simples et régulières, que M. Daniel Bernoulli n'a trouvée que par des voies particulières et indirectes. Je passe ensuite au cas d'un nombre infini de corps mobiles, et, après avoir prouvé l'insuffisance de la théorie précédente dans ce cas, je tire de mes formules la même construction du problèm *de chodis vibrantibus,* que M. Euler a donnée, et qui a été si fort contestée par M. d'Alembert. Je donne de plus à cette construction toute la généralité dont elle est capable, et, par l'application que j'en fais aux chordes de musique, j'obtiens une démonstration générale et rigoureuse de cette importànte vérité d'expérience, savoir: que, quelque figure qu'on donne d'abord à la corde, la durée de ses oscillations se trouve néanmoins toujours la même (*).

A cette occasion, je développe la théorie générale des sons harmoniques qui résultent d'une même corde, de même que celle des instruments à vent. Quoique ces deux théories aient été déjà proposées, l'une par M. Sauveur et l'autre par M. Euler, cependant je crois être le premier qui les ait immédiatement déduites de l'analyse.

Je viens maintenant au principal objet de mes Recherches, savoir aux

(*) Le savant M. d'Alembert cité ci-dessus, dans l'Article III de son Addition au *Mémoire sur les Cordes vibrantes,* imprimée dans le tome des *Mémoires de l'Académie de Berlin,* pour l'année 1750, fait à ce propos la remarque suivante : " Il est vraisemblable qu'en général, quelque figure que la corde prenne, le temps d'une vibration sera toujours le même, et c'est ce que l'expérience paraît confirmer, mais ce qu'il serait difficile, peut-être impossible de démontrer en rigueur par le calcul." Je ne rapporte ces paroles d'un si grand Géomêtre que pour donner une idée de la difficulté du problème que j'ai résolu lois de la propagation du son. Je suppose qu'une particule d'air reçoive du corps sonore une impulsion quelconque, je trouve par l'application de mes formules qu'il se communique d'une particule à l'autre un mouvement qui n'est qu'instantané et qui ne dépend en rien de la force du premier ébranlement. La vitesse avec laquelle se fait cette communication est déterminée par la même formule que M. Newton avait déjà donnée pour la vitesse du son, et dont les résultats se trouvent assez conformes à l' expérience. Le calcul me condoit ici à traiter des échos simples et composés, et la théorie que j'établis n'est sujette à aucune des difficultés qui se rencontrent dans l'explication que les Physiciens en ont donnée jusqu'à présent. Ces Recherches sont suivies d'un examen du mélange des sons, et de la manière avec laquelle ils peuvent se répandre dans le même espace sans se troubler ou se confondre en aucune façon. Je tire enfin de mes formules une explication rigoureuse et incontestable de la résonnance et du frémissement naturel des cordes harmoniques au bruit de la principale; phénomène connu depuis longtemps, et pour lequel on a inventé plusieurs systèmes, sans être parvenu à en donner une raison satisfaisante.

Voilà les principaux objets que j'ai traités dans la Dissertation présente, et que le défaut de temps et quelques autres obstacles imprévus m'ont empêché d'expliquer avec plus d'ordre et de netteté. Je suis bien éloigné de croire qu'elle contienne une théorie complète sur la nature et la propagation du son; mais ce sera du moins avoir contribué à l'avancement des Sciences physico-mathématiques, que d'avoir démontré par le calcul plusieurs vérités qui avaient jusqu'ici paru inexplicables dans la nature, et l'accord de mes résultats avec l'expérience servira peut-être à détruire les préjugés de ceux qui semblent désespérer que les Mathématiques ne puissent jamais porter de vraies lumières dans la Physique. C'est un des principaux buts que je m'étais proposés pour le présent.

SECTION PREMIÈRE.

RECHERCHES SUR LA NATURE DU SON.
CHAPITRE PREMIER.

DES OSCILLATIONS DES PARTIES INTIMES DES FLUIDES ÉLASTIQUES.

1. J'entreprends avant tout d'examiner la théorie que M. Newton a renfermée dans la Section VIII du Livre II des *Principes mathématiques.* Laissant à part toute discussion sur la formation des ondes et des fibres sonores dont on a parlé dans l'Introduction, je m'attache principalement à l'analyse du théorème, dans lequel il prétend établir que chaque particule d'un fluide élastique homogène suit dans ses mouvements les mêmes lois qu'un pendule qui décrit une cycloïde dont la longueur égale l'excursion totale de la particule, et où la pesanteur qui l'anime est équivalente à l'élasticité naturelle du fluide. Pour démontrer que cette proposition est conforme à la vérite, supposons d'abord, dit M. Newton, qu'elle le soit en effet, et voyons ce qui s'ensuivra. Il cherche donc,

d'après une pareille supposition, la force accélératrice des particules, et il trouve que cette force est précisément la même qui fait mouvoir un pendule dans des arcs de la cycloïde donnée. Pour faire mieux sentir l'inexactitude et l'insuffisante du procédé qui l'a condoit à cette conclusion, j'ai cru devoir convertir le théorème en problème, en supposant d'abord inconnue ou indéterminée la loi des mouvements qu'on se propose de trouver. Pour cela il n'y a d'autres changements a faire aux propositions de M. Newton que de substituer au lieu du cercle dont les arcs expriment les temps, et les coupées les espaces parcourus, une autre courbe quelconque qui fasse la même fonction.

Je rapporterai donc ici la proposition dont il s'agit, et j'aurai soin de me servir des mêmes expressions de l'Auteur autant qu'il me sera possible.

Propositio XLVII, *Lib.* II. *Problema.*

2. *Pulsibus per fluidum elasticum propagatis invenire legem, quâ singulae fluidi particulae motu reciproco brevissimo euntes, el redeuntes accelerantur, et retardantur.*
Designent *(fig.* 1) AB, BC, CD, ... pulsuum successivorum aequales

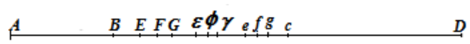


Fig. 1.

distantias, ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica medii quiescentis in recta AC ad aequales ab invicem distantias sita ; E*e,* F*f,* G*g* spatia aequalia perbrevia, per quae puncta illo notu reciproco singulis vibrationibus eunt et redeunt; $\varepsilon, \phi, \gamma$ loca quaevis intermedia eorumdem punctorum; et EF, FG lineolas physicas, seu medii partes lineares punctis illis interjectas, et successive translatas in loca $\varepsilon\varphi, \phi\gamma$ et ef, fg . Rectae *Ee* aequalis ducatur recta PS; *et super ipsa describatur curva in se rediens* PHS*hP (fig.* 2). Per hujus *peripheriam* totam cum partibus

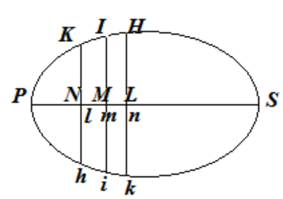
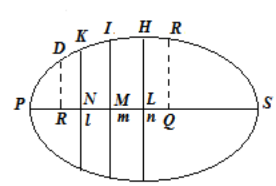


Fig. 2.

suis exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipsius partibus proportionalibus, sic ut completo tempoaequovis PH, vel PHS*h*, si demittatur ad PS perpendiculum HL, vel *hl,* et capiatur Eε aequalis PL vel *PI,* punctum physicum E reperietur in ε ; hac lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad *e,* et indè redeundo per ε ad E vibrationes singulas peraget, *prout sert natura curvae propositae* PHS*h*P*; invenienda est hujusmodi curva.*
In *peripheria* PHS*h* capiantur aequales arcus HI, IK, vel *hi, ik* eam habent rationem ad *peripheriam* totam, quam habent aequales rectae EF, FG ad pulsuum intervallum totum

BC, et demissis perpendiculis IM, KN, vel *im,kn,* quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, et vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C, si PH, vel PHS*h* sit tempus ab initio motus puncti E erit PI, vel PHS*i* tempus ab initio motus puncti G, et propterea Eε, Fϕ, Gγ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipsis PI, P*m*, P*n* in punctorum reditu, aequales respective. Unde εγ seu $\mathrm{EG}+\mathrm{G}\gamma-\mathrm{E}\varepsilon$ in itu punctorum aequalis erit $\mathrm{EG}-\mathrm{LN}$, in reditu autem aequalis $\mathrm{EG}+ln$; sed εγ latitudo est, seu expansio partis medii EG in loco εγ; et propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $\mathrm{EG}-\mathrm{LN}$ ad EG, in reditu autem ut $\mathrm{EG}+ln$, seu $\mathrm{EG}+\mathrm{LN}$ ad EG .... Unde vis elastica puncti F in loco εγ est ad ejus vim elasticam mediocrem in loco EG ut $\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{LN}}$ ad $\frac{1}{\mathrm{EG}}$ in itu; in reditu vero ut $\frac{1}{\mathrm{EG}+ln}$ ad $\frac{1}{\mathrm{EG}}$; et eodem argumento vires elasticae punctorum physicorum E, et G in itu sunt ut $\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{MR}}$ et $\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{QM}}$ ad $\frac{1}{\mathrm{EG}}$ ductis scilicet (*fig.* 3) perpendiculis DR, FQ, quae intercipiant partes arcus FH, KD aequales ipsis

Fig. 3.



HI, IK, et virium differentia ad medii vim elasticam mediaerem, ut
$\frac{\mathrm{QM}-\mathrm{MR}}{(\mathrm{EG}-\mathrm{MR})(\mathrm{EG}-\mathrm{QM})}$ ad $\frac{1}{\mathrm{EG}}$; hoc est ut $\frac{\mathrm{QM}-\mathrm{MR}}{\mathrm{EG}^2}$ ad $\frac{1}{\mathrm{EG}}$, sive ut $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$ ad EG, si modo (ob angustos vibrationum limites) supponamus MR, QM indefinite minores esse quantitate EG; quare cum quantitas EG detur, differentia virium est, ut $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$. Sed differentia illa (id est excessus vis elasticae puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica εγ acceleratur, et propterea vis acceleratrix lineolae physicae εγ est, ut *differentia linearum* QM *et* MR; *igitur ex Mechanicae principiis differentia ista esse debebit, ut fluxia secunda spatii quod describitur a particula εγ, posita scilicet fluxione prima temporis constante. Jam vero quoniam ex hypothesi tempora exprimuntur per arcus, et spatia per abscissas respondentes erunt* MR, *et QM fluxiones primae spatiarum* PR, PQ, *adeoque* $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$ *aequabitur fluxiani secundae spatii* PR, *vel etiam* PM, *quod ab illo infinite parum differt; quum itaque partes arcus* DI**,** IF *aequentur inter se, habebimus ad determinandam curvam* PHSh *sequentem aequatianem identicam* $\mathrm{QM}-\mathrm{MR}=\mathrm{QM}-\mathrm{MR}$, *seu* $0=0$ *quad nihil indicat.*

3. Cette conclusion vague et indéterminée, que nous venons de trouver, nous apprend donc clairement la raison pour laquelle les principes de M. Newton peuvent nous conduire également à des résultats très différents entre eux, comme M. Cramer l'a ingénieusement démontré dans l'hypothèse que les particules élastiques suivent dans leurs

mouvements la même loi que les corps pesants qui montent ou qui descendent alternativement. Mais suivons encore la théorie de M. Newton, et passons à la *Prop.* XLIX, dans laquelle il détermine le temps que chaque particule doit employer à faire une oscillation entière. Or, comme de la proposition précédente il résulte que toute courbe rentrante PHS*h*P peut également exprimer la relation entre les espaces et les temps, on sera aussi bien en droit de substituer au cercle dans cette proposition une courbe quelconque, et d'y appliquer généralement les mêmes raisonnements que M. Newton a faits sur son hypothèse particulière. Soit donc:

Propositio XLIX. *Problema.*

4. *Datis medii densitate et vi elastica, invenire velocitatem pulsuum.*

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aeris nostri comprimi**,** sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adaequet pondus incumbens, et cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis, et centrum oscillationis sit A, et quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu et reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiae circuli radio A descripti aequale. Nam stantibus, quae in *Prop.* XLVII constructa sunt, si lineola quaevis physica EF singulis vibrationibus describendo spatium PS urgeatur in *loco quovis* εϕ a vi elastica, quae *eadem omnino sit, quam proposita spatiorum, et temporum scala* PHS*h*P *requirit seu* $\frac{\mathrm{QM-MR}}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\mathrm{M}$, *denotante* M *massam, seu pondus lineolae physicae* EG, *peraget haec vibrationes singulas tempore* PHS, *et oscillationes integras tempore* PHS*h*P; id adeo, quia vires aequales aequalia corpuscula per aequalia spatia simul impellent. ..... Sed vis elastica, qua lineola physica EG *in loco quovis* εγ existens urgetur erat (in demonstratione *Prop.* XLVII) ad ejus vim totam elasticam, ut $\mathrm{QM-MR}$ ad EG; et vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur est ad pondus lineolae, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolae longitudinem EG, adeoque ex aequo vis, qua lineola EG *in loco quovis* γ urgetur, est ad lineolae illius pondus, ut $\left(\mathrm{QM-MR}\right)\mathrm{A}$ ad $\overline{\mathrm{EG}}^2$ *hinc vis ista erit ad vim superius inventam* $\frac{\mathrm{QM-MR}}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\mathrm{M}$, *ut* $\frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{EG}}^2}$ *ad* $\frac{1}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\cdot$ *Porro*

$$\mathrm{HK} = 2\mathrm{KI} \ \textit{et} \ \mathrm{EG} = 2\mathrm{EF};$$

unde quum ex constructione propositionis antecedentis habeatur

$$\frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}{\mathrm{BC}},$$

erit etiam

$$\frac{HK}{EG} = \frac{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}{\mathrm{BC}};$$

unde proportio virium supra inventa transmutabitur in hanc

$$\frac{\frac{A}{\mathrm{BC}^2}}{\frac{1}{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}^2}}.$$

Quare cum tempora, quibus aequalia corpora per aequalia spatia impelluntur sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa elastica, ad tempus PHShP in subduplicata ratione

$$\frac{\frac{A}{\mathrm{BC}^2}}{\frac{1}{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}^2}} \text{ seu ut } \frac{\frac{BC}{\sqrt{A}}}{\mathrm{PHS}h\mathrm{P}}.$$

Quum itaque consequentia in hac analogia eadem sint, aequalia esse debebunt et antecedentia; hinc orietur tempus vibrationis unius lineolae EG *urgente vi elastica* $\frac{BC}{\sqrt{A}}$. Sed tempore vibrationis unius, ex itu et reditu compositae pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC; ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium BC *erit* $\frac{BC}{\sqrt{A}}$. Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium BC est ad tempus, quo percurret longitudinem circumferentiae *circuli, cujus radius est* A aequalem in eadem ratione, *scilicet ut* $\frac{\mathrm{BC}}{\pi \mathrm{A}}$ *(posita scilicet pro π ratione circumferentiae ad radium), adeoque erit hoc tempus* $\frac{\pi A}{\sqrt{A}} = \pi\sqrt{A}$; *sed ex theoria pendulorum reperitur etiam tempus oscillationis unius penduli longitudùâs* $\mathrm{A} = \pi\sqrt{\mathrm{A}}$; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiae aequalem.

5. Voilà donc un nouveau paradoxe dédoit des principes de M. Newton, savoir que, quelle que soit la loi des mouvements des particules élastiques, le temps des oscillations est néanmoins toujours le même. Ces deux Propositions que nous venons de détailler, contiennent tout la théorie que cet Auteur a donnée concernant les mouvements de l'air qui font l'objet principal de la Dissertation présente; c'est pourquoi nous les examinerons ici avec tout le soin possible. Pour peu qu'on réfléchisse sur la nature des démonstrations précédentes, on s'apercevra sans peine que les défauts de cette théorie dépendent moins de l'enchainement des raisonnements que des principes et des *données* que l'Auteur adopte taciet tement pour la solution du problème. Ces *données* étant développées se réduisent aux suivantes :
1° Que les mouvements de toutes les particules soient exprimés par le même lieu géométrique, d'où il suit qu'ils doivent être tous d'une même nature;
2° Que ces particules se communiquent le mouvement dans des temps égaux, en sorte qu'elles viennent toutes à passer successivement par les mêmes degrés de mouvement.
Il est constant qu'on ne peut admettre aucune de ces suppositions, si on n'a auparavant démontré qu'elles sont des conséquences nécessaires des conditions données du problème. Or tant s'en faut que dans notre cas la chose soit ainsi, qu'au contraire ce sont ces mêmes conditions qui détruisent entièrement celles qui dépendent de l'action mutuelle que les parties exercent en vertu de leurs forces répulsives. Pour développer cette difficulté dans toute son étendue, ainsi que l'importance de la matière et l'autorité du grand homme, dont les égarements mêmes nous sont instructifs, semblent l'exiger, je vais donner l'analyse pure et exacte du problème dont il s'agit, telle que peuvent la fournir les premiers principes de Mécanique.

6. Soient, selon les premières suppositions de M. Newton *(fig.* 1,p. 48), E, F, G, ... des points physiques qui composent le milieu élastique lorsqu'il est en repos; soient ensuite parvenus ces mêmes points ε, φ, γ, de sorte qu'ils restent néanmoins dans la même ligne droite BC; qu'on dénote les espaces rectilignes parcourus Eε, Fφ et Gγ par y_1, y_2, y_3, , Pl supposant que la première distance EF, FG entre ces points soit égale à *r,* on aura

$$\varepsilon\varphi = r + y_2 - y_1,$$
$$\varphi\gamma = r + y_3 - y_2;$$

or la force d'élasticité naturelle qui agit entre les points E, F, G est exprimée par $\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{r}$, comme il est démontré dans la *Prop.* XLIX ci-dessus, oü M dénote le poids de chaque particule, et A est la hauteur d'une colonne homogène du même fluide, dont la pesanteur égale le ressort naturel des particules; donc, lorsque les points E, F, G viennent à être transportés en ε, φ, γ, cette force d'élasticité se changera en

$$\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{\varepsilon\varphi} = \frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{r+y_2-y_1}.$$

pour les points ε et φ, et en

$$\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{\varphi\gamma} = \frac{\mathrm{A}\times\mathrm{M}}{r+y_3-y_2}$$

pour les points φ et γ, et ainsi de suite; par conséquent la différence de ces deux forces donnera la force motrice de la particule intermédiaire *φ,* laquelle se trouvera égale à $\mathrm{AM}\left(\frac{1}{r+y_2-y_1} - \frac{1}{r+y_3-y_2}\right)$, c'est-à-dire égale à

$$\mathrm{AM}\frac{y_3-2y_2+y_1}{(r+y_2-y_1)(r+y_3-y_2)}.$$

Mais, comme les particules sont supposées devoir faire des excursions assez petites, les différences $y_2 - y_1$ et $y_3 - y_2$ des espaces parcourus s'évanouiront auprès de la quantité *r,* d'où il résulte pour la force motrice de la particule F

$$\mathrm{AM}\frac{y_3-2y_2+y_1}{(r+y_2-y_1)(r+y_3-y_2)},$$

qui est celle qui fait parcourir l'espace y_2 . De la même manière on trouvera pour les autres particules des expressions des forces motrices toutes semblables à celle-ci; d'où, si l'on nomme *t* le temps écoulé depuis le commencement du mouvement de la particule E, et si l'on fait ses différences *dt* constantes, on obtiendra par les principes de la Mécanique l'équation suivante qui contient les lois du mouvement de la particule F, savoir

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{y_3-2y_2+y_1}{(r+y_2-y_1)(r+y_3-y_2)},$$

où *h* est l'espace qu'un corps pesant parcourt librement en tombant durant le temps T; de même on aura pour la particule suivante G l'équation

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{r^2},$$

et ainsi des autres.

En général, si l'indice de *y* exprime toujours la place que tient la particule qui parcourt l'espace *y,* en comptant depuis la première F, on trouvera pour le mouvement de la particule, dont le quantième du rang est *m,* l'équation générale

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{r^2}.$$

Ces équations, comme il est aisé de le voir, sont en mème nombre que les particules mobiles dont on cherche les mouvements; c'est pourquoi, le problème étant déjà absolument déterminé par leur moyen, on est obligé de s'en tenir là, de sorte que toute condition étrangère qu'on voudra introduire ne peut pas manquer de rendre la solution insuffisante et même fautive. Mais pour connaitre distinctement quelle atteinte doivent porter à l'Analyse ci-dessus expliquée les hypothèses particulières que M. Newton a imaginées, pour faciliter peut-être le problème, qui de sa propre nature est très-compliquè, nous allons réduire ces hypothèses en formules.

7. Pour cela nous commencerous par remarquer que si *t* est le temps écoulé depuis le commencement du mouvement de la particule E, il faudra, en vertu de la seconde hypothèse, qu'il se soit écoulé un temps $t + dt$, afin que la particule suivante F ait pu se mouvoir durant un temps *t;* il faudra aussi un temps $t + 2dt$ pour un mouvement semblable de la particulc suivante G, et ainsi pour les autres; d'où il s'ensuit que, puisque toutes les particules sont supposées suivre les mêmes lois par l'hypothèse première, l'espace parcouru par le point F, durant le temps *t* sera égal à l'espace parcouru par la particule G pendant le temps $t + dt$, et que l'espace parcouru par le point E pendant le temps *t* sera le même que l'espace parcouru par la particule G dans le temps $t + 2dt$*;* or y_1, y_2, y_3 expriment les espaces parcourus par les particules E, F, G, ... , dans le même temps *t;* on aura donc

$$y_2 = y_3 + dy_3,\ y_1 = y_3 + 2dy_3 + d^2 y_3;$$

maintenant si l'on substitue ces valeurs de y_1 et de y_2 dans l'expression $y_3 = 2y_2 + y_1$, l'équation qui contient le mouvement de la particule F se changera en celle-ci

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{d^2 y_3}{r^2}$$

mais

$$y_2 = y_3 + dy_3,$$

et par conséquent

$$d^2 y_2 = d^2 y_3 + d^3 y_3;$$

on aura donc l'équation

$$\frac{d^2y_3+d^3y_3}{dt^2}=\frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2}\frac{d^2y_2}{r^2}$$

ou bien, en négligeant le terme d^3y^3 , et divisant tout par d^2y^3 *,* nous aurons

$$\frac{1}{dt^2}=\frac{2\mathrm{A}h}{\mathrm{T}^2r^2},$$

équation qui, comme on voit, ne contient plus aucune des variables $y_{1,}\ y_2,\ y_3, \ldots$. On trouvera par des raisonnements semblables que toutes les autres équations se réduiront encore à celle-ci, laquelle par conséquent pourra être vraie, quelles que soient les valeurs des *y,* pourvu que l'on ait $dt^2=\frac{\mathrm{T}^2r^2}{2\mathrm{A}h}$. Maintenant, si l'on nomme θ le temps d'une oscillation entière, on aura *(fig.* 2, p. 48)

$$\theta=\mathrm{PHS}h\mathrm{P} \text{ et } dt=\mathrm{KI}\,;$$

par conséquent, $\frac{dt}{\mathrm{EF}}=\frac{\theta}{\mathrm{BC}}$ par la *Prop.* XLIX, savoir:

$$dt=\frac{r\theta}{\mathrm{BC}} \text{ et } dt^2=\frac{r^2\theta^2}{\mathrm{BC}^2}=\frac{T^2r^2}{2\mathrm{A}h}\,;$$

d'où l'on tire

$$\theta^2=\frac{\overline{BC}^2\times T^2}{2\mathrm{A}h} \quad \text{et} \quad \theta=\frac{T\times\overline{BC}}{\sqrt{2\mathrm{A}h}},$$

qui se rédoit à la même expression que nous avons déjà trouvée pour la mesure du temps dans la *Prop.* XLIX.

En effet, ayant supposé (4) que la force motrice dans l'échelle PHS*h*P est simplement $\frac{\mathrm{QM-MR}}{\overline{\mathrm{HK}}^2}\mathrm{M}$, on doit de même ici exprimer les forces motrices des particules par $\frac{\mathrm{M}d^2y}{dt^2}$ ou bien supposer $\frac{2h}{\mathrm{T}^2}=1$.

Tout ce que nous venons de démontrer suffit assez, ce me semble, pour faire connaître à fond l'insuffisance et la fausseté de la méthode de M. Newton. Nous allons donc chercher une autre voie qui nous mène à une solution du problème dont il s'agit, fondée sur des principes sûrs et incontestables.

8. Pour envisager d'abord la question sous le point de vue le plus simple et le plus général qu'il soit possible, je regarde avec M. Newton les fluides élastiques comme des amas de corpuscules qui se fuient mutuellement selon les lois connues de l'élasticité. Imaginons donc une suite de corps qui aient tous la même masse, et qui soient rangés sur une même ligne droite, à distances égales les uns des autres; supposons de plus que ces corps se repoussent mutuellement par des forces élastiques qui suivent la raison inverse des distances; et, pour contenir l'action continuelle de ces forces de répulsion qui tendent sans

cesse à écarter les corps les uns des autres, qu'on considère les deux extrêmes comme fixes et immobiles, en sorte que, quelque mouvement qu'on excite dans leur système, il demeure toujours renfermé entre les deux limites données. Maintenant, soit le nombre des corps mobiles égal à $m-1$, leur masse égale à M, la force du ressort naturel égale à E; en conservant les autres suppositions ci-dessus (6), on trouvera que les mouvements de tout le système seront contenus dans les équations suivantes :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_2-2y_1}{r},$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_3-2y_2+y_1}{r},$$

$$\frac{d^2y_3}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_4-2y_3+y_2}{r},$$

....

Ces équations seront au nombre de $m-1$, savoir en même nombre que les corps mobiles, et de plus toutes semblables, excepté la première et la dernière, dans lesquelles les quantités y_0 et y_m, qui représenteraient selon l'ordre établi les espaces parcourus par le premier el dernier corps, doivent être, à cause de l'immobilité de ces corps, supposées égales à zéro; la dernière de ces équations se trouvera donc

$$\frac{d^2y_{m-1}}{dt^2}=\frac{2\mathrm{E}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{-2y_{m-1}+y_{m-2}}{r}.$$

C'est en intégrant toutes ces équations, et en intégrant des valeurs pour chaque inconnue $y_{1,}\ y_2, y_3, \ldots$, exprimées par la mème variable *t,* que l'on parviendra à déterminer les mouvements de tous les corps qui composent le système proposé; mais avant que de ntrer dans ces recherches, il est nécessaire de traiter des causes qui peuvent produire de tels ébranlements dans les parties intimes des fluides élastiques. Nous nous bornerons ici aux cordes vibrantes, dont les mouvements sont plus connus, et qui, peut-être, sont les seuls de cette espèce qui ne se refusent pas à l'analyse.

CHAPITRE II.

DES VIBRATIONS DES CORDES.

9. Soit AB *(fig.* 4) une corde tant soit peu extensible, et qu'on puisse considérer abstraction faite de sa gravité et de sa roideur; supposons qu'elle soit attachée fixement aux deux points immobiles A et B qui la tiennent tendue avec une force égale au poids P.

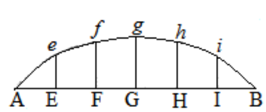


Fig. 4.

Soit, de plus, cette corde chargée de tant de corpuscules E, F, G, ... qu'on voudra, qui aient tous la mème masse M, et qui soient éloignés les uns des autres par des intervalles égaux AE, EF, ... Il est évident, par les principes de la Mécanique, que, si les points E, F, G, ... viennent à être écartés de la ligne droite, en sorte qu'ils décrivent les lignes infiniment petites *Ee*, *Ff,* Gg, ... , chacun de ces points *f* sera poussé vers F par une force égale à $\mathrm{P}\sin efg$. Or, si l'on nomme $y_1, y_2, \ldots,$ les excursions *Ee, Ff,* ... des corps E, F, ... et qu'on fasse l'intervalle constant $\mathrm{AE} = \mathrm{EF} = r$, on aura

$$\sin efg = -\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r}$$

d'où l'on tire, pour le mouvement du corps F, l'équation

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r};$$

on trouvera de même, pour le mouvement du corps suivant G, l'équation

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{r}$$

et ainsi pour les autres. Par conséquent, si les corps attachés à la corde sont au nombre de $m-1$, on aura en général pour leurs mouvements, quels qu'ils soient, les équations suivantes :

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_2 - 2y_1}{r}$$
$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{r}$$
$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{r},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont le nombre sera encore $m-1$, et la dernière sera exprimée par

$$\frac{d^2 y_{m-1}}{dt^2} = \frac{2\mathrm{P}h}{\mathrm{MT}^2}\frac{-2y_{m-1} + y_{m-2}}{r}$$

Il est visible que toutes ces équations sont entièrement semblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvements des corps élastiques, et qu'il n'y a qu'à faire $\mathrm{P} = \mathrm{E}$, pour qu'elles deviennent tout à fait les mêmes; d'où il s'ensuit que les deux problèmes qui y répondent sont de même nature, et qu'en en résolvant un on résout l'autre en même temps.

10. Imaginons que le nombre des corps, dans l'un et dans l'autre cas, augmente à l'infini et que leurs masses diminuent· en même raison : les globules rangés en ligne droite formeront des fibres élastiques, telles qu'on peut les concevoir dans l'air commun, et la corde tendue deviendra une corde uniformément épaisse dans toute sa longueur, comme le sont les cordes de musique; le même rapport subsistera donc encore entre les

oscillàtions des parties de l'une et de l'autre : par conséquent, la théorie des mouvements des cordes étant connue, on pourra par une simple application en déduire celle des mouvements de l'air qui produisent le son. Ces deux problèmes sont donc liés entre eux, non-seulement par leur nature même, mais encore par les principes d'où dépendent leurs solutions. Comme la matière des vibrations des cordes a déjà été traitée par de grands Géomêtres, il sera à propos de rappeler ici en peu de mots les principales méthodes qu'ils ont imaginées pour cela. J'entrerai dans ee détail d'autant plus volontiers que ces Auteurs sont peu d'accord sur les principes et dans les résultats, ce qui pourrait faire douter de la généralité et de la rigueur de leurs solutions.

11. Le premier qui ait tenté de soumettre au calcul le mouvement des cordes vibrantes est le célèbre M. Taylor dans son excellent ouvrage *De Methodo incrementorum.*

Il suppose d'abord, et il prétend même le démontrer, que la corde doit toujours prendre des figures telles, que tous ses points arrivent en même temps à la situation rectiligne; d'où il dédoit que ces figures ne peuvent être que celles d'une espèce de cycloïdes allongées, qu'il nomme *compagnes de la cycloïde.* Voici son procédé :

Fig. 5

Nommant x une abscisse quelconque AE (*fig.* 5), et y l'ordonnée E*e* qui dénote la distance du point E de la corde à l'axe dans un temps quelconque *t,* on démontrera par le même raisonnement (9) que la force acceleratrice du point *e* vers E est exprimée par $-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{d^2y}{dx}$. Soit a la longueur de toute la corde, et S son poids total, on aura $\mathrm{M}=\frac{Sdx}{a}$; et par conséquent la force accélératrice en *e* deviendra

$$-\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Or, afin que toute la corde puisse reprendre sa situation rectiligne, l'Auteur suppose cette force proportionnelle à la distance E*e,* que le pointe doit parcourir; ainsi, en faisant K égale à une ligne quelconque, il obtient l'équation

$$-\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{\mathrm{K}};$$

d'où, en faisant $\frac{\mathrm{S}}{a\mathrm{PK}}=f$, il résulte, par les méthodes connues,

$$x\sqrt{f}=\arcsin\frac{y}{\mathrm{Y}}$$

et

$$y=\mathrm{Y}\sin\left(x\sqrt{f}\right),$$

équation de la courbe pour un temps quelconque *t,* où l'ordonnée Y est la plus grande. Or, comme le pointe, en parcourant l'espace *e*E, est continuellement poussé par une force accélératrice proportionnelle à l'espace qui reste à parcourir, on aura

$$-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2h}{T^2}\frac{y}{\mathrm{K}},$$

d'où, si l'on fait encore, pour abréger, $\frac{2h}{T^2}=g$, l'on tirera de nouveau

$t\sqrt{g}=\arcsin\frac{y}{Y_1}$ et $y=Y_1\sin\left(t\sqrt{g}\right)$, équation qui donne pour un temps quelconque *t* le rapport de l'éloignement *y* du point *e* de l'axe à son plus grand éloignement Y_1; donc, si l'on met au lieu de Y_1, la valeur de *y* qui convient à la courbe la plus grande A*e*B, et que nous avons trouvée plus haut, $Y\sin\left(x\sqrt{f}\right)$, il en résultera l'expression générale des *y* pour tous les temps *t* et pour chaque coupée *x*, savoir

$$y=Y\sin\left(x\sqrt{f}\right)\sin\left(t\sqrt{g}\right),$$

et telle est l'équation de la corde vibrante dans l'hypothèse de M. Taylor, en supposant qu'elle soit en ligne droite au commencement de son mouvement.

Si la corde eût d'abord eu la figure d'une trochoïde allongée, alors puisque, *t* croissant, *y* diminuerait, on aurait trouvé

$$y=Y\sin\left(x\sqrt{f}\right)\cos\left(t\sqrt{g}\right),$$

où $y=Y\sin\left(x\sqrt{f}\right)y$ exprimerait la figure de la corde au commencement.

Pour déterminer la constante K qui entre dans les quantités *f* et *g,* on remarquera que *y* doit être égal à zéro, soit que *x* soit égal à zéro, soit que *x* soit égal à *a,* quelle que soit la valeur de *t.* Or, en posant $x=0,$ on a d'abord $y=0,$ parce que $\sin 0=0$. Qu'on fasse donc $x=a$ et $\sin\left(a\sqrt{f}\right)=0$; si $\frac{1}{\varpi}$ est la raison du rayon du cercle à la circonférence, on sait que $\sin\frac{s\bar{\omega}}{2}=0$, prenant pour *s* un nombre quelonque entier; c'est pourquoi l'on aura

$$a\sqrt{f}=\frac{s\bar{\omega}}{2}\text{et }\sqrt{f}=\frac{s\bar{\omega}}{2a};\text{ or }\sqrt{f}=\sqrt{\frac{S}{a\mathrm{PK}}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{K}}}=\frac{s\bar{\omega}}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{Sa}},$$

et par conséquent

$$\sqrt{g}=\frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{K}}}=\frac{s\bar{\omega}}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{Sa}}.$$

12. Cette solution que nous venons d'expliquer, outre qu'elle porte sur l'hypothèse entièrement gratuite que tous les points de la corde s'étendent eu mème temps en ligne droite, est encore bien éloignée d'être génerale, même dans cette hypothèse, puisqu'il faudrait encore démontrer que c'est dans le seul cas des forces accélératrices proportionnelles aux distances des points de la corde à l'axe, que tous ses points peuvent toucher l'axe dans le mème instant. C'est pour suppléer à ce défaut que le célèbre M. d'Alembert a imaginé une autre méthode de résoudre le problème *de chordis vibrantibus,* pris dans le sens le plus général qu'il soit possible. Cette méthode, qui est sûrement une des plus ingénieuses qu'on ait tirées jusqu'ici de l'Analyse, se trouve détaillée dans deux Mémoires que l'Auteur a donnés dans le tome de l'Académie Royale de Prusse dont nous avons fait mention ci-devant. Je ne rapporterai ici que les principes sur lesquels elle est appuyée, et les conséquences qui en résultent pour la théorie en question.

On a vu (11) que la force accélératrice du point E en *e* est exprimée généralement par $-\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2}$, quelle que soit la courbe de la corde tendue A*e*B; donc, puisque cette force tend à faire parcourir au point E l'espace $e\mathrm{E} = y$, elle devra être égale à $-\frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2}$; on aura donc pour l'équation générale de la courbe, dans un temps quelconque *t*,

$$\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{S}}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{T}^2}{2h}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Il faut d'abord remarquer dans cette équation que la différentielle d^2y du premier membre doit être prise en regardant l'*x* seule comme variable, au lieu que dans la différentielle d^2y du second membre c'est le seul temps *t* qui doit varier. Les Géomêtres ont coutume de mettre de telles expressions entre deux parenthèses de la manière suivante, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, afin que l'on puisse juger, par la simple inspection, laquelle des variables *x* où *t* doit être changeante dans la différentiation de *y*. Soit, pour abreger, $\frac{2\mathrm{P}ah}{\mathrm{ST}^2} = c$, et on aura, a integrer l'equation

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Or M. d'Alembert trouve, par une analyse neuve et ingénieuse, que l'équation finie qui répond à celle-ci est

$$y = \Psi\left(t\sqrt{c} + x\right) + \Gamma(t\sqrt{c} - x),$$

Ψ et Γ exprimant des fonctions quelconques des quantités $t\sqrt{c} + x$ et $t\sqrt{c} - x$. Voilà donc quelle sera l'équation générale de la courbe que peut former une corde tendue. A l'égard de la nature des fonctions exprimées par Ψ et par Γ, elles sont en elles mêmes indéterminées; mais, puisque les deux bouts de la corde sont supposés fixes, il est évident qu'elles doivent satisfaire à ces deux conditions, savoir: que *y* soit égal à zéro lorsque $x = 0$, et lorsque $x = a$, quel que soit le temps *t;* on aura par là les deux équations

$$\Psi\left(t\sqrt{c}\right) + \Gamma(t\sqrt{c}) = 0$$

et

$$\Psi\left(t\sqrt{c} + a\right) + \Gamma(t\sqrt{c} - a) = 0;$$

il résulte de la première

$$\Gamma = -\Psi$$

et ainsi la seconde se change en

$$\Psi\left(t\sqrt{c} + a\right) - \Psi(t\sqrt{c} - a) = 0,$$

laquelle doit être vérifiée par la nature même de la fonction Ψ. Supposant donc une fonction quelconque Ψ qui soit telle, que quelle que soit la valeur de *t,* on aura généralement pour la corde tendue l'équation

$$\Psi\left(t\sqrt{c}+a\right)=\Psi(t\sqrt{c}-a).$$

On sait que toute fonction peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe, dont l'abscisse soit la variable contenue dans la fonction proposée; donc, si l'on décrit une courbe quelconque qui ait des ordonnées égales, à toutes les abscisses exprimées par $t\sqrt{c}+a$ et $t\sqrt{c}-a$, cette courbe donnera une construction fort simple de l'équation proposée, car on n'aura qu'à prendre les ordonnées qui répondent aux abscisses $t\sqrt{c}+x$ et $t\sqrt{c}-x$, dont la différence donnera l'ordonnée de la courbe qui forme la corde sonore dans un temps quelconque *t.* Or, puisque la fonction Ψ doit rester la même, soit qu'on ajoute ou qu'on retranche de la changeante $t\sqrt{c}$ la quantité *a*, si l'on suppose, dans l'équation générale

$$y=\Psi\left(t\sqrt{c}+x\right)-\Psi(t\sqrt{c}-x),$$

que le temps *t* soit augmenté de la quantité $\frac{2a}{\sqrt{c}}$, la valeur de y n'en sera en rien dérangée, et ainsi la corde, au bout d'un temps égal à $\frac{2a}{\sqrt{c}}=2\mathrm{T}\sqrt{\frac{Sa}{2\mathrm{P}h}}$ reprendra toujours la figure qu'elle avait au commencement de ce temps; mais, si la corde dans ses mouvements se trouve une fois étendue en ligne droite, elle reviendra en cette situation après chaque temps *t,* qui contiendra un certain nombre de fois exactement le temps $\mathrm{T}\sqrt{\frac{Sa}{2\mathrm{P}h}}$; on a donc une infinité d'autres courbes différentes de la *compagne de la trochoïde allongée,* donnée par M. Taylor, qui toutes sont douées de cette propriété, que tous leurs points se retrouvent en même temps dans l'axe. M. d'Alembert a fait ensuite beaucoup de recherches ingénieuses sur la nature de ces courbes, qu'il nomme *generatrices,* et sur la manière dont elles peuvent être engendrées; mais comme ces discussions n'ont pas un rapport immédiat au sujet que nous avons en vue, nous nous contenterons de renvoyer le lecteur aux Mémoires cités.

13. M. Euler a traité depuis dans le tome suivant le mème problème par une méthode analogue à celle dont nous venons de parler. Il parvient à cette équation

$$y=\varphi\left(x+t\sqrt{c}\right)+\varphi(x-t\sqrt{c}),$$

dans laquelle la fonction φ doit être telle, que

$$\varphi\left(t\sqrt{c}\right)+\varphi(-t\sqrt{c})=0 \text{ et } \varphi\left(a+t\sqrt{c}\right)+\varphi(a-t\sqrt{c})=0,$$

quelle que soit la valeur de *t,* ce qui ne diffère pas essentiellement de ce qu'on a trouvé ci-devant. M. Euler conclut de là que toute courbe *anguiforme* C*c*A*a*B*b*D (*fig. 6*), continuée de part et d'autre à l'infini par des parties semblables C*c*A, A*a*B, B*b*D, ... , situées alternativement au-dessus

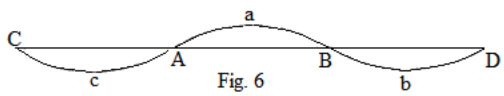


Fig. 6

et au-dessous de l'axe, sera propre à représenter la fonction φ, soit que cette courbe soit régulière ou qu'elle soit irrégulière. D'où il s'ensuit que, puisque au commencement du mouvement l'équation de la courbe est $y = 2\varphi(x)$, il suffira de considérer la courbe initiale de la corde A*a*B, quelle qu'elle soit, et si on réitère sa description au-dessous et au-dessus de l'axe de part et d'autre à l'infini, la moitié de la somme des ordonnées, qui répondent aux abscisses $x+t\sqrt{c}$, $x-t\sqrt{c}$ dans la courbe composée C*c*A*a*B*b,* sera l'ordonnée à l'abscisse *x* dans la courbe de la corde tendue après un temps quelconque *t.*

14. Cette construction de M. Euler est évidemment beaucoup plus générale que celle que M. d'Alembert a imaginée, celui-ci ayant toujours supposé que la courbe génératrice soit régulière, et qu'elle puisse être t'enfermée dans une équation continue. C'est dans cette idée que ce grand Géomêtre a cru qu'une telle construction devenait insuffisante toutes les fois que dans la courbe génératrice on n'aurait pas suivi la loi de continuité, et il s'est contenté d'en avertir le public dans une Addition à ses Mémoires, imprimée dans le tome de l'année 1750.

M. Euler a tâché de répondre à cette objection dans le tome pour l'année 1753; il reprend ici toute l'analyse du problème, et il soutient constamment contre M. d'Alembert que pour l'exactitude de la construction donnée, il n'est nullement nécessaire d'avoir égard à la loi de continuité dans la fonction φ, qui dépend de la courbe initiale de la corde. Mais comme M. d'Alembert n'a apporté aucune raison particulière pour appuyer son objection, M. Euler n'en a aussi apporté aucune, d'où il suit que la question reste encore indécise. M. d' Alembert promet dans sa nouvelle édition de l'excellent *Traite de Dynamique* de l'année passée un écrit assez étendu sur cette matière; mais je ne sais pas s'il a encore vu le jour; en attendant, qu'il me soit permis de faire sur cette dispute la réflexion suivante.

15. Il est certain que les principes du Calcul différentiel et intégral dépendent de la considération des fonctions variables algébriques; il ne paraît donc pas qu'on puisse donner plus d'étendue aux conclusions tirées de ces principes que n'en comporte la nature même de ces fonctions. Or personne ne saurait douter que dans les fonctions algébriques toutes leurs différentes valeurs ne soient liées ensemble par la loi de continuité; c'est pourquoi il semble indubitable que les conséquences, qui se déduisent par les règles du Calcul différentiel et intégral, seront toujours illégitimes dans tous les cas où cette loi n'est pas supposée avoir lieu. Il s'ensuit de là que, puisque la construction de M. Euler est déduite immédiatement de l'intégration de l'équation différentielle donnée, cette construction n'est applicable par sa propre nature qu'aux courbes continues, et qui peuvent être exprimées par une fonction quelconque des variables *t* et *x.* Je conclus donc

que toutes les preuves qu'on peut apporter pour décider une telle question, en supposant d'abord que l'ordonnée *y* de la courbe soit une fonction de *t* et *u,* comme l'ont fait jusqu'ici M. d'Alembert et M. Euler, sont absolument insuffisantes, et que ce n'est que par un calcul, tel que celui que nous avons en vue, dans lequel on considère les mouvements des points de la corde, chacun en particulier, qu'on peut espérer de parvenir à une conclusion qui soit à l'abri de toute atteinte.

16. Pendant le cours d'une telle dispute entre deux des plus grands Géomêtres de notre siècle, il s'est élevé un troisième adversaire contre tous les deux: c'est le célèbre M. Daniel Bernoulli, si avantageusement connu par ses excellents Ouvrages. Celui-ci, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie Royale de Berlin de l'année 1753, prétend avoir démontré que la solution de M. Taylor *de chordis vibrantibus* est seule capable de satisfaire à tous les cas possibles d'un tel problème, et il établit cette proposition générale, que, quel que puisse être le mouvement d'une corde tendue, elle ne formera toujours que des trochoïdes allongées, ou bien que sa figure sera un mélange de deux ou plusieurs courbes de cette espèce. Or nous avons trouvé plus haut (11) que, dans l'hypothèse de M. Taylor, l'équation de la corde vibrante est généralement

$$y = \mathrm{Y}\sin\left(\frac{s\bar{\omega}x}{2a}\right)\cos\left(\frac{s\bar{\omega}t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right);$$

done, posant différentes constantes $\alpha,\beta,\gamma,....$ ... pour Y, et mettant au lieu de *s* les nombres 1, 2, 3, ... , il résulte pour l'équation générale de la corde, selon M. Bernoulli,

$$\begin{aligned} y = {} & \alpha\sin\left(\frac{\bar{\omega}x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\bar{\omega}t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\ & +\beta\sin\left(\frac{2\bar{\omega}x}{2a}\right)\cos\left(\frac{2\bar{\omega}t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\ & +\gamma\sin\left(\frac{3\bar{\omega}x}{2a}\right)\cos\left(\frac{3\bar{\omega}t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\ & +\delta\sin\left(\frac{4\bar{\omega}x}{2a}\right)\cos\left(\frac{4\bar{\omega}t}{2\mathrm{T}}\sqrt{\frac{2h\mathrm{P}}{\mathrm{S}a}}\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'Auteur déduit cette ingénieuse théorie par une espèce d'induction qu'il tire de la considération des mouvements d'un nombre de corps qui sont supposés former des vibrations régulières et isochrones; il démontre que s'il n'y a qu'un seul corps, il doit suivre les lois connues de l'isochronisme; que s'il y en a deux, leurs vibrations peuvent être censées composées de deux vibrations isochrones de la première espèce, et ainsi de suite; d'où il conclut que l'équation générale l'apportée ci-dessus sera propre à exprimer toutes ces espèces de mouvements, en prenant autant de termes qu'il y a de corps; et que, dans le cas de la corde tendue, le nombre des termes doit être infini; il appuie de plus son sentiment sur l'expérience qui nous enseigne que d'une même corde il résulte plusieurs sons harmonieux, qui répondent, pour ainsi dire, à chaque terme de son équation. Enfin il étend cette théorie à tous les mouvements réciproques infiniment petits, qui ont lieu dans la nature, et il croit pouvoir en déduire beaucoup de conséquences importantes. Toutes ces choses sont exposées en détail par l'Auteur dans la pièce citée, a laquelle nous renvoyons les lecteurs; il me suffira de'n avoir donné en général une idée assez nette.

Le dessein de M. Bernoulli était donc de faire voir que les calculs de MM. d'Alembert et Euler ne nous apprenaient rien de plus que ce qu'on pouvait déduire de ceux de M. Taylor, et même que ces calculs, quoique extrêmement simples, pouvaient répandre sur la nature des vibrations des cordes une lumière qu'on attendrait en vain de l'Analyse abstraite et épineuse de ces deux Géomêtres.

17. L'un deux, savoir M. Euler, s'est hâté de répondre à ces objections dans la même Dissertation citée, qui est imprimée a la suite de celle de M. Bernoulli. Il objecte à son tour a celui-ci que son équation pour la courbe sonore, quoique continuée à l'infini, ne peut cependant exprimer tous les mouvements possibles d'une corde tendue; car, si l' on pose $t=0$, l'équation de la courbe devient

$$. y=\alpha\sin\left(\tfrac{\bar{\omega}x}{2a}\right)+\beta\sin\left(\tfrac{2\bar{\omega}x}{2a}\right)+\gamma\sin\left(\tfrac{3\bar{\omega}x}{2a}\right)+.....$$

Par conséquent il faudrait que cette équation renfermât toutes les figures qu'on peut donner a une corde tendue, savoir toutes les courbes possibles, ce qui ne paraît pas être a cause de certaines propriétés qui semblent distinguer les courbes comprises dans cette équation de toutes les autres courbes qu'on pourrait imaginer; ces propriétés sont les mêmes que M. d'Alembert requiert dans ses courbes génératrices, savoir, qu'en augmentant ou diminuant l'abscisse d'un multiple quelconque de l'axe, la valeur de l'ordonnée y ne change point. En effet l'on peut, ce me semble, démontrer que toutes les courbes douées de ces propriétés pourront se réduire à l'équation ci-dessus. D'où il s'ensuit que, quoique M. d'Alembert ait trouvé l'Analyse Taylorienne insuffisante pour en tirer une résolution générale, néanmoins il paraît convenir avec M. Bernoulli dans le fond de la chose, savoir, que le problème ne soit résoluble dans d'autres cas que dans ceux de la trochoïde ou du mélange de plusieurs trochoïdes.

18. On voit de là que les objections de MM. Bernoulli et d'Alembert contre M. Euler, quoiqu'elles diffèrent beaucoup les unes des autres, tiennent néanmoins aux mêmes principes. Au reste, ni M. Bernoulli ni M. Euler n'ont fait voir directement si toutes les courbes que peut former une corde tendue sont comprises ou non dans l'équation rapportée; car, puisque dans cette équation chaque terme répond, pour ainsi dire, aux mouvements de chaque point de la corde, il eùt fallu pour cela donner d'abord une solution générale du problème de la corde vibrante dans l'hypothèse qu'elle fût chargée d'un nombre indéfini de corps; solution
que M. Bernoulli même avoue n'avoir jamais vue, et qu'il croit de plus que personne n'a jamais donnée.

Il résulte de tout cet exposé que l'Analyse que nous avons proposée dans le Chapitre précédent est, peut-être, la seule qui puisse jeter sur ces matières obscures une lumière suffisante à éclaircir les doutes qu'on doit former de part et d'autre. Je vais donc entreprendre cette Analyse, et je tâcherai de la développer dans toute son étendue, non-seulement parcequ'elle doit satisfaire à tous les objets que nous avons ici en vue, mais encore parce qu'elle est, ce me semble, entièrement neuve, puisqu'il s'agit de déterminer les mouvements de tant de corps qu'on en voudra supposer, sans concevoir d'abord qu'il y ait entre eux aucune loi de continuité par laquelle ils soient liés, pour ainsi dire, et contenus dans une même formule.