TREATISE ON THE RESOLUTION OF NUMERICAL EQUATIONS OF ALL DEGREES

CHAPTER ONE.

A method for finding, in some numerical equation, the whole number approximation to each of its real roots.

1. *Theorem I.* If we have some equation [*i.e.* polynomial] and we know two numbers, such that on being substituted successively in place of the unknown of this equation, give results of opposite signs, then necessarily the equation will have at least one real root, the value of which will lie between these two numbers.

This theorem has been known for a long time, and it has been demonstrated customarily from the theory of curved lines. However, it can also be shown directly from the theory of equations, in this manner. Let x be the unknown of the equation, and its roots α, β, γ, etc., then the equation itself, as we know, will be reduced to this form :

$$(x-\beta)(x-\beta)(x-\gamma)=0\,.$$

Now, p and q shall be numbers, which substituted for x, will give results of opposite signs, thus it will be necessary that these two quantities

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\cdots\cdots$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\cdots\cdots$$

must be of different signs. Consequently, it will be necessary that it has at least two corresponding factors, such as $p-\alpha$ and $q-\alpha$, which shall be of opposite signs. Thus, there will be at least one root of the equation, such as α, which will be between these numbers p and q. That's to say : the root shall be smaller than the greater of these two numbers, and greater than the smaller of these ; thus, necessarily this root will be real.

2. *Corollary* 1. Thus, if the numbers p and q differ from each other only by one, or by an amount less than one, then the smaller of these numbers, (if it were whole); or the whole number which shall be immediately less than the smaller of these two numbers, (if

it were not whole); will be the nearest whole number to one of the roots of the equation. If the whole difference between p and q is greater than unity, then calling the whole numbers n, $n+1$,$n+2$, etc. which lie between p and q , it is clear that if we substitute successively in place of the unknown the numbers p, n, $n+1$, $n+2$, etc., q , two consecutive substitutions necessarily will be found which will give the resulting sign difference. Thus, since these numbers which will give these two outcomes differ from each other only by unity, we will find, as above, the nearest whole number to one of the roots of the equation.

3. *Corollary* 2. Any equation whose last term is negative, in supposing the first term positive, by necessity has a real positive root, the nearest whole number of which we will try to find by substituting the numbers 0, 1, 2, 3 , etc. in place of the unknown, until we encounter two substitutions which give results of contrary signs.

For, in supposing the first term to be x^m , and the last $-\mathrm{H}$ (H being a positive number), we will have, on making $x=0$, the negative result $-\mathrm{H}$, and on making $x=\infty$, the positive result ∞^m ; hence we will have here $p=0$ and $q=\infty$. Hence the intermediate numbers will be all the natural numbers 1, :., 3, etc., hence, etc. (*preceding Coroll.*)

From which we see : 1^{o}. that any equation of odd degree, of which the last term is negative, by necessity has a real positive root.

2^{o}. That any equation of odd degree, of which the last term is positive, by necessity has a real negative root. For, in changing x into $-x$, the first term of the equation will become negative : thus, all the signs may be changed to render the first term positive again, the last term will become negative. Thus the equation then will have a real positive root ; consequently the original equation will have a real negative root.

3^{o}. Provided that the whole equation is of even degree, of which the last term is negative, by necessity there shall be two real roots. For, in the first place, it will have within it one real positive root ; then, as by changing x into $-x$, the first term remains positive, the transformed equation also will have a real positive root. Consequently the original equation there will have a real negative root.

4. *Note.* Since we can always change the negative roots of any equation into positive ones, by changing the sign of the unknown only, for greater simplicity, we will consider only positive roots. Thus, when we are required to examine the roots of a given equation, initially the positive roots of this equation will be considered. Consequently, we will find there all the signs will be changed where the unknown is raised to an odd power, and likewise we will consider all the positive roots of this new equation ; these roots, taken negative, will be the negative roots of the proposed equation.

5. *Theorem II.* If in any equation, which has one or more unequal real roots, we substitute in succession two numbers in the place of the unknown; one of which shall be greater, and the other smaller, than one of these roots. Which numbers at the same time differ from each other by a smaller quantity than the difference between this root and each of the other real roots of the equation. These two substitutions necessarily will give two results of opposite signs.

In effect, let α be one of the unequal real roots of the equation, and $\beta,\ \gamma,\ \delta,$ etc., some other roots. Further let ρ be the smallest of the differences between the root α and each of the other real roots of the equation. It is clear that on taking $p > \alpha,\ q < \alpha$, and $p - q < \rho$ the quantities $p - \alpha$ and $q - \alpha$ will be of opposite signs, and since the quantities $p - \beta,\ p - \gamma,$ etc., each will be of the same sign as their corresponding $q - \beta,\ q - \gamma,$ etc. For if $p - \beta$ and $q - \beta$ were of opposite signs, it would be necessary that β also were taken between *p* and *q,* which cannot be the case. Thus the two products

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\cdots\cdot$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma),\cdots\cdot$$

that's to say, the outcomes of the substitutions of p and q in place of the unknown x (n$^{\text{o}}$ .1), necessarily will be of opposite signs.

6. *Corollary* 1. Thus, if numbers in arithmetical progression are substituted into some equation in place of the unknown :

$$0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ 4\Delta,\ \text{etc.},\ \ldots\ldots\ldots\text{(A)}$$

the corresponding outcomes will form a series, in which there will be just as great a variation of the signs, as the proposed equation will have of unequal real roots, but of which the differences will not be less than the difference of the progression Δ. Such that, if we take Δ equal to or smaller than the smallest of the differences between the different unequal positive roots of the equation, then the series on which it acts necessarily will have just as great a variation of signs as the equation will contain real positive unequal roots.

Thus, if the difference Δ meanwhile is equal to or less than unity, by this means, (n$^{\text{o}}$ 2), the closest integer also will be found to each of the positive unequal real roots of the equation.

If the equation can have only a single real positive root, or if it has several there, but the differences of which may not be less than unity, it is evident that on putting $\varDelta = 1$, that's to say, the natural numbers 0, 1, 2, 5, etc. may be taken to be substituted in place of the unknown. But, if that has been done in the equation of unequal roots, of which the differences shall be less than unity, then it will be necessary to take Δ less than one, and such that it must be equal to, or smaller than the smallest difference, between the roots on which it acts. Thus the difficulty is reduced to finding the value to be given to Δ, such that we may be assured that it does not exceed the smallest differences between the positive and unequal roots of the proposed equation. This is the object of the following problem.

7. *Corollary* 2. Every equation which has a single sign change, by necessity has only one real positive root.

It is clear at first that the equation will have necessarily a real positive root, because its last term will be of a different sign to the first (n° 3). Now I am going to show that it can only have one real root.

Let X be the sum of all the positive terms of the equation (on assuming the first term to be positive, as usual), and Y the sum of all the negative terms, such that the equation shall become $\mathrm{X}-\mathrm{Y}=0$. Since by hypothesis there shall be only a single sign change, it is clear that the powers of the unknown x of the polynomial X will always be greater than those of the polynomial Y; such that if x^r is the smallest power of x in the polynomial X, and we divide the two polynomials X and Y by x^r, the quantity $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ will contain only positive powers of x, and the quantity $\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$ will contain only negative powers of x; from which it follows on knowing x, the value of $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ will be able to be known also, and diminishing x, $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ will be diminished also, unless the polynomial X may contain only the single term x^r, in which case $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ will be always a constant quantity; on the contrary, on x increasing, the value of $\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$ necessarily will be diminishing, and on diminishing x, $\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$ will go into increasing. Let a be a real positive root of the equation, thus we will have when $x=a$, $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$; hence also $\frac{\mathrm{X}}{x^r}=\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$: hence on substituting, in place of x, some numbers greater than a, we will have always $\frac{\mathrm{X}}{x^r}>\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$, and as a consequence $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ is equal to a positive number ; and on substituting in place of x, some numbers less than a, we will have always $\frac{\mathrm{X}}{x^r}<\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$; and as a consequence $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ is equal to a negative number: hence it will be impossible that the equation may have real positive roots greater than or smaller than a.

If the equation has several changes of sign, it can have also several real positive roots; but their number can never exceed that of the changes or variations of the sign : it is this theorem which is called the *rule of Descartes.* See note VIII.

8. *Problem.* Some equation being given, to find some other equation of which the roots shall be the differences between the roots of the given equation.

Let the given equation be :

$$x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}-\mathrm{C}x^{m-3}+\text{etc.}=0 \;\cdots\; (\mathrm{B});$$

we know that x can be equally acceptable to any one of its roots: let x' be another root of the same equation, such that we have also :

$$x'^m-\mathrm{A}x'^{m-1}+\mathrm{B}x'^{m-2}-\mathrm{C}x'^{m-3}+\text{etc.}=0,$$

and u shall be the difference between the two roots x and x', such that we have $x' = x + u$; substituting this value of x' into the last equation, and ordering these terms with regard to u, we will have an equation in u of the same degree m, which on beginning from the last terms, will be of this form

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}u + \mathrm{Z}u^2 + \mathrm{V}u^3 + \text{etc.} + u^m = 0,$$

the coefficients X, Y, Z, etc., being some functions of x such that:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X} = x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \text{etc.},\\
&\mathrm{Y} = mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - \text{etc.},\\
&\mathrm{Z} = \tfrac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \tfrac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{A}x^{m-3} + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

that's to say, following the notation of the differential calculus,

$$\mathrm{Y} = \tfrac{d\mathrm{X}}{dx},\quad \mathrm{Z} = \tfrac{d^2\mathrm{X}}{2dx^2},\quad \mathrm{V} = \tfrac{d^3\mathrm{X}}{2\cdot 3dx^3},\quad \text{etc.}$$

Thus, since by the given equation (B) we have $\mathrm{X} = 0$, the preceding equation being divided by u, becomes :

$$\mathrm{Y} + \mathrm{Z}u + \mathrm{V}u^2 + \text{etc.} + u^{m-1} = 0 \cdots\cdots(\mathrm{C}).$$

This equation, if we substitute for x one of the roots of the equation (B), will have for roots the difference between this root and all the other roots of the same equation (B) : thus, if we combine equations (B) and (C) in eliminating x, we will have an equation in u, the roots of which will be the differences between each of the roots of equation (B) and all the other roots of the same equation ; this will be the equation sought.

But without carrying out this elimination, which often may be very laborious, it will suffice to consider :

1°. Because α, β, γ etc., being the roots of the equation in x, these of the equation in u will be $\alpha-\beta,\ \alpha-\gamma,$ etc., $\beta-\alpha,\ \beta-\gamma,$ etc., $\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,$ etc.,etc.; from where we see that the roots will be in number $m(m-1)$, and that further they will be in pairs, but with opposite signs ; such an equation in u necessarily lacking all the odd powers of u. Hence, on making $\frac{m(m-1)}{2} = n$ and $u^2 = v$,the equation in question will be of this form

$$v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \text{etc.} = 0 \cdots\cdots(\mathrm{D}).$$

2°. Now $(\alpha-\beta)^n$, $(\alpha-\gamma)^n$, $(\beta-\gamma)^n$, etc., being the different values of v in the equation (D), the coefficient a will be equal to the sum of all these values, the coefficient b will be the sum of all their products taken two at a time , etc.. . . .

Again, it is easy to see that

$$(\alpha-\beta)^n+(\alpha-\gamma)^n+(\beta-\gamma)^n+\text{etc.}$$
$$=(m-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\text{etc.});$$

but we know that $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\text{etc.}=\mathrm{B}$; et $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.}=\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}$: thus we will have $a=(m-1)(\mathrm{A}^2-2\mathrm{B})-2\mathrm{B}$, to know : $a=(m-1)\mathrm{A}^2-2m\mathrm{B}$; and we will be able, in the same manner, to find the value of the other coefficients b, c, etc.

To arrive at this more easily, on assuming

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1=\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.},\\
&\mathrm{A}_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.},\\
&\mathrm{A}_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

we will have, as known,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1=\mathrm{A},\\
&\mathrm{A}_2=\mathrm{AA}_1-2\mathrm{B},\\
&\mathrm{A}_3=\mathrm{AA}_2-\mathrm{BA}_1+3\mathrm{C},\\
&\mathrm{A}_4=\mathrm{AA}_3-\mathrm{BA}_2+CA_1-4\mathrm{D},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Assuming further

$$\begin{aligned}
&a_1=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2+\text{etc.},\\
&a_2=(\alpha-\beta)^4+(\alpha-\gamma)^4+(\beta-\gamma)^4+\text{etc.},\\
&a_3=(\alpha-\beta)^6+(\alpha-\gamma)^6+(\beta-\gamma)^6+\text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

it is easily seen that we will have

$$\begin{aligned}
&a_1=(m-1)\mathrm{A}_2-2\left(\frac{(\mathrm{A}_1)^2-\mathrm{A}_2}{2}\right),\\
&a_2=(m-1)\mathrm{A}_4-4(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_4)+6\left(\frac{(\mathrm{A}_2)^2-\mathrm{A}_4}{2}\right),\\
&a_3=(m-1)\mathrm{A}_6-6(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5-\mathrm{A}_4)+15(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4-\mathrm{A}_6)\\
&\qquad-20\left(\frac{(\mathrm{A}_3)^2-\mathrm{A}_6}{2}\right),\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

or equally,

$$a_1 = m\mathrm{A}_2 - 2\frac{(\mathrm{A}_1)^2}{2},$$

$$a_2 = m\mathrm{A}_4 - 4\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 + 6\frac{(\mathrm{A}_2)^2}{2},$$

$$a_3 = m\mathrm{A}_6 - 6\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5 + 15\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4 - 20\frac{(\mathrm{A}_3)^2}{2},$$

etc.;

and, in general ,

$$a_\mu = m\mathrm{A}_{2\mu} - 2\mu\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{(2\mu-1)} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{(2\mu-2)} - \text{etc.}$$
$$\pm\frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\cdots(\mu+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot\mu}\cdot\frac{(\mathrm{A}_\mu)^2}{2}.$$

etc.;

The quantities $a_1,\ a_2,\ a_3,$ etc., hence being known, we will have at once the values of the coefficients *a, b, c,* etc., of equation (D) by these formulas :

$$a = a_1,$$
$$b = \frac{aa_1 - a_2}{2},\quad c = \frac{ba_1 - aa_2 + a_3}{3},$$
$$d = \frac{ca_1 - ba_2 + aa_3 - a_4}{4},$$

etc.

Hence we will be able to determine directly the coefficients *a, b, c,* etc. , of the equation (D) by these given in equation (B). In order to do this, at first we will look through these above formulas for the values of the quantities $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,$ etc., as far as to A_{2n} ; then, with the help of these, we will look for these quantities $a_1,\ a_2,\ a_3,$ etc., as far as to a_{2n}, and finally, from the latter, we will find the values sought of a , b , *c,* etc.

9. *Note.* It is good to observe that the equation (D) expresses equally the differences between the positive and negative roots of equation (B); such that the same equation also will be found when we change x into $-x$ in order to have the negative roots (n°. 4).

Further, it is evident that equation (D) will always be the same, were we to increase or decrease all the roots of the proposed equation by some same amount : thus, if this equation has a second term, we can make it vanish, and search the following equation in *v*; therefore we would have had the same equation if we had not made the second term vanish, but the disappearance of this term always renders the search of the coefficients $a,\ b,\ c,$ etc. a little more easy, because we will have $\mathrm{A} = 0$, and as a consequence also $\mathrm{A}_1 = 0$; on account of which the formulas of the preceding number will become

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A} = 0,\\
&\mathrm{A}_2 = -2\mathrm{B},\\
&-\mathrm{A}, = 3\mathrm{C},\\
&\mathrm{A}_4 \ = -\mathrm{BA}_2 - 4\mathrm{D},\\
&\text{etc.},\\
&a_1 = m\mathrm{A}_2,\\
&a_2 = m\mathrm{A}_4 + 6\tfrac{(\mathrm{A}_2)^2}{2},\\
&a_3 = m\mathrm{A}_6 + 15\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4 - 20\tfrac{(\mathrm{A}_3)^2}{2},\\
&\text{etc.},\\
&a = a_1,\\
&b = \tfrac{aa_1 - a_2}{2},\\
&c = \tfrac{ba_1 - aa_2 + a_3}{2},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

10. *Corollary* 1. Since the roots of the equation (D) are the squares of the differences between the roots of the proposed equation (B), it is clear that if this equation (D) had all the terms of the same sign, for which case it would not have any real positive roots, I say, it is clear that in this case, the differences between the roots of equation (B) shall all be imaginary ; such that this equation only may have a single real root, or else several real roots equal to each other. If this second case occurs, it will be recognised, and it will be resolved by known methods (*see* also later below in Ch. II); with regard to the first case, it follows from n° 6 that we will be able to take $\Delta = 1$.

11. *Corollary* 2. If equation (B) has one or several pairs of equal roots, it is evident that the equation (D) will have one or several values of v equal to zero; such that it will then be divisible once or several times by v. This division accomplished, when it is appropriate, the equation may be arranged backwards in this manner:

$$1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 +, \text{ etc.} + \pi v^r = 0 \ \cdots\cdots \ (\mathrm{E}),$$

r being $=$, or $< n$ *;* on making $v = \frac{1}{y}$, and ordering the equation with respect to y, we will have

$$y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{etc.} + \pi = 0 \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \ (\mathrm{F}).$$

So that by known methods, we search for the limit [or boundary: *i.e.* the region within which one root only is present, and which is large enough to contain each individual root] of the positive roots of this equation, and l shall be this limit; such that if l exceeds each

of the positive values of y; thus $\frac{1}{l}$ will be less than each of the positive values of $\frac{1}{y}$, or of v; and consequently less than each of the values of u^n, on account of $v = u^n$ (from the preceding problem).
Thus $\frac{1}{\sqrt{l}}$ necessarily will be less than each of the values of u, that's to say, by which each of the differences will be less between the unequal real roots of the proposed equation (B).

Thus, 1°. if $\sqrt{l} < 1$, then we will be certain that the equation (B) will have no place for real roots whose differences shall be less than unity: hence, in this case, we will be able to put without any qualms, $\Delta = 1$ (n° 6).

2°. But if $\sqrt{l} =$, or > 1 then it can happen that there may be had in equation (B) some roots of which the differences may be less than unity ; but , as the smallest of these differences always necessarily will be greater than $\frac{1}{\sqrt{l}}$, we will be able to take always

$$\Delta = \text{,or} < \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\text{number cited}\right).$$

In general, let k be the whole number which is equal or immediately greater than $\sqrt{l}$, and we can always take $\Delta = \frac{1}{k}$.

12. *Scholium* 1. Regarding the manner of finding the boundary of the roots of an equation, the most convenient and most exact is that of *Newton,* which consists in finding a number, of which the roots of the equation proposed on being diminished, the resulting equation may not have any variation of sign ; for thus equation will only be able to have negative roots; as a consequence the number of which the roots of that will have been diminished, necessarily will exceed the greatest of these roots.

Hence, in order to look for the limit l of the roots of the equation

$$(\mathrm{F}) \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\, y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{etc.} = 0,$$

we will put there $y+1$ in place of y, and ordering the resultant equation according to y, it will become :

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q}y + \mathrm{R}y^2 + \mathrm{S}y^3 + \text{etc.} + y^r = 0,$$

in which

$$\mathrm{P} = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \text{etc.} + \pi,$$
$$\mathrm{Q} = r l^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} + \text{etc.};$$
$$\mathrm{R} = \frac{r(r-2)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{2} \alpha l^{r-3} + \text{etc.},$$
$$\mathrm{S} = \frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3} l^{r-3} + \text{etc.}$$
etc.,

and it will only be required to find a value of l there, which on being substituted into the quantities P, Q, R, etc., will render them all positive; in beginning with the last of these quantities, which will only have two terms, and going back up again successively to the preceding quantities, we will determine easily the smallest whole number which will be able to be taken for l, and which will be the closest sought.

If we wished to avoid all the uncertainty, it would only be necessary to take for l the greatest coefficient of the negative terms of equation (F), increased by unity; for it is easy to prove that in giving this value to l, the quantities P, Q, R, etc., will always be positive.

This way of having the limit of the roots of some equation is due, I think, to *Maclaurin;* but there is another which will give more approximate limits.

Let $-\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p} -$ etc., be the negative terms of the equation (F), we will take for l the sum of the two greatest quantities $\sqrt[m]{\mu},\ \sqrt[n]{\nu},\ \sqrt[p]{\pi}$, etc., or some number greater than this sum. This proposition would be able to be shown in the same manner as the preceding; thus we will not stop here.

For the remainder, it is necessary to note that the limits found by one or other of these two ways will be rarely the closest limits. In order to have smaller ones, we will try successively smaller numbers for l, and we will take the smallest of these which will satisfy the conditions that P, Q, R, etc. shall be positive numbers.

13. *Scholium* 2. Thus having found the limit l of the equation (F), and taken k equal to, or just greater than $\sqrt{l}$, we will have $\Delta = \frac{1}{k}$ (n°11), and we will substitute successively into the equation proposed, in place of the unknown, the numbers $0,\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \frac{3}{k}$, etc.; the results coming from these substitutions, will form a series in which there will be had just as much variations from the sign as the proposed equation will contain unequal positive roots, and, further, each of these roots will be found between the two numbers which will have given the consecutive results from the sign difference; such that if these numbers $\frac{h}{k}$ and $\frac{h+1}{k}$ give results of opposite sign, there will be a root between $\frac{h}{k}$ and $\frac{h+1}{k}$; consequently, the closest whole number to $\frac{h}{k}$ will be the value of the nearest whole number of this root (n° 2).

Thus by this means we will recognise not only the number of positive unequal roots of the proposed equation, but also the whole number value of each of these roots.

For the rest, it is evident that we may find one or more results equal to zero, the numbers which would have given these results would be the exact roots of the proposed equation.

In order to facilitate and abridge this calculation, we will finally make the following remarks:

1°. If we search for the limits of the positive roots of the proposed equation by the methods of the preceding numbers, it is clear that it will be useless to substitute there in place of the unknown some numbers greater than this limit. In effect, it is easy to see that in substituting these numbers greater than this limit, we will have necessarily always positive results. Thus, naming λ the limit which is concerned, the number of substitutions to make will be equal to λk, and consequently always limited.

In general, without looking for the limit λ, it will suffice to put in place the substitutions just as far as the first term of the equation or the sum of the first terms, if there may be in that several consecutive terms with the same sign + , to be equal or greater than the sum of all the negative terms; for it is easy to prove, by the method of n° 7, in which by giving to the unknown some greater values, we will have always positive results to infinity.

2°. In place of substituting the fractions $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}$, etc. in place of the unknown x, we will put there at first $\frac{x}{k}$ if place of x, where, that which amounts to the same, we will multiply the coefficient of the second term by k, that of the third term by k^2, and thus of the others; and then we will substitute in place of x the natural numbers 0, 1, 2, 3, etc. as far as to the limit of this equation, or rather as far as to the first term or the sum of the first terms, when there are several consecutive terms with the same sign, shall be equal or greater than the sum of the negatives ; by this means, the results will be all whole numbers, and the roots of the proposed equation will themselves be found between the consecutive numbers which will give the results of the opposite signs, these numbers being divided by k, as we have seen before.

3°. Let m be the degree of the equation in which we are about to substitute successively the natural numbers 0, 1, 2, 3, etc., I say that, as soon as we have found the first $m+1$ outcomes, that's to say those which correspond to $x = 0, 1, 2,$ etc., m, we will be able to find all the following merely by addition.

In order to do that, it will require only to find the differences of the found outcomes, which will be of number m, then the differences of these differences follow, which will not be of a number greater than $m-1$, and continuing in the same manner as far as to the m^{th} difference.

This last difference necessarily will be constant, because it shows that the highest power of the unknown is m; hence we will be able to continue the sequence of the m^{th} differences as far as we want to, by repeating only the same difference found; then, by means of this we will be able, by simple addition, to continue these of the $m-1^{th}$ differences, and with the aid of that, we will be able in the same manner to find the differences of the $m-2^{th}$ sequence, and thus as follows, until we have come to the first sequence, which will be that of the outcomes sought.

It is good to observe here that if the terms corresponding to the different sequences of which we speak are all positive, the terms following in each sequence will be all positive too. Now, since the last difference is always positive, it is evident that we are going to arrive necessarily in each sequence to all positive terms; thus it will suffice to continue all the sequences until their corresponding terms shall become all positive, because then we will be certain that the series of the results, continued as far as we wish, will be positive always, and that, as a consequence, it will not contain any change of sign .

In order to clarify this by an example, the equation may be proposed

$$x^3 - 63x + 189 = 0\,;$$

we will find at first that the results which correspond to $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$ shall be 189, 127, 71, 27, from which we will extract the first differences $-62, -56, -44$, the second differences 6, 12, and the third differences 6; hence we will form the four following series :

$$\begin{array}{rrrrrrl} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6,\ \text{etc.}, \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42,\ \text{etc.}, \\ -62 & -56 & -44 & -26 & -2 & 28 & 64,\ \text{etc.}, \\ 189 & 127 & 71 & 27 & 1 & -1 & 27,\ \text{etc.}; \end{array}$$

of which the rule is that each term is equal to the sum of the preceding term of the same series, and of that which is there above in the preceding series; so that it is very easy to continue these series as far as wished.

The last of these four series will be, as you can see, these results which come from the substitution of the natural numbers 0, 1, 2, etc. in place of x in the proposed equation ; and since the terms of the seventh, to wit : 6, 42, 64, 27, are all positive, it follows that all the following terms also will be positive ; such that the series of the results, continued as far as wished, will have no further variation of sign.

14. *Note.* We have noted already that we may be able to find the value approached by all the real unequal roots of any one equation, by substituting there successively in place of the unknown the difference numbers in arithmetical progression ; but this noted may not be of much use, because to have a method for determining the progression which must be used in each case, such that we may be certain it may make known all the real unequal roots of the equation proposed. Fortunately, we have overcome this problem with the help of n^{o}.8, and again we will see this following other uses of the same problem with regard to equal and imaginary roots.

For the rest, the search for the quantity Δ (n° 11) may not be necessary if the proposed equation may not have real roots ; but the conditions by which one can recognise in advance the reality of all the roots, when it has a place in a given equation, depend on the same equation of differences, or on equivalent formulas. (See note VIII.)

TRAITÉ DE LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS.

CHAPITRE PREMIER.

Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entière la plus approchée de chacune de ses racines réelles

1. *Théorème I.* Si l'on a une équation quelconque, et que l'on connaisse deux nombres tels qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue de cette équation , ils donnent des résultats de signes contraires, l'équation aura nécessairement au moins une racine réelle dont la valeur sera entre ces deux nombres.

Ce théorème est connu depuis long-temps, et l'on a coutume de le démontrer par la théorie des lignes courbes; mais on peut aussi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette sorte. Soit x l'inconnue de l'équation, et $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. , ses racines, l'équation se réduira , comme l'on sait, à cette forme

$$(x-\beta)(x-\beta)(x-\gamma)=0.$$

Or, soient p et q les nombres qui, substitués par x, donneront des résultats de signes contraires, il faudra donc que ces deux quantités

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\cdots\cdots$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\cdots\cdots$$

soient de signes differens; par conséquent, il faudra qu'il y ait au moins deux facteurs correspondans, comme $p-\alpha$ et $q-\alpha$, qui soient de signes contraires : donc il y aura au moins une des racines de l'équation , comme α, qui sera entre les nombres p et q, c'est-à dire plus petite que le plus grand de ces deux nombres , et plus grande que le plus petit d'entre eux; donc cette racine sera nécessairement réelle.

2. *Corollaire* 1. Donc si les nombres p et q ne diffèrent l'un de l'autre que de l'unité, ou d'une quantité moindre que l'unité, le plus petit de ces nombres, s'il est entier, ou le nombre entier qui sera immédiatement moindre que le plus petit de ces deux nombres, s'il n'est pas entier, sera la valeur entière la plus approchée d'une des racines de l'équation. Si la difference entre pet q est plus grande que l'unité, alors nommant $n,\ n+1\ ,n+2$, etc.,

les nombres entiers qui tombent entre p et q, il est clair que, si l'on substitue successivement à la place de l'inconnue les nombres $p,\ n,\ n+1,\ n+2,$ etc. q, on trouvera nécessairement deux substitutions consécutives qui donneront des résultats de signes différens ; donc ; puisque les nombres qui donneront ces deux résultats ne diffèrent entre eux que de l'unité, on trouvera, comme ci-dessus, la valeur entière la plus approchée d'une des racines de l'équation.

3. *Corollaire* 2. Toute équation dont le dernier terme est négatif, ea supposant le premier positif, a nécessairement une racine réelle positive, dont on pourra trouver la valeur entière la plus approchée , en substituant à la place de l'inconnue les nombres 0, 1, 2, 3 , etc., jusqu'à ce que l'on rencontre deux substitutions qui donnent des résultats de signes contraires.

Car, en supposant le primier terme x^m, et le dernier $-\mathrm{H}$ (H étant un nombre positif), on aura, en faisant $x=0$, le résultat négatif $-\mathrm{H}$, et en faisant $x=\infty$, lê résultat positif ∞^m; donc on aura ici $p=0$ et $q=\infty$; donc les nombres entiers intermédiaires seront tous les nombres naturels 1, :., 3, etc.,. donc, etc. *(Coroll. préc.)*

De là on voit , 1°. que toute équation d'un degré impair , dont le dernier terme est négatif, a nécessairement une raqine réelle positive .

2°. Que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme est positif, a nécessairement une racine réelle négative; car, en changeant x en $-x$, le premier terme de l'équation deviendra négatif: donc, changeant tous les signes pour rendre de nouveau le premier terme positif, le dernier deviendra négatif: donc l'équation aura alors une racine réelle positive; par conséquent l'équation primitive aura une racine réelle négative.

3°. Que toute équation d'un degré-pair, dont le dernier terme est négatif, a nécessairement deux racines réelles, l'one positive et l'autre négative ; car, premièrement, elle aura une racine réelle positive; ensuite, comme en changeant x *en* $-x$, le premier terme demeure positif, la transformée aura aussi une racine réelle positive : donc l'équation primitive en aura une réelle et négative.

4.*Remarque.* Comme on peut toujours changer les racines négatives d'une équation quelconque en positives, en changeant seulement le signe de l'inconnue , nous ne considèrerons dans la suite, pour plus de simplicité, que les racines positives; ainsi, quand il s'agira d'examiner les racines d'une équation donnée, on considèrera d'abord, les racines positives de cette équation, ensuite on y changera les signes de tous les termes où l'inconnue se trouvera élevée à une puissance impaire, et on considèrera de même les racines positives de cette nouvelle équation; ces racines, prises en moins, seront les racines négatives de la proposée.

5. *Théorème II.* Si dans une équation quelconque, qui a une ou plusieurs racines réelles et inégales, on substitue successivement à la place de l'inconnue deux nombres, dont l'un soit plus grand et dont l'autre soit plus petit que l'une de ces racines, et qui different en

même temps l'un de l'autre d'une quantité moindre que la différence entre cette racine et chacune des autres racines réelles de l'équation ces deux substitutions donneront nécessairement deux résultats de signes contraires.

En effet, soit α une des racines réelles et inégales de l'équation, et $\beta,\ \gamma,\ \delta,$ etc., les autres racines quelconques; soit de plus ρ la plus petite des différences entre la racine α et chacune des autres racines réelles de l'équation, il est clair qu'en prenant $p > \alpha, q < \alpha$, et $p - q < \rho$ les quantités $p - \alpha$ et $q - \alpha$ seront de signes contraires, et que les quantités $p - \beta,\ p - \gamma,$ etc., seront chacune de même signe que sa correspondante $q - \beta,\ q - \gamma,$ etc., car , si $p - \beta$ et $q - \beta$ étaient de signes contraires, il faudrait que β fût aussi compris entre *p* et *q,* ce qui ne se peut. Donc les deux produits

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\cdots\cdots$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma),\cdots\cdots$$

c'est-à-dire, les résultats des substitutions de *p* et *q* à la place de l'inconnue *x* (n° 1) seront nécessairement de signes contraires.

6. *Corollaire* 1. Donc, si dans une équation quelconque on substitue successivement à la place de l'inconnue les nombres en progression arithmétique

$$0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ 4\Delta,\ \text{etc.},\ \ldots\ldots\ldots(A)$$

les résultats correspondans formeront une suite, dans laquelle il y aura autant de variations de signes que l'équation proposée aura de racines réelles positives et inégales , mais dont les différences ne seront pas moindres que la différence Δ de la progression. De sorte que si l'on prend Δ égale ou moindre que la plus petite des différences entre les différentes racines positives et inégales de l'équation, la suite dont il s'agit aura nécessairement autant de variations de signes que l'équation contiendra de racines réelles positives et inégales

Donc, si la différence Δ est en même temps égale ou moindre que l'unité, on trouvera aussi, par ce moyen, la valeur entière approchée de chacune des racines réelles positives et inégales de l'équation (n° 2).

Si l'équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle et positive, ou si elle en a plusieurs, mais dont les différences ne soient pas moindres que l'unité, il est clair qu'on pourra faire $\Delta = 1$, c'est-à-dire qu'on pourra prendre les nombres naturels 0, 1, 2, 5, etc., pour les substituer à la place de l'inconnue; mais, s'il y a dans l'équation des racines inégales dont les différences soient moindres que l'unité, alors il faudra prendre Δ moindre que l'unité, et telle qu'elle soit égale ou moindre que la plus petite des différences entre les racines dont il s'agit : ainsi la difficulté se réduit à trouver la valeur qu'on doit donner à Δ, en sorte qu'on soit assuré qu'elle ne surpasse pas la plus petite des différences entre les racines positives et inégales de l'équation proposée : c'est l'objet du problème suivant.

7. *Corollaire* 2. Toute équation qui a un seul changement de signe, a nécessairement une seule racine réelle positive.

Il est d'abord clair que l'équation aura nécessairement une racine réelle positive, à cause que son dernier terme sera de signe différent du premier (n° 3). Or je vais démontrer qu'elle ne peut en avoir qu'une.

Soit (en supposant le premier terme positif, comme à l'ordinaire) X la somme de tous les termes positifs de l'équation, et Y la somme de tous les négatifs, en sorte que l'équation soit $\mathrm{X}-\mathrm{Y}=0$; et puisqu'il n'y a, par l'hypothèse, qu'un seul changement de signe , il est clair que les puissances de l'inconnue x du polynome X seront toujours plus hautes que celles du polynome Y; de sorte que si x^r est la plus petite puissance de x dans le polynome X, et qu'on divise les deux polynomes X et Y par x^r, la quantité $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ ne contiendra que des puissances positives de x, et la quantité $\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$ ne contiendra que des puissances négatives de x; d'où il suit que x croissant, la valeur de $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ devra croître aussi, et x diminuant, $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ diminuera aussi, à moins que le polynome X ne contienne que le seul terme x^r, auquel cas $\frac{\mathrm{X}}{x^r}$ sera toujours une quantité constante; au contraire, x croissant, la valeur de $\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$ diminuera nécessairement, et x diminuant , $\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$ ira en augmentant. Soit a la racine réelle et positive de l'équation, on aura donc, lorsque $x=a$, $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$; donc aussi $\frac{\mathrm{X}}{x^r}=\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$: donc en substituant, au lieu de x , des nombres quelconques plus grands que a, on aura toujours $\frac{\mathrm{X}}{x^r}>\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$, et par conséquent $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ égal à un nombre positif; et en substituant, au lieu de x, des nombres moindres que a, on aura toujours $\frac{\mathrm{X}}{x^r}<\frac{\mathrm{Y}}{x^r}$; et par conséquent $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ égal à un nombre négatif: donc il sera impossible que l'équation ait des racines réelles et positives plus grandes ou plus petites que a.

Si l'équation a plusieurs changemens de signe, elle peut avoir aussi plusieurs racines réelles positives; mais leur nombre ne peut jamais surpasser celui des changemens ou variations de signe : c'est ce théorème qu'on appelle la *règle de Descartes.* Voyez la note VIII.

8. *Problème.* Une équation quelconque étant donnée, trouver une autre équation dont les racines soient les différences entre les racines de l'équation donnée.
Soit donnée l'équation

$$.x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}-\mathrm{C}x^{m-3}+\mathrm{etc.}=0 \ \cdots \ (\mathrm{B});$$

on sait que z peut être indifféremment égal à une quelconque de ses racines: soit x' une autre racine quelconque de la même équation , en sorte que l'on ait àussi

$$x'^m-\mathrm{A}x'^{m-1}+\mathrm{B}x'^{m-2}-\mathrm{C}x'^{m-3}+\mathrm{etc.}=0,$$

et soit u la différence entre les deux racines x et x', de manière que l'on ait $x' = x + u$; substituant cette valeur de x' dans la dernière équation, et ordonnant les termes par rapport à u , on aura une équation en u du même degré m , laquelle , en commençant par les derniers termes, sera de cette forme

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}u + \mathrm{Z}u^2 + \mathrm{V}u^3 + \text{etc.} + u^m = 0,$$

les coefficiens X, Y, Z, etc., étant des fonctions de x telles que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X} = x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \text{etc.},\\
&\mathrm{Y} = mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - \text{etc.},\\
&\mathrm{Z} = \tfrac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \tfrac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{A}x^{m-3} + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, suivant la notation du calcul différentiel,

$$\mathrm{Y} = \tfrac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}x},\ \ \mathrm{Z} = \tfrac{\mathrm{d^2X}}{2\mathrm{d}x^2},\ \ \mathrm{V} = \tfrac{\mathrm{d^3X}}{2\cdot 3\mathrm{d}x^3},\ \ \text{etc.}$$

Donc, puisque par l'équation donnée (B) on a $\mathrm{X} = 0$, l'équation précédente étant divisée par u, deviendra celle-ci:

$$\mathrm{Y} + \mathrm{Z}u + \mathrm{V}u^2 + \text{etc.} + u^{m-1} = 0 \cdots\cdots (\mathrm{C}).$$

Cette équation, si l'on y substitue pour x une quelconque des racines de l'équation (B), aura pour racines les différences entre cette racine et toutes les autres de la mème équation (B) : donc, si l'on combine les équations (B) et (C) en éliminant x, on aura une équation en u, dont les racines seront les différences entre chacune des racines de l'équation (B) et toutes les autres racines de la même équation; ce sera l'équation cherchée.

Mais sans exécuter cette élimination, qui serait souvent fort laborieuse, il suffira de considérer :

1°. Que $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ etc., étant les racines de l'équation en x, celles de l'équation en u seront $\alpha-\beta,\ \alpha-\gamma,$ etc., $\beta-\alpha,\ \beta-\gamma,$ etc., $\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,$ etc.,etc.; d'où l'on voit que ces racines seront au nombre de $m(m-1)$, et que de plus elles seront égales deux à deux, et de signes contraires; de sorte que l'équation en u manquera nécessairement de toutes les puissances impaires de u. Donc , en faisant $\frac{m(m-1)}{2} = n$ et $u^2 = v$, l'équation dont il s'agit sera de cette forme

$$v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \text{etc.} = 0 \cdots\cdots (\mathrm{D}).$$

2° Que $(\alpha-\beta)^n$, $(\alpha-\gamma)^n$, $(\beta-\gamma)^n$, etc., étant les différentes valeurs de v dans l'équation (D), le coefficent a sera égal à la somme de toutes ces valeurs, le coefficient b era là somme de tous leurs produits deux à deux , etc.. . . .
Or, il est facile de voir que

$$(\alpha-\beta)^n+(\alpha-\gamma)^n+(\beta-\gamma)^n+\text{etc.}$$
$$=(m-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\text{etc.});$$

mais on sait que $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\text{etc.}=\text{B}$; et $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.}=\text{A}^2-2\text{B}$: donc on aura $a=(m-1)(\text{A}^2-2\text{B})-2\text{B}$, savoir: $a=(m-1)\text{A}^2-2m\text{B}$; et on pourra , de la même manière , trouver a valeur des autres coefficiens b, c, etc.

Pour y parvenir plus facilement, supposons

$$\text{A}_1=\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.},$$
$$\text{A}_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.},$$
$$\text{A}_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

et l'on aura, comme l'on sait,

$$\text{A}_1=\text{A},$$
$$\text{A}_2=\text{AA}_1-2\text{B},$$
$$\text{A}_3=\text{AA}_2-\text{BA}_1+3\text{C},$$
$$\text{A}_4=\text{AA}_3-\text{BA}_2+CA_1-4\text{D},$$
$$\text{etc.}$$

Supposons de plus

$$a_1=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2+\text{etc.},$$
$$a_2=(\alpha-\beta)^4+(\alpha-\gamma)^4+(\beta-\gamma)^4+\text{etc.},$$
$$a_3=(\alpha-\beta)^6+(\alpha-\gamma)^6+(\beta-\gamma)^6+\text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

il est facile de voir que l'on aura

$$a_1 = (m-1)\mathrm{A}_2 - 2\left(\frac{(\mathrm{A}_1)^2 - \mathrm{A}_2}{2}\right),$$

$$a_2 = (m-1)\mathrm{A}_4 - 4(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_4) + 6\left(\frac{(\mathrm{A}_2)^2 - \mathrm{A}_4}{2}\right),$$

$$a_3 = (m-1)\mathrm{A}_6 - 6(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5 - \mathrm{A}_4) + 15(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_6)$$
$$- 20\left(\frac{(\mathrm{A}_3)^2 - \mathrm{A}_6}{2}\right),$$

etc.,

ou bien

$$a_1 = m\mathrm{A}_2 - 2\frac{(\mathrm{A}_1)^2}{2},$$

$$a_2 = m\mathrm{A}_4 - 4\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 + 6\frac{(\mathrm{A}_2)^2}{2},$$

$$a_3 = m\mathrm{A}_6 - 6\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5 + 15\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4 - 20\frac{(\mathrm{A}_3)^2}{2},$$

etc.;

et, en général ,

$$a_\mu = m\mathrm{A}_{2\mu} - 2\mu\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{(2\mu-1)} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{(2\mu-2)} - \text{etc.}$$
$$\pm \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\cdots(\mu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot\mu}\cdot\frac{(\mathrm{A}_\mu)^2}{2}.$$

etc.;

Les quantités a_1, a_2, a_3, etc. , étant ainsi connues, on aura sur-le- champ les valeurs des coefficiens *a, b, c,* etc.*,* de l'équation (D) par les formules

$$a = a_1,$$

$$b = \frac{aa_1 - a_2}{2},\quad c = \frac{ba_1 - aa_2 + a_3}{3},$$

$$d = \frac{ca_1 - ba_2 + aa_3 - a_4}{4},$$

etc.

Ainsi on pourra déterminer directement les coefficiens *a, b, c,* etc. ; de l'équation (D) par ceux de l'équation donnée (B). Pour cela, on cherchera d'abord, par les formules ci-dessus, les valeurs des quantités A_1, A_2, A_3, etc., jusqu'à A_{2n} ; ensuite, à l'aide de celles-ci, on cherchera celles des quantités a_1, a_2, a_3, etc., jusqu'à a_{2n}, et enfin, par ces dernières , on trouvera les valeurs cherchées des coefficiens *a* , *b* , *c,* etc.

9. *Remarque.* Il est bon de remarquer que l'équation (D) exprime également les différences entre les racines positives et négatives de l'équation (B); de sorte que la même équation aura lieu aussi lorsqu'on changera x en $-x$ pour avoir les racines négatives (n° 4)·

De plus, il est clair que l'équation (D) sera toujours la même, soit qu'on augmente ou qu'on diminue toutes les racines de l'équation proposée d'une même quantité quelconque : donc, si cette équation a son second terme , on pourra le faire disparaître, et chercher ensuite l'équation en v; on aura ainsi la même équation qu'on aurait eue si l'on n'avait pas fait évanouir le second terme, mais l'évanouissement de ce terme rendra toujours la recherche des coefficiens $a,\ b,\ c,$ etc., un peu plus facile, parce qu'on aura $\mathrm{A}=0$, et par conséquent aussi $\mathrm{A}_1=0$; de sorte que les formules du numéro précédent deviendront

$$\mathrm{A}=0,$$
$$\mathrm{A}_2=-2\mathrm{B},$$
$$-\mathrm{A},=3\mathrm{C},$$
$$\mathrm{A}_4\ =-\mathrm{B}\mathrm{A}_2-4\mathrm{D},$$
etc.,
$$a_1=m\mathrm{A}_2,$$
$$a_2=m\mathrm{A}_4+6\frac{(\mathrm{A}_2)^2}{2},$$
$$a_3=m\mathrm{A}_6+15\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4-20\frac{(\mathrm{A}_3)^2}{2},$$
etc.,
$$a=a_1,$$
$$b=\frac{aa_1-a_2}{2},$$
$$c=\frac{ba_1-aa_2+a_3}{2},$$
etc.

10. *Corollaire* 1. Puisque les racines de l'équation (D) sont les carrés des différences entre les racines de l'équation proposée (B), il est clair que si cette équation (D) avait tous ses termes de même signe, auquel cas elle n'aurait aucune racine réelle positive, il est clair, disje, que, dans ce cas, les différences entre les racines de l'équation (B), seraient toutes imaginaires ; de sorte que cette équation ne pourrait avoir qu'une seule racine réelle , ou bien plusieurs racines réelles et égales entre elles Si ce dernier cas a lieu , on le reconnaître, et on le résoudra par les méthodes connues (*voyez* aussi plus bas le chapitre II); à l'égard du premier cas, il suit du n° 6 qu'on pourra prendre $\Delta=1$.

11. *Corollaire* 2. Si l'équation (B) a une ou plusieurs couples de racines égales, il est clair que l'équation (D) aura une ou plusieurs valeurs de v égales à zéro; de sorte qu'elle sera alors divisible une ou plusieurs fois par v. Cette division faite, lorsqu'elle a lieu, soit l'équatien restante disposée à rebours de cette manière :

$$1+\alpha v+\beta v^2+\gamma v^3+,\ \text{etc.}+\pi v^r=0\ \cdots\cdots\ (\text{E}),$$

r étant $=$ ou $< n$; qu'on fasse $v=\frac{1}{y}$, et ordonnant l'équation par rapport à y, on aura

$$y^r+\alpha y^{r-1}+\beta y^{r-2}+\gamma y^{r-3}+\text{etc.}+\pi=0\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (\text{F}).$$

Qu'on cherche par les méthodes connues la limite des racines positives de cette équation, et soit l cette limite; en sorte que l surpasse chacune des valeurs positives de y; donc $\frac{1}{l}$ sera moindre que chacune des valeurs positives de $\frac{1}{y}$ ou de v; et par conséquent moindre que chacune des valeurs de u^n, à cause de $v=u^n$ (problème précédent).
Donc $\frac{1}{\sqrt{l}}$ sera nécessairement moindre qu'aucune des valeurs de u, c'est-à-dire qu'aucune des différences entre les racines réelles et inégales de l'équation proposée (B).

Donc, 1°. si $\sqrt{l}<1$, alors on sera sûr que l'équation (B) n'aura point de racines réelles dont les différences soient moindres que l'unité: ainsi, dans ce cas, on pourra faire, sans scrupule, $\Delta=1$ (n° 6).
2°. Mais si $\sqrt{l}=$ ou >1 àlors il peut se faire qu'il y ait dans l'équation (B) des racines dont les différences soient moindres que l'unité ; mais, comme la plus petite de ces différences sera toujours nécessairement plus grande que $\frac{1}{\sqrt{l}}$, on pourra toujours prendre

$$\Delta=\text{ou}<\frac{1}{\sqrt{l}}(\text{numéro cité}).$$

En général, soit k le nombre entier qui est égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, et on pourra toujours prendre $\Delta=\frac{1}{k}$.

12. *Scholie* 1. Quant à la manière de trouver la limite des racines d'une équation , la plus commode et la plus exacte est celle de *Newton,* laquelle consiste à trouver un nombre dont les racines de l'équation proposée étant diminuées, l'équation résultante n'ait aucune variation de signe ; car alors cette équation ne pourra avoir que des racines négatives; par conséquent le nombre dont les racines de la proposée auront été diminuées, surpassera nécessairement la plus grande de ces racines.

Ainsi, pour chercher la limite l des racines de l'équation

$$(\text{F})\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ y^r+\ \alpha y^{r-1}+\beta y^{r-2}+\gamma y^{r-3}+\text{etc.}=0,$$

on y mettra $y+1$ au lieu de y, et ordonnant l'équation résultante par rapport à y, elle deviendra

$$\text{P}+\text{Q}y+\text{R}y^2+\text{S}y^3+\text{etc.}+y^r=0,$$

dans laquelle

$$\mathrm{P} = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \text{etc.} + \pi,$$
$$\mathrm{Q} = rl^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} + \text{etc.};$$
$$\mathrm{R} = \tfrac{r(r-2)}{2} l^{r-2} + \tfrac{(r-1)(r-2)}{2}\alpha l^{r-3} + \text{etc.},$$
$$\mathrm{S} = \tfrac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3} l^{r-3} + \text{etc.}$$
etc.,

et il n'y aura qu'à chercher une valeur de *l* qui; étant substituée dans les quantités P, Q, R, etc., les rende toutes positives; en commençant par la dernière de ces quantités, laquelle n'aura que deux termes, et remontant successivement aux quantités précédentes, on déterminera facilement le plus petit nombre entier qui pourra être pris pour *l,* et qui sera la limite la plus proche cherchée.

Si l'on voulait éviter tout tâtonnement, il n'y aurait qu'à prendre pour *l* le plus grand coefficient des termes négatifs de l'équation (F), augmenté d'une unité; car il est facile de prouver qu'en donnant à *l* cette valeur, les quantités P, Q, R , etc., seront toujours positives.

Cette manière d'avoir la limite des racines d'une équation quelconque est due, je crois, à *Maclaurin;* mais en voici une autre qui donnera le plus souvent des limites plus approchées.

Soit $-\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p} - \text{etc.},$ les termes négatifs de l'équation (F), on prendra pour *l* la somme des deux plus grandes des quantités $\sqrt[m]{\mu},\ \sqrt[n]{\nu},\ \sqrt[p]{\pi},\ \text{etc.}$, ou un nombre quelconque plus grand que cette somme. Cette proposition peut se démontrer de la même manière que la précédente; ainsi nous ne nous *y* arrêterons pas.

Au reste, il faut observer que les limites trouvées de l'une ou de l'autre de ces deux manières seront rarement les plus prochaines limites. Pour en avoir de plus petitea, on essayera successivement pour *l* des nombres moindres, et l'on prendra le plus petit de ceux qui satisferont aux conditions que P, Q, R, etc., soient des nombres positifs.

13. *Scholie* 2. Ayant donc trouvé la limite *l* de l'équation (F), et pris *k* égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$ *,* on fera $\ldots \Delta = \frac{1}{k}(\text{n}^{\text{o}}.11)$, et on substituera successivement dans l'équation proposée, à la place de l'inconnue, les nombres $0,\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \frac{3}{k},\ \text{etc.};$ les resultats venant de ces substitutions, formeront une série dans laquelle il y aura autant de variations de signe que l'équation proposée contiendra de racines réelles positives et inégales, et, de plus, chacune de ces racines se trouvera entre les deux nombres qui auront donné des résultats consécutifs de signes différens; de sorte que si les nombres $\frac{h}{k}$ et $\frac{h+1}{k}$ donnent des résultats de signe contraire, il y aura une racine entre $\frac{h}{k}$ et $\frac{h+1}{k}$; par conséquent , le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{h}{k}$ sera la valeur entière approchée de cette racine (n$^{\text{o}}$ 2).

Ainsi l'on reconnaîtra par ce moyen, non-seulement le nombre des racines positives et inégales de l'équation proposée, mais encore la valeur entière approchée de chacune de ces racines.

Au reste, il est clair que a l'on trouvait un ou plusieurs résultats égaux à zéro, les nombres qui auraient donné ces résultats seraient des racines exactes de l'équation proposée.

Pour faciliter et abréger ce calcul, on fera encore les remarques suivantes:

1°. Si l'on cherche par les méthodes des numéros précédens la limite des racines positives de l'équation proposée, il est clair qu'il sera inutile d'y substituer à la place de l'inconnue des nombres plus grands que cette limite. En effet, il est facile de voir qu'en substituant des nombres plus grands que cette limite, on aura toujours nécessairement des résultats positifs. Ainsi, nommant λ la limite dont il s'agit, le nombre des substitutions à faire sera égal à λk, et par conséquent toujours limité.

En général , sans chercher la limite λ, il suffira de pousser les substitutions jusqu'à ce que le premier terme de l'équation ou la somme des premiers termes , s'il y en a plusieurs consécutifs avec le même signe + , soit égale ou plus grande que la somme de tous les termes négatifs; car il est facile de prouver, par la méthode du n° 7, qu'en donnant à l'inconnue des valeurs plus grandes, on aura toujours à l'infini des résultats positifs.

2°. Au lieu de substituer à la place de l'inconnue x les fractions $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$, etc., on y mettra d'abord $\frac{x}{k}$ à la place de x, ou, ce qui revient au même, on multipliera le coefficient du second terme par k, celui du troisième terme par k^2, et ainsi des autres; et on substituera ensuite à la place de x les nombres naturels 0, 1, 2, 3, etc. jusqu'à la limite de cette équation, ou bien jusqu'à ce que le premier terme ou la somme des premiers, quand il y en a plusieurs consécutifs avec le même signe, soit égale ou plus grande que la somme des négatifs ; par ce moyen, les résultats seront tous des nombres entiers, et les racines de l'équation proposée se trouveront nécessairement entre les nombres consécutifs qui donneront des résultats de signes contraires, ces nombres étant divisés par k, comme nous l'avons vu plus haut.

3°. Soit m le degré de l'équation dans laquelle il s'agit de substituer successivement les nombres naturels 0, 1, 2, 3, etc., je dis que, dès que l'on aura trouvé les $m+1$ premiers résultats, c'est-à-dire ceux qui répondent à $x=0,\ 1,\ 2,\ \text{etc.},\ m$, on pourra trouver tous les suivans par la seule addition.

Pour cela, il n'y aura qu'à chercher les différences des résultats trouvés, lesquelles seront au nombre de m, ensuite les différences de ces différences, lesquelles ne seront plus qu' au nombre de $m-1$, et ainsi de suite jusqu'à la différence $m^{ième}$.

Cette dernière différence sera nécessairement constante, parce que l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue est m; ainsi on pourra continuer la suite des différences $m^{ième}$ aussi loin qu'on voudra, en répétant seulement la même différence trouvée ; ensuite, par le moyen de cette suite, on pourra, par la simple addition, continuer celle des différences $m-1^{ième}$, et à l'aide de celle-ci, on pourra continuer de même la suite des différences $m-2^{ième}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à la première suite, qui sera celle des résultats cherchés.

Il est bon d'observer ici que si les termes correspondans des différentes suites dont nous parlons étaient tous positifs, les termes suivans dans chaque suite seraient tous aussi positifs. Or, puisque la dernière différence est toujours positive, il est clair qu'on parviendra nécessairement dans chaque suite à des termes tous positifs; ainsi il suffira de continuer toutes ces suites jusqu'à ce que leurs termes correspondans soient devenus tous positifs, parce qu'alors on sera sûr que la série des résultats, continuée aussi loin qu'on voudra, sera toujours positive, et que, par conséquent, elle-ne contiendra plus aucune variation de signe.

Pour éclaircir ceci par un exemple, soit proposée l'équation

$$x^3-63x+189=0\,;$$

on trouvera d'abord que les résultats qui répondent à $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,$ sont 189, 127, 71, 27, d'où l'on tirera les différences premières $-62,-56,-44$, les différences secondes 6, 12, et la différence troisième 6; ainsi on formera les quatre séries suivantes :

$$\begin{array}{rrrrrrl}
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6,\ \text{etc.},\\
6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42,\ \text{etc.},\\
-62 & -56 & -44 & -26 & -2 & 28 & 64,\ \text{etc.},\\
189 & 127 & 71 & 27 & 1 & -1 & 27,\ \text{etc.};
\end{array}$$

dont la loi est que chaque terme est égal à la somme du terme précédent de la même série, et de celui qui y est au-dessus dans la série précédente; de sorte qu'il est très facile de continuer ces séries aussi loin qu'on voudra.

La dernière de ces quatre séries sera, comme l'on voit, celle des résultats qui viennent de la substitution des nombres naturels 0, 1, 2, etc. à la place de x dans l'équation proposée; et comme les termes de la septième colonne, savoir : 6, 42, 64, 27, sont tous positifs, il a' ensuit que les termes suivans seront tous aussi positifs; de sorte que la série des résultats, continuée aussi loin qu'on voudra, n'aura plus aucune variation de signe.

14. *Remarque.* On avait déjà remarqué que l'on pouvait trouver la valeur approchée de toutes les racines réelles et inégales, d'une équation quelconque, en y substituant successivement à la place de l'inconnue différens nombres en progression arithmétique ; mais cette remarque ne pouvait pas être d'une grande utilité, faute d'avoir une méthode pour déterminer la progression que l'on doit employer dans chaque cas, en sorte que l'on soit assuré qu'elle fasse connaître toutes les racines réelles et inégales de l'équation proposée. Nous en sommes heureusement venus à bout à l'aide du problème du n° 8, et nous verrons encore ci-après d'autres usages de ce même problème par rapport aux racines égales et imaginaires.

Au reste, la recherche de la quantité Δ (n° 11) ne serait point nécessaire si l'équation proposée n'avait que des racines réelles; mais les conditions par lesquelles on peut reconnaître d'avance la réalité de toutes les racines, lorsqu'elle a lieu dans une équation donnée, dépendent de l'équation même des différences, ou de formules équivalentes. (Voyez la note VIII.)