CHAPTER VI.

On the procedure to approximate numerical value of roots of equations by continued fractions.

We have seen in chapter III how we can reduce the roots of numerical equations to continued fractions, and how these kinds of reductions are preferable to all the others : now we are going to add here some investigations, in order to give to this theory all the generality and simplicity to which it is susceptible.

FIRST ARTICLE .

On periodic continued fractions.

45. We have already noticed in §18, that when the root sought is equal to a rational number , the continued fraction itself must necessarily be terminated ; such that we will be able to have an exact expression of the root; but there is still another case where we can also have an exact expression for the root, although the continued fraction representing that may depart to infinity. This case has to be considered when the continued fraction is periodic, that is, so that all the same denominators always return in the same order indefinitely; for example, if we may have the fraction

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\text{etc.},}}}}$$

it is clear that in calling x the value of this fraction, we shall have

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{x}},$$

which gives this equation $qx^2-pqx-p=0,$ by which we will be able to determine x*;* it would remain the same if the period had a greater number of terms, and we would always find an equation of the second degree for the determination of x . It can happen also that the continued fraction may be irregular in its first few terms, and that it only begins to become periodic after a certain number of terms ; in these cases, we will be able to find the value of the fraction in the same manner, and likewise it will depend always on an equation of the second degree ; as for example the fraction may be

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}}}$$

Calling the whole fraction *x,* and *y* the part which is periodic, to wit :

$$r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\text{etc.};}}$$

we will have

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{y,}}$$

from which we obtain $y=\frac{x-p}{1-(x-p)}$; but we have $y=r+\frac{1}{s+\frac{1}{y}}$, which gives $sy^2-rsy-r=0$; thus, substituting for *y* its value in terms of x, we will have

$$s(x-p)^2-rs(x-p)\left[1-q(x-p)\right]-r\left[1-q(x-p)\right]^2=0,$$

which equation, being expanded and ordered with regard to *x,* will rise to the second degree.

46. We see, just as we have said, that the case concerned must always occur in the sequence of the transformed equations (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), etc. of §18, as in these two will be found which will have the same roots; just as if the root *z*, for example, of equation (*c*) were the same as the root *x* of equation (*a*)*,* we will have

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{x},}$$

which is the case that we have considered above, and likewise for the others. Then, when we see that in a continued fraction, certain numbers return in the same order, then in order to assure ourselves that the fraction must really be periodic indefinitely, we will have to consider if the roots of the two equations, which have the same approximate whole number value, are exactly equal, that is to say, if the two equations have a common root; which we can recognise easily in looking for their greatest common divisor, which necessarily must include all the common roots of the two equations, if there is one : now, as we have seen that the whole continued and periodic fraction itself reduces to an equation of the second degree, it follows that the greatest common divisor of which we talk necessarily will be of the second degree.

47. Supposing then that we have recognised that among the different transformed equations, two have been found there which have the same root; then the continued fraction necessarily will be periodic indefinitely ; such that we will be able to continue that as far as wished, by repeating the same numbers only ; but seeing how we will be able to continue in this case also the sequence of converging fractions of §23, without being obliged to calculate all of these one after the other by the given formulas. For this purpose, we suppose that we may have generally

$$x=\lambda_1+\tfrac{1}{x_1},\ x_1=\lambda_2+\tfrac{1}{x_2},\ x_2=\lambda_3+\tfrac{1}{x_3},\ \text{etc.},$$

such that x being the root sought, $x_1,\ x_2,\ x_3,$ etc. shall be those of the transformed equations that we have indicated elsewhere by *y, z*, *u,* etc., and we will have

$$x=\lambda_1+\cfrac{1}{\lambda_2+\cfrac{1}{\lambda_3+\text{etc.}}}$$

Thus, making as in the cited paragraph §23:

$$\left.\begin{array}{ll} l=1, & \mathrm{L}=0, \\ l_1=\lambda_1, & \mathrm{L}_1=1, \\ l_2=\lambda_2 l_1+l, & \mathrm{L}_2=\lambda_2\mathrm{L}_1, \\ l_3=\lambda_3 l_2+l_1, & \mathrm{L}_3=\lambda_3\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1, \\ l_4=\lambda_4 l_3+l_2, & \mathrm{L}_4=\lambda_4\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_2, \\ \quad\text{etc.} & \quad\text{etc.} \end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{A}),$$

we will have these fractions converging towards x

$$\frac{l}{\mathrm{L}},\ \frac{l_1}{\mathrm{L}_1},\ \frac{l_2}{\mathrm{L}_2},\ \frac{l_3}{\mathrm{L}_3},\ \frac{l_4}{\mathrm{L}_4},\ \text{etc.}$$

Meanwhile the equation $x=\lambda_1+\frac{1}{x_1}$ will give

$$xx_1=x_1\lambda_1+1=x_1 l_1+1;$$

putting in place of x_1, in the second part of this equation, its value $x=\lambda_2+\frac{1}{x_2}$, and multiplying by x_2, we will have $xx_1x_2=(\lambda_2 l_1+l)x_2+l_1=l_2x_2+l_1$; likewise we will find, on substituting into the second part of this equation, $\lambda_3+\frac{1}{x_3}$ in place of x_2,

$$xx_1x_2x_3=l_3x_3+l_2,$$

and hence so forth.

Likewise the equation $x_1=\lambda_2+\frac{1}{x_2}$ will give

$$x_1x_2=\lambda_2x_2+1=\mathrm{L}_2x_2+\mathrm{L}_1;$$

then, substituting in the second member $\lambda_3+\frac{1}{x_3}$ in place of x_2, and multiplying by x_3, we will have

$$x_1x_2x_3=\left(\lambda_3\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1\right)x_3+\mathrm{L}_2=\mathrm{L}_3x_3+\mathrm{L}_2,$$

and hence so on.

From which it follows that we will have generally, whether the continued fraction may be periodic or not,

$$\left.\begin{aligned} xx_1x_2x_3\cdots\cdots x_\rho &= l_\rho x_\zeta+l_{\rho-1}\\ x_1x_2x_3\cdots\cdots x_\rho &= \mathrm{L}_\rho x_\rho+\mathrm{L}_{\rho-1}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{B}).$$

48. With which in place, assuming that we may have found, for example $x_{\mu+v}=x_\mu$, *i.e.* that the root of the $(\mu+v)^{\text{th}}$ transformation shall be equal to that of the μ^{th} transformation; then also there will be
$x_{\mu+v+1}=x_{\mu+1}$, $x_{\mu+v+2}=x_{\mu+2}$, etc.,$x_{\mu+2v}=x_\mu$, etc., and generally $x_{\mu+nv+\pi}=x_{\mu+\pi}$; thus also $x_{\mu+v+1}=x_{\mu+1}$, $x_{\mu+v+2}=x_{\mu+2}$, etc., and in general $x_{\mu+nv+\pi}=x_{\mu+\pi}$; such that we will have

$$x=\lambda_1+\cfrac{1}{\lambda_2+..}$$

$$\cdots+\cfrac{1}{\lambda_\mu+\cfrac{1}{\lambda_{\mu+1}+\cfrac{1}{\lambda_{\mu+2}+\ldots}}}$$

$$\cdots+\cfrac{1}{\lambda_{\mu+v}+\cfrac{1}{\lambda_{\mu+v+1}+\ldots}}$$

Now if we assume in general $\rho=\mu+nv+\pi$, it is easy to see that the two equations (B) of the preceding number will become

$$xx_1x_2\cdots\cdots x_\mu \times x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+\pi}\times(x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+v})^n$$
$$=l_\rho x_{\mu+\pi}+l_{\rho-1},$$
$$x_1x_2\cdots\cdots x_\mu \times x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+\pi}\times(x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+v})^n$$
$$=\mathrm{L}_\rho x_{\mu+\pi}+\mathrm{L}_{\rho-1}.$$

Now, on making $\rho=\mu$ in the same equations, we have

$$xx_1x_2\cdots\cdots x_\mu = l_\mu x_\mu + l_{\mu-1},$$
$$x_1x_2\cdots\cdots x_\mu = \mathrm{L}_\mu x_\mu + \mathrm{L}_{\mu-1}.$$

Further, since

$$x_\mu=\lambda_{\mu+1}+\tfrac{1}{x_{\mu+1}},\ x_{\mu+1}=\lambda_{\mu+2}+\tfrac{1}{x_{\mu+2}}\ \text{etc.},$$

it is clear that if we make

$$\left.\begin{array}{ll}
h\ =1, & \mathrm{H}=0,\\
h_1=\lambda_{\mu+1}, & \mathrm{H}_1=1,\\
h_2=\lambda_{\mu+2}h_1+h, & \mathrm{H}_2=\lambda_{\mu+2}\mathrm{H}_1,\\
h_3=\lambda_{\mu+3}h_2+h_1, & \mathrm{H}_3=\lambda_{\mu+2}\mathrm{H}_2+\mathrm{H}_1,\\
h_4=\lambda_{\mu+4}h_3+h_2, & \mathrm{H}_4=\lambda_{\mu+4}\mathrm{H}_3+\mathrm{H}_2,\\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{C}),$$

we will have in general

$$\left.\begin{array}{r}
x_\mu x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\sigma}=h_\sigma x_{\mu+\sigma}+h_{\sigma-1},\\
x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\sigma}=\mathrm{H}_\sigma x_{\mu+\sigma}+\mathrm{H}_{\sigma-1}
\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{D}).$$

Thus we will have

$$x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\pi}=\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi}+\mathrm{H}_{\pi-1},$$

and, since $x_{\mu+v}=x_\mu\,(\text{hyp.})$,

$$x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+v}=\mathrm{H}_v x_\mu+\mathrm{H}_{v-1}$$

Such that on making these substitutions into the two above equations, we will have

$$\left(l_\mu x_\mu + l_{\mu-1}\right)\times\left(\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi} + \mathrm{H}_{\pi-1}\right)\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu + \mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n$$
$$= l_\rho x_{\mu+\pi} + l_{\rho-1},$$
$$\left(\mathrm{L}_\mu x_\mu + \mathrm{L}_{\mu-1}\right)\times\left(\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi} + \mathrm{H}_{\pi-1}\right)\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu + \mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n$$
$$= \mathrm{L}_\rho x_{\mu+\pi} + \mathrm{L}_{\rho-1}.$$

49. Now, these equations (D) being divided by each other, give

$$x_\mu = \frac{h_\sigma x_{\mu+\sigma} + h_{\sigma-1}}{\mathrm{H}_\sigma x_{\mu+\sigma} + \mathrm{H}_{\sigma-1}} \cdots\cdots (\mathrm{E});$$

from which we deduce,

$$x_{\mu+\sigma} = \frac{\mathrm{H}_{\sigma-1} x_\mu - h_{\sigma-1}}{h_\sigma - \mathrm{H}_\sigma x_\mu}.$$

Thus, making $\sigma = \pi$, we will have $x_{\mu+\pi} = \frac{\mathrm{H}_{\pi-1} x_\mu - h_{\pi-1}}{h_\pi - \mathrm{H}_\pi x_\mu}$, and from that $\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi} + \mathrm{H}_{\pi-1} = \frac{h_\pi \mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{H}_\pi h_{\pi-1}}{h_\pi - \mathrm{H}_\pi x_\mu}$; but it is easy to see from the nature of the quantities $h,\ h_1,\ h_2$, etc., $\mathrm{H},\ \mathrm{H}_1,\ \mathrm{H}_2$, etc., that we have

$$\mathrm{H}_1 h - h_1 \mathrm{H} = 1,\ \mathrm{H}_2 h_1 - h_2 \mathrm{H}_1 = -1,\ \mathrm{H}_3 h_2 - h_3 \mathrm{H}_2 = 1, \text{ etc.};$$

from which we will have in general

$$h_\pi \mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{H}_\pi h_{\pi-1} = \pm 1,$$

the upper sign being used when π is an odd number, and the lower when π is even.

Thus, making these substitutions in the two last equations of the previous number, we will have

$$\pm\left(l_\mu x_\mu + l_{\mu-1}\right)\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu + \mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n$$
$$= \left(l_\rho \mathrm{H}_{\pi-1} - l_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi\right)x_\mu + \left(l_{\rho-1} h_\pi - l_\rho h_{\pi-1}\right),$$
$$\pm\left(\mathrm{L}_\mu x_\mu + \mathrm{L}_{\mu-1}\right)\times\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu + \mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n$$
$$= \left(\mathrm{L}_\rho \mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi\right)x_\mu + \left(\mathrm{L}_{\rho-1} h_\pi - \mathrm{L}_\rho h_{\pi-1}\right);$$

the ambiguous signs depending on the number π, as we have seen above.

Now, if, in equation (E), we make $\sigma = v$, we will have since $x_{\mu+v} = x_{\mu}\left(\text{hyp.}\right)$,

$$x_{\mu} = \frac{h_{v}x_{\mu} + h_{v-1}}{\mathrm{H}_{v}x^{\mu} + \mathrm{H}_{v-1}};$$

from which we derive the equation in x_{μ}

$$\mathrm{H}_{v}\left(x_{\mu}\right)^{2} - \left(h_{v} - \mathrm{H}_{v-1}\right)x_{\mu} - h_{v-1} = 0 \cdots\cdots (\mathrm{F}),$$

which gives

$$x_{\mu} = \frac{h_{v} - \mathrm{H}_{v-1} + \sqrt{(h_{v} - \mathrm{H}_{v-1})^{2} + 4\mathrm{H}_{v}h_{v-1}}}{2\mathrm{H}_{v}}.$$

There shall be, to abbreviate,

$$\mathrm{P} = \frac{h_{v} - \mathrm{H}_{v-1}}{2\mathrm{H}_{v}}, \quad \mathrm{Q} = \mathrm{P}^{2} + \frac{h_{v-1}}{\mathrm{H}_{v}},$$

such that we shall have $x_{\mu} = \mathrm{P} + \sqrt{\mathrm{Q}}$; substituting this value, we shall have

$$\begin{aligned}
&\pm\left(l_{\mu}\mathrm{P} + l_{\mu-1} + l_{\mu}\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{H}_{v}\mathrm{P} + \mathrm{H}_{v-1} + \mathrm{H}_{v}\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^{n} \\
&= \left(l_{\rho}\mathrm{H}_{\pi-1} - l_{\rho-1}\mathrm{H}_{\pi}\right)\left(\mathrm{P} + \sqrt{\mathrm{Q}}\right) + (l_{\rho-1}h_{\pi} - l_{\rho}h_{\pi-1}), \\
&\pm\left(\mathrm{L}_{\mu}\mathrm{P} + \mathrm{L}_{\mu-1} + \mathrm{L}_{\mu}\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{H}_{v}\mathrm{P} + \mathrm{H}_{v-1} + \mathrm{H}_{v}\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^{n} \\
&= \left(\mathrm{L}_{\rho}\mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{H}_{\pi}\right)\left(\mathrm{P} + \sqrt{\mathrm{Q}}\right) + (\mathrm{L}_{\rho-1}h_{\pi} - \mathrm{L}_{\rho}h_{\pi-1}),
\end{aligned}$$

where, because of the ambiguity of the root $\sqrt{\mathrm{Q}}$, we will establish four equations, by which we will be able to determine l_{ρ}, $l_{\rho-2}$, L_{ρ}, $\mathrm{L}_{\rho-1}$.

50. In effect, assuming for brevity,

$$\begin{aligned}
l_{\mu}\mathrm{P} + l_{\mu-1} &= f_{\mu}, \\
\mathrm{L}_{\mu}\mathrm{P} + \mathrm{L}_{\mu-1} &= \mathrm{F}_{\mu}, \\
\mathrm{H}_{v}\mathrm{P} + \mathrm{H}_{v-1} &= \mathrm{K}_{v};
\end{aligned}$$

we will find these four equations :

$$l_\rho \mathrm{H}_{\pi-1} - l_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi = \pm\frac{\left(f_\mu + l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(f_\mu - l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$l_{\rho-1}h_\pi - l_\rho h_{\pi-1} = \pm\frac{\left(\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(f_\mu - l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(\mathrm{P}-\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(f_\mu + l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$\mathrm{L}_\rho \mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi = \pm\frac{\left(\mathrm{F}_\mu + \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(\mathrm{F}_\mu - \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$\mathrm{L}_{\rho-1}h_\pi - \mathrm{L}_\rho h_{\pi-1} = \pm\frac{\left(\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{F}_\mu - \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(\mathrm{P}-\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{F}_\mu + \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}}.$$

Thus, if we add together the first multiplied by h_π to the second multiplied by H_π, and likewise the third multiplied by h_π to the fourth multiplied by H_π, and we may make for brevity,

$$-\mathrm{H}_\pi \mathrm{P} + h_\pi = \mathrm{G}_\pi,$$

we will have, since $h_\pi \mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{H}_\pi h_{\pi-1} = \pm 1$ (§49),

$$l_\rho = \frac{\left(f_\mu + l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi + \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(f_\mu - l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi - \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$\mathrm{L}_\rho = \frac{\left(\mathrm{F}_\mu + \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi + \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(\mathrm{F}_\mu - \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi - \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

ρ being equal to $\mu + n\nu + \pi$.

Hence, where with the aid of the quantities $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots, \lambda_{\mu+\nu}$, we will have calculated, by the formulas (A) and (C), the quantities $l,\ l_1,\ l_2$, etc., $\mathrm{L},\ \mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_2$, etc. as far as l_μ and L_μ, and the quantities $h,\ h_1,\ h_2, \cdots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{H}_1,\ \mathrm{H}_2, \cdots$ as far as h_ν and H_ν, we will be able, by the preceding formulas, to find the values of l_ρ and L_ρ, *i.e.* the terms of the fraction $\frac{l_\rho}{\mathrm{L}_\rho}$, which shall be the exposition of the quantity ρ *;* as for that we will only have to take μ from ρ, and to divide the difference by ν, the quotient will be the number n which appears in the preceding formulas as shown, and the remainder will be the number π, which as a consequence will always be less than ν .

Although the preceding formulas contain the root $\sqrt{\mathrm{Q}}$, it is easy to see that this root will depart after the development; so that the numbers l_ρ and L_ρ will be always rational and whole.

51. For the rest, if we wanted to find generally the equation of the second degree by which the root x of the proposed equation could be determined when we had $x_{\mu+\nu} = x_{\mu}$, as in § 48, we only have to note that the equations (B) of § 47 being divided the one by the other, give in general

$$x = \frac{l_{\rho}x_{\rho}+l_{\rho-1}}{\mathrm{L}_{\rho}x_{\rho}+\mathrm{L}_{\rho-1}} \cdots (\mathrm{G}),$$

from which we obtain, on making $\rho = \mu$,

$$x_{\mu} = \frac{\mathrm{L}_{\mu-1}\ x - l_{\mu-1}}{l_{\mu} - \mathrm{L}_{\mu}x};$$

thus, substituting this value of x_{μ} into the equation (F) of § 49, we will have this eq. :

$$\mathrm{H}_{\nu}\left(\mathrm{L}_{\mu-1}\ x - l_{\mu-1}\right)^2 - \left(h_{\nu} - \mathrm{H}_{\nu-1}\right)\left(\mathrm{L}_{\mu-1}\ x - l_{\mu-1}\right)(l_{\mu} - \mathrm{L}_{\mu}x) - h_{\nu-1}(l_{\mu} - \mathrm{L}_{\mu}x)^2 = 0,$$

that is,

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{H}_{\nu}\mathrm{L}_{\mu-1}^2 + \left(h_{\nu} - \mathrm{H}_{\nu-1}\right)\mathrm{L}_{\mu-1}\mathrm{L}_{\mu} - h_{\nu-1}\mathrm{L}_{\mu}^2\right]x^2\\ &-\left[2\mathrm{H}_{\nu}\mathrm{L}_{\mu-1}l_{\mu-1} + \left(h_{\nu} - \mathrm{H}_{\nu-1}\right)\left(\mathrm{L}_{\mu-1}l_{\mu} + l_{\mu-1}l_{\mu}\right) - 2h_{\nu-1}l_{\mu}\mathrm{L}_{\mu}\right]x\\ &+\left[\mathrm{H}_{\nu}l_{\mu-1}^2 + \left(h_{\nu} - \mathrm{H}_{\nu-1}\right)l_{\mu-1}l_{\mu} - h_{\nu-1}l_{\mu}\right] = 0,\end{aligned}$$

and this equation necessarily will be a divisor of the proposed equation.

ARTICLE II.

Where we give a very simple way of reducing into continued fractions the roots of equations of the second degree .

§ 52. Considering the general equation of the second degree

$$\mathrm{E}_1x^2 - 2\varepsilon x - \mathrm{E} = 0,$$

in which E, E_1 and ε are assumed whole numbers, such that $\varepsilon^2+\mathrm{EE}_1>0,$ so that these roots shall be real ; this equation being resolved, gives

$$x=\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+\mathrm{EE}_1}}{\mathrm{E}_1},$$

where the root can perhaps be taken positive or negative. Supposing that the root sought shall be positive, and λ_1 shall be the whole number which shall be immediately smaller than the value of x ; thus we will have $x=\lambda_1+\frac{1}{x_1},$ and substituting this value into the proposed equation, we will have at transformed equation of which the unknown shall be x_1: now, if after having made the substitution, we multiply the whole equation by x_1^2, then we change the signs, and assume, for brevity,

$$\varepsilon_1=\lambda_1\mathrm{E}_1-\varepsilon,$$
$$\mathrm{E}_2=\mathrm{E}+2\varepsilon\lambda_1-\mathrm{E}_1\lambda_1^2,$$

we will have the transformed equation $\mathrm{E}_2x_1^2-2\varepsilon_1x_1-\mathrm{E}_1=0,$ which will give

$$x_1=\frac{\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2}}{\mathrm{E}_2}:$$

thus we will search for the whole number λ_2, which will be immediately smaller than this value x_1 and we will have :

$$x_1=\lambda_2+\frac{1}{x_2},$$

and thus henceforth.

Now I observe that the quantity $\varepsilon_1^2+\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$, which is under the sign in the expression for x_1, becomes, on substituting the values of ε_1 and of E_2, as well as removing that which cancels, equal to this, $\varepsilon^2+\mathrm{EE}_1$, which is the same as that which is under the sign in the expression for x ; from which it is easy to conclude that the root quantity will always be the same in the expressions for $x, x_1, x_2,$ etc . Thus, if we assume for brevity,

$$\mathrm{B}=\varepsilon_1^2+\mathrm{EE}_1,$$

and we may make (the sign < indicates that it is required to take the whole number which is immediately less)

$$\lambda_1 < \frac{\varepsilon+\sqrt{B}}{E_1},\ \varepsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \varepsilon,$$

$$E_2 = E + 2\varepsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2,\quad \lambda_2 < \frac{\varepsilon_1+\sqrt{B}}{E_2},\ \varepsilon_2 = \lambda_2 E_2 - \varepsilon_1,$$

$$E_3 = E_1 + 2\varepsilon_1\lambda_2 - E_2\lambda_2^2,\ \lambda_3 < \frac{\varepsilon_2+\sqrt{B}}{E_3},\ \varepsilon_3 = \lambda_3 E_3 - \varepsilon_2,$$

$$E_4 = E_2 + 2\varepsilon_2\lambda_3 - E_3\lambda_3^2,\ \lambda_4 < \frac{\varepsilon_3+\sqrt{B}}{E_4},\ \varepsilon_4 = \lambda_4 E_4 - \varepsilon_3,$$

etc. etc. etc.

we will have

$$x = \frac{\varepsilon+\sqrt{B}}{E_1} = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1+\sqrt{B}}{E_2} = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2+\sqrt{B}}{E_3} = \lambda_3 + \frac{1}{x_3},$$

etc.,

from which

$$x = \lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\lambda_3 + \text{etc.}}}$$

Regarding the root $\sqrt{B}$, it will be necessary always to give it the same sign which we had assumed in the value of the root sought x. We can observe again that, as we have found,

$$\varepsilon_1^2 + E_1E_2 = \varepsilon^2 + EE_1 = B,$$

we will have

$$E_2 = \frac{B-\varepsilon_1^2}{E_1},$$

and likewise

$$E_3 = \frac{B-\varepsilon_2^2}{E_2},\quad E_4 = \frac{B-\varepsilon_3^2}{E_3},\quad \text{etc.}.$$

Hence we will be able, if it may be considered more convenient to use these formulas in place of these given above, to have for the values of E_2, E_3, etc.

53. Now I say that the continued fraction which expresses the value of x necessarily will always be periodic.

In order to show this theorem, we begin by proving in general that, whatever the proposed equation may be, we must always necessarily arrive at the transformed equations of which the first and the last term shall be of different signs. Indeed, we have seen in § 19 that necessarily we must always arrive at a transformed equation which has only a single root greater than one, after which each of the following transformed equations also will have only a single root greater than one ; thus one of the transformations shall be

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \ldots + k = 0,$$

which has only one root greater than unity, and s shall be the nearest whole number less than u : we will make, in order to have the following transformation, $u = s + \frac{1}{w}$, that which, being substituted, will give a transformation in which it is easy to see that the first term will be

$$(as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \ldots + k)w^m,$$

and that the last will be a. Now, since the true value of u in the prior transformation falls between these two : $u = s$ and $u = \infty$, between these no other value of u will be found (by the hypothesis), it follows that on making these two substitutions into the equation in u, necessarily we will have results of contrary signs ; for it is easy to conceive in this case that there will be only a single one of the factors of this equation which will be able to change sign in passing from one value of u to the other (§ 5). But the supposition of $u = \infty$ gives the result au^m (all the other terms becoming zero with respect to this term), which has the same sign as the coefficient a; thus it will be necessary that the assumption $u = s$ gives a result of the opposite sign to a; but this result is equal to $as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \ldots + k$; thus, since this quantity is at the same time the coefficient of the first term of the transformed equation in w, of which the last term is a, it follows that this transformation necessarily will have these end terms of differing signs.

And we can prove in the same manner that this will be the case, for a stronger reason, in all the following transformations. With that in place, since the proposed equation

$$\mathrm{E}_1 x^2 - 2\varepsilon x - \mathrm{E} = 0,$$

gives these transformations (§ 52)

$$\mathrm{E}_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - \mathrm{E}_1 = 0,$$
$$\mathrm{E}_3 x_2^2 - 2\varepsilon_2 x_2 - \mathrm{E}_2 = 0,$$
etc.

it follows from this that we come to show, how necessarily we can arrive at these transformations, as

$$\mathrm{E}_{\gamma+1}x_{\gamma}^2-2\varepsilon_{\gamma}x_{\gamma}-\mathrm{E}_{\gamma}=0,$$
$$\mathrm{E}_{\gamma+2}x_{2}^2-2\varepsilon_{\gamma+1}x_{\gamma+1}-\mathrm{E}_{\gamma+1}=0,$$
etc.,

of which the first and last terms will be of different signs; such that the numbers E_{γ}, $\mathrm{E}_{\gamma+1}$, $\mathrm{E}_{\gamma+2}$,.... all will be of the same sign. Now, we have (§ 52)

$$\mathrm{B}=\varepsilon_{\gamma}^2+\mathrm{E}_{\gamma}\mathrm{E}_{\gamma+1}=\varepsilon_{\gamma+1}^2+\mathrm{E}_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+2}=\cdots;$$

thus, since $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+2}$,.... are of the same sign, the products $\mathrm{E}_{\gamma}\mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+2}$,.... necessarily will be positive; from which it follows,

1°. because we will have $\varepsilon_{\gamma}^2<\mathrm{B},\ \varepsilon_{\gamma+1}^2<\mathrm{B},\cdots,$ certainly (disregarding the sign),

$$\varepsilon_{\gamma}<\sqrt{\mathrm{B}},\ \varepsilon_{\gamma+1}<\sqrt{\mathrm{B}},$$

and thus in the same manner indefinitely;

2°. But we will have also, since the numbers E, E_1 , E_2,.... are all whole,

$$\mathrm{E}_{\gamma}<\mathrm{B},\ \mathrm{E}_{\gamma+1}<\mathrm{B},\ \mathrm{E}_{\gamma+2}<\mathrm{B},$$

and thus of the following. Thus, since B is given, it is clear there will be only a certain number of whole numbers which are able to be both less than B and $\sqrt{\mathrm{B}}$; such that the numbers $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+2}$,.... $\varepsilon_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2}$,.... are able to have only a certain number of different values, and so that hence in one or the other of these series, if we may extend these indefinitely, it will be required necessarily that the same terms return an infinite number of times; and, by the same reason, it will be required that the same combination of terms in the two series return an infinite number of times ; from which it follows the necessarily we will have, for example,

$$\mathrm{E}_{\gamma+\delta+v}=\mathrm{E}_{\gamma+\delta} \text{ and } \varepsilon_{\gamma+\delta+v}=\varepsilon_{\gamma+\delta},$$

or rather, making $\gamma+\delta=\mu$,

$$\mathrm{E}_{\mu+v}=\mathrm{E}_{\mu} \text{ and } \varepsilon_{\mu+v}=\varepsilon_{\mu};$$

thus, because

$$\mathrm{B}=\varepsilon_{\mu}^2+\mathrm{E}_{\mu}\mathrm{E}_{\mu+1}=\varepsilon_{\mu+v}^2+\mathrm{E}_{\mu+v}\mathrm{E}_{\mu+v+1},$$

we will have also

$$\mathrm{E}_{\mu+v+1}=\mathrm{E}_{\mu+1};$$

but we will have

$$x_{\mu}=\frac{\varepsilon_{\mu}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \text{ and } x_{\mu+v}=\frac{\varepsilon_{\mu+v}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+v+1}};$$

thus $x_{\mu+v}=x_{\mu}$; thus the continued fraction necessarily will be periodic (§ 48).

54. Indeed, we see by the formulas of § 52, that if we have $\mathrm{E}_{\mu+v}=\mathrm{E}_{\mu}$ and $\varepsilon_{\mu+v}=\varepsilon_{\mu}$, we will have

$$\mathrm{E}_{\mu+v+1}=\mathrm{E}_{\mu+1},\ \lambda_{\mu+v+1}=\lambda_{\mu+1}, \text{ and } \varepsilon_{\mu+v+1}=\varepsilon_{\mu+1},$$

and thus as follows; such that in general the terms of the three series $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ...,\ \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ...,\ \lambda_1, \lambda_2, ...,$ which will have for the sub-script index $\mu+nv+\pi$, will be the same as the preceding terms, of which the indices will be $\mu+\pi$ on taking some whole positive number for *n*.

Hence each of these three series will become periodic, by starting with the terms $\mathrm{E}_{\mu},\ \varepsilon_{\mu},\ \lambda_{\mu+1},$ and their periods will be of *v* terms, after which the same terms will return in the same order indefinitely.

55. We come to show that in continuing the series of numbers $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ...$ we must necessarily find the consecutive terms which shall be of the same sign, and then the series necessarily must become periodic: now, I say that from that, in the same series we will have come upon two consecutive terms, as $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1},$ of the same sign, we will be assured that one of the two terms will be already one of the periodic terms, which necessarily will reappear in each period.

Indeed, as E_{γ} and $\mathrm{E}_{\gamma+1}$ are of the same sign, it is clear that the transformation

$$\mathrm{E}_{\gamma+1}x_{\gamma}^{2}-2\varepsilon_{\gamma}x_{\gamma}-\mathrm{E}_{\gamma}=0$$

necessarily will have one positive root and the other negative; such that it will be able to have only one which shall be greater than unity ; thus all the following transformations will have necessarily their end terms of opposite signs (§ 53), as a consequence all the numbers $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+2}, ...$ will be of the same sign; such that each of these will be less than B, and each of the numbers $\varepsilon_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2}, ...$ will be less than $\sqrt{\mathrm{B}}$ (the number cited).

56. Now, since we have

$$\mathrm{B}=\varepsilon_{\gamma}^{2}+\mathrm{E}_{\gamma}\mathrm{E}_{\gamma+1},$$

it is seen that the numbers $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1}$ will be either both the two numbers less than $\sqrt{\mathrm{B}}$, or which if one is very large, the other present necessarily will be smaller; such that there will always be one less than $\sqrt{\mathrm{B}}$. Assuming that this shall be E_γ; I am going to prove that the numbers

$$\mathrm{E}_\gamma,\ \mathrm{E}_{\gamma+1},\ \mathrm{E}_{\gamma+2},\ldots.\ \varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},\ldots.$$

will all necessarily be of the same sign as the root $\sqrt{\mathrm{B}}$. Indeed, since the roots $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots.$ of the transformed equations must be all greater than unity by the nature of the continued fraction, thus we will have also $x_\gamma > 1,\ x_{\gamma+1} > 1$, and thus so forth ; thus

$$\frac{\varepsilon_\gamma+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+1}} > 1,\ \frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}} > 1,\ldots..,$$

and since

$$\mathrm{B} = \varepsilon_\gamma^2 + \mathrm{E}_\gamma\mathrm{E}_{\gamma+1} = \varepsilon_{\gamma+1}^2 + \mathrm{E}_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+2} = \ldots.,$$

we will have

$$\frac{\varepsilon_\gamma+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+1}} = \frac{\mathrm{E}_\gamma}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\gamma},\quad \frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}} = \frac{\mathrm{E}_{\gamma+1}}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma+1}},$$

and hence the others likewise ; thus also

$$\frac{\mathrm{E}_\gamma}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\gamma} > 1,\quad \frac{\mathrm{E}_{\gamma+1}}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma+1}} > 1,\quad \ldots..$$

Now, as $\varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ldots.$ are smaller than $\sqrt{\mathrm{B}}$, it is clear that whatever the sign must be of these numbers $\varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ldots.$, the denominators $\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\gamma,\ \sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma+1},\ldots..$ will be necessarily of the same sign as $\sqrt{\mathrm{B}}$; thus it will be required that the numerators $\mathrm{E}_\gamma,\ \mathrm{E}_{\gamma+1},\ldots.$ also must be of the same sign as $\sqrt{\mathrm{B}}$.

Now, supposing for the greatest simplicity, $\sqrt{\mathrm{B}}$ to be positive, such that $\mathrm{E}_\gamma,\ \mathrm{E}_{\gamma+1},\ldots.$ must be positive also ; I say that $\varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},\ldots.$ will be that also. For there shall be, if it is possible, $\varepsilon_\gamma = -\eta$ (η being a positive number) ; since $\mathrm{E}_\gamma < \sqrt{\mathrm{B}}$ (by hypothesis), we will have, from an even stronger reason, $\mathrm{E}_\gamma < \sqrt{\mathrm{B}}+\eta$, thus $\frac{\mathrm{E}_\gamma}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\gamma} = \frac{\mathrm{E}_\gamma}{\sqrt{\mathrm{B}}+\eta}$ will be < 1, in a place where this quantity must be $>$ I ; thus, ε_γ must be positive. Thus it shall follow, if it is possible, $\varepsilon_{\gamma+1} = -\eta_1$, since we have, by the formulas of §.52, $\varepsilon_{\gamma+1} = \lambda_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+1} - \varepsilon_\gamma$, we will have $\lambda_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+1} = \varepsilon_\gamma - \eta_1$, thus, since ε_γ and η_1, are positive numbers less than $\sqrt{\mathrm{B}}$, and because $\lambda_{\gamma+1}$ is also a whole positive number, it is evident that $\mathrm{E}_{\gamma+1}$ must be less than $\sqrt{\mathrm{B}}$; and in this case, we will prove, as before, $\varepsilon_{\gamma+1}$ must be positive, and thus so on.

If $\sqrt{\mathrm{B}}$ were taken negatively, we could show in the same manner that $\varepsilon_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma+1},....$ would become negative ; and likewise, without making a new calculation, it would only have to be shown that these formulas of the number quoted remain the same, in changing the signs there of all the quantities $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2,.... \; \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2,....$, and of the root $\sqrt{\mathrm{B}}$; such that we will always be able to consider the root as positive, on taking the quantities $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2,.... \; \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2,....$ with opposite signs.

57. With that in place, I say that if any two corresponding terms of the series $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+2},.... \; \varepsilon_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2},....$ are given, all these preceding in the same series necessarily will be given also. Assuming, for example, that $\mathrm{E}_{\gamma+3}$ and $\varepsilon_{\gamma+3}$ shall be given (we will see easily that the demonstration is general, whatever the terms given shall be), and seeing what the terms must be preceding these, by virtue of the formulas of §52, and these conditions of the preceding number. We will have at first

$$\varepsilon_{\gamma+3} = \lambda_{\gamma+3}\mathrm{E}_{\gamma+3} - \varepsilon_{\gamma+2};$$

thus

$$\varepsilon_{\gamma+2} = \lambda_{\gamma+3}\mathrm{E}_{\gamma+3} - \varepsilon_{\gamma+3};$$

but we must have $\mathrm{E}_{\gamma+2} < \sqrt{\mathrm{B}}$; thus it will be necessary that we have

$$\lambda_{\gamma+3} < \frac{\varepsilon_{\gamma+3} + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+3}}.$$

Likewise we will have

$$\varepsilon_{\gamma+1} = \lambda_{\gamma+2}\mathrm{E}_{\gamma+2} - \varepsilon_{\gamma+2},$$

where, since $\varepsilon_{\gamma+1} < \sqrt{\mathrm{B}}$, we will extract

$$\lambda_{\gamma+2} < \frac{\varepsilon_{\gamma+2} + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}};$$

but it is required, by the nature of the continued fraction, that $\lambda_{\gamma+2}$ shall be a whole positive number; thus it will be required that we have

$$\varepsilon_{\gamma+2} + \sqrt{\mathrm{B}} > \mathrm{E}_{\gamma+2};$$

now, we have also

$$E_{\gamma+2}E_{\gamma+3} = B - \varepsilon_{\gamma+2}^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon_{\gamma+2})(\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+2});$$

thus

$$\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+2} < E_{\gamma+3},$$

to wit : in putting $\varepsilon_{\gamma+2}$ for its value above,

$$\sqrt{B} - \lambda_{\gamma+3}E_{\gamma+3} + \varepsilon_{\gamma+3} < E_{\gamma+3},$$

from which,

$$\lambda_{\gamma+3} > \frac{\varepsilon_{\gamma+3}+\sqrt{B}}{E_{\gamma+3}} - 1.$$

Thus, since the number $\lambda_{\gamma+3}$ must be whole, it is clear that it will be unable to be equal to a whole number which will be next smaller than $\frac{\varepsilon_{\gamma+3}+\sqrt{B}}{E_{\gamma+3}}$; hence $\lambda_{\gamma+3}$ will be given, and from that $\varepsilon_{\gamma+2}$ will be that also, and since

$$E_{\gamma+2} = \frac{B-\varepsilon_{\gamma+2}^2}{E_{\gamma+3}},$$

it is clear that $E_{\gamma+2}$ will be given also. Now we will have

$$\varepsilon_{\gamma} = \lambda_{\gamma+1}E_{\gamma+1} - \varepsilon_{\gamma+1},$$

and as a consequence, since $\varepsilon_{\gamma} < \sqrt{B}$,

$$\lambda_{\gamma+1} < \frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{B}}{E_{\gamma+1}}.$$

Thus, since $\lambda_{\gamma+1}$ shall be a whole positive number, as it must be, it will be required that

$$\varepsilon_{\gamma+1} + \sqrt{B} > E_{\gamma+1};$$

consequently, since

$$E_{\gamma+1}E_{\gamma+2} = B - \varepsilon_{\gamma+1}^2,$$

it will be required that

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma+1}<\mathrm{E}_{\gamma+2},$$

or rather, on putting for $\varepsilon_{\gamma+1}$ its above value,

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\lambda_{\gamma+2}\mathrm{E}_{\gamma+2}+\varepsilon_{\gamma+2}<\mathrm{E}_{\gamma+2},$$

from which we derive

$$\lambda_{\gamma+2}>\frac{\varepsilon_{\gamma+2}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}}-1.$$

Such that the number $\lambda_{\gamma+2}$ will only be able to be the nearest whole number smaller than the given quantity $\frac{\varepsilon_{\gamma+2}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}}$; thus this number will be given, and by that these numbers $\varepsilon_{\gamma+1}$ and $\mathrm{E}_{\gamma+1}$ also will be given from that.

Finally, since E_{γ} is (by hypothesis) $<\sqrt{\mathrm{B}}$, we will have, by a stronger argument, $\varepsilon_{\gamma}+\sqrt{\mathrm{B}}>\mathrm{E}_{\gamma}$; and from that, since $\mathrm{E}_{\gamma}\mathrm{E}_{\gamma+1}=\mathrm{B}-\varepsilon_{\gamma}^{2}$, we will have

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma}<\mathrm{E}_{\gamma+1},$$

or rather, on substituting for ε_{γ} its value found above,

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\lambda_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+1}+\varepsilon_{\gamma+1}<\mathrm{E}_{\gamma+1},$$

which gives

$$\lambda_{\gamma+1}>\frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+1}}-1.$$

Thus the number $\lambda_{\gamma+1}$ can only be the whole number which is immediately smaller than the given quantity $\frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+1}}$, and as a consequence this number will be given completely, and the numbers ε_{γ} and E_{γ} will be given also.

Now, we have seen (§53) that on continuing the series $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1},....$ $\varepsilon_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2},....$ it will happen necessarily that two corresponding terms, such as $\mathrm{E}_{\gamma+\delta}, \varepsilon_{\gamma+\delta}$, will reappear after a certain number of other terms; so that we will have, for example,

$$\mathrm{E}_{\gamma+v+\delta}=\mathrm{E}_{\gamma+\delta},\ \varepsilon_{\gamma+v+\delta}=\varepsilon_{\gamma+\delta};$$

thus, by what we have just shown, we will also shown,

$$\begin{array}{ll}\mathrm{E}_{\gamma+v+\delta-1}=\mathrm{E}_{\gamma+\delta-1}, & \varepsilon_{\gamma+v+\delta-1}=\varepsilon_{\gamma+\delta-1},\\ \mathrm{E}_{\gamma+v+\delta-2}=\mathrm{E}_{\gamma+\delta-2}, & \varepsilon_{\gamma+v+\delta-2}=\varepsilon_{\gamma+\delta-2},\\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots,\\ \mathrm{E}_{\gamma+v}=\mathrm{E}_{\gamma}, & \varepsilon_{\gamma+v}=\varepsilon_{\gamma}.\end{array}$$

58. From that I conclude in general, that when in the series of numbers $\mathrm{E},\ \mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \dots$ we will find two consecutive numbers of the same sign, that one of these which will be less than $\sqrt{\mathrm{B}}$ already necessarily will be periodic.

Hence, if in the proposed equation $\mathrm{E}_1x^2-2\varepsilon x-\mathrm{E}=0,$ the coefficients E and E_1 being of the same sign, then series would be periodic from the first or second term. If we had $\varepsilon=0$, such that $x=\sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}}$, then we will have $\mathrm{B}=\mathrm{EE}_1;$ from which we see that of the two numbers $\mathrm{E},\mathrm{E}_1,$ the smaller will be less than $\sqrt{\mathrm{B}}$, and the larger necessarily will be greater than $\sqrt{\mathrm{B}}$ *;* thus, in this case, if the number $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}$ of which it is required to extract the square root which is less than one, the series will be periodic from the first term E ; and, if it is greater than one, the period will not commence lower than the second term.

59. We have known for a long time that each continued fraction may always be brought back to an equation of the second degree; but no one as far as I may know, has not shown the inverse of this proposition, to know that each root of an equation of the second order always necessarily is reduced to a periodic continued fraction. It is true that *Euler,* in an excellent memoir printed in book XI of the *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, has observed that the square root of a whole number may itself be reduced always to a periodic continued fraction ; but this theorem which is only a special case of ours, has not been demonstrated by *Euler,* and can only be able to be shown, it seems to me, by means of the principles we have established previously.

60. We have given above the general formulas for finding easily all the terms of the fractions converging towards the root of a given equation, when we have recognised that the continued fraction which expresses this root is periodic.

Now, in the case where the equation is of the second degree, and where we have made use of the method of §52, we will be able if it is wished, to simplify greatly the calculations of §48 and the following, to find the terms l_ρ and L_ρ of each of these fractions converging towards *x.* Indeed, having

$$x_{\mu} = \frac{\sqrt{B}+\varepsilon_{\mu}}{E_{\mu+1}} \quad \text{and} \quad x_{\mu+\pi} = \frac{\sqrt{B}+\varepsilon_{\mu+\pi}}{E_{\mu+\pi+1}},$$

where ε_{μ}, $\varepsilon_{\mu+\pi}$, $E_{\mu+1}$, and $E_{\mu+\pi+1}$ are known (π being $< \nu$) there will only have to be substituted these values into the two equations of §48; and making for brevity ,

$$\frac{l_{\mu}\varepsilon_{\mu}}{E_{\mu+1}} + l_{\mu-1} = f_{\mu},$$

$$\frac{L_{\mu}\varepsilon_{\mu}}{E_{\mu+1}} + L_{\mu-1} = F_{\mu},$$

$$\frac{H_{\nu}\varepsilon_{\mu}}{E_{\mu+1}} + H_{\nu-1} = K_{\nu},$$

$$H_{\pi}\varepsilon_{\mu+\pi} + H_{\pi-1}E_{\mu+\pi+1} = G_{\pi},$$

we will have

$$\left(f_{\mu} + \frac{l_{\mu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)\left(G_{\pi} + H_{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K_{\nu} + \frac{H_{\nu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)^{n} = l_{\rho}\varepsilon_{\mu+\pi} + l_{\rho-1}E_{\mu+\pi+1} + l_{\rho}\sqrt{B},$$

$$\left(F_{\mu} + \frac{L_{\mu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)\left(G_{\pi} + H_{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K_{\nu} + \frac{H_{\nu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)^{n} = L_{\rho}\varepsilon_{\mu+\pi} + L_{\rho-1}E_{\mu+\pi+1} + L_{\rho}\sqrt{B},$$

from which, on account of the ambiguity of the sign of the root $\sqrt{B}$, we can find at once

$$l_{\rho} = \frac{\left(f_{\mu}+\frac{l_{\mu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)\left(G_{\pi}+H_{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K_{\nu}+\frac{H_{\nu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)^{n} - \left(f_{\mu}-\frac{l_{\mu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)\left(G_{\pi}-H_{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K_{\nu}-\frac{H_{\nu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)^{n}}{2\sqrt{B}},$$

$$L_{\rho} = \frac{\left(F_{\mu}+\frac{L_{\mu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)\left(G_{\pi}+H_{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K_{\nu}+\frac{H_{\nu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)^{n} - \left(F_{\mu}-\frac{L_{\mu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)\left(G_{\pi}-H_{\pi}\sqrt{B}\right)\left(K_{\nu}-\frac{H_{\nu}\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\right)^{n}}{2\sqrt{B}},$$

ρ being, as previously, $= \mu + n\nu + \pi$.

61. We can also note that the value of L_ρ can be determined by means of that of l_ρ and $l_{\rho-1}$, without having need of a new calculation.

Indeed, having

$$x=\frac{\varepsilon+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon},$$

and likewise

$$x_\rho=\frac{\mathrm{E}_\rho}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\rho},$$

we will have by equation (G) of §5I,

$$\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon}=\frac{l_\rho\mathrm{E}_\rho+l_{\rho-1}(\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\rho)}{\mathrm{L}_\rho\mathrm{E}_\rho+\mathrm{L}_{\rho-1}(\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\rho)},$$

to wit:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{L}_\rho\mathrm{E}_\rho+\mathrm{L}_{\rho-1}(\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\rho)\right]=l_\rho\mathrm{E}_\rho(\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon)+l_{\rho-1}\left[\mathrm{B}+\varepsilon\varepsilon_\rho-(\varepsilon_\rho+\varepsilon)\sqrt{\mathrm{B}}\right],$$

such that on comparing the rational part with the rational, and the irrational with the irrational, we will have

$$\mathrm{L}_{\rho-1}=\frac{l_\rho\mathrm{E}_\rho-\mathrm{L}_{\rho-1}(\varepsilon_\rho+\varepsilon)}{\mathrm{E}},$$

$$\mathrm{L}_\rho\mathrm{E}_\rho-\mathrm{L}_{\rho-1}\varepsilon_\rho=\frac{-l_\rho\mathrm{E}_\rho\varepsilon+l_{\rho-1}(\mathrm{B}+\varepsilon\varepsilon_\rho)}{\mathrm{E}},$$

from which, since $\mathrm{B}-\varepsilon_\rho^2=\mathrm{E}_\rho\mathrm{E}_{\rho+1}$, we will have

$$\mathrm{L}_\rho=\frac{l_\rho(\varepsilon_\rho-\varepsilon)+l_{\rho-1}\mathrm{E}_{\rho+1}}{\mathrm{E}}.$$

Now, ρ being equal to $\mu+n\nu+\pi$, we will have

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_{\rho+\pi},\quad \mathrm{E}_{\rho+1}=\mathrm{E}_{\rho+\pi+1},$$

such that ρ and $\mathrm{E}_{\rho+1}$ will be known, whatever the quantity ρ may be.

62. Supposing, in order to give an example of the application of the preceding formulas, that we ask for the square root of $\frac{11}{3}$ by a continued fraction. Making $x=\sqrt{\frac{11}{3}}$ we will have the equation $3x^2-11=0$; thus (§ 52) [*i.e.* $\mathrm{E}_1x^2-2\varepsilon x-\mathrm{E}=0,$]

$$\mathrm{E}=11,\ \mathrm{E}_1=3\ ,\ \varepsilon=0;$$

hence we will make the following calculation (§ 53), on taking $\mathrm{B}=33$,

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{E}=11, & & \varepsilon=0,\\
\mathrm{E}_1=\frac{33-0}{11}=3, & \lambda_1<\frac{\sqrt{33}+0}{3}=1, & \varepsilon_1=1.3-0=3,\\
\mathrm{E}_2=\frac{33-9}{3}=8, & \lambda_2<\frac{\sqrt{33}+3}{8}=1, & \varepsilon_2=1.8-3=5,\\
\mathrm{E}_3=\frac{33-25}{8}=1, & \lambda_3<\frac{\sqrt{33}+5}{1}=10, & \varepsilon_3=10.1-5=5,\\
\mathrm{E}_4=\frac{33-25}{1}=8, & \lambda_4<\frac{\sqrt{33}+5}{8}=1, & \varepsilon_4=1.8-5=3,\\
\mathrm{E}_5=\frac{33-9}{8}=3, & \lambda_5<\frac{\sqrt{33}+3}{3}=2, & \varepsilon_5=2.3-3=3.
\end{array}$$

I stop here because I see that $\mathrm{E}_5=\mathrm{E}_1$ and $\varepsilon_5=\varepsilon_1$; such that I will have, in this case, $\mu=1$ and $\nu=4$, and as a consequence :

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10+\text{etc.}}}}}}}$$

63. Such thus is the continued fraction which expresses the value of $\sqrt{\frac{11}{3}}$; but if we wish to find the fractions converging towards this value, we will make $\mu=1,\ \nu=4$ in the formulas of § 60, and since π must be < 4, we will make successively $\pi=0,\ 1,\ 2,\ 3.$ We will have thus (form A, § 47)

$$l_\mu=l_1=\lambda_1=1;\ l_{\mu-1}=l=1,\ \varepsilon_\mu=\varepsilon_1=3,\mathrm{E}_{\mu+1}=\mathrm{E}_2=8;$$

thus (§ 60)

$$f_\mu=\frac{1.3}{8}+1=\frac{11}{8};$$

we will find likewise

$$\mathrm{L}_\mu=1,\ \ \mathrm{F}_\mu=\frac{3}{8}.$$

Then we will calculate the values of $\mathrm{H},\ \mathrm{H}_1$, ...as far as $\mathrm{H}_\nu = \mathrm{H}_1$, by the formulas (C) of §48, and we will find

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}=0,\\
&\mathrm{H}_1=1,\\
&\mathrm{H}_2=\lambda_3\mathrm{H}_1=10,\\
&\mathrm{H}_3=\lambda_1\mathrm{H}_2+\mathrm{H}_1=11,\\
&\mathrm{H}_4=\lambda_3\mathrm{H}_3+\mathrm{H}_2=32,
\end{aligned}$$

from which

$$\mathrm{H}_\nu=32,\ \mathrm{H}_{\nu-1}=11,$$

and from that

$$\mathrm{K}_\nu=\tfrac{32.3}{8}+11=23.$$

Now :

1°. Let $\pi=0$, we will have

$$\mathrm{H}_\pi=0 \ \text{ and } \mathrm{H}_{\pi-1}=1;$$

for it is easy to see, by the nature of the formulas (C) that the term which was preceding H necessarily would be $=1$: indeed, we must have by analogy

$$\mathrm{H}_1=\lambda_{\mu+1}\mathrm{H}+\mathrm{H}_{-1}\ ;$$

we may show likewise that the term which precedes *h* shall be $=0$. Thus,

$$\mathrm{G}_\pi=\mathrm{E}_{\mu+1}=8.$$

2°. Let $\pi=1$, we will have

$$\mathrm{H}_\pi=1,\ \ \mathrm{H}_{\pi-1}=0;$$

thus,

$$\mathrm{G}_\pi=\varepsilon_{\mu+1}=\varepsilon_2=5.$$

3°. Let $\pi=2$, thus

$$\mathrm{H}_\pi=10,\ \mathrm{H}_{\pi-1}=1,\ \mathrm{G}_\pi=10\varepsilon_{\mu+2}+1,\ \mathrm{E}_{\mu+3}=10\varepsilon_3+\mathrm{E}_1=58.$$

4°. Let $\pi=3$, thus

$$\mathrm{H}_\pi=11,\ \mathrm{H}_{\pi-1}=10,\ \text{and } \mathrm{G}_\pi=11\varepsilon_4+10\mathrm{E}_5=63.$$

Thus, substituting these values into the expressions for l_ρ and L_ρ of §60, and multiplying together, for more simplicity, the two factors

$$f_\mu \pm \frac{l_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}},\ \ \mathrm{G}_\pi \pm \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}},$$

as also these two

$$\mathrm{F}_\mu \pm \frac{\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}},\ \ \mathrm{G}_\pi \pm \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}},$$

which gives these simple factors

$$f_\mu \mathrm{G}_\pi + \frac{l_\mu \mathrm{H}_\pi \mathrm{B}}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \pm \left(f_\mu \mathrm{H}_\pi + \frac{l_\mu \mathrm{G}_\pi}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \right)\sqrt{\mathrm{B}},$$

$$\mathrm{F}_\mu \mathrm{G}_\pi + \frac{\mathrm{L}_\mu \mathrm{H}_\pi \mathrm{B}}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \pm \left(\mathrm{F}_\mu \mathrm{H}_\pi + \frac{\mathrm{L}_\mu \mathrm{G}_\pi}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \right)\sqrt{\mathrm{B}},$$

we will have the following formulas:

$$l_{4n+1} = \frac{(11+\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (11-\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$\mathrm{L}_{4n+1} = \frac{(3+\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (3-\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+3} = \frac{(121+21\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (121-21\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$\mathrm{L}_{4n+3} = \frac{(63+11\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (63-11\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+4} = \frac{(132+23\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (132-23\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$\mathrm{L}_{4n+4} = \frac{(69+12\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (69-12\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

by means of which we will be able to find the value of each of the fractions $\frac{l1}{\mathrm{L}1}, \frac{l2}{\mathrm{L}2}, \frac{l3}{\mathrm{L}3}, \ldots.$ converging to the root of $\frac{11}{3}$.

Hence, at first making $n = 0$, we will have the four first fractions ; then making $n = 1$, we will have the four following, and hence so on, and these fractions will be

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{21}{11},\ \frac{23}{12},\ \frac{67}{35},\ \frac{90}{47},\ \frac{967}{505},\ \frac{1057}{552},\ \ldots..,$$

If we wanted to have, for example, the 50^{th} term of this series, that is the fraction $\frac{l50}{\mathrm{L}50}$, we would only have to divide 50 by 4, which gives the quotient 12 and the remainder 2 ; and we would have $n=12$; such that in developing the 12^{th} power of $23\pm 4\sqrt{33}$, and making for brevity

$$\begin{aligned}\mathrm{M} &= (23)^{12}+66.33(4)^2(23)^{10}+495(33)^2(4)^4(23)^8+924(33)^3(4)^6(23)^6\\ &\quad +495(33)^4(4)^8(23)^4+66(33)^5(4)^{10}(23)^2+(33)^6(4)^{12},\\ \mathrm{N} &= 12.4(23)^{11}+220(33)(4)^3(23)^9+792(33)^2(4)^5(23)^7+792(33)^3(4)^7(23)^5\\ &\quad +\ 220(33)^4(4)^9(23)^3+12(33)^5(4)^{11}23,\end{aligned}$$

we would have,

$$(23\pm 4\sqrt{33})^n=\mathrm{M}\pm\mathrm{N}\sqrt{33};$$

substituting this value into the expressions for l_{4n+2} and L_{4n+2}, we will have for the fraction sought,

$$\frac{2\mathrm{M}+11\mathrm{N}}{\mathrm{M}+6\mathrm{N}}.$$

64. I am going to finish this note with an observation which appears to me worthy of attention. When the proposed equation has some commensurable divisors of the first degree, then these continued fractions which represent the roots of these divisors, necessarily will be terminated [*i.e.* a finite decimal fraction]; and when the equation will have these commensurable divisors of the second degree for real roots, then the continued fractions which will represent the roots of these divisors necessarily will be periodic. Hence the method of continued fractions not only has the advantage of giving always the closest rational values possible of the root sought, but also can give all the commensurable divisors of the first and second degree that the proposed equation may contain. It would be my desire that we could also find some character which would serve to make known the commensurable divisors of the third, fourth, etc., degrees, when there are some of these in the proposed equation; it is at least an investigation which seems to me very worthy to occupy mathematicians.

CHAPITRE VI.

Sur la manière d'approcher de la valeur numérique des racines des équations par les fractions continues. On a vu dans le chapitre III comment on peut réduire les racine des équations numériques à des fractions continues, et combien ces sortes de réductions sont préférables à toutes les autres : nous allons ajouter ici quelques recherches , pour donner à cette théorie toute la généralité et la simplicité dont elle est susceptible.

ARTICLE PREMIER.

Sur les fractions continues periodiques.

45. Nous avons déjà remarqué dans le § 18, que lorsque la racine cherchée est égale à un nombre commensurable, la fraction continue doit necessarily se terminer; de sorte que

l'on pourra avoir l'expression exacte de la racine; mais il y a encore un autre cas où l'on peut aussi avoir l'expression exacte de la racine, quoique la fraction continue qui la représente aille à l'infini. Ce cas a lieu lorsque la fraction continue est périodique, e'est-à-dire, telle que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre à l'infini; par exemple, si on avait la fraction

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\text{etc.},}}}}$$

il est clair qu'en nommant x la valeur de cette fraction, on aurait

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{x},}$$

ce qui donne cette équation $qx^2-pqx-p=0,$ par laquelle on pourra déterminer $x;$ il en serait de même si la période était d'un plus grand nombre de termes, et l'on trouverait toujours pour la détermination de x une équation du second degré. Il peut aussi arriver que la fraction continue soit irrégulière dans ses premiers termes, et qu'elle ne commence à devenir périodique qu'après un certain nombre de termes ; dans ces cas, on pourra trouver de la même manière la valeur de la fraction, et elle dépendra pareillement toujours d'une équation du second degré; car soit, par exemple, la fraction

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}}}$$

Nommons toute la fraction $x,$ et y la partie qui est périodique, savoir :

$$r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\text{etc.};}}$$

on aura

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{y},}$$

d'où l'on tire $y=\frac{x-p}{1-(x-p)};$ mais l'on a $y=r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{y}},$ ce qui donne $sy^2-rsy-r=0$; donc, substituant pour y sa valeur en $x,$ on aura

$$s(x-p)^2 - rs(x-p)\left[1-q(x-p)\right] - r\left[1-q(x-p)\right]^2 = 0,$$

équation qui, étant développée et ordonnée par rapport à *x,* montera au second degré.

46. On voit, par ce que nous venons de dire, que le cas dont il s'agit doit avoir lieu toutes les fois que, dans la suite des équations transformées (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), etc. du §18, il s'en trouvera deux qui auront les mêmes racines; car si la racine *z*, par exemple, de l' équation (*c*) était la même que la racine *x* de l'équation (*a*), on aurait

$$x = p + \frac{1}{q+\frac{1}{x}},$$

ce qui est le cas que nous avons examiné ci-dessus, et ainsi des autres. Donc, quand on voit que, dans une fraction continue, certains nombres reviennent dans le même ordre, alors pour s'assurer si la fraction doit être réellement périodique à l'infini, il n'y aura qu'à examiner si les racines des deux équations qui ont la même valeur entière approchée sont parfaitement égales, c'est-à-dire si ces deux équations ont une racine commune; ce qu'on reconnaîtra aisément en cherchant leur plus grand commun diviseur, lequel doit necessarily renfermer toutes les racines communes aux deux équations, s'il y en a: or, comme nous avons vu que toute fraction continue périodique se réduit à la racine d'une équation du second degré, il s'ensuit que le plus grand diviseur commun dont nous parlons sera dès du second degré.

47. Supposons donc qu'on ait reconnu que parmi les différentes équations transformées, il s'en trouve deux qui ont la même racine; alors la fraction continue sera dès périodique à l'infini; de sorte qu'on pourra la continuer aussi loin qu'on voudra, en répétant seulement les mêmes nombres; mais voyons comment on pourra dans ce cas continuer aussi la suite des fractions convergentes du § 23 sans être obligé de les calculer toutes l'une après l'autre par les formules données. Pour cet effet, nous supposerons que l'on ait en général

$$x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},\ x_1 = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},\ x_2 = \lambda_3 + \frac{1}{x_3},\ \text{etc.},$$

en sorte que *x* étant la racine cherchée, $x_1,\ x_2,\ x_3,$etc. soient celles des équations transformées que nous avons désignées ailleurs par *y, z, u,* etc., et l'on aura

$$x = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2+\frac{1}{\lambda_3+\text{etc.}}}$$

Donc, faisant comme dans le § cité

$$\left.\begin{array}{ll} l=1, & \mathrm{L}=0, \\ l_1=\lambda_1, & \mathrm{L}_1=1, \\ l_2=\lambda_2 l_1+l, & \mathrm{L}_2=\lambda_2\mathrm{L}_1, \\ l_3=\lambda_3 l_2+l_1, & \mathrm{L}_3=\lambda_3\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1, \\ l_4=\lambda_4 l_3+l_2, & \mathrm{L}_4=\lambda_4\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_2, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{A}),$$

on aura ces fractions convergentes vers x

$$\frac{l}{\mathrm{L}},\ \frac{l_1}{\mathrm{L}_1},\ \frac{l_2}{\mathrm{L}_2},\ \frac{l_3}{\mathrm{L}_3},\ \frac{l_4}{\mathrm{L}_4},\ \text{etc.}$$

Maintenant l'équation $x=\lambda_1+\frac{1}{x_1}$; donnera

$$xx_1=x_1\lambda_1+1=x_1l_1+1;$$

mettons au lieu de x_1, dans le second membre de cette équation, sa valeur $x=\lambda_2+\frac{1}{x_2}$, et multipliant par x_2, on aura $xx_1x_2=(\lambda_2l_1+l)x_2+l_1=l_2x_2+l_1$; on trouvera de même, en substituant dans le second membre de cette équation, $\lambda_3+\frac{1}{x_3}$ à la place de x_2,

$$xx_1x_2x_3=l_3x_3+l_2,$$

et ainsi de suite.

Pareillement l'équation $x_1=\lambda_2+\frac{1}{x_2}$ donnera

$$x_1x_2=\lambda_2x_2+1=\mathrm{L}_2x_2+\mathrm{L}_1;$$

ensuite, substituant dans le second membre $\lambda_3+\frac{1}{x_3}$ à la place de x_2, et multipliant par x_3, on aura

$$x_1x_2x_3=\left(\lambda_3\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1\right)x_3+\mathrm{L}_2=\mathrm{L}_3x_3+\mathrm{L}_2,$$

et ainsi de suite.

D'où il suit qu'on aura en général, quelle que soit la fraction continue, soit périodique ou non,

$$\left.\begin{aligned} xx_1x_2x_3\cdots\cdots x_\rho &= l_\rho x_\zeta + l_{\rho-1} \\ x_1x_2x_3\cdots\cdots x_\rho &= \mathrm{L}_\rho x_\rho + \mathrm{L}_{\rho-1} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{B}).$$

Il faudra bien se souvenir qu'ici et dans les calculs suivans les exposans des quantités *x, l,* L représentent des indices et non des puissances.

48. Cela posé, supposons que l'on ait trouvé , par exemple , $x_{\mu+v} = x_\mu$, c'est-à-dire que la racine de la $(\mu+v)^{\text{iéme}}$ transformée soit égale à celle de la transformée $\mu^{\text{iéme}}$; alors en aura aussi $x_{\mu+v+1} = x_{\mu+1}$, $x_{\mu+v+2} = x_{\mu+2}$, etc., $x_{\mu+2v} = x_\mu$, etc., et en général $x_{\mu+nv+\pi} = x_{\mu+\pi}$; donc aussi $x_{\mu+v+1} = x_{\mu+1}$, $x_{\mu+v+2} = x_{\mu+2}$, etc., et en général $x_{\mu+nv+\pi} = x_{\mu+\pi}$; de sorte que l'on aura

$$x = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + ..}$$
$$\ldots + \cfrac{1}{\lambda_\mu + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+1} + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+2} + \ldots}}}$$
$$\ldots + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+v} + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+v+1} + \ldots}}$$

Maintenant si on suppose en général $\rho = \mu + nv + \pi$, il est facile de voir que les deux équations (B) du numéro précédent deviendront

$$\begin{aligned} &xx_1x_2\cdots\cdots x_\mu \times x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+\pi} \times (x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+v})^n \\ &= l_\rho x_{\mu+\pi} + l_{\rho-1}, \\ &x_1x_2\cdots\cdots x_\mu \times x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+\pi} \times (x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots x_{\mu+v})^n \\ &= \mathrm{L}_\rho x_{\mu+\pi} + \mathrm{L}_{\rho-1}. \end{aligned}$$

Or, en faisant dans les mêmes équations $\rho = \mu$ *,* on a

$$\begin{aligned} xx_1x_2\cdots\cdots x_\mu &= l_\mu x_\mu + l_{\mu-1}, \\ x_1x_2\cdots\cdots x_\mu &= \mathrm{L}_\mu x_\mu + \mathrm{L}_{\mu-1}. \\ &= \mathrm{L}_\rho x_{\mu+\pi} + \mathrm{L}_{\rho-1}. \end{aligned}$$

De plus, à cause de

$$x_\mu = \lambda_{\mu+1} + \frac{1}{x_{\mu+1}},\ x_{\mu+1} = \lambda_{\mu+2} + \frac{1}{x_{\mu+2}} \text{ etc.,}$$

il est clair que si l'on fait

$$\left.\begin{array}{ll} h=1, & \mathrm{H}=0, \\ h_1=\lambda_{\mu+1}, & \mathrm{H}_1=1, \\ h_2=\lambda_{\mu+2}h_1+h, & \mathrm{H}_2=\lambda_{\mu+2}\mathrm{H}_1, \\ h_3=\lambda_{\mu+3}h_2+h_1, & \mathrm{H}_3=\lambda_{\mu+2}\mathrm{H}_2+\mathrm{H}_1, \\ h_4=\lambda_{\mu+4}h_3+h_2, & \mathrm{H}_4=\lambda_{\mu+4}\mathrm{H}_3+\mathrm{H}_2, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{C}),$$

on aura en général

$$\left.\begin{array}{r} x_\mu x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\sigma}=h_\sigma x_{\mu+\sigma}+h_{\sigma-1}, \\ x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\sigma}=\mathrm{H}_\sigma x_{\mu+\sigma}+\mathrm{H}_{\sigma-1} \end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{D}).$$

Donc on aura

$$x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\pi}=\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi}+\mathrm{H}_{\pi-1},$$

et, à cause de $x_{\mu+\nu}=x_\mu\,(\text{hyp.})$,

$$x_{\mu+1}x_{\mu+2}\cdots\cdots x_{\mu+\nu}=\mathrm{H}_\nu x_\mu+\mathrm{H}_{\nu-1}$$

De sorte qu'en faisant ces substitutions dans les deux équations ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned} &\left(l_\mu x_\mu+l_{\mu-1}\right)\times\left(\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi}+\mathrm{H}_{\pi-1}\right)\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu+\mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n \\ &=l_\rho x_{\mu+\pi}+l_{\rho-1}, \\ &\left(\mathrm{L}_\mu x_\mu+\mathrm{L}_{\mu-1}\right)\times\left(\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi}+\mathrm{H}_{\pi-1}\right)\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu+\mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n \\ &=\mathrm{L}_\rho x_{\mu+\pi}+\mathrm{L}_{\rho-1}. \end{aligned}$$

Dans ces formules et dans les suivantes, les exposans des quantités λ, h, H dénotent aussi des indices.

49. Or, les équations (D) étant divisées l'une par l'autre, donnent

$$x_\mu=\frac{h_\sigma x_{\mu+\sigma}+h_{\sigma-1}}{\mathrm{H}_\sigma x_{\mu+\sigma}+\mathrm{H}_{\sigma-1}}\cdots\cdots(\mathrm{E});$$

d'-où l'on tire

$$x_{\mu+\sigma}=\frac{\mathrm{H}_{\sigma-1}x_\mu-h_{\sigma-1}}{h_\sigma-\mathrm{H}_\sigma x_\mu}.$$

Donc, faisant $\sigma=\pi$, on aura $x_{\mu+\pi}=\frac{\mathrm{H}_{\pi-1}x_\mu-h_{\pi-1}}{h_\pi-\mathrm{H}_\pi x_\mu}$, et de là

$\mathrm{H}_\pi x_{\mu+\pi}+\mathrm{H}_{\pi-1}=\frac{h_\pi\mathrm{H}_{\pi-1}-\mathrm{H}_\pi h_{\pi-1}}{h_\pi-\mathrm{H}_\pi x_\mu}$; mais il est facile de voir par la nature des quantités $h,\ h_1,\ h_2$, etc., $\mathrm{H},\ \mathrm{H}_1,\ \mathrm{H}_2$, etc., que l'on a

$$\mathrm{H}_1h-h_1\mathrm{H}=1,\ \mathrm{H}_2h_1-h_2\mathrm{H}_1=-1,\ \mathrm{H}_3h_2-h_3\mathrm{H}_2=1\text{ , etc.;}$$

d'où l'on aura en général

$$h_\pi\mathrm{H}_{\pi-1}-\mathrm{H}_\pi h_{\pi-1}=\pm1,$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque π est un nombre impair, et l'inférieur lorsque π est pair.

Donc, faisant ces substitutions dans les deux dernières équations du numéro précédent, on aura

$$\begin{aligned}&\pm\left(l_\mu x_\mu+l_{\mu-1}\right)\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu+\mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n\\&=\left(l_\rho\mathrm{H}_{\pi-1}-l_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi\right)x_\mu+\left(l_{\rho-1}h_\pi-l_\rho h_{\pi-1}\right),\\&\pm\left(\mathrm{L}_\mu x_\mu+\mathrm{L}_{\mu-1}\right)\times\left(\mathrm{H}_\nu x_\mu+\mathrm{H}_{\nu-1}\right)^n\\&=\left(\mathrm{L}_\rho\mathrm{H}_{\pi-1}-\mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi\right)x_\mu+\left(\mathrm{L}_{\rho-1}h_\pi-\mathrm{L}_\rho h_{\pi-1}\right);\end{aligned}$$

les signes ambigus dépendans du nombre π, comme nous l'avons vu ci-dessus.

Maintenant, si, dans l'équation (E), on fait $\sigma=\nu$, on aura, à cause de $x_{\mu+\nu}=x_\mu\,(\text{hyp.})$,

$$x_\mu=\frac{h_\nu x_\mu+h_{\nu-1}}{\mathrm{H}_\nu x^\mu+\mathrm{H}_{\nu-1}};$$

d'où l'on tire l'equation en x_μ

$$\mathrm{H}_\nu\left(x_\mu\right)^2-\left(h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}\right)x_\mu-h_{\nu-1}=0\cdots\cdots(\mathrm{F}),$$

laquelle donne

$$x_\mu=\frac{h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}+\sqrt{(h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1})^2+4\mathrm{H}_\nu h_{\nu-1}}}{2\mathrm{H}_\nu}.$$

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{P}=\frac{h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}}{2\mathrm{H}_\nu},\quad \mathrm{Q}=\mathrm{P}^2+\frac{h_{\nu-1}}{\mathrm{H}_\nu},$$

en sorte que l'on ait $x_\mu=\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}$; substituant cette valeur

$$\pm\left(l_\mu\mathrm{P}+l_{\mu-1}+l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{H}_\nu\mathrm{P}+\mathrm{H}_{\nu-1}+\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n$$
$$=\left(l_\rho\mathrm{H}_{\pi-1}-l_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi\right)\left(\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}\right)+(l_{\rho-1}h_\pi-l_\rho h_{\pi-1}),$$
$$\pm\left(\mathrm{L}_\mu\mathrm{P}+\mathrm{L}_{\mu-1}+\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{H}_\nu\mathrm{P}+\mathrm{H}_{\nu-1}+\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n$$
$$=\left(\mathrm{L}_\rho\mathrm{H}_{\pi-1}-\mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi\right)\left(\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}\right)+(\mathrm{L}_{\rho-1}h_\pi-\mathrm{L}_\rho h_{\pi-1}),$$

d'où, à cause de l'ambiguïté du radical $\sqrt{\mathrm{Q}}$, on tirera quatre équations, par lesquelles on pourra déterminer $l_\rho,\ l_{\rho-2},\ \mathrm{L}_\rho,\ \mathrm{L}_{\rho-1}$.

50. En effet, supposons, pour abréger,

$$\begin{aligned} l_\mu\mathrm{P}+l_{\mu-1}&=f_\mu,\\ \mathrm{L}_\mu\mathrm{P}+\mathrm{L}_{\mu-1}&=\mathrm{F}_\mu,\\ \mathrm{H}_\nu\mathrm{P}+\mathrm{H}_{\nu-1}&=\mathrm{K}_\nu;\end{aligned}$$

on trouvera ces quatre équations:

$$l_\rho\mathrm{H}_{\pi-1}-l_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi=\pm\frac{\left(f_\mu+l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu+\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n-\left(f_\mu-l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu-\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$l_{\rho-1}h_\pi-l_\rho h_{\pi-1}=\pm\frac{\left(\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(f_\mu-l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu-\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n-\left(\mathrm{P}-\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(f_\mu+l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu+\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$\mathrm{L}_\rho\mathrm{H}_{\pi-1}-\mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{H}_\pi=\pm\frac{\left(\mathrm{F}_\mu+\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu+\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n-\left(\mathrm{F}_\mu-\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu-\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$\mathrm{L}_{\rho-1}h_\pi-\mathrm{L}_\rho h_{\pi-1}=\pm\frac{\left(\mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{F}_\mu-\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu-\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n-\left(\mathrm{P}-\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{F}_\mu+\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu+\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}}.$$

Donc si l'on ajoute la première multipliée par h_π à la seconde multipliée par H_π, et de même la troisième multipliée par h_π à la quatrième multipliée par H_π, et qu'on fasse, pour abréger,

$$-\mathrm{H}_\pi \mathrm{P} + h_\pi = \mathrm{G}_\pi,$$

on aura, à cause de $h_\pi \mathrm{H}_{\pi-1} - \mathrm{H}_\pi h_{\pi-1} = \pm 1$ (§49),

$$l_\rho = \frac{\left(f_\mu + l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi + \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(f_\mu - l_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi - \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}},$$

$$\mathrm{L}_\rho = \frac{\left(\mathrm{F}_\mu + \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi + \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n - \left(\mathrm{F}_\mu - \mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi - \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{Q}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{Q}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{Q}}}.$$

ρ étant égal à $\mu + n\nu + \pi$.

Ainsi, lorsqu'à l'aide des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_{\mu+\nu}$, on aura calculé, par les formules (A) et (C), les quantités l, l_1, l_2, etc., $\mathrm{L}, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$, etc. jusqu'à l_μ et L_μ, et les quantités $h, h_1, h_2, \cdots, \mathrm{H}, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \cdots$ jusqu'à h_ν et H_ν, on pourra, par les formules précédentes, trouver les valeurs de l_ρ et L_ρ, c'est-à-dire les termes de la fraction $\frac{l_\rho}{\mathrm{L}_\rho}$, quelque soit l' exposant du quantième ρ ; car pour cela il n ' y aura qu'à retrancher μ dé ρ, et diviser la différence par ν, le quotient sera le nombre n qui entre dans les formules précédentes comme exposant, et le reste sera le nombre π, qui sera par conséquent toujours moindre que ν .

Quoique les formules précédentes renferment le radical $\sqrt{\mathrm{Q}}$, il est by facile de voir que ce radical s'en ira après le développement; de sorte que les nombres l_ρ et L_ρ seront toujours rationnels ct entiers.

51. Au reste, si l'on voulait trouver en général l'équation du second degré par laquelle peut être déterminée la racine x de l'équation proposée lorsqu'on a $x_{\mu+\nu} = x_\mu$, comme dans le § 48, il n'y aurait qu'à remarquer que les équations (B) du § 47 étant divisées l'une par l'autre, donnent en général

$$x = \frac{l_\rho x_\rho + l_{\rho-1}}{\mathrm{L}_\rho x_\rho + \mathrm{L}_{\rho-1}} \cdots (\mathrm{G}),$$

d'ou l'on tire, enfaisant $\rho = \mu$,

$$x_\mu = \frac{\mathrm{L}_{\mu-1}\, x - l_{\mu-1}}{l_\mu - \mathrm{L}_\mu x};$$

donc, substuant cette valeur de x_μ dans l'équation (F) du § 49, on aura celle-ci

$$\mathrm{H}_\nu\left(\mathrm{L}_{\mu-1}\ x-l_{\mu-1}\right)^2-\left(h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}\right)\left(\mathrm{L}_{\mu-1}\ x-l_{\mu-1}\right)(l_\mu-\mathrm{L}_\mu x)-h_{\nu-1}(l_\mu-\mathrm{L}_\mu x)^2=0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{H}_\nu\mathrm{L}_{\mu-1}^2+\left(h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}\right)\mathrm{L}_{\mu-1}\mathrm{L}_\mu-h_{\nu-1}\mathrm{L}_\mu^2\right]x^2\\&-\left[2\mathrm{H}_\nu\mathrm{L}_{\mu-1}l_{\mu-1}+\left(h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}\right)\left(\mathrm{L}_{\mu-1}l_\mu+l_{\mu-1}l_\mu\right)-2h_{\nu-1}l_\mu\mathrm{L}_\mu\right]x\\&+\left[\mathrm{H}_\nu l_{\mu-1}^2+\left(h_\nu-\mathrm{H}_{\nu-1}\right)l_{\mu-1}l_\mu-h_{\nu-1}l_\mu\right]=0,\end{aligned}$$

et cette équation sera nécessairement un diviseur de l'équation proposée.

ARTICLE II,

Où l'on donne une manière très simple de réduire en fractions continues les racines des équations du second degré .

§ 52. Considérons l'équation générale du second degré

$$\mathrm{E}_1x^2-2\varepsilon x-\mathrm{E}=0,$$

dans laquelle E, E_1 et ε sont supposés des nombres entiers , tels que $\varepsilon^2+\mathrm{E}\mathrm{E}_1>0$, pour que les racines soient réelles; cette équation étant résolue, donne

$$x=\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+\mathrm{E}\mathrm{E}_1}}{\mathrm{E}_1},$$

où le radical peut être pris positivement ou négativement. Supposons que la racine cherchée soit positive, et soit λ_1 le nombre entier qui sera immédiatement plus petit que la valeur de x ; on fera donc $x=\lambda_1+\frac{1}{x_1}$, et substituant cette valeur dans l'équation proposée, on aura une équation transformée dont l'inconnue sera x_1: or, si après avoir fait la substitution, on multiplie toute l'équation par x_1^2, qu'ensuite on change les signes, et qu'on suppose, pour abréger,

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 \mathrm{E}_1 - \varepsilon,$$
$$\mathrm{E}_2 = \mathrm{E} + 2\varepsilon\lambda_1 - \mathrm{E}_1\lambda_1^2,$$

on aura la transformée $\mathrm{E}_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - \mathrm{E}_1 = 0,$ laquelle donnera

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2}}{\mathrm{E}_2}:$$

on cherchera donc le nombre entier λ_2, qui sera immédiatement plus petit que cette valeur de x_1 et on fera

$$x_1 = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$

et ainsi de suite.

Maintenant je remarque que la quantité $\varepsilon_1^2 + \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$, qui est sous le signe dans l'expression de x_1, devient, en substituant les valeurs de ε_1 et de E_2, et ôtant ce qui se détruit, celle-ci , $\varepsilon^2 + \mathrm{E}\mathrm{E}_1$, qui est la même que celle qui est sous le signe dans l'expression de x ; d'où il est facile de conclure que la quantité radicale sera toujours la même dans les expressions de $x, x_1, x_2,$ etc . Donc, si on suppose, pour abréger, $\mathrm{B} = \varepsilon_1^2 + \mathrm{E}\mathrm{E}_1,$ et qu'on fasse (le signe < dénote qu'il faut prendre le nombre entier qui est immédiatement moindre)

$$\lambda_1 < \frac{\varepsilon + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_1},\ \varepsilon_1 = \lambda_1\mathrm{E}_1 - \varepsilon,$$
$$\mathrm{E}_2 = \mathrm{E} + 2\varepsilon\lambda_1 - \mathrm{E}_1\lambda_1^2,\quad \lambda_2 < \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_2},\ \varepsilon_2 = \lambda_2\mathrm{E}_2 - \varepsilon_1,$$
$$\mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_1 + 2\varepsilon_1\lambda_2 - \mathrm{E}_2\lambda_2^2,\ \lambda_3 < \frac{\varepsilon_2 + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_3},\ \varepsilon_3 = \lambda_3\mathrm{E}_3 - \varepsilon_2,$$
$$\mathrm{E}_4 = \mathrm{E}_2 + 2\varepsilon_2\lambda_3 - \mathrm{E}_3\lambda_3^2,\ \lambda_4 < \frac{\varepsilon_3 + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_4},\ \varepsilon_4 = \lambda_4\mathrm{E}_4 - \varepsilon_3,$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

on aura

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_1} = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$
$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_2} = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$
$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_3} = \lambda_3 + \frac{1}{x_3},$$
$$\text{etc.,}$$

d'où

$$x=\lambda_1+\frac{1}{\lambda_2+\frac{1}{\lambda_3+\text{etc.}}}$$

Quant au radical $\sqrt{\mathrm{B}}$, il faudra toujours lui donner le même signe qu'on lui a supposé dans la valeùr de la racine cherchée *x.* On peut observer encore que, comme l'on a trouvé

$$\varepsilon_1^2+\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2=\varepsilon^2+\mathrm{EE}_1=\ \mathrm{B},$$

on aura

$$\mathrm{E}_2=\frac{\mathrm{B}-\varepsilon_1^2}{\mathrm{E}_1},$$

et de même

$$\mathrm{E}_3=\frac{\mathrm{B}-\varepsilon_2^2}{\mathrm{E}_2},\quad \mathrm{E}_4=\frac{\mathrm{B}-\varepsilon_3^2}{\mathrm{E}_3},\quad \text{etc.}.$$

Ainsi on pourra, si on le juge plus commode, employer ces formules à la place de celles qu'on a données plus haut, pour avoir les valeurs de $\mathrm{E}_2,\ \mathrm{E}_3,$ etc.

53. Maintenant je dis que la fraction continue qui exprime la valeur de *x* sera toujours nécessairement périodique.

Pour pouvoir démontrer ce théorème, nous commencerons par prouver en général que, quelle que soit l'équation proposée, on doit toujous nécessairement arriver à des équations transformées dont le premier et le dernier terme soient de signes différents. En effet, nous avons vu dans le § 19 qu'on doit toujours nécessairement arriver à une équation transformée qui n'ait qu'une seule racine plus grande que l'unité, après quoi chacune des transformées suivantes n'aura aussi qu'une seule racine plus grande que l'unité; soit donc

$$au^m+\ bu^{m-1}+cu^{m-2}+\ldots+k=0,$$

une de ces transformées qui n'ont qu'une seule racine plus grande que l'unité, et soit *s* la valeur entière approchée de *u* : on fera, pour avoir la transformée suivante, $u=s+\frac{1}{w}$, ce qui, étant substitué, donnera une transformée dans laquelle il est aisé de voir que le premier terme sera

$$(as^m+\ bs^{m-1}+cs^{m-2}+\ldots+k)w^m,$$

et que le dernier sera *a.* Or, puisque la vraie valeur de *u* dans la transformée précédente tombe entre ces deux-ci : $u=s$ et $u=\infty$, entre lesquelles il ne se trouve aucune autre valeur de *u* (hyp.), il s'ensuit qu'en faisant ces deux substitutions dans l'équation en *u,* on aura nécessairement des résultats de signes contraires; car il est facile de concevoir qu'il n'y aura, en ce cas, qu'un seul des facteurs de cette équation qui pourra changer de signe en passant d'une valeur de *u* à l'autre (§ 5). Mais la supposition de $u=\infty$ donne le résultat au^m (tous les autres termes devenant nuls vis-à-vis de celui-ci), lequel est de même signe que le coefficient *a;* donc il faudra que la supposition de $u=s$ donne un résultat de signe contraire à *a;* mais ce résultat est égal à $as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + ... + k;$ donc, puisque cette quantité est en même temps le coefficient du premier terme de l'équation transformée en *w,* dont le dernier terme est *a,* il s'ensuit que cette transformée aura nécessairement ses deux termes extrêmes de signes différens.

Et on peut prouver de la même manière que cela aura lieu , à plus forte raison, dans toutes les transformées suivantes. Cela posé, puisque l'équation proposée

$$\mathrm{E}_1 x^2 - 2\varepsilon x - \mathrm{E} = 0,$$

donne les transformées (§ 52)

$$\mathrm{E}_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - \mathrm{E}_1 = 0,$$
$$\mathrm{E}_3 x_2^2 - 2\varepsilon_2 x_2 - \mathrm{E}_2 = 0,$$
etc.

il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer, qu'on parviendra nécessairement à des transformées, comme

$$\mathrm{E}_{\gamma+1} x_\gamma^2 - 2\varepsilon_\gamma x_\gamma - \mathrm{E}_\gamma = 0,$$
$$\mathrm{E}_{\gamma+2} x_2^2 - 2\varepsilon_{\gamma+1} x_{\gamma+1} - \mathrm{E}_{\gamma+1} = 0,$$
etc.,

dont les premiers et derniers termes seront de signes différens; de sorte que les nombres $\mathrm{E}_\gamma,\ \mathrm{E}_{\gamma+1}\ ,\ \mathrm{E}_{\gamma+2},....$ seront tous de même signe. Or, on a (§ 52)

$$\mathrm{B} = \varepsilon_\gamma^2 + \mathrm{E}_\gamma \mathrm{E}_{\gamma+1} = \varepsilon_{\gamma+1}^2 + \mathrm{E}_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+2} = \cdots;$$

donc, puisque $\mathrm{E}_\gamma, \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+2},....$ sont de même signe, les produits $\mathrm{E}_\gamma \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+2},....$ seront nécessairement positifs; d'où. il suit,

1°. que l'on aura $\varepsilon_\gamma^2 < \mathrm{B},\ \varepsilon_{\gamma+1}^2 < \mathrm{B}, \cdots,$ c'est-à-dire (en faisant abstraction du signe),

$$\varepsilon_\gamma < \sqrt{\mathrm{B}},\ \varepsilon_{\gamma+1} < \sqrt{\mathrm{B}},$$

et ainsi de suite à l'infini;

2°. Que l'on aura aussi, à cause que les nombres $\mathrm{E},\ \mathrm{E}_1\ ,\ \mathrm{E}_2,....$ sont tous entiers,

$$\mathrm{E}_\gamma < \mathrm{B}, \mathrm{E}_{\gamma+1} < \mathrm{B},\ \mathrm{E}_{\gamma+2} < \mathrm{B},$$

et ainsi de suite. Donc, comme B est donné, il est clair qu'il n'y aura qu'un certain nombre de nombres entiers qui pourront être moindres que B et que $\sqrt{\mathrm{B}}$; de sorte que les nombres $\mathrm{E}_\gamma, \mathrm{E}_{\gamma+1}, \mathrm{E}_{\gamma+2},....\ \varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2},....$ ne pourront avoir qu'un certain nombre de valeurs différentes, et qu'ainsi dans l'une et l'autre de ces séries, si on les pousse à l'infini, il faudra nécessairement que les mêmes termes reviennent une infinité de fois; et, par la même raison, il faudra aussi qu'une même combinaison de termes correspondans dans les deux séries, revienne une infinité de fois; d'où il suit qu'on aura nécessairement, par exemple,

$$\mathrm{E}_{\gamma+\delta+\nu}=\mathrm{E}_{\gamma+\delta} \text{ et } \varepsilon_{\gamma+\delta+\nu}=\varepsilon_{\gamma+\delta},$$

ou bien, faisant $\gamma+\delta=\mu$,

$$\mathrm{E}_{\mu+\nu}=\mathrm{E}_{\mu} \text{ et } \varepsilon_{\mu+\nu}=\varepsilon_{\mu};$$

donc, à cause de

$$\mathrm{B}=\varepsilon_{\mu}^{2}+\mathrm{E}_{\mu}\mathrm{E}_{\mu+1}=\varepsilon_{\mu+\nu}^{2}+\mathrm{E}_{\mu+\nu}\mathrm{E}_{\mu+\nu+1},$$

on aura aussi

$$\mathrm{E}_{\mu+\nu+1}=\mathrm{E}_{\mu+1};$$

mais on a

$$x_{\mu}=\frac{\varepsilon_{\mu}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \text{ et } x_{\mu+\nu}=\frac{\varepsilon_{\mu+\nu}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+\nu+1}};$$

donc $x_{\mu+\nu}=x_{\mu}$; donc la fraction continue sera nécessairement périodique (§ 48).

54. En effet, on voit par les formules du § 52, que si l'on a $\mathrm{E}_{\mu+\nu}=\mathrm{E}_{\mu}$ et $\varepsilon_{\mu+\nu}=\varepsilon_{\mu}$, on aura

$$\mathrm{E}_{\mu+\nu+1}=\mathrm{E}_{\mu+1},\ \lambda_{\mu+\nu+1}=\lambda_{\mu+1}, \text{ et } \varepsilon_{\mu+\nu+1}=\varepsilon_{\mu+1},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général les termes des trois séries $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$, $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, qui auront pour exposant $\mu+n\nu+\pi$, seront les mêmes que les termes précédens, dont les exposans seront $\mu+\pi$ en prenant pour n un nombre quelconque entier positif.

Ainsi chacune de ces trois séries deviendra périodique, à commencer par les termes E_{μ}, ε_{μ}, $\lambda_{\mu+1}$, , et leurs périodes seront de ν termes, après lesquels les mêmes termes reviendront dans le même ordre à l'infini.

55. Nous venons de démontrer qu'en continuant la série des nombres $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ on doit nécessairement trouver des termes consécutifs qui soient de même signe, et qu'ensuite la série doit nécessairement devenir périodique : or, je dis que dès que, dans la même série on sera parvenu à deux termes consécutifs, comme $\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\gamma+1}$, de même signe, on sera assuré que l'un de ces deux termes sera déjà un des termes périodiques, lequel reparaîtra nécessairement dans chaque période.

En effet, comme E_γ et $E_{\gamma+1}$ sont de même signe, il est clair que la transformée

$$E_{\gamma+1}x_\gamma^2 - 2\varepsilon_\gamma x_\gamma - E_\gamma = 0$$

aura nécessairement une racine positive et l'autre négative; de sorte qu'elle n'en pourra avoir qu'une seule qui soit plus grande que l'unité; donc toutes les transformées suivantes auront nécessairement leurs termes extrêmes de signes différens (§ 53), par conséquent tous les nombres $E_\gamma, E_{\gamma+1}, E_{\gamma+2}, \ldots.$ seront de même signe; de sorte que chacun d'eux sera moindre que B, et chacun des nombres $\varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2}, \ldots.$ sera moindre que $\sqrt{B}$ (numéro cité).

56. Or, comme on a

$$B = \varepsilon_\gamma^2 + E_\gamma E_{\gamma+1},$$

il est visible que les nombres E_γ, $E_{\gamma+1}$ seront ou tous les deux moindres que $\sqrt{B}$, ou que si l'un est plus grand, l'autre en sera nécessairement moindre; de sorte qu'il y en aura au moins toujours un qui sera moindre que $\sqrt{B}$. Supposons que ce soit E_γ; je vais prouver que les nombres

$$E_\gamma,\ E_{\gamma+1},\ E_{\gamma+2}, \ldots.\quad \varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2}, \ldots.$$

seront tous nécessairement de même signe que le radical $\sqrt{B}$. En effet, puisque les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ des équations transformées doivent être toutes plus grandes que l'unité par la nature de la fraction continue, on aura donc aussi $x_\gamma > 1$, $x_{\gamma+1} > 1$, et ainsi de suite; donc

$$\frac{\varepsilon_\gamma + \sqrt{B}}{E_{\gamma+1}} > 1,\ \frac{\varepsilon_{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E_{\gamma+2}} > 1, \ldots..,$$

et comme

$$B = \varepsilon_\gamma^2 + E_\gamma E_{\gamma+1} = \varepsilon_{\gamma+1}^2 + E_{\gamma+1}E_{\gamma+2} = \ldots.,$$

on aura

$$\frac{\varepsilon_\gamma + \sqrt{B}}{E_{\gamma+1}} = \frac{E_\gamma}{\sqrt{B} - \varepsilon_\gamma},\quad \frac{\varepsilon_{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E_{\gamma+2}} = \frac{E_{\gamma+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+1}},$$

et ainsi des autres ; donc aussi

$$\frac{E_\gamma}{\sqrt{B} - \varepsilon_\gamma} > 1,\quad \frac{E_{\gamma+1}}{\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+1}} > 1,\quad \ldots..$$

Or, comme ε_γ, $\varepsilon_{\gamma+1}, \ldots.$ sont plus petits que $\sqrt{B}$, il est clair que quel que soit le signe de ces nombres ε_γ, $\varepsilon_{\gamma+1}, \ldots.$, les dénominateurs $\sqrt{B} - \varepsilon_\gamma$, $\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+1}, \ldots..$ seront nécessairement du même signe que $\sqrt{\mathrm{B}}$; donc il faudra que les numérateurs $\mathrm{E}_\gamma, \mathrm{E}_{\gamma+1},....$ soient aussi tous du même signe que $\sqrt{\mathrm{B}}$.

Maintenant, supposons pour plus de simplicité $\sqrt{\mathrm{B}}$ positif, en sorte que $\mathrm{E}_\gamma, \mathrm{E}_{\gamma+1},....$ doivent être aussi tous positifs; je dis que $\varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},....$ le seront aussi. Car soit, s'il est possible, $\varepsilon_\gamma = -\eta$ (η étant un nombre positif), comme $\mathrm{E}_\gamma < \sqrt{\mathrm{B}}$ (hyp.), on aura, à plus forte raison $\mathrm{E}_\gamma < \sqrt{\mathrm{B}} + \eta$, donc $\frac{\mathrm{E}_\gamma}{\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_\gamma} = \frac{\mathrm{E}_\gamma}{\sqrt{\mathrm{B}}+\eta}$ sera < 1, au lieu que cette quantité doit être $>$ I ; donc ε_γ doit être positif. Soit ensuite, s'il est possible, $\varepsilon_{\gamma+1} = -\eta_1$, comme l'on a, par les formules du §.52, $\varepsilon_{\gamma+1} = \lambda_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+1} - \varepsilon_\gamma$, on aura $\lambda_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+1} = \varepsilon_\gamma - \eta_1$, donc, à cause que ε_γ et η_1, sont des nombres positifs moindres que $\sqrt{\mathrm{B}}$, et que $\lambda_{\gamma+1}$ est aussi un nombre entier positif, il est clair que $\mathrm{E}_{\gamma+1}$ devra être moindre que $\sqrt{\mathrm{B}}$; et, dans ce cas, on prouvera, comme ci-devant, que $\varepsilon_{\gamma+1}$ devra être positif, et ainsi de suite.

Si $\sqrt{\mathrm{B}}$ était pris négativement, on prouverait de la même manière que $\varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\gamma+1},....$ devraient être négatifs; et même, sans faire un nouveau calcul, il n'y aurait qu'à remarquer que les formules du numéro cité demeurent les mêmes, en y changeant les signes de toutes les quantités $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,....\ \ \varepsilon, \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,....$, et du radical $\sqrt{\mathrm{B}}$; de sorte qu'on pourra toujours regarder ce radical comme positif, en prenant les quantités $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,....\ \ \varepsilon, \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,....$ avec des signes contraires.

57. Cela posé, je dis que si deux termes correspondans quelconques des suites $\mathrm{E}_\gamma, \mathrm{E}_{\gamma+1},\ \mathrm{E}_{\gamma+2},....\ \ \varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},....$ sont donnés, tous les précédens dans les mêmes suites seront nécessairement donnés aussi. Supposons, par exemple, que $\mathrm{E}_{\gamma+3}$ et $\varepsilon_{\gamma+3}$ soient donnés (on verra aisément que la demonstration est générale, quels que soient les termes donnés), et voyons quels doivent être les termes qui précèdent ceux-ci, en vertu des formules du §52, et des conditions du numéro précédent. On aura d'abord

$$\varepsilon_{\gamma+3} = \lambda_{\gamma+3}\mathrm{E}_{\gamma+3} - \varepsilon_{\gamma+2};$$

donc

$$\varepsilon_{\gamma+2} = \lambda_{\gamma+3}\mathrm{E}_{\gamma+3} - \varepsilon_{\gamma+3};$$

mais on doit avoir $\mathrm{E}_{\gamma+2} < \sqrt{\mathrm{B}}$; donc il faudra que l'on ait

$$\lambda_{\gamma+3} < \frac{\varepsilon_{\gamma+3}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+3}}.$$

On aura de même

$$\varepsilon_{\gamma+1} = \lambda_{\gamma+2}\mathrm{E}_{\gamma+2} - \varepsilon_{\gamma+2},$$

d'où, à cause de $\varepsilon_{\gamma+1} < \sqrt{B}$, on tirera

$$\lambda_{\gamma+2} < \frac{\varepsilon_{\gamma+2} + \sqrt{B}}{E_{\gamma+2}};$$

mais il faut, par la nature de la fraction continue, que $\lambda_{\gamma+2}$ soit un nombre entier positif; donc il faudra que l'on ait

$$\varepsilon_{\gamma+2} + \sqrt{B} > E_{\gamma+2};$$

or, on a aussi

$$E_{\gamma+2}E_{\gamma+3} = B - \varepsilon_{\gamma+2}^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon_{\gamma+2})(\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+2});$$

donc

$$\sqrt{B} - \varepsilon_{\gamma+2} < E_{\gamma+3},$$

savoir : en mettant pour $\varepsilon_{\gamma+2}$ sa valeur ci-dessus,

$$\sqrt{B} - \lambda_{\gamma+3}E_{\gamma+3} + \varepsilon_{\gamma+3} < E_{\gamma+3},$$

d'où

$$\lambda_{\gamma+3} > \frac{\varepsilon_{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E_{\gamma+3}} - 1.$$

Donc, puisque le nombre $\lambda_{\gamma+3}$ doit être entier, il est clair qu'il ne pourra être égal qu'au nombre entier qui sera immédiatement plus petit que $\frac{\varepsilon_{\gamma+3} + \sqrt{B}}{E_{\gamma+3}}$; ainsi $\lambda_{\gamma+3}$ sera donné, et de là $\varepsilon_{\gamma+2}$ le sera aussi, et comme

$$E_{\gamma+2} = \frac{B - \varepsilon_{\gamma+2}^2}{E_{\gamma+3}},$$

il est clair que $E_{\gamma+2}$ sera aussi donné. Maintenant on aura

$$\varepsilon_{\gamma} = \lambda_{\gamma+1}E_{\gamma+1} - \varepsilon_{\gamma+1},$$

et par conséquent, à cause de $\varepsilon_{\gamma} < \sqrt{B}$,

$$\lambda_{\gamma+1} < \frac{\varepsilon_{\gamma+1} + \sqrt{B}}{E_{\gamma+1}}.$$

Donc, pour que $\lambda_{\gamma+1}$ soit entier positif, tel qu'il doit être, il faudra que

$$\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{\mathrm{B}}>\mathrm{E}_{\gamma+1};$$

par conséquent, à cause de

$$\mathrm{E}_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+2}=\mathrm{B}-\varepsilon_{\gamma+1}^{2},$$

il faudra que

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma+1}<\mathrm{E}_{\gamma+2},$$

ou bien , en mettant pour $\varepsilon_{\gamma+1}$ sa valeur ci-dessus,

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\lambda_{\gamma+2}\mathrm{E}_{\gamma+2}+\varepsilon_{\gamma+2}<\mathrm{E}_{\gamma+2},$$

d'où l'on tire

$$\lambda_{\gamma+2}>\frac{\varepsilon_{\gamma+2}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}}-1.$$

De sorte que le nombre $\lambda_{\gamma+2}$ ne pourra être que le nombre entier qui sera immédiatement plus petit que la quantite, donnée $\frac{\varepsilon_{\gamma+2}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+2}}$; donc ce nombre sera donné, et par là les nombres $\varepsilon_{\gamma+1}$ et $\mathrm{E}_{\gamma+1}$ le seront aussi.

Enfin, puisque E_{γ} est (hyp.) $<\sqrt{\mathrm{B}}$, on aura, à plus forte raison, $\varepsilon_{\gamma}+\sqrt{\mathrm{B}}>\mathrm{E}_{\gamma}$; et de là, à cause de $\mathrm{E}_{\gamma}\mathrm{E}_{\gamma+1}=\mathrm{B}-\varepsilon_{\gamma}^{2}$, on aura

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\gamma}<\mathrm{E}_{\gamma+1},$$

ou bien, en substituant pour ε_{γ} sa valeur trouvée ci-dessus,

$$\sqrt{\mathrm{B}}-\lambda_{\gamma+1}\mathrm{E}_{\gamma+1}+\varepsilon_{\gamma+1}<\mathrm{E}_{\gamma+1},$$

ce qui donne

$$\lambda_{\gamma+1}>\frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\gamma+1}}-1.$$

Donc le nombre $\lambda_{\gamma+1}$ ne pourra être que le nombre entier qui est immédiatement moindre que la quantite donnée $\frac{\varepsilon_{\gamma+1}+\sqrt{B}}{E_{\gamma+1}}$, et par conséquent ce nombrë sera entièrement donné, et les nombres ε_{γ} et E_{γ} le seront aussi.

Or, nous avons vu (§53) qu'en continuant les séries $E_{\gamma},\ E_{\gamma+1},....\ \varepsilon_{\gamma},\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},....$ il arrivera nécessairement que deux termes correspondans, comme $E_{\gamma+\delta},\ \varepsilon_{\gamma+\delta}$, reparaîtront après un cèrtain nombre d'autres termes; en sorte que l'on aura, par exemple,

$$E_{\gamma+v+\delta}=E_{\gamma+\delta},\ \varepsilon_{\gamma+v+\delta}=\varepsilon_{\gamma+\delta};$$

donc, par ce que nous venons de démontrer, on aura aussi en remontant,

$$\begin{array}{ll} E_{\gamma+v+\delta-1}=E_{\gamma+\delta-1}, & \varepsilon_{\gamma+v+\delta-1}=\varepsilon_{\gamma+\delta-1}, \\ E_{\gamma+v+\delta-2}=E_{\gamma+\delta-2}, & \varepsilon_{\gamma+v+\delta-2}=\varepsilon_{\gamma+\delta-2}, \\ \text{..............................}, & \text{............................}, \\ E_{\gamma+v}=E_{\gamma}, & \varepsilon_{\gamma+v}=\varepsilon_{\gamma}. \end{array}$$

58. De là je conclus en général, que lorsque dans la série des nombres $E,\ E_1,\ E_2,\ ...$ on en trouvera deux consécutifs de même signe, celui des deux qui sera moindre que $\sqrt{B}$ sera déjà nécessairement périodique.

Ainsi, si dans l'équation proposée $E_1x^2-2\varepsilon x-E=0,$ les coefficiens E et E_1 étaient de même signe, la série serait périodique dès le premier ou le second terme. Si l'on a $\varepsilon=0$, en sorte que $x=\sqrt{\frac{E}{E_1}}$, alors on aura $B=EE_1;$ d'où l'on voit que des deux nombres $E,\ E_1,$ le plus petit sera moindre que $\sqrt{B}$, et le plus grand sera nécessairement plus grand que $\sqrt{B}$ *;* donc , dans ce cas, si le nombre $\frac{E}{E_1}$ dont il s'agit d'extraire la racine carrée est plus petit que l'unité, la série sera périodique dès le premier terme E ; et, s'il est plus grand que l'unité, la période ne pourra pas commencer plus bas qu'au second terme.

59. On avait remarqué depuis long-temps que toute fraction continue périodique pouvait toujours se ramener à une équation du second degré; mais personne, que je sache, n'avait encore démontré l'inverse de cette proposition, savoir que toute racine d'une équation du second degré se réduit toujours nécessairement en une fraction continue périodique. Il est vrai que *Euler,* dans un excellent Mémoire imprimé au tome XI des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, a observé'que la racine carré d'un nombre entier se réduisait toujours en une fraction continue périodique; mais ce théorème qui

n'est qu'un cas particulier du nôtre, n'a pas été démontré par *Euler,* et ne peut l'étre, ce me semble, que par le moyen des principes que nous avons établis plus haut.

60. Nous avons donné ci-dessus des formules générales pour trouver aisément tous les termes des fractions convergentes vers la racine d'une équation donnée, lorsqu'on a reconnu que la fraction continue qui exprime cette racine, est périodique.

Or , dans le cas où l'équation est du second degré , et où l'on se sert de la méthode du §52, on pourra , si l'on veut, simplifier beaucoup les calculs des §48 et suivans, pour trouver les termes l_ρ et L_ρ de chacune des fractions convergentes vers *x*. En effet, ayant

$$x_\mu=\frac{\sqrt{\mathrm{B}}+\varepsilon_\mu}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\quad\text{et}\quad x_{\mu+\pi}=\frac{\sqrt{\mathrm{B}}+\varepsilon_{\mu+\pi}}{\mathrm{E}_{\mu+\pi+1}},$$

ou ε_μ, $\varepsilon_{\mu+\pi}$, $\mathrm{E}_{\mu+1}$, et $\mathrm{E}_{\mu+\pi+1}$ sont connues (π étant $<\nu$) il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans les deux équations du §48; et faisant pour abréger,

$$\frac{l_\mu\varepsilon_\mu}{\mathrm{E}_{\mu+1}}+l_{\mu-1}=f_\mu,$$

$$\frac{\mathrm{L}_\mu\varepsilon_\mu}{\mathrm{E}_{\mu+1}}+\mathrm{L}_{\mu-1}=\mathrm{F}_\mu,$$

$$\frac{\mathrm{H}_\nu\varepsilon_\mu}{\mathrm{E}_{\mu+1}}+\mathrm{H}_{\nu-1}=\mathrm{K}_\nu,$$

$$\mathrm{H}_\pi\varepsilon_{\mu+\pi}+\mathrm{H}_{\pi-1}\mathrm{E}_{\mu+\pi+1}=\mathrm{G}_\pi,$$

on aura

$$\left(f_\mu+\frac{l_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi+\mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu+\frac{\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)^n=l_\rho\varepsilon_{\mu+\pi}+l_{\rho-1}\mathrm{E}_{\mu+\pi+1}+l_\rho\sqrt{\mathrm{B}},$$

$$\left(\mathrm{F}_\mu+\frac{\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi+\mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu+\frac{\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)^n=\mathrm{L}_\rho\varepsilon_{\mu+\pi}+\mathrm{L}_{\rho-1}\mathrm{E}_{\mu+\pi+1}+\mathrm{L}_\rho\sqrt{\mathrm{B}},$$

d'où, à cause de l'ambiguïté du signe du radical $\sqrt{\mathrm{B}}$, on tire aur-le-champ

$$l_\rho = \frac{\left(f_\mu + \frac{l_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi + \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \frac{\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)^n - \left(f_\mu - \frac{l_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi - \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \frac{\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{B}}},$$

$$\mathrm{L}_\rho = \frac{\left(\mathrm{F}_\mu + \frac{\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi + \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu + \frac{\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)^n - \left(\mathrm{F}_\mu - \frac{\mathrm{L}_\mu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)\left(\mathrm{G}_\pi - \mathrm{H}_\pi\sqrt{\mathrm{B}}\right)\left(\mathrm{K}_\nu - \frac{\mathrm{H}_\nu\sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}}\right)^n}{2\sqrt{\mathrm{B}}},$$

ρ étant, comme plus haut, $= \mu + n\nu + \pi$.

61. On peut aussi remarquer que la valeur de L_ρ peut se déterminer par le moyen de celle de l_ρ et $l_{\rho-1}$, sans avoir besoin d'un nouveau calcul.

En effet, ayant

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon},$$

et de méme

$$x_\rho = \frac{\mathrm{E}_\rho}{\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon_\rho},$$

on aura par l'équation (G) du § 5I,

$$\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon} = \frac{l_\rho \mathrm{E}_\rho + l_{\rho-1}(\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon_\rho)}{\mathrm{L}_\rho \mathrm{E}_\rho + \mathrm{L}_{\rho-1}(\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon_\rho)},$$

savoir

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{L}_\rho \mathrm{E}_\rho + \mathrm{L}_{\rho-1}(\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon_\rho)\right] = l_\rho \mathrm{E}_\rho(\sqrt{\mathrm{B}} - \varepsilon) + l_{\rho-1}\left[\mathrm{B} + \varepsilon\varepsilon_\rho - (\varepsilon_\rho + \varepsilon)\sqrt{\mathrm{B}}\right],$$

de sorte qu'en comparant la partie rationnelle avec la rationnelle, et l'irrationnelle avec l'irrationnelle·, on aura

$$\mathrm{L}_{\rho-1} = \frac{l_\rho \mathrm{E}_\rho - \mathrm{L}_{\rho-1}(\varepsilon_\rho + \varepsilon)}{\mathrm{E}},$$

$$\mathrm{L}_\rho \mathrm{E}_\rho - \mathrm{L}_{\rho-1}\varepsilon_\rho = \frac{-l_\rho \mathrm{E}_\rho \varepsilon + l_{\rho-1}(\mathrm{B} + \varepsilon\varepsilon_\rho)}{\mathrm{E}},$$

d'où, à cause de $\mathrm{B} - \varepsilon_\rho^2 = \mathrm{E}_\rho \mathrm{E}_{\rho+1}$, on aura

$$\mathrm{L}_\rho = \frac{l_\rho(\varepsilon_\rho - \varepsilon) + l_{\rho-1}\mathrm{E}_{\rho+1}}{\mathrm{E}}.$$

Or, ρ étant égal à $\mu + n\nu + \pi$, on aura

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho+\pi}, \quad \mathrm{E}_{\rho+1} = \mathrm{E}_{\rho+\pi+1},$$

de sorte que ρ et $\mathrm{E}_{\rho+1}$ seront connus, quel que soit le quantième ρ

62. Supposons, pour donner un exemple de l'application des formules précédentes , qu'on demande la racine carrée de $\frac{11}{3}$ par une fraction continue. Faisant $x = \sqrt{\frac{11}{3}}$ on aura l'équation $3x^2 - 11 = 0$; donc (§ 52)

$$\mathrm{E} = 11,\ \mathrm{E}_1 = 3\ ,\ \varepsilon = 0;$$

ainsi l'on fera (§ 53) le calcul suivant, en prenant $\mathrm{B} = 33$,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{E} = 11, & \varepsilon = 0, \\
\mathrm{E}_1 = \frac{33-0}{11} = 3,\ \ \lambda_1 < \frac{\sqrt{33}+0}{3} = 1, & \varepsilon_1 = 1.3 - 0 = 3, \\
\mathrm{E}_2 = \frac{33-9}{3} = 8,\ \ \lambda_2 < \frac{\sqrt{33}+3}{8} = 1, & \varepsilon_2 = 1.8 - 3 = 5, \\
\mathrm{E}_3 = \frac{33-25}{8} = 1,\ \lambda_3 < \frac{\sqrt{33}+5}{1} = 10, & \varepsilon_3 = 10.1 - 5 = 5, \\
\mathrm{E}_4 = \frac{33-25}{1} = 8,\ \lambda_4 < \frac{\sqrt{33}+5}{8} = 1, & \varepsilon_4 = 1.8 - 5 = 3, \\
\mathrm{E}_5 = \frac{33-9}{8} = 3,\ \ \lambda_5 < \frac{\sqrt{33}+3}{3} = 2, & \varepsilon_5 = 2.3 - 3 = 3.
\end{array}$$

Je m'arrête ici parce que je vois que $\mathrm{E}_5 = \mathrm{E}_1$ et $\varepsilon_5 = \varepsilon_1$; de sorte que j'aurai, dans ce cas, $\mu = 1$ et $\nu = 4$, et par conséquent

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \text{etc.}}}}}}}$$

63. Telle est donc la fraction continue qui exprime la valeur de $\sqrt{\frac{11}{3}}$ *;* mais si on veut trouver les fractions convergentes vers cette valeur, on fera dans les formules du § 60, $\mu = 1,\ \nu = 4,$ et comme π doit être < 4*,* on fera successivement $\pi = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$ On aura donc (form. A, § 47)

$$l_\mu = l_1 = \lambda_1 = 1;\ l_{\mu-1} = l = 1,\ \varepsilon_\mu = \varepsilon_1 = 3, \mathrm{E}_{\mu+1} = \mathrm{E}_2 = 8;$$

donc (§ 60)

$$f_\mu = \tfrac{1.3}{8} + 1 = \tfrac{11}{8};$$

on trouvera de même

$$\mathrm{L}_\mu = 1,\ \ \mathrm{F}_\mu = \tfrac{3}{8}.$$

Ensuite on calculera les valeurs de $\mathrm{H},\ \mathrm{H}_1, \ldots$..jusqu'à $\mathrm{H}_\nu = \mathrm{H}_1,$ par les formules (C) du §48, et l'on trouvera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H} = 0,\\
&\mathrm{H}_1 = 1,\\
&\mathrm{H}_2 = \lambda_3 \mathrm{H}_1 = 10,\\
&\mathrm{H}_3 = \lambda_1 \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_1 = 11,\\
&\mathrm{H}_4 = \lambda_3 \mathrm{H}_3 + \mathrm{H}_2 = 32,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{H}_\nu = 32,\ \ \mathrm{H}_{\nu-1} = 11,$$

et de là

$$\mathrm{K}_\nu = \tfrac{32.3}{8} + 11 = 23.$$

Maintenant :

1°. Soit $\pi = 0$, on aura

$$\mathrm{H}_\pi = 0 \ \text{ et } \mathrm{H}_{\pi-1} = 1;$$

car il est facile de voir, par la nature des formules (C) que le terme qui précéderaet H serait nécessairement $= 1$: en effet, on doit avoir par l'analogie

$$\mathrm{H}_1 = \lambda_{\mu+1}\mathrm{H} + \mathrm{H}_{-1}\ ;$$

on prouverait de même que le terme qui précéderait h serait $= 0$. Donc

$$\mathrm{G}_\pi = \mathrm{E}_{\mu+1} = 8.$$

2°. Soit $\pi = 1$, on aura

$$\mathrm{H}_\pi = 1,\ \ \mathrm{H}_{\pi-1} = 0;$$

donc

$$\mathrm{G}_\pi = \varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_2 = 5.$$

3°. Soit $\pi = 2$, donc

$$\mathrm{H}_{\pi} = 10,\ \mathrm{H}_{\pi-1} = 1,\ \mathrm{G}_{\pi} = 10\varepsilon_{\mu+2} + 1,\ \mathrm{E}_{\mu+3} = 10\varepsilon_3 + \mathrm{E}_1 = 58.$$

4°. Soit $\pi = 3$, donc

$$\mathrm{H}_{\pi} = 11,\ \mathrm{H}_{\pi-1} = 10,\ \text{et } \mathrm{G}_{\pi} = 11\varepsilon_4 + 10\mathrm{E}_5 = 63.$$

Donc, substituant ces valeurs dans les expressions de l_ρ et L_ρ du § 60, et multipliant ensemble, pour plus de simplicité, les deux facteurs

$$f_\mu \pm \frac{l_\mu \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}},\ \ \mathrm{G}_\pi \pm \mathrm{H}_\pi \sqrt{\mathrm{B}},$$

comme aussi les deux

$$\mathrm{F}_\mu \pm \frac{\mathrm{L}_\mu \sqrt{\mathrm{B}}}{\mathrm{E}_{\mu+1}},\ \ \mathrm{G}_\pi \pm \mathrm{H}_\pi \sqrt{\mathrm{B}},$$

ce qui donne ces facteurs simples

$$f_\mu \mathrm{G}_\pi + \frac{l_\mu \mathrm{H}_\pi \mathrm{B}}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \pm \left(f_\mu \mathrm{H}_\pi + \frac{l_\mu \mathrm{G}_\pi}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \right)\sqrt{\mathrm{B}},$$

$$\mathrm{F}_\mu \mathrm{G}_\pi + \frac{\mathrm{L}_\mu \mathrm{H}_\pi \mathrm{B}}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \pm \left(\mathrm{F}_\mu \mathrm{H}_\pi + \frac{\mathrm{L}_\mu \mathrm{G}_\pi}{\mathrm{E}_{\mu+1}} \right)\sqrt{\mathrm{B}},$$

on aura les formules suivantes :

$$l_{4n+1} = \frac{(11+\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (11-\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$\mathrm{L}_{4n+1} = \frac{(3+\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (3-\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+3} = \frac{(121+21\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (121-21\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$\mathrm{L}_{4n+3} = \frac{(63+11\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (63-11\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+4} = \frac{(132+23\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (132-23\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

$$\mathrm{L}_{4n+4} = \frac{(69+12\sqrt{33})\left(23+4\sqrt{33}\right)^n - (69-12\sqrt{33})\left(23-4\sqrt{33}\right)^n}{2\sqrt{33}},$$

au moyen desquelles on pourra trouver la valeur de chacune des fractions $\frac{l1}{\mathrm{L1}}, \frac{l2}{\mathrm{L2}}, \frac{l3}{\mathrm{L3}},....$ convergentes vers la racine de $\frac{11}{3}$.

Ainsi, faisant d'abord $n=0,$ on aura les quatre premières fractions; faisant ensuite $n=1,$ on aura les quatre suivantes, et ainsi de suite, et ces fractions seront

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{21}{11}, \frac{23}{12}, \frac{67}{35}, \frac{90}{47}, \frac{967}{505}, \frac{1057}{552}, ...,$$

Si l'on voulait avoir, par exemple, le cinquième terme de cette série, c'est à-dire la fraction $\frac{l50}{\mathrm{L50}},$, il n'y aurait qu'à diviser 50 par 4, ce qui donne 12 de quotient et 2 de reste; et l'on ferait $n=12$; de sorte qu'en développant la puissance douzième de $23\pm4\sqrt{33}$, et faisant pour abréger

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= (23)^{12} + 66.33(4)^2(23)^{10} + 495(33)^2(4)^4(23)^8 + 924(33)^3(4)^6(23)^6 \\
&\quad + 495(33)^4(4)^8(23)^4 + 66(33)^5(4)^{10}(23)^2 + (33)^6(4)^{12}, \\
\mathrm{N} &= 12.4(23)^{11} + 220(33)(4)^3(23)^9 + 792(33)^2(4)^5(23)^7 + 792(33)^3(4)^7(23)^5 \\
&\quad + 220(33)^4(4)^9(23)^3 + 12(33)^5(4)^{11}23,
\end{aligned}$$

on aura donc,

$$(23\pm4\sqrt{33})^n = \mathrm{M}\pm\mathrm{N}\sqrt{33};$$

substituant cette valeur dans les expressions de l_{4n+2} et $\mathrm{L}_{4n+2},$ on aura pour la fraction cherchée ,

$$\frac{2\mathrm{M}+11\mathrm{N}}{\mathrm{M}+6\mathrm{N}}.$$

64. Je vais terminer cette remarque par une observation qui me parait digne d'attention. Lorsque l'équation proposée a des diviseurs commensurables du premier degré, alors les fractions continues qui représenteront les racines de ces diviseurs, seront nécessairement terminées; et lorsque l'équation aura des diviseurs commensurables du second degré à racines réelles, alors les fractions continues qui exprimeront les racines de ces diviseurs seront nécessairement périodiques. Ainsi la méthode des fractions continues a non-seulement l'avantage de donner toujours les valeurs rationnelles les plus approchantes qu'il est possible de la racine cherchée ; mais elle a encore celui de donner tous les diviseurs commensurables du premier et du second degré que l'équation proposée peut renfermer. Il serait à souhaiter que l'on pût trouver aussi quelque caractère qui pût servir à faire reconnaitre les diviseurs commensurables des troisièmè, quatrième, etc., degrés,

lorsqu'il y en a dans l'équation proposée; c'est du moins une recherche qui me paraît très digne d'occuper les Géomètres.