CHAPTER II.

How equations can have equal and imaginary roots.

15. In the previous chapter, we have considered only unequal real roots in the proposed equation (B); supposing now that this equation may have equal roots : in this case, it will be necessary (n° 11) that equation (D) shall be divisible by v as many times as it will have combinations of equal pairs of roots ; as a consequence it will be necessary that there will be had in the last terms so many terms missing (D) ; hence one may know by this means how many equal roots there will be in the proposed equation.

But we can be assured in advance that if the proposed equation has some equal roots, then we will be able to find these roots independently, by equation (D).
For since in the case of equal roots, by necessity we have $u = 0$ (§ 8), the equation (C) of the same number for this case will give $\mathrm{Y} = 0$; hence it will be necessary that the two equations in x, $\mathrm{X} = 0$, and $\mathrm{Y} = 0$, may be in place at the same time as x is equal to some one or other of the equal roots of equation (B).

Hence we will search, by known methods, for the greatest common divisor of the two polynomials X and Y; and then on making this divisor equal to zero, we will have one equation which will be composed only from the equal roots of the proposed equation, but raised to a power less by one.

Let R be the greatest common divisor of X and of Y, and X' the quotient of X divided by R, and it is easy to see that the equation $\mathrm{X}' = 0$ is going to contain all the same roots as the proposed equation $\mathrm{X} = 0$, but with this difference that the multiple roots of this equation $\mathrm{X} = 0$ will be simple roots in the equation $\mathrm{X}' = 0$; hence the equation $\mathrm{X}' = 0$ will be as in the case of the preceding methods.

We may still, if it is wished, find two separate equations, one of which may contain only the equal roots of the equation $\mathrm{X} = 0$, and of which the other may contain the unequal roots of the same equation. In order to do this, it will be necessary only to look anew for the greatest common divisor of X' and Y; and calling this divisor R', we will take the quotient of X' divided by R', which being called X'', will provide these two equations $\mathrm{X}'' = 0$, and $\mathrm{R}' = 0$.

The first will contain only the unequal roots of the equation $\mathrm{X} = 0$, and the second will contain only the equal roots of the same equation, but each one only once ; such that the two equations $\mathrm{X}'' = 0$, and $\mathrm{R}' = 0$, will have only unequal roots, and consequently they will be susceptible to the methods of the preceding chapter.

16. Hence knowing the number of real roots of the proposed equation, both unequal as well as equal, if this number is less than the degree of the equation, we will conclude that the other roots necessarily are imaginary.

In general, since equation (B) shall have all its roots real, it is necessary that the values of u shall be real also; hence it will be necessary that the values of u^2 or of u all shall be real and positive; as a consequence, equation (D) of § 8 must have all its roots real and positive : hence it will be required, by the known rule, that the signs of this equation shall be alternatively positive and negative ; of such a kind that if this condition cannot occur, this will be a sure indication that the equation (B) necessarily has some imaginary roots.

Now, we know that imaginary roots are going to occur in even numbers always, and that they can always be put in pairs in this form, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, α and β being some real quantities (see note IX); hence we will have $u=\pm 2\beta\sqrt{-1}$, and as a consequence $v=-4\beta^2$; where it can be seen that equation (D) necessarily will have just as many real negative roots as there will be pairs of imaginary roots in (B).

Hence, if we may make $v=-w$, which will change equation (D) into this:

$$w^n+aw^{n-1}+bw^{n-2}+cw^{n-3}+\text{etc.}=0\cdots\cdots(\text{G}),$$

this equation necessarily will have just as many real positive roots as there will be pairs of imaginary roots in equation (B).

17. It follows from that in order to have the value of the imaginary roots of equation (B), it is necessary only to look for the real positive roots of equation (G). In effect, $w',\ w'',\ w''',\text{etc.}$ may become these root, we will have at first $\frac{\sqrt{w'}}{2},\ \frac{\sqrt{w''}}{2},\ \frac{\sqrt{w'''}}{2},\text{etc.}$ for the values of β; consequently, in order to find the corresponding values α, we will substitute $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ in equation (B), in place of x, and we will create two separate equations of these all real terms, and of these which will be multiplied by $\sqrt{-1}$; in this way, we will have two equations in α of this form :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^m+\text{P}\alpha^{m-1}+\text{Q}\alpha^{m-2}+\ \text{etc.}=0\\ m\alpha^{m-1}+p\alpha^{m-2}+q\alpha^{m-3}+\ \text{etc.}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(\text{H}),$$

in which the coefficients P, Q; etc. $p,\ q,$ etc. will be given in terms of $a,\ b,\ c,$ etc. and by β.

Hence, if we give any one of the preceding values to β, it will be required necessarily that these two equations may have a place at the same time, and as a consequence it will be necessary that they may have a common divisor. Therefore we will look for their greatest common divisor; and on making it equal to zero, we will have an equation in α and β, as since β being known there, we will find α.

It is good to note that, if all the values of β expressed by the equation (G) are unequal among themselves, then to each value of β there will respond only a single value of α ; thus in this case, the two equations (H) can have only a single common root ; as a consequence their greatest common divisors will only be able to be of the first degree.

We will push the division until we come to a remainder where α cannot be found greater than the first degree, and we will then make this remainder equal to zero ; that which will give the value sought of α.

But if among the values β expressed by the equation (G), there is for example, two values equal to each other, then, since for each of these values equal to β, there can correspond some different values of α, it will be necessary by putting this double value β into these equations (H), they can have a place according to the relation between each other some values of α which correspond there; hence these two equations will have necessarily two common roots, and as a consequence their greatest common denominator will be of the second degree. Hence it is necessary, in this case, only pursue the division until you come to a remainder where α is found to be only in the second dimension ; and then we will make this remainder equal to zero, which will give an equation of the second degree, by which we will determine the two values of α, which necessarily must both be real.

Likewise, if there were three equal values of β, it would be necessary, in order to find the values of α, which would correspond to the threefold value of β, only to extend the division as far as that which we arrive at a remainder where the highest power of α were the third; and then making this remainder equal to zero, we would have an equation in α of the third degree, which would give the three real values of α, corresponding to the same value of β, and thus henceforth.

CHAPTER III.

A new method of approximating the roots of numerical equations.

18. Let the equation be

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + \mathrm{K} = 0 \ \ldots\ldots \ (a),$$

and supposing that we have found already by the preceding method, or otherwise, the nearest integer value of one of its real and positive roots; this shall be the first value p, such that we may say $x > p$ and $x < p+1$, we will put $x = p + \frac{1}{y}$; and substituting this value into the proposed equation, in place of x, we will have, after having multiplied the whole equation by y^m ; and ordered these terms with regard to y, an equation of this form :

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{etc.} + \mathrm{K}' = 0 \ \ldots\ldots \ (b).$$

Now, since (*by hypothesis*), $\frac{1}{y} > 0$ and < 1, we will have $y > 1$; then equation (b), by necessity, will have at least one real and positive root greater than one.

We will search then, by the methods of chapter I, the closest integer value of this root; and since this root necessarily must be positive, it will suffice to consider y as positive (§ 4).

Having found the closest integer values of y, which I will call q, then we will make $y = q + \frac{1}{z}$, and substituting this value of y into equation (*b)*, we will have a third equation in z of this form,

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{etc.} + \text{K}'' = 0 \;\ldots\ldots\; (c),$$

which necessarily will have, at least, a real root greater than one, of which we can find the nearest integer value.

This nearest value of z being called r, we will make $z = r + \frac{1}{u}$; and substituting, we will have an equation in u, which will have at least one real root greater than one, and hence continued.

By continuing in the same manner, we will approach always more and more to the value of the root sought ; but if it happens that some one of the numbers p, q, etc., shall be an exact root, then we will have $x = p$, or $y = q$, etc., and the operation will be terminated ; hence, in this case, we will find a rational value for x.

In all the other cases, the value of the root necessarily will be irrational, and we will be able to approach only as near as we would wish. [Lagrange seems to have forgotten to consider the case of rational roots given by repeated sequences of values of finite length.]

19. If the proposed equation has several real positive roots, we will be able to find, by the methods set out in chapter I, the closest integer values of each of the roots ; and calling these values p, p', p'', etc., we will use these in succession to approach more to the true value of each root, it will be necessary only to remark,

1°. So that if these numbers p, p', p'', etc., are all different from each other, then the transformations (*b*), (*c*), etc., of the preceding number, will each have only one real root greater than unity ; for example, if equation (*b*) had two real roots greater than unity, such as y' and y'', we would have then $x = p + \frac{1}{y'}$ and $x = p + \frac{1}{y''}$; such that these two values of x would have the same nearest integer values of p contrary to the hypothesis: it would be the same if equation (*c*), or any other of the following, had two real roots greater than unity.

From there it follows that, in order to find in this case the nearest integer values q, r, etc., of the roots of the equations (*b*), (*c*), etc., it will suffice to substitute successively in place of y, z, etc., the natural positive numbers 1, 2, 3, etc., until we find two consecutive substitutions which give contrary signs (§ 6).

2°. So that if there is two values of x which may have the same integral approximate value p, in using this value, the equation (*b*) also will have two roots greater than unity, and if their approximate integral value is the same, the equation (*c*) still will have two roots greater than unity, and hence for the following, until we arrive at an equation of which the two roots, greater than unity, may have their approximate integral values different; then each of these two values will give a particular series of equations which have only as single real root greater than unity.

In effect, since there are two different values of x which have the same approximate integral value p, these two values will be represented by $p+\frac{1}{y}$; so that it will be required that y necessarily may have two real values greater than unity : and, if these two values of y have the same approximate value q, it will again be necessary that on making $y=q+\frac{1}{z}$, z will have two values greater than unity, and hence so forth.

But, if the approximate integral values of y were different, then calling these values q and q', we will have successively $y=q+\frac{1}{z}$ and $y=q'+\frac{1}{z}$; it is clear that z, in one and the other of these two suppositions, may not have more than one single real value greater than unity, otherwise the values of y, in place of being only doubles, may be triples or quadruples, etc.

Thus, when we will have come to a transformation of which the two roots, greater than unity, will have some different integral values, we will be certain that the other transformations resulting from each of these two values, will only have a single root greater than unity. As regards the manner of finding these nearest integral values $p, q,$ etc., when they correspond to another single root, see the following Chap. VI, art. IV.

We can make some analogous remarks on the case where there will be three or more roots in equation (a), which will have the same nearest integral value.

20. We have assumed in n° 18 that the roots sought are to be positive; in order to find the negatives, it will only be necessary to put $-x$ in place of x in the proposed equation, and we will look for the same positive roots in this latter equation : these will be the negative roots of the proposed equation (§ 4).

As for the imaginary roots which are expressed always by $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, we have given, in chapter II, the means of finding the equations of which α and β are the roots ; hence only the real roots of these equations will have to be found, and we will have the value of all the imaginary roots of the equation proposed.

21. In order to make these substitutions of $p+\frac{1}{y}$ easier (§ 18) in place of x, of $q+\frac{1}{z}$, in place of y, etc., it is good to note that these coefficients of the transformation (b) may themselves be able to be deduced at once from these of equation (a) in this manner :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}p^{m}+\mathrm{B}p^{m-1}+\mathrm{C}p^{m-2}+\mathrm{D}p^{m-3}+\text{ etc.},$$
$$\mathrm{B}' = mAp^{m-1}+(m-1)\mathrm{B}p^{m-2}+(m-2)\mathrm{C}p^{m-3}+\text{etc.},$$
$$\mathrm{C}' = \tfrac{m(m-1)}{2}\mathrm{A}p^{m-2}+\tfrac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{B}p^{m-3}+\text{etc.},$$

etc.

We will have likewise these of the transformation (c) by these of the transformation (b), by putting into the preceding formulas q in the place of p, A'', B'', C'', etc. in place of A', B', C', etc. and A', B', C', etc. in place of A, B, C, etc., and hence so forth.

From that, it is evident that the first coefficient A' or A'', etc. will never be zero, unless the number p or q, etc. may not be an exact root, for which case we have seen that the continued fraction ends on this number (§ 18). In effect, if $A' = 0$, or $A'' = 0$, etc., we will have

$$y = \infty, \text{ or } z = \infty; \text{ thus } z = p, \text{or } y = q, \text{ etc}.$$

22. Hence $p, q, r, s, t,$ etc. shall be the integral values closest to the roots of the equations (a), (b), (c), etc., such that we may have :

$$x = p + \tfrac{1}{y}, \quad y = q + \tfrac{1}{z}, \quad z = r + \tfrac{1}{u}, \quad \text{etc.},$$

substituting successively these values into that of x, we will have:

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

Hence the value of x, that's to say the root sought, shall be expressed by a continued fraction. Now, we know that these kinds of fractions give always the most simple expression, and in the same time the most exact which is possible for any number, rational or irrational.

Huygens appears to be the first who had noticed this property of continued fractions, and had made use of that in finding the most simple fractions, and at the same time the most accessible of some given fraction. (*See* his treatise *de Automato planetario.*[On constructing a planetarium])

Several able geometers have subsequently developed this theory further, and from that they have made different ingenious applications and uses; but we have not yet considered, it seems to me, to use it in the resolution of equations.

23. Meanwhile, if we reduce these continued fractions

$$\tfrac{p}{1}, \quad p + \tfrac{1}{q}, \quad p + \cfrac{1}{q + \frac{1}{r}}, \text{ etc}$$

into ordinary fractions, we will have on making

$$\begin{array}{ll} \alpha = p, & \alpha' = 1, \\ \beta = q\alpha + 1, & \beta' = q\alpha' = q, \\ \gamma = r\beta + \alpha, & \gamma = r\beta' + \alpha', \\ \delta = s\gamma + \beta, & \delta' = s\gamma' + \beta', \\ \text{etc.,} & \text{etc.;} \end{array}$$

we will have, say I, this sequence of particular fractions :

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'}, \text{ etc.,}$$

which shall be necessarily converging to the true value of *x,* and of which the first will be much smaller than this value, the second will be much greater; the third much smaller, and thus henceforth ; such that the value sought will always be found between some two consecutive fractions : this is easy to deduce concerning the same nature of the continued fraction, from which these are drawn.

Now, it is easy to see that the values of $\alpha, \beta, \gamma,$ etc, and α', β', γ', etc. are always such that

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1, \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1, \quad \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1, \text{ etc.;}$$

from which it follows:

1°. Because these fractions are already reduced to their least value, for if γ and γ', for example, had a common divisor other than unity, it would be necessary, on account of the equation $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1,$ that one would also be divisible by this same divisor.

2°. Because we will have

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}, \quad \frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}, \text{ etc.,}$$

fractions of the kind $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'},$ etc. are never able to differ from the true value of x except by a quantity less respectively than $\frac{1}{\alpha'\beta'}, \frac{1}{\beta'\gamma'}, \frac{1}{\gamma'\delta'},$ etc.; from which it will be easy to judge the magnitude of the approximation.

In general, since $\beta' > \alpha', \gamma' > \beta',$ etc., we will have

$$\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}, \quad \frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}, \text{ etc.;}$$

from which we see that the error in each fraction always will be less than one divided by the square of the denominator of the same fraction.

3°. Because each fraction will approach the value of x, not only more than each of the preceding fractions has done, but also more than any other fraction would be able to do which had a smaller denominator. In effect, if the fraction $\frac{\mu}{\mu'}$, for example, should approach more than the fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$, γ' being $>\mu'$, it would be necessary that the quantity $\frac{\mu}{\mu'}$ itself be found between these two $\frac{\gamma}{\gamma'}$ and $\frac{\delta}{\delta'}$, thus $\frac{\mu}{\mu'}-\frac{\gamma}{\gamma'}<\frac{\delta}{\delta'}-\frac{\gamma}{\gamma'}<\frac{1}{\gamma'\delta'^2}$ and >0; thence $\mu\gamma'-\mu'\gamma<\frac{\mu'}{\delta'}<1$, and >0; which cannot happen, since γ, γ', μ, μ' are some whole numbers.

24. The fractions $\frac{\alpha}{\alpha'},\frac{\beta}{\beta'},\frac{\gamma}{\gamma'}$, etc. may be called the *principal* fractions, because they converge the most that is possible towards the value sought; but, when the numbers p, q, r, etc. differ from unity, we can still find other fractions converging towards the same value, and that we will call, if wished, *secondary* fractions.

For example, if r is >1, we can, between the fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ and $\frac{\gamma}{\gamma'}$, which are both two less than the value of x, insert as many secondary fractions as there will be had units in $r-1$, on putting successively, 2, 3, etc. $r-1$, in place of r. In this manner, because $\gamma=r\beta+\alpha$, and $\gamma'=r\beta'+\alpha'$, we will have this sequence of fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\quad \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\quad \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\quad \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'},\ \text{etc.}\quad \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'},$$

of which the two extremes are the two *principal* fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, and of which the intermediaries are the *secondary* fractions.

Now, if we take the difference between any two consecutive members of this sequence, as between $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ and $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, we will find $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$; such that this difference will be positive always, and it will go diminishing from one fraction to the other; from where it follows that as the last fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$ is less than the true value of the continued fraction, the fractions of which will all be required to be smaller than this value, and at the same time will be converging towards this same value.

We will perform the same reasoning with regard to all the other principal fractions ; and if we may add to all these fractions the two fractions $\frac{0}{1}$ and $\frac{1}{0}$ of which the first is always the smallest, and of which the second is greater than any quantity given, we will be able to form two series of fractions converging towards the value sought, of which one is going to contain all the fractions smaller than this value, and of which the other is going to contain all the fractions greater than the same value.

Smaller Fractions.

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\text{ etc.},\quad \frac{p}{1}\cdots\cdots\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right),$$
$$\frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'},\text{ etc. }\frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}\cdots\cdots\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right),$$
$$\frac{\delta+\gamma}{\delta'+\gamma'},\ \frac{2\gamma+\delta}{2\delta'+\gamma'},\ \frac{3\gamma+\delta}{3\delta'+\gamma'},\text{ etc. }\frac{t\gamma+\delta}{t\delta'+\gamma'}\cdots\cdots\left(\frac{s}{s'}\right),$$
etc.

Larger Fractions .

$$\frac{1}{0},\ \frac{\alpha+1}{\alpha'+1},\ \frac{2\alpha+1}{2\alpha'+1},\ \frac{3\alpha+1}{3\alpha'+1},\text{ etc.},\quad \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1}\cdots\cdots\left(\frac{\beta}{\beta'}\right),$$
$$\frac{\gamma+\beta}{\gamma'+\beta'},\ \frac{2\gamma+\beta}{2\gamma'+\beta'},\ \frac{3\gamma+\beta}{3\gamma'+\beta'},\text{ etc.},\quad \frac{s\gamma+\beta}{s\gamma'+\beta'}\cdots\cdots\left(\frac{\delta}{\delta'}\right),$$
etc.

As to the nature of these fractions, it is easy to prove, as we have done with regard to principal fractions,

1°. that each of these fractions will be already reduced to its least terms ; from where it follows that as the numerators and denominators go in increasing, these fractions themselves will be found expressed by some greater terms than the measure by which they recede from the start of the series.

2°. Because each fraction of the first series will approximate the value of x more than any other fraction whatever which shall be less than this value, and which may have a denominator smaller than that of the same fraction ; and because, likewise, each fraction of the second series will approximate more to the value of x than any other fraction would be able to do greater than this value, and which would have a denominator smaller than that of the same fraction.

In effect, if it had a fraction such as $\frac{\mu}{\mu'}$ smaller than the value of x, and at the same time approaching closer to this value than the fraction $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, for example, in supposing $3\beta'+\alpha'>\mu'$, it would be necessary (because the fraction $\frac{\beta}{\beta'}$ is greater than the value on which it depends) that the value $\frac{\mu}{\mu'}$ would be found between the two quantities $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ and $\frac{\beta}{\beta'}$; thus the quantity $\frac{\mu}{\mu'}-\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ would have to be

$$<\frac{\beta}{\beta'}-\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}<\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\beta'(3\beta'+\alpha')}<\frac{1}{\beta'(3\beta'+\alpha')};$$

thus it would be necessary that $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)$ would be $<\frac{\mu'}{\beta'}<1$; which cannot be the case.

For the rest, it can happen that a fraction of a series does not approach so close as one of another series, although conceived in less simple terms; but that cannot happen when the fraction which has the greater denominator is a principal fraction (n° 23).

CHAPTER IV.

Applications of the preceding Methods to some Examples.

25. I will take for the first example the equation which *Newton* has resolved by his method, namely:

$$x^3-2x-5=0.$$

begin by searching through the formulas of § 8 the equation in v which results from this equation; hence I make $m=3,\ \mathrm{A}=0,\ \mathrm{B}=-2,\ \mathrm{C}=5$; I will have $n=\frac{3\cdot 2}{2}=3,\ \mathrm{A}_1=0, \mathrm{A}_2=4, \mathrm{A}_3=15,\ \mathrm{A}_4=8, \mathrm{A}_5=50, \mathrm{A}_6=91$; then $a_1=12,\ a_2=72,\ a_3=-1497$, and from that $a=12,\ b=36,\ c=-643;$ so that the equation found will be

$$v^3-12v^2+36v+643=0.$$

As this equation has not alternating positive and negative signs, I conclude immediately that the proposed equation necessarily has two imaginary roots, as a consequence one single real root (§ 16).

Hence the numbers to substitute in place of x, will be the natural numbers 0, 1, 2, 3, etc. (§ 6).

I assume at first x to be positive, and I look for the bound of these values of x by the methods of n° 12, I find $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}<3$; hence 3 will be the limit found in whole numbers ; such that it will suffice to make successively $x=0,\ =1,\ =2,\ =3$; which will give these results : $-5,-6,-1,+16$; from which we se that the real root of the proposed equation, will be between the number 2 and 3; and that hence 2 will be the nearest integral value of this root (§ 2).

I now make, following the method of cheaper III, $x=2+\frac{1}{y}$, I have, on substituting and ordering the terms according to y, the equation

$$y^3-10y^2-6y-1=0,$$

in which I have changed the signs in order to render the first term positive.

Hence this equation necessarily will have a single root greater than one (§19); such that in order to find there the approximate value, we only have to substitute the numbers 0, 1, 2, 3, etc. just as far as we find two consecutive substitutions which give results of the opposite signs.

In order not to make many useless substitutions, I observe that on making $y=0$, I have a negative result, and that on making $y=10$, the outcome is still negative ; I begin then with the number 10, and I make successively $y=10,\ =11,$ etc., I find at first the numbers $-61,\ +54,$ etc.; from which I conclude that the approximate value of y is 10; thus $q=10$.

I make then $y=10+\frac{1}{z}$, I will have the equation

$$61z^3-94z^2-20z-1=0;$$

and assuming successively $z=1,=2,$ etc., I will have the outcomes $-54,\ +71,$ etc.; thus $r=1$.

Again, I make $z=1+\frac{1}{u}$, I will have

$$54u^3+25u^2-89u-61=0;$$

and assuming $u=1,=2$, I will have the results $-71,\ +293,$ etc.; thus $s=1$, and hence forthwith.

By continuing in this manner, we will find the numbers 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc., such that the root sought will be expressed by this continued fraction :

$$x=2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.};}}}}$$

from which we will extract the fractions (§ 23)

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{etc.},$$

which will be alternatively smaller and larger than the value of x.

The last fraction $\frac{16415}{7837}$ is greater than the root sought; but the error will be smaller than $\frac{1}{(7837)^2}$ (§ 23, 2°.), that's to say, less than 0,0000000163; thus, if we reduce the fraction $\frac{16415}{7837}$ into a decimal fraction, it will be exact as far as to the seventh decimal : now, on making the division, we find 2,0845514865….. ; hence the root sought lies between the numbers 2,09455149 and 2,09455147.

Newton had found by his method the fraction 2,09455147 *(see* his Method of Infinite Series); where we see that this method gives in this case a very exact result : but it would be wrong to promise always such an accuracy.

26. As for the two other roots of the same equation, we have already seen that they must be imaginary : nevertheless, if we wished to find the value there, we would be able to do that by the method of § 17.

For that, we will take the equation in *v* found above, and therein on changing *v* into $-w$, and then changing all the signs, we will have

$$w^3+12w^2+36w-643=0,$$

and it will not be necessary further than to search for a real positive root of this equation. Now, since it has its last term negative, it will have necessarily such a root, of which we can find the nearest whole number by the successive substitution of the natural numbers 0, 1, 2, 3, etc. (§ 3). In effect, on making $w=5$, we will have the result -38, and on making $w=6$, we will have +221; hence the nearest whole number of the positive root of this equation will be 5.

Thence we will now make $w=5+\frac{1}{u}$, and on substituting, we will have, after having changed the signs,

$$38u^3-231u^2-27u-1=0.$$

Making successively $u=0,1,2,$ etc., we will find for $u=6$ and $u=7$ the results $-271,\ +1525$; thus 6 will be the whole number nearest to *u*.

We will then make $u=6+\frac{1}{x}$, and we will have, on substituting and changing the signs,

$$271x^3-1305x^2-453x-38=0.$$

On making successively $x=0,\ 1,\ 2,$ etc., we will find negative results as far as assuming $x=6$, which gives 8837 for the result ; such that 5 will be the integral value nearest to *x*.

Thence we will make $x=5+\frac{1}{y}$, substituting and reducing, we will have

$$1053y^3-6822y^2-2760y-271=0,$$

and we will find 6 for the closest value of *y*, and thus henceforth.

In this manner, we will approach more and more to the value of *w,* which is found expressed by the continued fraction :

$$w=5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\text{etc.}}}}$$

from which we extract the particular fractions

$$\tfrac{5}{1},\ \tfrac{31}{6},\ \tfrac{160}{31},\ \tfrac{991}{192},\ \text{etc.}$$

Hence knowing *w,* we will have (§ 17) $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$; hence we will know β.

Now we will substitute $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ in place of x in the proposed ; and making two separate equations from all the real terms, and of these which are associated with $\sqrt{-1}$, we will have these two equations :

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0,$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0.$$

We will look for the greatest common divisor of these two equations, and we will be able to divide that until we come to a remainder where α can only be found to the first power (indicated with a number); this remainder will be $-\frac{8\beta^2+4}{3}\alpha - 5$, which being made $= 0$, will give

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2+1)}.$$

Hence we will have the value of the two imaginary roots $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, and $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ of the proposed equation.

27. Taking for the second example the equation:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Again we will have here $m = 3$, and as a consequence $n = 3$; then $\mathrm{A} = 0,\ \mathrm{B} = -7,\ \mathrm{C} = -7$; from which $\mathrm{A}_1 = 0,\ \mathrm{A}_2 = 14,\ \mathrm{A}_3 = -21,\ \mathrm{A}_4 = 98,\ \mathrm{A}_5 = -245,\ \mathrm{A}_6 = 833$; and from that, $a_1 = 42,\ a_2 = 882,\ a_3 = 18669,$ and finally $a = 42,\ b = 441,\ c = 49;$ such that the equation in v will be :

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Since the signs of this equation are alternatives, it is a sign that the proposed equation can have all its roots real (§ 16); and since besides this equation is not divisible by *v*, it follows that the equation in *x* will not have equal roots (§ 15).

Now we will make (§ 11) $v = \frac{1}{y}$, and ordering the equation with regard to *y,* we will have

$$y^3 - 9y^2 + \tfrac{42}{49}y - \tfrac{1}{49} = 0.$$

The greatest negative coefficient being 9, we may take $l = 10$ (§ 12); but we can find a closer boundary by looking for the smallest whole number which renders the three quantities positive

$$l^3 - 9l^2 + \tfrac{42}{49}l - \tfrac{1}{49},$$
$$3l^2 - 18l + \tfrac{42}{49},$$
$$3l - 9\ ;$$

and we will find that $l=9$ satisfies these conditions; such that we will have $k = 3$ (§ 11), and as a consequence $\Delta = \tfrac{1}{3}$.

Hence we will put $\tfrac{x}{3}$ (§ 13, 2°.) into the proposed equation in place of x, which reduces that to this :

$$x^3 - 63x + 189 = 0,$$

in which there will be a need only to substitute the natural numbers 0, 1, *2,* etc. in place of *x*. Now, following the method of § 13 (3°.), we find that the series of these results only contains two variations of signs, which correspond to $x = 4,\ 5,\ 6$; such that the equation proposed will have only two positive roots, which will fall, one between the numbers $\tfrac{4}{3}$ and $\tfrac{5}{3}$, and the other between the numbers $\tfrac{5}{3}$ and $\tfrac{6}{3}$; from where we see that the whole number closest to both will be 1 (§ 2).

Now making *x* negative in order to have the negative roots also (§ 4), and the equation will be changed into

$$x^3 - 7x - 7 = 0\,,$$

which having its last term negative, surely will have a positive root (§ 3), and it is clear that it will have only a single root, since we have already found the two other roots ; hence at first we will be able to find the value of the nearest whole number of this root, by substituting in place of *x* the numbers 0, 1, 2, etc. until we meet two substitutions which give results of the opposite signs (§ 3) : now, we find that these substitutions are $x = 3$ and $x = 4$; such that 3 will be the closest integral value of *x* in the preceding equation, and as a consequence of $-x$ in the proposed equation.

Thus having found that the equation has three real roots, two positive and one negative, and having found at the same time their closest whole number values, we can approach as close as we wish to the true value of each of these by the method of III.

Considering first the positive roots, and in the equation $x^3 - 7x + 7 = 0,$ on making $x = 1 + \tfrac{1}{y}$, it will become:

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0,$$

which, since 1 is the nearest whole number of the two roots, necessarily there will be two roots greater than one (§ 19, 2°.).

I try at first to see if I can find the closest whole numbers of the two roots by substituting the whole numbers $0, 1, 2,$ etc., and since it only has the negative term $4y^2$, it will suffice (§ 13, 1°.) to put in place substitutions until we may have $y^3 =$ or $> 4y^2$; that's to say, until $y = 4$. Now, on making $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ I have these outcomes $1,\ 1, -1,\ 1,\ 13$; from which I conclude that the roots sought are, the one between the numbers 1 and 2, and the other between the numbers 2 and 3; such that the nearest whole number values of y shall be 1 and 2.

Thus we will make, 1°. $y = 1 + \frac{1}{z}$, and we will have $z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$, an equation which will not have more than one real root greater than one (§ 19, 2°.). Hence we will assume successively $z = 1,\ 2,$ etc. until we find two consecutive substitutions which give results of the opposite signs : now, we find that $-z = 2$ gives -1, and $z = 3$ gives $+7$; thus 2 will be the nearest whole number of z.

Thus, we can put $z = 2 + \frac{1}{u}$, and substituting we will have, on changing the signs, $u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0.$

We will assume likewise $u = 1,\ 2,$ etc., and we will find that the nearest whole number of u will be 4.

We will make $u = 1 + \frac{1}{w}$, and hence thereof.

2°. We will make $y = 2 + \frac{1}{z}$, and substituting y into the preceding equation, we will have, after changing the signs,

$$z^3 + 2z^2 - z - 1 = 0;$$

this equation will have , as the preceding in z, only a single real root greater than one; such that it will be necessary only to have $z = 1,\ 2,$ etc., which gives the results $-1,\ 7$; from which we can conclude that 1 is the closest whole number of z.
Thus we will make $z = 1 + \frac{1}{u}$, and we will have, on changing the signs,

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0;$$

from which we will find, in the same manner as above, that the closest whole number of u will be 4.

Hence we will make $u = 4 + \frac{1}{w}$, and hence so forth.

Therefore the two positive roots of the proposed equation will be :

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\text{etc.},}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}$$

From which if we wish, we will extract the converging fractions, as in the preceding example (§ 23 and § 24).

Now to find the closest whole number value of the negative root we will take the equation $x^3 - 7x - 7 = 0$, in which we have found already that the nearest whole number is 3; hence we will make $x = 3 + \frac{1}{y}$, which will give on changing the signs,

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0;$$

and since this equation cannot have a single real root greater than 1 (§ 19, 2°.), we will find the nearest value on making $y = 1, 2,$ etc. until we meet two consecutive outcomes of opposite sign, which will happen when $y = 20, 21$; such that the value it thus depends on will be 20.

We will then make $y = 20 + \frac{1}{u}$, etc.

In this manner, the negative root of the proposed equation will become

$$x = -3 - \cfrac{1}{20+\cfrac{1}{3+\text{etc.}}}$$

CHAPITRE II.

De la manière il avoir les racines égales et les racines imaginaires des équations.

15. Nous n'avons considéré, dans le chapitre précédent, que les racines réelles et inégales de l'équation proposée (B); supposons maintenant que cette équation ait des racines égales : dans ce cas, il faudra (n° 11) que l'équation (D) soit divisible autant de fois par v qu'il y aura de combinaisons de racines égales deux à deux ; par conséquent il faudra qu'il y ait dans cette équation (D) autant des derniers termes qui manquent; ainsi on connaîtra par ce moyen combien de racines égales il y aura dans la proposée.

Mais on peut s'assurer d'avance si l'équation proposée a des racines égales, et même trouver ces racines indépendamment de l'équation (D).
Car puisque dans le cas des racines égales, on a nécessairement $u = 0$ (n° 8), l'équation (C) du même numéro donnera pour ce cas $\mathrm{Y} = 0$; ainsi il faudra que les deux équations en x, $\mathrm{X} = 0,\ \text{et}\ \mathrm{Y} = 0$, aient lieu en même temps lorsque x est égal à une quelconque des racines égales de l'équation (B).

On cherchera donc, par les méthodes connues, le plus grand comumun diviseur des deux polynomes X et Y; et faisant ensuite ce diviseur égal à zéro, on aura une équation qui ne sera composée que des racines égales de la proposée, mais élevées à une puissance moindre de l'unité.

Soit R le plus grand commun diviseur de X et de Y, et X' le quotient de X divisé par R, il est facile de voir que l'équation $\mathrm{X}' = 0$ contiendra toutes les mêmes racines que l'équation proposée $\mathrm{X} = 0$, avec cette différence que les racines multiples de cette équationi seront simples dans l'équation $\mathrm{X}' = 0$; ainsi l'équation $\mathrm{X}' = 0$ sera dans le cas des méthodes précédentes.

On peut encore, si l'on veut, trouver deux équations séparées, donc l'une contienne seulement les racines égales de l'équation $\mathrm{X} = 0$, et dont l'autre contienne les racines inégales de la même équation. Pour cela, il n'y aura qu'à chercher de nouveau le plus grand commun diviseur des polynomes X' et Y; et nommant ce diviseur R', on prendra le quotient de X' divisé par R', lequel étant nommé X'', on fera ces deux équations $\mathrm{X}'' = 0,\ \text{et}\ \mathrm{R}' = 0$.

Là première contiendra seulement les racines inégales de l'équation $\mathrm{X} = 0$, et la seconde contiendra seulement les racines égales de la même équation, mais chacune une seule fois; de sorte que les deux équations $\mathrm{X}'' = 0,\ \text{et}\ \mathrm{R}' = 0$, n'auront que des racines inégales, et par conséquent seront susceptibles des méthodes du chapitre précédent.

16. Connaissant ainsi le nombre des racines réelles, tant inégales qu'égales, de l'équation proposée, si ce nombre est moindre que le degré de l'équation, on en conclura que les autres racines sont nécessairement imaginaires.

En général, pour que l'équation (B) ait toutes ses racines réelles, il faut que les valeurs de u soient réelles aussi; donc il faudra que les valeurs de u^2 ou de u soient toutes réelles et positives; par conséquent, l'équation (D) du n° 8 doit avoir toutes ses racines réelles positives: donc il faudra, par la règle connue, que les signes de cette équation soient alternativement positifs et négatifs; de sorte que si cette condition n'a pas lieu, ce sera une marque sûre que l'équation (B) a nécessairement des racines imaginaires.

Or, on sait que les ràcines imaginaires vont toujours en nombre pair, et qu'elles peuvent se mettre deux à deux sous cette forme,
$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1}$, α et β étant des quantités réelles ; donc on aura $u=\pm 2\beta\sqrt{-1}$, et par conséquent $v=-4\beta^2$; d'où l'on voit que l'équation (D) aura nécessairement autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginairès dans l'équation (B).

Donc, si l'on fait $v=-w$, ce qui changera l'équation (D) en célle-ci

$$w^n+aw^{n-1}+bw^{n-2}+cw^{n-3}+\text{etc.}=0\cdots\cdots(\text{G}),$$

cette équation aura nécessairement autant de racines réelles positives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

17. Il suit de là que pour avoir la valeur des racines imaginaires de l'équation (B), il n'y a qu'à chercher les racines réelles positives de l'équation (G). En effet, soient
$w',\ w'',\ w''',\text{etc.}$ ces racines, on aura d'abord $\frac{\sqrt{w'}}{2},\ \frac{\sqrt{w''}}{2},\ \frac{\sqrt{w'''}}{2},\text{etc.}$ pour les valeurs de β ; énsulte, pour trouver les valeurs correspondantes α, on substituera, dans l'équation (B), $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, à la place de *x,* et on fera deux équations séparées des termes tous réels, et de ceux qui seront multipliés par $\sqrt{-1}$; de cette manière, on aura deux équations en α de cette forme:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^m+\text{P}\alpha^{m-1}+\text{Q}\alpha^{m-2}+\ \text{etc.}=0\\ m\alpha^{m-1}+p\alpha^{m-2}+q\alpha^{m-3}+\ \text{etc.}=0\end{array}\right\}\cdots(\text{H}),$$

dans lesquelles les coefficiens P, Q; etc. *p, q,* etc. seront donnés en *a, b, c,* etc. et en β.

Donc, si l'on donne à β quelqu'une des valeurs précédentes, il faudra nécessairement que ces deux équations aient lieu en même temps, et par conséquent il faudra qu'elles aient un diviseur commun. On cherchera donc leur plus grand commun diviseur; et le faisant égal à zéro, on aura une équation èn α et β, par la quelle β étant connu, on trouvera α.

Il est bon de remarquer que, si toutes les valeurs de β tirées de l'équation (G) sont inégales entre elles, alors à chaque valeur de β il ne pourra répondre qu'une seule valeur de α ; donc, dans ce cas, les deux équations (H) ne pourront avoir qu'une seule racine commune; et par conséquent leur plus grand commun diviseur ne pourra être que du premier degré.

On poussera donc la division jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α ne se trouve plus qu'à la première dimension, et l'on fera ensuite ce reste égal à zéro; ce qui donnera la valeur cherchée de α.

Mais si parmi les valeurs de β tirées de l'équation (G), il y en a, par exemple, deux égales entre elles, alors, comme à chacune de ces valeurs égales de β, il peut répondre des valeurs différentes de α, il faudra qu'en mettant cette valeur double de β dans les équations (H), elles puissent avoir lieu par rapport à l'une et l'autre des valeurs de α qui y répondent; ainsi ces deux équations auront nécessâirement deux racines communes, et par conséquent leur plus grand commun diviseur sera du second degré. Il faudra donc, dans ce cas, ne pousser la division que jusqu'à ce que l'on arrive à un reste où α. se trouve à la seconde dimension seulement ; et alors on fera ce reste égal à zéro, ce qui donnera une équation du second degré, par laquelle on déterminera les deux valeurs de α, lesquelles seront nécessairement toutes deux réelles.

De même, s'il y avait trois valeurs égales de β, il faudrait, pour trouver les valeurs de α, qui répondraient à cette valeur triple de β, ne pousser la division que jusqu'à ce que l'on parvent à un reste où la plus haute puissance de α fût la troisième ; et alors faisant ce reste égal à zéro, on aurait une équation en α du troisième degré, laquelle donnerait les trois valeurs réelles de α, correspondantes à la même valeur de β, et ainsi de suite.

CHAPITRE III.

Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques.

18. Soit l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + \mathrm{K} = 0 \;\ldots\ldots\; (a),$$

et supposons qu'on ait déjà trouvé par la méthode précédente, ou autrement, la valeur entière approchée d'une de ses racines réelles et positives; soit cette première valeur *p,* en sorte que l'on ait $x > p$ et $x < p+1$, on fera $x = p + \frac{1}{y}$; et substituant cette valeur dans l'équation proposée, à la place de *x,* on aura, après avoir multiplié toute l'équation par y^m ; et ordonné les termes par rapport à *y,* une équation de cette forme

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{etc.} + \mathrm{K}' = 0 \;\ldots\ldots\; (b).$$

Or, comme (*hyp.),* $\frac{1}{y} > 0$ et < 1, on aura $y > 1$; donc l'équation *(b)* aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité.

On cherchera donc, par les méthodes du chapitre l[er], la valeur entière approchée de cette racine; et comme cette racine doit être nécessairement positive, il suffira de considérer y comme positif (n° 4).

Ayant trouvé la valeur entière approchée de y, que je nommerai q, on fera ensuite $y = q + \frac{1}{z}$, et substituant cette valeur de y dans l'équation (*b*), on aura une troisième équation en z de cette forme,

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{etc.} + \text{K}'' = 0 \;..... \;(c),$$

laquelle aura nécessairèment, àu moins, une racine réelle plus grande que l'unité, dont on pourra trouver de même la valeur entière approchée.

Cette valeur approchée de z étant nommée r, on fera $z = r + \frac{1}{u}$; et substituant, on aura une équation en u, qui aura au moins une racine réelle plus grande que l'unité, et ainsi de suite.

En continuant de la même manière, on approchera toujours de plus en plus de la valeur de la racine cherchée ; mais s'il arrive que quelqu'un des nombres p, q, etc., soit une racine exacte, alors on aura $x = p$, ou $y = q$, etc., et l'opération sera terminée ; ainsi, dans ce cas, on trouvera pour x une valeur commensurable.

Dans tous les autres cas, la valeur de la racine sera nécessairement incommensurable, et l'on pourra seulement en approcher aussi près qu'on voudra.

19. Si l'équation proposée a plusieurs racines réelles positives, on pourra trouver, par les méthodes exposées dans le chapitre l[er], la valeur entière approchée de chacune de ces racines; et nommant ces valeurs p, p', p'', etc., on les emploiera successivement pour approcher davantage de la vraie valeur de chaque racine, il faudra seulement remarquer,

1°. Que si les nombres p, p', p", etc., sont tous différens l'un de l'autre, alors les transformées (*b*), (*c*), etc., du numéro précédent, n'auront chacune qu'une seule racine réelle et plus grande que l'unité; car si, par exemple, l'équation (*b*) avait deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles que y' et y'', on aurait donc $x = p + \frac{1}{y'}$ et $x = p + \frac{1}{y''}$; de sorte que ces deux valeurs de x auraient la même valeur entière approchée p contre l'hypothèse : il en serait de même si l'équation (*c*), ou quelqu'une des suivantes, avait deux racines réelles plus grandes que l'unité.

De là il suit que, pour trouver dans ce cas les valeurs entières approchées q, r, etc., des racines des équations (*b*), (*c*), etc., il suffira de substituer successivement à la place de y, z, etc., les nombres naturels positifs 1, 2, 3, etc., jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signes contraires (n° 6).

2°. Que s'il y a deux valeurs de x qui aient la même valeur entière approchée p, en employant cette valeur, l'équation (*b*) aura aussi deux racines plus grandes que l'unité, et si leur valeur entière approchée est la même, l'équation (*c*) aura encore deux racines plus grandes que l'unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation dont les deux racines, plus grandes que l'unité, aient des valeurs entières approchées différentes ;

alors chacune de ces deux valeurs donnera une suite particulière d'équations qui n'auront plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité.

En effet, puisqu'il y a deux valeurs différentes de x qui ont la même valeur entière approchée p, ces deux valeurs seront représentées par $p+\frac{1}{y}$; de sorte qu'il faudra que y ait nécessairement deux valeurs réelles plus grandes que l'unité : et, si ces deux valeurs de y ont la même valeur approchée q, il faudra de nouveau qu'en faisant $y=q+\frac{1}{z}$, z ait deux valeurs différentes plus grandes que l'unité, et ainsi de suite.

Mais, si les valeurs entières approchées de y étaient différentes, alors nommant ces valeurs q et q', on ferait successivement $y=q+\frac{1}{z}$ et $y=q'+\frac{1}{z}$; il est clair que z, dans l'une et l'autre de ces deux suppositions, n'aurait plus qu'une seule valeur réelle plus grande que l'unité, autrement les valeurs de y, au lieu d'être seulement doubles, seraient triples ou quadruples, etc.

Donc, quand on sera parvenu à une transformée dont les deux racines, plus grandes que l'unité, aùront des valeurs entières différentes, on sera assuré que les autres transformées résultantes de chacune de ces deux valeurs, n'auront plus qu'une seule racine plus grande que l'unité. Quant à la manière de trouver les valeurs entières approchées p, q, etc., lorsqu'elles répondent à plus d'une racine, voyez ci-après Chap. VI, art. IV.

On peut faire des remarques analogues sur le cas où il y aurait dans l'équation (a) trois racines, ou davantage, qui 'auraient la même valeur entière approchée.

20. Nous avons supposé dans le n° 18 que les racines cherchées étaient positives; pour trouver les négatives, il n'y aura qu'à mettre $-x$ à la place de x dans l'équation proposée, et l'on cherchera de même les racines positives de cette dernière équation : ce se1·ont les racines négatives de la proposée (n° 4).

Quant aux racines imaginaires qui sont toujours exprimées par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, nous avons donné, dans le chapitre II, le moyen de trouver les équations dont α et β sont les racines; ainsi il n'y aura qu'à chercher les racines réelles de ces équations, et l'on aura la valeur de toutes les racines imaginaires de l'équation proposée.

21. Pour faciliter les substitutions (n° 18) de $p+\frac{1}{y}$, au lieu de x, de $q+\frac{1}{z}$, au lieu de y, etc., il est bon de remarquer que les coefficiens de la transformée (b) peuvent se déduire immédiatement de ceux de l'équation (a) en cette sorte :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}' = \mathrm{A}p^m+\mathrm{B}p^{m-1}+\mathrm{C}p^{m-2}+\mathrm{D}p^{m-3}+\text{ etc.},\\
&\mathrm{B}' = mAp^{m-1}+(m-1)\mathrm{B}p^{m-2}+(m-2)\mathrm{C}p^{m-3}+\text{etc.},\\
&\mathrm{C}' = \tfrac{m(m-1)}{2}\mathrm{A}p^{m-2}+\tfrac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{B}p^{m-3}+\text{etc.},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

On aura de même ceux de la transformée (c) par ceux de la transformée (b), en mettant dans les formules précédentes q à la place de p, A″, B″, C″, etc. à la place de A′, B′, C′, etc. et A′, B′, C′, etc. à la place de A, B, C, etc., et ainsi de suite.

De là, il est évident que le premier coefficient A′ ou A″, etc. ne sera jamais nul, à moins que le nombre p ou q, etc. ne soit une racine exacte, auquel cas nous avons vu que la fraction continue se termine à ce nombre (n° 18). En cffet, si $\text{A}'=0$, ou $\text{A}''=0$, etc., on aura

$$y=\infty,\text{ou } z=\infty;\ \text{donc } z=p,\text{ou } y=q,\text{etc}.$$

22. Soient donc p, q, r, s, t, etc. les valeurs entières approchées des racines des équations (a), (b), (c), etc., en sorte que l'on ait

$$x=p+\tfrac{1}{y},\ \ y=q+\tfrac{1}{z},\ \ z=r+\tfrac{1}{u},\ \ \text{etc.},$$

substituant successivement ces valeurs dans celle de x, on aura

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{etc.}}}}$$

Ainsi la valeur de x, c'est-à-dire de la racine cherchée, sera exprimée par une fraction continue. Or, on sait que ces sortes de fractions donnent toujours l'expression la plus simple, et en même temps la plus exacte qu'il est possible d'un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel.

Huygens paraît être le premier qui ait remarqué cette propriété des fractions continues, et qui en ait fait usage pour trouver les fractions les plus simples, et en même temps les plus approchantes d'one fraction quelconque donnée. (*Voyez* son Traité *de Automato planetario.*)

Plusieurs habiles géomètres ont ensuite développé davantage cette théorie, et en ont fait différentes applications ingénieuses, et utilès; mais on n'avait pas encore pensé, ce me semble, à s'en servir dans la résolution des équations.

23. Maintenant, si on réduit les fractions continues

$$\tfrac{p}{1},\ \ p+\tfrac{1}{q},\ \ p+\cfrac{1}{q+\frac{1}{r}},\ \text{etc}$$

en fractions ordinaires, on aura en faisant

$$\begin{array}{ll}
\alpha=p, & \alpha'=1,\\
\beta=q\alpha+1, & \beta'=q\alpha'=q,\\
\gamma=r\beta+\alpha, & \gamma=r\beta'+\alpha',\\
\delta=s\gamma+\beta, & \delta'=s\gamma'+\beta',\\
\text{etc.,} & \text{etc.;}
\end{array}$$

on aura, dis-je, cette suite de fractions particulières :

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\quad \frac{\beta}{\beta'},\quad \frac{\gamma}{\gamma'},\quad \frac{\delta}{\delta'},\ \text{etc.},$$

lesquelles seront nécessairement convergentes vers la vraie valeur de x, et dont la première sera plus petite que cette valeur, la seconde sera plus grande; la troisième plus petite, et ainsi de suite; de sorte que la valeur cherchée se trouvera toujours entre deux, fractions consécutives quelconques: c'est ce qu'il est aisé de déduire de la nature même de la fraction continue, d'où celles-ci sont tirées.

Or, il est facile de voir que les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma,$ etc, et α', β', γ', etc. sont toujours telles que

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1,\quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1,\quad \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1,\ \text{etc.};$$

d'où il s'ensuit,

1°. Que ces fractions sont déjà réduites à leurs moind car si γ et γ', par example, avaient un commun diviseur autre que l'unité, il faudrait, en vertu de l'équation $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$, que l'unité fût aussi divisible par ce même diviseur.

2°. Qu'on aura

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'},\quad \frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'},\quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'},\ \text{etc.},$$

de sorte que les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'}$, etc. ne peuvent jamais différer de la vraie valeur de x que d'une quantité respectivement moindre que $\frac{1}{\alpha'\beta'}, \frac{1}{\beta'\gamma'}, \frac{1}{\gamma'\delta'}$, etc.; d'où il sera facile de juger de la quantité de l'approximation.

En général, puisque $\beta' > \alpha',\ \gamma' > \beta'$, etc., on aura

$$\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'},\quad \frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'},\ \text{etc.};$$

d'où l'on voit que l'erreur de chaque fraction sera toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la même fraction.

3°. Que chaque fraction approchera de la valeur de x, non-seulement plus que ne fait aucune des fractions précédentes, mais aussi plus que ne pourrait faire aucune autre fraction quelconque qui aurait un moindre dénominateur. En effet, si la fraction $\frac{\mu}{\mu'}$, par exemple, approchait plus que la fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$, γ' étant $> \mu'$, il faudrait que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvat entre ces deux $\frac{\gamma}{\gamma'}$ et $\frac{\delta}{\delta'}$, donc $\frac{\mu}{\mu'}-\frac{\gamma}{\gamma'}<\frac{\delta}{\delta'}-\frac{\gamma}{\gamma'}<\frac{1}{\gamma'\delta'^2}$ et >0 ; donc $\mu\gamma'-\mu'\gamma<\frac{\mu'}{\delta'}<1,$ et >0; ce qui ne se peut, puisque $\gamma, \gamma', \mu, \mu'$ sont des nombres entiers.

24. Les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'},$ etc. peuvent être appelées fractions *principales,* parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur cherchée; mais, quand les nombres *p, q, r,* etc. diffèrent de l'unité, on peut encore trouver d'autres fractions convergentes vers la même valeur, et qu'on appellera, si l'on veut, fractions *secondaires.*

Par exemple, si r est >1, on peut, entre les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$, qui sont toutes deux moindres que la valeur de x, insérer autant de fractions secondaires qu'il y a d'unités dans $r-1$, en mettant successivement 1, 2, 3, etc. $r-1$, au lieu r. De cette manière, à cause de $\gamma=r\beta+\alpha$, et $\gamma'=r\beta'+\alpha'$, on aura cette suite de fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'},\ \text{etc.}\ \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'},$$

dont les deux extrêmes sont les deux fractions *principales* $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\gamma}{\gamma'}$, et dont les intermédiaires sont des fractions *secondaires.*

Or, si on prend la différence entre deux fractions consécutives quelconques de cette suite, comme entre $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ et $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, on trouvera $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$; de sorte que cette différence sera toujours positive, et ira en diminuant d'une fraction à l'autre; d'où il suit que comme la dernière fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$ est moindre que la vraie valeur de la fraction continue, les fractions dont il s'agit seront toutes plus petites que cette valeur, et seront en même temps convergentes vers cette même valeur.

On fera le même raisonnement par rapport à toutes les autres fractions principales ; et si on ajoute à ces fractions les deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ dont la première est toujours plus petite, et dont la seconde est plus grande que toute quantité donnée, on pourra former deux séries de fractions convergentes vers la valeur cherchée, dont l'une contiendra toutes les fractions plus petites que cette valeur, et dont l'autre contiendra toutes les fractions plus grandes que la même valeur.

Fractions plus petites.

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1}, \text{ etc.},\quad \frac{p}{1}\cdots\cdots\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right),$$

$$\frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\ \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\ \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}, \text{ etc. } \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}\cdots\cdots\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right),$$

$$\frac{\delta+\gamma}{\delta'+\gamma'},\ \frac{2\gamma+\delta}{2\delta'+\gamma'},\ \frac{3\gamma+\delta}{3\delta'+\gamma'}, \text{ etc. } \frac{t\gamma+\delta}{t\delta'+\gamma'}\cdots\cdots\left(\frac{s}{s'}\right),$$

etc.

Fractions plus grandes.

$$\frac{1}{0},\ \frac{\alpha+1}{\alpha'+1},\ \frac{2\alpha+1}{2\alpha'+1},\ \frac{3\alpha+1}{3\alpha'+1}, \text{ etc.},\quad \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1}\cdots\cdots\left(\frac{\beta}{\beta'}\right),$$

$$\frac{\gamma+\beta}{\gamma'+\beta'},\ \frac{2\gamma+\beta}{2\gamma'+\beta'},\ \frac{3\gamma+\beta}{3\gamma'+\beta'}, \text{ etc.},\quad \frac{s\gamma+\beta}{s\gamma'+\beta'}\cdots\cdots\left(\frac{\delta}{\delta'}\right),$$

etc.

Quant à la nature de ces fractions, il est facile de prouver, comme nous l'avons fait par rapport aux fractions principales,

1°. que chacune de ces fractions sera déjà réduite à ses moindres termes; d'où il suit que comme les numérateurs et les dénominateurs vont en augmentant, ces fractions se trouveront toujours exprimées par des termes plus grands à mesure qu'elles s'éloigneront du commencement de la série.

2°. Que chaque fraction de la première série approchera de la valeur de x plus qu'aucune autre fraction quelconque qui serait moindre que cette valeur, et qui aurait un dénominateur plus petit que celui de la même fraction ; et que, de même, chaque fraction de la seconde série approchera plus de la valeur de x que ne pourrait faire toute autre fraction qui serait plus grande que cette valeur, et qui aurait un dénominateur plus petit que celui de la même fraction.

En effet, s'il y avait une fraction $\frac{\mu}{\mu'}$ comme; plus petite que la valeur de x, et en même temps plus approchante de cette valeur que la fraction $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, par exemple, en supposant $3\beta'+\alpha'>\mu'$, il faudrait (à cause que la fraction $\frac{\beta}{\beta'}$ est plus grande que la valeur dont il s'agit) que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvât entre les deux quantités $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$;
donc la quantité $\frac{\mu}{\mu'}-\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ devrait être

$$<\frac{\beta}{\beta'}-\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}<\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\beta'(3\beta'+\alpha')}<\frac{1}{\beta'(3\beta'+\alpha')};$$

donc il faudrait que $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)$ fût $<\frac{\mu'}{\beta'}<1$; ce qui ne se peut.

Au reste, il peut arriver qu'une fraction d'une série n'approche pas si près qu'une autre dé l'autre série, quoique conçue en termes moins simples; mais cèla n'àrrive jamais quand la fraction qui a le plus grand dénominateur est une fraction principale (n° 23).

CHAPITRE IV.

Applications des Méthodes précédentes à quelques Exemples.

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que *Newton* a résolue par sa méthode, savoir :

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

le commence par chercher par les formules du n° 8 l'équation en v qui résulte de cette équation; je fais donc $m=3,\ \mathrm{A}=0,\ \mathrm{B}=-2,\ \mathrm{C}=5$*;* j'aurai

$n=\frac{3\cdot 2}{2}=3,\ \mathrm{A}_1=0, \mathrm{A}_2=4, \mathrm{A}_3=15,\ \mathrm{A}_4=8, \mathrm{A}_5=50, \mathrm{A}_6=91$;

donc $a_1=12,\ a_2=72,\ a_3=-1497$, et de là $a=12,\ b=36,\ c=-643$; de sorte que l'équation cherchée sera

$$v^3-12v^2+36v+643=0.$$

Comme cette équation n'a pas les signes alternativement positifs et négatifs, j'en conclus sur-le-champ que l'équation proposée a nécessairement deux racines imaginaires, et par conséquent une seule réelle (n° 16).

Ainsi les nombres à substituer à la place de *x,* sèront les nombres · naturels 0, 1, 2, 3, etc. (n° 6).

Je suppose d'abord *x* positif, et je cherche la limite des valeurs de *x* par les méthodes du n° 12, je trouve $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}<3$; ainsi 3 sera la limite cherchée en nombres entiers; de sorte qu'il suffira de faire successivement $x=0,=1,=2,=3$; ce qui donnera ces résultats: $-5,-6,-1,+16$; d'où l'on voit que la racine réelle de l'équation proposée, sera entre les nombres 2 et 3; et qu'ainsi 2 sera la valeur entière la plus approchée de cette racine (n° 2). Je fais maintenant, suivant la méthode du chapitre III, $x=2+\frac{1}{y}$, j'ai, en substituant et ordonnant les termes par rapport à *y,* l'équation

$$y^3-10y^2-6y-1=0,$$

dans laquelle j'ai changé les signes pour rendre le premier terme positif.

Cette équation aura donc nécessairement une seule racine plus grande que l'unité (n°19); de sorte que pour en trouver la valeur approchée, a n'y aura qu'à substituer les nombres 0, 1, 2, 3, etc. jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signes contraires.

Pour ne pas faire beaucoup de substitutions inutiles, je remarque qu'en faisant $y=0$, j'ai un résultat négatif, et qu'en faisant $y=10$, le résultat est encore négatif; je commence donc par le nombre 10, et je fais successivement $y=10,=11,$ etc., je trouve d'abord les résultats $-61,+54,$ etc.; d'où je conclus que la valeur approchée de y est 10; donc $q=10$.

Je fais donc $y=10+\frac{1}{z}$, j'aurai l'équation

$$61z^3-94z^2-20z-1=0;$$

et supposant successivement $z=1,=2,$ etc., j'aurai les résultats
$-54,\ +71,$ etc.; donc $r=1$.
Je fais encore $z=1+\frac{1}{u}$, J' aurai

$$54u^3+25u^2-89u-61=0;$$

et supposant $u=1,=2$, j'aurai les résultats $-71,\ +293,$ etc.; donc $s=1$, et ainsi de suite.

En continuant de cette manière, on trouvera les nombres 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc., de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x=2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.};}}}}$$

d'où l'on tirera les fractions (n° 23)

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{etc.},$$

lesquelles seront alternativement plus petites et plus grandes que la valeur de x.

La dernière fraction $\frac{16415}{7837}$ est plus grande que la racine cherchée; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{(7837)^2}$ (n° 23, 2°.), c'est-à-dire moindre que 0,0000000163; donc, si on réduit la fraction $\frac{16415}{7837}$ en fraction décimale, elle sera exacte jusqu'à la septième décimale: or, en faisant la division, on trouve 2,0845514865….. ; ainsi la racine cherchée sera entre les nombres 2,09455149 et 2,09455147.

Newton a trouvé par sa méthode la fraction 2,09455147 *(voyez* sa Méthode des suites infinies); d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un résultat fort exact : mais on aurait tort de se promettre toujours une pareille exactitude.

26. Quant aux deux autres racines de la même équation, nous avons déjà vu qu'elles doivent être imaginaires : néanmoins, si on voulait en trouver la valeur, on le pourrait par la méthode du n° 17.

Pour cela, on reprendra l'équation en v trouvée ci-dessus, et en y changeant v en $-w$, et changeant ensuite tous les signes, on aura

$$w^3+12w^2+36w-643=0,$$

et il ne s'agira plus que de chercher üne racine réelle et positive de cette équation. Or, puisqu'elle a son dernier terme négatif, elle aura nécessairement une telle racine, dont on pourra trouver la valeur entière la plus approchée par la substitution successive des nombres naturels
0, 1, 2, 3, etc. (n° 3). En effet, en faisant $w=5$, on aura le résultat −38, et en faisant $w=6$, on aura +221; ainsi la valeur entière la plus approchée de la racine positive de cette équation sera 5.

On fera donc maintenant $w=5+\frac{1}{u}$, et en substituant, on aura, après avoir changé les signes,

$$38u^3-231u^2-27u-1=0.$$

Faisant successivement $u=0,1,2,$ etc., on trouvera pour $u=6$ et $u=7$ les résultats $-271,\ +1525$; donc 6 sera la valeur entière approchée de u.

On fera donc $u=6+\frac{1}{x}$, et l'on aura, en substituant et changeant les signes,

$$271x^3-1305x^2-453x-38=0.$$

En faisant successivement $x=0,\ 1,\ 2,$ etc., on trouvera des résultats négatifs jusqu'à la supposition de $x=6$, qui donne 8837 pour résultat;
de sorte que 5 sera la valeur entière approchée de x.

On fera donc $x=5+\frac{1}{y}$, substituant et réduisant, on aura

$$1053y^3-6822y^2-2760y-271=0,$$

et l'on trouvera 6 pour la valeur approchée de y, et ainsi de suite.

De cette manière, on approchera de plus en plus de la valeur de w, laquelle se trouvera exprimée par la fraction continue

$$w=5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\text{etc.}}}}$$

d'où l'on tire ces fractions particulières

$$\frac{5}{1},\ \frac{31}{6},\ \frac{160}{31},\ \frac{991}{192},\ \text{etc.}$$

Connaissant ainsi *w,* on aura (n° 17) $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$; ainsi on connaîtra β.

On substituera maintenant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x dans l'équation proposée ; et faisant deux équations séparées des termes tout réels, et de ceux qui sont affectés de $\sqrt{-1}$, on aura les deux équations

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0,$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0.$$

On cherchera le plus grand commun diviseur de ces deux équations, et on poussera seulement la division jusqu'à ce que l'on arrive à un reste où α ne se trouve qu'à la première puissance (numéro cité); ce reste sera $-\frac{8\beta^2+4}{3}\alpha - 5$, lequel étant fait $= 0$, donnera

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2+1)}.$$

Ainsi on aura la valeur des deux racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ de l'équation proposée.

27. Prenons pour second exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On aura encore ici $m = 3$, et par conséquent $n = 3$; ensuite $\mathrm{A} = 0,\ \mathrm{B} = -7,\ \mathrm{C} = -7$; d'où $\mathrm{A}_1 = 0,\ \mathrm{A}_2 = 14,\ \mathrm{A}_3 = -21,\ \mathrm{A}_4 = 98,\ \mathrm{A}_5 = -245,\ \mathrm{A}_6 = 833$; et de là, $a_1 = 42,\ a_2 = 882,\ a_3 = 18669,$ et enfin $a = 42,\ b = 441,\ c = 49;$ de sorte que l'équation en v sera

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Puisque les signes de cette équation sont alternatifs, c'est une marque que la proposée peut avoir toutes ses racines réelles (n° 16); et comme d'ailleurs cette équation n'est point divisible par *v*, il s'ensuit que l'équation en *x* n'aura point de racines égales (n° 15).

On fera maintenant (n° 11) $v = \frac{1}{y}$, et ordonnant l'équation par rapport à *y,* on aura

$$y^3 - 9y^2 + \tfrac{42}{49}y - \tfrac{1}{49} = 0.$$

Le plus grand coefficient négatif étant 9, on pourrait prendre $l = 10$ (n° 12); mais on peut trouver une limite plus rapprochée en cherchant le plus petit nombre entier qui rendra positives ces trois quantités

$$l^3-9l^2+\tfrac{42}{49}l-\tfrac{1}{49},$$
$$3l^2-18l+\tfrac{42}{49},$$
$$3l-9\ ;$$

et on trouvera que *l=9* satisfait à ces conditions; de sorte qu'on aura $k=3$ (n° 11), et par conséquent $\varDelta=\frac{1}{3}$.

On mettra donc (n° 13, 2°.) dans l'équation proposée $\frac{x}{3}$ à la place de *x,* ce qui la réduira à celle-ci:

$$x^3-63x+189=0,$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à substituer les nombres naturels 0, 1, *2,* etc. à la place de *x.* Or, suivant la méthode du n° 13 (3°.), on trouve que la série des résultats ne contient que deux variations de signes, lesquelles répondent à $x=4,\ 5,\ 6$; de sorte que l'équation proposée n'aura que deux racines positives, lesquelles tomberont, l'une entre les nombres $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, et l'autre entre les nombres $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$; d'où l'on voit que la valeur entière la plus approchée de l'une et de l'autre sera 1 (n° 2).

Faisons maintenant *x* négatif pour avoir aussi les racines négatives (n° 4), et l'équation se changera en

$$x^3-7x-7=0\ ,$$

laquelle ayant son dernier terme négatif, aura sûrement une racine positive (n° 3), et il est clair qu'elle n'en aura qu'une seule, puisque nous avons déjà trouvé les deux autres; ainsi on pourra d'abord trouver la valeur entière approchée de cette racine, en substituant à la place de *x* les nombres 0, 1, 2, etc. jusqu'à ce que l'on rencontre deux substitutions qui donnent des résultats de signes contraires (n° 3) : or, on trouve que ces substitutions sont $x=3$ et $x=4$; de sorte que 3 sera la valeur entière la plus approchée de *x* dans l'équation précédente, et par conséquent de $-x$ dans la proposée.

Ayant ainsi trouvé que l'équation a trois racines réelles, deux positives et une négative, et ayant trouvé en même temps leurs valeurs entières approchées, on pourra approcher autant qu'on voudra de la vraie valeur de chacune d'elles par la méthode du chapitre III. Considérons d'abord les racines positives, et faisons dans l'équation $x^3-7x+7=0,\ x=1+\frac{1}{y}$, elle deviendra celle-ci:

$$y^3-4y^2+3y+1=0,$$

laquelle, à cause que 1 est la valeur approchée de deux racines, aura nécessairement (n° 19, 2°.) deux racines plus grandes que l'unité.

J'essaie d'abord si je peux trouver les valeurs approchées de ces deux racines par la substitution des nombres entiers 0, 1, 2, etc., et comme il n'y a que le terme $4y^2$ de négatif, il suffira (n° 13, 1 °.) de pousser les substitutions jusqu'à ce que l'on ait $y^3 =$ ou $> 4y^2$; c'est-àdire jusqu'à $y=4$: or, en faisant y=0, 1, 2, 3, 4, j'ai les résultats $1,\ 1, -1,\ 1,\ 13$; d'où je conclus que les racines cherchées sont, l'une entre les nombres 1 et 2, et l'autre entre les nombres 2 et 3; de sorte que les valeurs approchées de y seront 1 et 2.

On fera donc, 1°. $y=1+\frac{1}{z}$, et l'on aura $z^3-2z^2-z+1=0$, équation qui n'aura plus qu'une racine réelle plus grande que l'unité (n° 19, 2°.); ainsi on supposera successivement $z=1,\ 2,$ etc. jusqu'à ce que l'ou trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signes contraires : or, on trouve que $-z=2$ donne -1, et $z=3$ donne $+7$; donc 2 sera la valeur entière approchée de z.

On fera donc $z=2+\frac{1}{u}$, et substituant, l'on aura, en changeant les signes, $u^3-3u^2-4u-1=0.$

On supposera de même $u=1,\ 2,$ etc., et l'on trouvèra que la valeur entière approchée de u sera 4.

On fera $u=1+\frac{1}{w},$ et ainsi de suite.

2°. On fera $y=2+\frac{1}{z}$, et substituant dans l'équation précédente en y, on aura, après avoir changé les signes,

$$z^3+2z^2-z-1=0;$$

cette équation n'aura, comme la précédente en z, qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité; de sorte qu'il n'y aura qu'à faire $z=1,\ 2,$ etc., ce qui donne les résultats $-1,\ 7$; d'où l'on conclut que 1 est la valeur entière approchée de z.

On fera donc $z=1+\frac{1}{u}$, et l'on aura, en changeant les signes,

$$u^3-3u^2-4u-1=0;$$

d'où l'on trouvera, de la même manière que ci-dessus, que la valeur entière approchée de u sera 4.

Ainsi on fera $u=4+\frac{1}{w}$, et ainsi de suite

Donc les deux racines positives de l'équation proposée seront

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\text{etc.},}}}$$

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}$$

D'où l'on tirera, si l'on veut, des fractions convergentes, comme dans l'exemple précédent (n^{os} 23 et 24).

Pour trouver maintenant la valeur approchée de la racine négative on reprendra l'équation $x^3-7x-7=0$, dans laquelle on a déjà trouvé que la valeur entière approchée est 3; ainsi on fera $x=3+\frac{1}{y}$, ce qui donnera, en changeant les signes,

$$y^3-20y^2-9y-1=0;$$

et comme cette équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle plus grande que 1 (n^o 19, 2°.), on en trouvera la valeur approchée en faisant $y=1,\ 2,$ etc. jusqu'à ce que l'on rencontre deux résultats consécutifs de signes contraires, ce qui arrivera lorsque $y=20,\ 21$; de sorte que la valeur dont il s'agit sera 20.

On fera donc $y=20+\frac{1}{u}$, etc.

De cette manière, la racine négative de l'équation proposée sera

$$x=-3-\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{3+\text{etc.}}}$$