CHAPTER V.

On Imaginary Roots.

FIRST ARTICLE.

The procedure to recognise if an equation has imaginary roots.

28. I have given in § 8, the general formulae for deducing from any equation another equation whose roots shall be the squares of the differences between the roots of the proposed equation. Now, if all the roots of an equation are real, it is evident that the squares of their differences will all be positive; consequently, the equation of which these squares shall be the roots, and which we will call henceforth, for brevity, *the equation of the differences ;* this equation, I say, having positive roots only, necessarily will have alternating positive and negative signs; such that, if this condition cannot be found, this will be a sure indication that the primitive equation by necessity has imaginary roots.

29. Further, as imaginary roots always go in pairs, and as they can always be put into the form $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \alpha$ and β being real quantities (see note IX); it follows that the différence of two corresponding imaginary roots will be necessarily of the form $2\beta\sqrt{-1}$; such that the square of this difference will be $-4\beta^2$, that's to say, a real negative quantity. Hence, if the proposed equation has imaginary roots, it will be necessarily that the *equation of the differences* shall have at least as many real negative roots as there will be had pairs of imaginary roots in the proposed equation.

30. But it is shown (see note VIII) that any equation is known to have no more positive roots than it has changes of signs, nor more negative roots than it has successions of the same sign. Hence, the number of imaginary roots in some given equation will never be able to be greater than twice that of the successions of the same sign in the differences equation.

31. From that, and from what we have said above, it follows that if the equation of the differences has all its terms alternately positive and negative, the primitive equation will have necessarily all its terms real, otherwise necessarily it will have some imaginary roots. Hence we will be able to judge always, by this means, whether or not some imaginary roots are given in some equation.

ARTICLE II.

Where the rules are given in certain cases to determine the number of imaginary roots of equations.

32. The real roots of some equation shall be $a, b, c, d,$ etc.,
and $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ etc. the imaginery roots; the squares of the differences of these roots will be :

$$
\begin{array}{ll}
(a-b)^2, \quad (a-c)^2, & (a-d)^2, \text{etc.,} \\
(b-c)^2, \quad (b-d)^2, & \text{etc.,} (c-d)^2, \text{etc.,} \\
-4\beta^2, \quad 4\delta^2, \text{etc.;} & \\
(\alpha-a+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-a-\beta\sqrt{-1})^2, \\
(\alpha-b+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-b-\beta\sqrt{-1})^2, \\
(\alpha-c+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-c-\beta\sqrt{-1})^2, \\
(\alpha-d+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-d-\beta\sqrt{-1})^2, \\
\text{etc.;} & \\
(\gamma-a+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-a-\delta\sqrt{-1})^2, \\
(\gamma-b+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-b-\delta\sqrt{-1})^2, \\
(\gamma-c+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-c-\delta\sqrt{-1})^2, \\
(\gamma-d+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-d-\delta\sqrt{-1})^2, \\
\text{etc.;} &
\end{array}
$$

which will be, as a consequence, the roots of the equation of the differences.
Let m be the degree of the proposed equation, which is equal to the number of the roots $a, b, c,$ etc., $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ etc., that of the equation of the differences will be $\frac{m(m-1)}{2}=n$ (§ 8) : p shall be the number of real roots $a, b, c,$ etc., and $2q$ that of the imaginary roots $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ etc.; such that $m=p+2q,$ it is easy to see by the preceding table that, among the n roots of the equation of the differences, in that there will be necessarily $\frac{p(p-1)}{2}$ real and positive roots, q real and negative roots, and $2q(p+q-1)$ imaginary roots.

33. Now let us make the product of all these roots, and it is seen thath the product of all the positive roots $\frac{p(p-1)}{2}$ will always be positive, that of the q negative roots will be positive or negative, following whether the number q will be even or odd, while finally the product of the $2q(p+q-1)$ imaginary roots will be always positive; in effect, these last roots being in pairs of the form $\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}\ \right)^n, \left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1}\ \right)^n$, their product pairs will be of the form $\left(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2\right)^2$, and as a consequence positive : thus the product of all these roots together also will be positive always.

Thus the whole product necessarily will be positive or negative, depending on whether q will be positive or negative.

But the last term of an equation is, as we know, equal to the product of all its roots with the sign $+$ or $-$, following which the number of roots even or odd.

Hence the last term of the equation of the differences, of which the degree is n, necessarily will be positive, if n and q are all two evens or two odds, and negative if one of these numbers is even and the other odd.

34. Now, if n and q are both even or odd, $n-q$ necessarily will be even, and if n and q are, the one even and the other odd, $n-q$ necessarily will be odd; but because $n=\frac{m(m-1)}{2}$, and $m=p+2q$, we will have $n-q=\frac{p(p-1)}{2}+2q(p+q-1)$, such that $n-q$ always will be even or odd, depending on what $\frac{p(p-1)}{2}$ will be.

Thus the last term of the equation of the differences necessarily will be positive or negative, depending on whether the number $\frac{p(p-1)}{2}$ will be even or odd, that's to say, depending on whether the number of combinations of the real roots of the proposed equation, taken in pairs, will be even or odd.

35. Supposing, 1°. that this last term shall be positive, it will be required, in this case, that $\frac{p(p-1)}{2}$ shall be even; thus either $\frac{p}{2}=2\lambda$, and $p=4\lambda$, or $\frac{p-1}{2}=2\lambda$, and $p=4\lambda+1$; from where it follows that, in this case, the number of real roots of the proposed equation will necessarily be a multiple of 4, if this number is even, that's to say, if the degree of the equaton is even, or a multiple of 4 plus 1 if the degree of the equation is odd. Hence it will be impossible that the equation shall have 2, 3, 6, or 7, etc. real roots.

2°. Supposing that the last term of the equation of the differences were negative, it will then be necessary that $\frac{p(p-1)}{2}$ shall be odd, thus either $\frac{p}{2}=2\lambda+1$, and $p=4\lambda+2$, or $\frac{p-1}{2}=2\lambda+1$, and $p=4\lambda+3$; from which it follows that, in this case the number of real roots of the proposed equation necessarily either will be multiples of 4 plus 2 if the degree of the equation is even, or of 4 plus 3 if the degree is odd. Such that it will be impossible that the equation may have in this case real roots 1, 4, 5, 8, or 9, etc.

36. Hence, by the inspection alone of the signs of the equation of the differences, we will be in a state to judge, 1°. whether all the roots of the equation proposed are real or not ; 2°. if the number of real roots is one of these : 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, etc., or rather if it is one of these : 2, 3, 6, 7, 10, 11 , etc., which will suffice to determine the number of real and imaginary roots in the equations which do not excede the fifth degree, and in all the equations where we will know in advance that the imaginary roots may not be known to be more than four.

Perhaps by extending this theory further, we may be able to find some certain rules for determining the number of real roots in equatons of any degree, the methods which we have proposed up to the present for this object being insufficiant, as these of *Newton, Maclaurin*, etc., or impractible, as these of *Stirling* and of *De Gua,* which presume the resolution of equations of lesser degrees.

ARTICLE III,

Where we apply the preceding theory to equations of the second, third, and fourth degrees.

l7. Let the equation of the second degree be proposed, as

$$x^2 - \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

the equation of the differences will be of degree $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$; and we will find by the method of § 8 that this equation will be

$$v - a = 0,$$

where we will have

$$a = \mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B}.$$

Thus these roots will be either both two real or both two imaginary; following which we will have either $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B} > 0,$ or < 0; and they will be equal when $\mathrm{A}^2 = 4\mathrm{B}.$

38. The proposed equation of the third degree shall be

$$x^3 - \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x - \mathrm{C} = 0,$$

here the equation of the differences will be of degree $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, and we will find by the same method

$$v^3 - av^2 + bv - c = 0,$$
$$a = 2\left(A^2 - 3B\right),$$
$$b = \left(A^2 - 3B\right)^2,$$
$$c = \frac{4\left(A^2-3B\right)\left(B^2-3AC\right)-(9C-AB)^2}{3}.$$

Thus, so that the roots may be all real, it will be required that we may have,

$$1°.\ A^2 - 3B > 0,$$
$$2°.\ 4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0.$$

If one of these two conditions is missing, the equation will have two imaginary roots.

39. Now the proposed equation shall be of the fourth degree

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

the second term of which has vanished for more simplicity ; the degree of the equation of the differences will be $\frac{4\cdot3}{2} = 6$; such that this equation will be

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0,$$

where we will find by the same method

$$a = -8B,$$
$$b = 22B^2 + 8D,$$
$$c = -\ 18B^3 + I6BD + 26C^2,$$
$$d = 17B^4 + 24BD - 7\cdot16D^2 + 3\cdot16BC^2,$$
$$e = -\ 4B^5 - 2\cdot27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3\cdot4^3BD^2 - 2.4^2B^3D,$$
$$f = 4^4D^3 - 2^3\cdot4^2B^2D^2 + 4^2\cdot3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4.$$

Thus, 1°, if the quantity

$$4^4D^3 - 2^3\cdot4^2B^2D^2 + 4^2\cdot3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$$

is negative, then the proposed equation will have necessarily two real roots and two imaginary roots; but if this quantity is positive, then the proposed equation will have all its roots real, or all imaginary.

Now, all the roots will be real if the values of all the coefficients *a, b, c, d, e,f* are positive; thus they will be all imaginary if the last coefficient f being positive, some one of the others is found negative.

Supposing thus that the coefficient f were positive, so that we may have

$$4^4\mathrm{D}^3 - 2^3{\cdot}4^2\mathrm{B}^2\mathrm{D}^2 + 4^2{\cdot}3^2\mathrm{C}^2\mathrm{BD} + 4^2\mathrm{B}^4\mathrm{D} - 4\mathrm{C}^2\mathrm{B}^3 - 3^3\mathrm{C}^4 > 0,$$

and we will find that all the other coefficient will be positive also if we have at the same time

$$\mathrm{B} < 0, \text{ and } \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{D} > 0,$$

and that on the contrary some one of these necessarily will become negative if

$$\mathrm{B} > 0, \text{ or } \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{D} < 0.$$

Hence, in the first case, all four roots of the equation will be real, and in the second case all will be imaginary.

Likewise we may be able to find the conditions which render all the roots of equations of the fifth degree real, or in part real and in part imaginary; but as, in that case, the equation of the differences shall rise to the $\frac{5\cdot4}{2} = 10$ th degree, the calculation may become extremely prolix and troublesome.

ARTICLE IV.

On the procedure for finding the imaginary roots of an equation.

40. We have seen in the 2nd article that each of the imaginary roots corresponding to $\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1}$ necessarily give in the equation of the differences a real negative root $-4\beta^2$; from which it follows in searching the real negative roots of this equation, necessarily we will find the values of $-4\beta^2$, from which we will have that of β, with the aid of which we will then be able to find the corresponding values of α, as we have demonstrated in §17; such that we will have, by this means, the expression of each imaginary root of the proposed equation ; that which is often necessary, especially in the integral calculus. Here is only one observation which may be able to serve to shed a greater light on this theory, and to dispel at the same time the doubts that we may have formed on its correctness and generality.

41. When the real parts α, γ, etc. of the imaginary roots

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},$$
$$\alpha-\beta\sqrt{-1},$$
$$\gamma+\delta\sqrt{-1},$$
$$\gamma-\delta\sqrt{-1},$$
etc.

are unequal just as they are with the real roots a, b, c, etc., it is evident, by the table of the second article, that the equation of the differences will only have these absolute negative real roots : $-4\beta^2,\ -4\delta^2,$ etc.; such that the number of these roots will be the same as that of the pairs of imaginary roots in the proposed equation.

But if it may happen that, among the quantities α, γ, etc., equal quantities are found among these, or these may be equal to the quantities a, b, c, etc., then the equation of the differences necessarily will have more negative roots than that proposed of the pairs of imaginary roots.

Indeed, let $a=\alpha$, the two imaginary roots will become $(\alpha-a+\beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-a-\beta\sqrt{-1})^2$, will become $-\beta^2$, et $-\beta^2$, and as a consequence real negative roots.

Such that if the proposed equation only contains, for example, the two imaginary roots $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, the equation of the differences will contain, in the case $a=\alpha$, as well as the real negative root $-4\beta^2$, also these two : $-\beta^2,\ -\beta^2$, equal to each other.

From which we can see that if the equation of the differences has three real negative roots, two of which are equal to each other, then the proposed equation can have either three couples of imaginary roots, or simply one.

If the proposed equation contains four imaginary roots $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ then the equation of the difference will contain at first the two real negative roots $-4\beta^2,\ -4\delta^2$; then if $\alpha=a$, it will again contain these two $-\beta^2,\ -\beta^2$; if $\gamma=b$, it will likewise contain these two others : $-\delta^2,\ -\delta^2$; finally , if we had $\alpha=\gamma$, then these four imaginary roots

$$\left[\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1}\right]^2,\ \left[\alpha-\gamma-(\beta-\delta)\sqrt{-1}\right]^2$$
$$\left[\alpha-\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1}\right]^2,\ \left[\alpha-\gamma-(\beta+\delta)\sqrt{-1}\right]^2$$

will become

$$-(\beta-\delta)^2,\ -(\beta-\delta)^2,\ -(\beta+\delta)^2,\ -(\beta+\delta)^2,$$

that's to say real negative roots, or two equal pairs.

42. From that it is easy to conclude,
1°. That when all the real negative roots of the equation of the differences are unequal to each other, then the proposed equation necessarily will have just as many pairs of imaginary roots that it will have of these roots.

And , in this case, calling any one of these roots $-\omega$, at first we will have $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{2}$; this value then being substituted into the two equations (H) of §17, we will look for their greatest common denominator, on extending the division until we come to a remainder or α cannot be found more than to the first dimension ; and making this equal to zero, we will have the value of α corresponding to that of β; by this means, each negative root $-\omega$ will give two imaginary roots $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, and $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

2°. Because if, among the real negative roots of the equation of the differences, it has there some equal to each other, then each unequal root, if it has any, will give always as in the preceding case, a pair of imaginary roots; but each pair of equal roots will be able to give also two pairs of imaginary roots, or not to give any; hence the two equal roots will give either four imaginary roots or none; three equal roots will give either six or two roots; four equal roots will give either eight or four imaginary roots, and hence so forth.

43. Now there may be, for example, $-\omega$, and $-\omega$ two equal negative roots of the equation of the differences, we will make $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{2}$ as above; and substituting this value of β into the equations (H) of the number cited, we will look for their common divisor only in forcing the division until we arrive at a remainder where α can be found only to the second dimension, because the value of β is double, as we have already noted in the place indicated.

Hence, making this remainder equal to zero, we will have an equation of the second degree for the determination of α, which will have, as a consequence, either two real or two imaginary roots.

In the first case, calling the two roots α' and α'', we will have the four imaginary roots $\alpha' + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' - \beta\sqrt{-1},\ \alpha'' + \beta\sqrt{-1},\ \alpha'' - \beta\sqrt{-1}$; in the second case, the values of α being imaginary contrary to the hypothesis, this will be an indication that the two equal roots $-\omega,\ -\omega$ will give no imaginary roots of the proposed equation.

44. If there were in the equation of the differences three equal negative roots $-\omega,\ -\omega,\ -\omega$, then making $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{2}$, on continuing the division of the equations only until we may come to a remainder where α is itself found to the third dimension ; such that this remainder being made $= 0$, we will have an equation of the third degree in α, from which we can extract, either three real values of α, or one real and two imaginary : in the first case, we will have six imaginary roots ; in the second, we will have only two,

the imaginary values of α before always to be rejected as contrary to the hypothesis, and so on thus.

CHAPITRE V.

Sur les Racines imaginaires.

ARTICLE PREMIER.

Sur la manière de reconnaître si une équation a des racines imaginaires.

28. J'ae donné, dans le n° 8, des formules générales pour déduire d'une équation quelconque une autre équation dont les racines soient les carrés des différences entre les racines de l'équation proposée. Or, si toutes les racines d'une équation sont réelles, il est évident que les carrés de leurs différences seront tous positifs; par conséquent, l'équation dont ces carrés seront les racines, et que now appellerons dorénavant, pour abréger, *équation des différences;* cette équation, dis-je, n'ayant que des racines positives, aura nécessairement les signes de ses termes alternativement positifs et negatifs; de sorte que, si cette condition n'a pas lieu, ce sera une marque sûre que l'équation primitive a nécessairement des racines imaginaires.

29. De plus, comme les racines imaginaires vont toujours deux à deux, et qu'elles peuvent se mettre sous la form $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \alpha$ et β étant des quantités réelles (voyez la Note IX); il s'ensuit que la différence de deux racines imaginaires correspondantes sera nécessairement de la forme $2\beta\sqrt{-1}$; de sorte que le carré de cette différence sera $-4\beta^2$, c'est-à-dire une quantité réelle et négative. Donc, si l'équation proposée a des racines imaginaires, il faudra nécessairement que l'équation *des différences* ait au moins autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans la proposée.

30. Mais il est démontré (voyez la Note VIII) qu'une équation quelconque ne saurait avoir plus de racines positives qu'elle n'a de changemens de signes, ni plus de racines négatives qu'elle n'a de successions du même signe. Donc, le nombre des racines imaginaires dans une équation quelconque ne pourra jamais être plus grand que le double de celui des successions du même signe dans l'équation des différences.

31. De là, et de ce que nous avons dit ci-dessus, il suit que si l'équation des différences a tous ses termes alternativement positifs et négatifs, l'équation primitive aura nécessairement toutes ses racines réelles, si non elle aura nécessairement des racines imaginaires. Ainsi on pourra toujours juger, par ce moyen, s'il y a ou non des racines imaginaires dans une équation quelconque donnée.

ARTICLE II,

Où l'on donne des règles pour déterminer dans certains cas le nombre des racines imaginaires des équations.

32. Soient *a, b, c, d,* etc. les racines réelles d'une équation quelconque, et $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ etc. les racines imaginaires; les carrés des différences de ces racines seront

$$\begin{array}{ll}
(a-b)^2, \quad (a-c)^2, & (a-d)^2, \text{etc.},\\
(b-c)^2, \quad (b-d)^2, & \text{etc.}, (c-d)^2, \text{etc.},\\
-4\beta^2, \quad 4\delta^2, \text{etc.}; & \\
(\alpha-a+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-a-\beta\sqrt{-1})^2,\\
(\alpha-b+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-b-\beta\sqrt{-1})^2,\\
(\alpha-c+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-c-\beta\sqrt{-1})^2,\\
(\alpha-d+\beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha-d-\beta\sqrt{-1})^2,\\
\text{etc.}; & \\
(\gamma-a+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-a-\delta\sqrt{-1})^2,\\
(\gamma-b+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-b-\delta\sqrt{-1})^2,\\
(\gamma-c+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-c-\delta\sqrt{-1})^2,\\
(\gamma-d+\delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma-d-\delta\sqrt{-1})^2,\\
\text{etc.}; &
\end{array}$$

lequels seront, par conséquent, les racines de l'équation des différences.
Soit *m* le degré de l'équation proposée, qui est égal au nombre des racines *a, b, c,* etc., $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ etc., celui de l'équation des différences sera $\frac{m(m-1)}{2}=n$ (n° 8) : soit *p* le nombre des racines réelles *a, b, c,* etc., et $2q$ celui des racines imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \gamma-\delta\sqrt{-1},$ etc.; en sorte que $m=p+2q,$ il est facile de voir par la table précédente que, parmi les *n* racines de l'équation des différences, il y en aura nécessairement $\frac{p(p-1)}{2}$ de réelles et positives, *q* de réelles et négatives, et $2q(p+q-1)$ d'imaginaires.

33. Qu'on fasse maintenant le produit de toutes ces racines, et il est visible que le produit des $\frac{p(p-1)}{2}$ racines positives sera toujours positif, que celui des *q* racines négatives sera positif ou négatif, suivant que le nombre *q* sera pair ou impair, qu'enfin le produit des $2q(p+q-1)$ racines imaginaires sera toujours positif; en effet, ces dernières racines

étant deux à deux de la forme $\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}\right)^n, \left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1}\right)^n$, leurs produits deux à deux seront de la forme $\left(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2\right)^2$, et par conséquent positifs : donc le produit de toutes ces racines ensemble sera toujours aussi positif.

Donc le produit total sera nécessairement positif ou négatif, suivant que q sera pair ou impair.

Mais le dernier terme d'une équation est, comme l'on sait, égal au produit de toutes ses racines avec le signe + ou −, suivant que le nombre des racines est pair ou impair.

Donc le dernier terme de l'équation des différences, dont le degré est n, sera nécessairement positif, si n et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs, et négatif si l'un de ces nombres est pair et l'autre impair.

34. Or, si n et q sont tous deux pairs ou impairs, $n-q$ sera nécesairement pair, et si n et q sont, l'un pair, et l'autre impair, $n-q$ sera nécessairement impair; mais à cause de $n=\frac{m(m-1)}{2}$, et de $m=p+2q$, on a $n-q=\frac{p(p-1)}{2}+2q(p+q-1)$, de sorte que $n-q$ sera toujours pair ou impair, suivant que $\frac{p(p-1)}{2}$ le sera.

Donc le dernier terme de l'équation des différences sera nécessairement positif ou négatif, suivant que le nombre $\frac{p(p-1)}{2}$ sera pair ou impair, c'est-à-dire, suivant que le nombre des combinaisons des racines réelles de la proposée, prises deux à deux, sera pair ou impair.

35. Supposons, 1°. que ce dernier terme soit positif, il faudra, en ce cas, que $\frac{p(p-1)}{2}$ soit pair; donc ou $\frac{p}{2}=2\lambda$, et $p=4\lambda$, ou $\frac{p-1}{2}=2\lambda$, et $p=4\lambda+1$; d'où il suit que, dans ce cas, le nombre des racines réelles de la proposée sera nécessairement multiple de 4, si ce nombre est pair, c'est-à-dire si le degré de l'équation est pair, ou multiple de 4 plus 1 si le degré de l'équation est impair. Ainsi il sera impossible que l'équation ait 2, ou 3, ou 6, ou 7, etc. racines réelles.

2°. Supposons que le dernier terme de l'équation des différences soit négatif, il faudra alors que $\frac{p(p-1)}{2}$ soit impair, donc ou $\frac{p}{2}=2\lambda+1$, et $p=4\lambda+2$, ou $\frac{p-1}{2}=2\lambda+1$, et $p=4\lambda+3$; d'où il suit que, dans ce cas le nombre des racines réelles de la proposée sera nécessairement multiple de 4 plus 2 si le degré de l'équation est pair, ou multiple de 4 plus 3 si ce degré est impair. De sorte qu'il sera impossible que l'équation ait en ce cas 1, ou 4, ou 5, ou 8, ou 9, etc. racines réelles.

36. Ainsi, par l'inspection seule des sigues de l'équation des différences, on sera en état de juger, 1°. si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles ou non; 2°. si le nombre des racines réelles est un de ceux-ci: 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, etc., ou bien s'il est un de ceux-ci : 2, 3, 6, 7, 10, 11 , etc., ce qui suffira pour déterminer le nombre des racines réelles et des imaginaires dans les équations qui ne passent pas le cinquième degré, et

dans toutes les équations où l'on saura d'avance que les racines imaginaires ne sauraient être plus de quatre.

Peut-étre qu'en poussant plus loin cette théorie, on pourrait trouver des règles sûres pour déterminer le nombre des racines réelles dans les équations de degrés quelconques, les méthodes que l'on a proposées jusqu'à présent pour cet objet étant ou insuffisantes, comme celles de *Newton, Maclaurin*, etc., ou impraticables, comme celles de *Stirling* et de *De Gua,* qui supposent la résolution des équations des degrés inférieurs.

ARTICLE III,

Où l'on applique la théorie précédente aux équations des second; troisième et quatrième degrés.

l7. Soit l'équation proposée du second degré, comme

$$x^2 - \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

l'équation des différences sera du degré $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$; et on trouvera par la méthode du n° 8 que cette équation sera

$$v - a = 0,$$

où 1'on aura

$$a = \mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B}.$$

Ainsi les racines seront toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires; suivant que l'on aura $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B} > 0,$ ou < 0 ; et elles seront égales lorsque $\mathrm{A}^2 = 4\mathrm{B}.$

38. Soit proposée l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x - \mathrm{C} = 0,$$

l'équation des différences sera ici du degré $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$, et on trouvera par la même méthode

$$v^3 - av^2 + bv - c = 0,$$
$$a = 2\left(\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{B}\right),$$
$$b = \left(\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{B}\right)^2,$$
$$c = \frac{4\left(\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{B}\right)\left(\mathrm{B}^2 - 3\mathrm{AC}\right) - \left(9\mathrm{C} - \mathrm{AB}\right)^2}{3}.$$

Donc, pour que les racines soient toutes réelles, il faudra que l'on ait,

$1°.\ A^2 - 3B > 0,$

$2°.\ 4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0.$

Si l'une de ces deux conditions manque, l'équation aura deux racines imaginaires.

39. Soit maintenant proposée l'équation générale du quatrième degré

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

dont le second terme est évanoui pour plus de simplicité; le degré de l'équation des différences sera $\frac{4\cdot3}{2} = 6$; de sorté que cette équation

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0,$$

où l'on trouvera par la même méthode

$$\begin{aligned}
&a = -8B,\\
&b = 22B^2 + 8D,\\
&c = -\ 18B^3 + I6BD + 26C^2,\\
&d = 17B^4 + 24BD - 7\cdot16D^2 + 3\cdot16BC^2,\\
&e = -\ 4B^5 - 2\cdot27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3\cdot4^3BD^2 - 2.4^2B^3D,\\
&f = 4^4D^3 - 2^3\cdot4^2B^2D^2 + 4^2\cdot3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4.
\end{aligned}$$

Donc, 1°. si la quantité

$$4^4D^3 - 2^3\cdot4^2B^2D^2 + 4^2\cdot3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$$

est négative, la proposée aura nécessairement deux racines réelles et deux imaginaires; mais si cette quantité est positive, alors la proposée aura toutes ses racines réélles ou toutes imaginaires.

Or, toutes les racines seront réelles si les valeurs de tous les coefficiens *a, b, c, d, e,f* sont positives; donc elles seront toutes imaginaires si le dernier coefficient *f* étant positif, quelqu'un des autres se trouve négatif.

Supposons donc le coefficient *f* positif, en sorte que l'on ait

$$4^4D^3 - 2^3\cdot4^2B^2D^2 + 4^2\cdot3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4 > 0,$$

et on trouvera que tous les autres coefficiens seront aussi positifs si l'on a en même temps

$$B < 0, \text{ et } B^2 - 4D > 0,$$

et qu'au contraire quelqu'un d'eux deviendra nécessairement négatif si

$$B > 0, \text{ ou } B^2 - 4D < 0.$$

Ainsi, dans le premier cas, les quatre racines de l'équation seront toutes réelles , et dans le second elles seront toutes imaginaires.

On pourrait de même trouver les conditions qui rendent les racines des équations du cinquième degré toutes réelles, ou en partie réelles et en partie imaginaires; mais comme, dans ce cas, l'équation des différences monterait au degré $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$, le calcul deviendrait extrêmement prolixe et embarrassant.

ARTICLE IV.

Sur la manière de trouver les racines imaginaires d'une équation.

40. Nous avons vu dans l'article II^e que chaque couple de racines imaginaires correspondantes $\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1}$ donne nécessairement dans l'équation des différences une racine réelle négativé $-4\beta^2$; d'où il suit qu'en cherchant les racines réelles négatives de celle équation, on trouvera nécessairement les valeurs de $-4\beta^2$, d'où l'on aura celle de β à l'aide desquelles on pourra ensuite trouver les valeurs correspondantes de α, comme nous l'avons enseigné dans le n^o 17; de sorte qu'on aura, par ce moyen, l'expression de chacque racine imaginaire de l'équation proposée; ce qui est souvent nécessaire, surtout dans le calcul intégral. Voici seulement une observation qui peut servir à répandre un plus grand jour sur cette théorie, et à dissiper en même temps lès doutes qu'on pourrait se former sur son exactitude et sa généralité.

41. Lorsque les parties réelles α, γ, etc. des racines imaginaires

$$\begin{aligned}&\alpha + \beta\sqrt{-1},\\ &\alpha - \beta\sqrt{-1},\\ &\gamma + \delta\sqrt{-1},\\ &\gamma - \delta\sqrt{-1},\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

sont inégales tant entre elles qu'avec les racines réelles *a, b, c,* etc., il est évident, par la table de l'article second ; que l'équation des différences n'aura absolument d'autres racines réelles négatives que celles-ci : $-4\beta^2,\ -4\delta^2,$ etc. ; de sorte que le nombre de ces racines sera le même que celui des couples de racines imaginaires dans l'équation proposée.

Mais s'il arrive que, parmi les quantités α, γ, etc., il s'en trouve d'égales entre elles ou d'égales aux quantités a, b, c, etc., alors l'équation des différences aura nécessairement plus de racines négatives que la proposée n'aura de couples de racines imaginaires. En effet, soit $a = \alpha$, les deux racines imaginaires $(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$, deviendront $-\beta^2,$ et $-\beta^2,$ et par conséquent réelles négatives.

De sorte que si l'équation proposée ne contient, par exemple, que les deux imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1},$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, l'équation des différences contiendra, dans le cas de $a = \alpha$, outre la racine réelle négative $-4\beta^2$, encore ces deux-ci: $-\beta^2,\ -\beta^2,$ égales entre elles.

D'où l'on voit que lorsque l'équation des différences a trois racines réelles négatives, dont deux sont égales entre elles, alors la proposée peut avoir ou trois couples de racines imaginaires, ou une seulement.

Si la proposée contient quatre racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1},\ \gamma - \delta\sqrt{-1},$ alors l'équation des différences contiendra d'abord les deux racines réelles négatives $-4\beta^2,\ -4\delta^2$; ensuite si $\alpha = a$, elle aura encore ces deux-ci: $-\beta^2,\ -\beta^2$; si $\gamma = b$, elle aura de même ces deux autres-ci : $-\delta^2,\ -\delta^2$; enfin , si on avait $\alpha = \gamma$, alors les quatre racine, imaginaires

$$\left[\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}\right]^2,\ \left[\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1}\right]^2$$
$$\left[\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}\right]^2,\ \left[\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1}\right]^2$$

deviendraient

$$-(\beta - \delta)^2,\ -(\beta - \delta)^2,\ -(\beta + \delta)^2,\ -(\beta + \delta)^2,$$

c'est-à-dire réelles négatives, ou égales deux à deux.

42. De là il est facile de conclure,

1°. Que lorsque toutes les racines réelles négatives de l'équation des différences sont inégales entre elles, alors la proposée aura nécessairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y aura de ces racines.

Et , dans ce cas, nommant $-\omega$ une quelconque de ces racines, ou aura d'abord $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{2}$ *;* cette valeur étant ensuite substituéè dans les deux équations (H) du n° 17, on cherchera leur plus grand commun diviseur, en poussant la division jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste ou α ne se trouve plus qu'à la première dimension ; et faisant ce reste égal à zéro, on aura la valeur de α correspondante à celle de β; par ce moyen, chaque racine négative $-\omega$ donnera deux racinès imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

2°. Que si, parmi les racines réelles négatives de l'équation des différences, il y en a d'égales entre elles, alors chaque racine inégale, s'il y en a, donnera toujours, comme dans le cas précédent, une couple de racines imaginaires; mais chaque couple de racines égales pourra donner aussi deux couples de racines imaginaires, ou n'en donner aucune; ainsi deux racines égales donneront ou quatre racines imaginaires ou aucune; trois racines égales donneront ou six ou deux racines; quatre racines égales donneront ou huit ou quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.

43. Or soient, par exemple, $-\omega$, et $-\omega$ deux racines égales négatives de l'équation des différences, on fera $\beta=\frac{\sqrt{\omega}}{2}$ comme ci-dessus; et substituant cette valeur de β dans les équations (H) du numéro cité, on cherchera leur commun diviseur en ne poussant la division que jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α ne se trouve qu'à la seconde dimension , à cause que la valeur de β est double, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'endroit cité.

Ainsi, faisant ce reste égal à zéro, on aura pour la détermination de α une équation du second degré, laquelle aura, par conséquent, ou deux racines réelles ou deux imaginaires. Dans le premier cas, nommant ces deux racines α' et α'', on aura les quatre racines imaginaires $\alpha'+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha'-\beta\sqrt{-1}$, $\alpha''+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha''-\beta\sqrt{-1}$; dans le second cas , les valeurs de α étant imaginaires contre l'hypothèse, ce sera une marque que les deux racines égales $-\omega$, $-\omega$ ne donneront point de racines imaginaires de la proposée.

44. S'il y avait dans l'équation des différences trois racines égales et négatives $-\omega$, $-\omega$, $-\omega$, alors faisant $\beta=\frac{\sqrt{\omega}}{2}$, on poussera seulement la division des équations jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α se trouve à la troisième dimension ; de sorte que ce reste étant fàit $=0$, on aura une équation du troisième degré en α, d'où l'on tirera, ou trois valeurs réelles de α, ou une réelle et deux imaginaires : dans le premier cas, on aura six racines imaginaires; dans le second, on n'en aura que deux, les valeurs imaginaires de α devant toujours être rejetées comme contraires à l'hypothèse, et ainsi de suite.