ARTICLE III.

Generalisation of the theory of continued fractions.

65. We have assumed [for continued fractions] in chapter III that the numbers p, q, r, etc, are whole numbers approximating the roots x, y, z, etc, but smaller than these roots, *i.e.* that p, q, r, etc , being whole numbers which will be immediately smaller than the values of x, y, z, etc ; yet it is clear that nothing prevents us from taking for p, q, r, etc., the whole numbers which will be immediately greater than the roots x, y, z, etc.

66. Thus considering that we may take for p the whole number which is immediately greater than x, such that $p > x$ and $p-1 < x$, it is clear that it will be required in this case $x = p - \frac{1}{y}$, that is it will be required to take y negatively, and since $x < p$ and $> p-1$, we will have $\frac{1}{y} > 0$ and <1, and consequently $y > 1$, as in this case where we would have taken p smaller than x (§18). Hence again we will have to take for q, either the whole number which will be immediately smaller than y, or that which will be immediately larger, and in the first case we will have , $y = q + \frac{1}{z}$, but in the second, $y = q - \frac{1}{z}$, and so on thus. In this manner we would have $x = p \pm \frac{1}{y}$, $y = q \pm \frac{1}{z}$, $z = r \pm \frac{1}{u}$,......, which would give the continued fraction

$$x = p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cfrac{1}{s \pm \ldots,}}}$$

where it is worth noting that each of the denominators q, r, etc. , which will be followed by the $-$ sign, necessarily must be $=2$, or >2 ; for, since $y > 1$, if we make $y = q - \frac{1}{z}$, we will have $q - \frac{1}{z} > 1$, thus $q + \frac{1}{z} > 1$, thus q must be a whole number, which necessarily will be $=2$, or >2; and thus for the others.

67. Now I note that these kinds of fractions which proceed by addition and subtraction, can always be changed easily into others which can be formed only by simple addition. Indeed, assuming in general

$$a - \frac{1}{t} = \mathrm{A} + \frac{1}{\mathrm{T}},$$

a and A have to be whole numbers, and t, T numbers greater than one ; thus we will have

$$a - \mathrm{A} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{T}};$$

then, since $\frac{1}{t}<1$ and $\frac{1}{\mathrm{T}}<1$, $\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{T}}$ will be <2 ; thus we will be able to suppose only that $a-\mathrm{A}=1$, which gives $\mathrm{A}=a-1$; we will have thus $a-\frac{1}{t}=a-1+\frac{1}{\mathrm{T}}$; thus

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=1-\frac{1}{t}, \text{ and } \mathrm{T}=\frac{1}{t-1}=1+\frac{1}{t-1};$$

such that we will have in general

$$a-\frac{1}{t}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{t-1}},$$

and this formula will serve to make all the − signs disappear in any continued fraction.

For example, let the fraction be

$$p-\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\ldots,}}$$

it will become, on making $a=p$ and $t=q+\frac{1}{r},\ldots,$

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1+\cfrac{1}{r+\ldots,}}}.$$

If we had the fraction

$$p-\cfrac{1}{q-\cfrac{1}{r-\ldots,}}$$

initially it would be changed into

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1-\cfrac{1}{r-}\ldots,}}$$

and then into

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r-1\ldots,}}}}$$

and hence other similar fractions. It is well worth noting it can happen that, in these kinds of transformations, some of these denominators may become zero, for which case the fraction will become more simple.

Indeed, assuming that the fraction may be reduced to

$$p-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r+\ldots,}},$$

the transformed fraction will be

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{r+\ldots\ldots,}}}$$

that is,

$$p-1+\frac{1}{1+r+\ldots..}$$

In the same manner, if we had the fraction

$$p-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{r+\ldots..,}}$$

it may be reduced to this :

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r-1+\ldots\ldots,}}}}$$

to wit,

$$p-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{r-1+\ldots..,}}$$

and hence for the rest.

68. The formula which we have found above, and which we can put into this form,

$$a+\cfrac{1}{1+\frac{1}{t}}=a+1-\frac{1}{t+1},$$

shows that a continued fraction of which all the terms have the $+$ sign, can sometimes be simplified by introducing there some negative signs $-$; that is what happens when some denominators are equal to one ; for there shall be, for example, the fraction

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r+\ldots.,}}$$

it will be able to be reduced by the preceding formula to this,

$$p+1-\frac{1}{r+1+\ldots.,}$$

which has, as we see, a term less; thus if we had the fraction

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{s+\ldots.,}}}$$

it would be reduced to this

$$p+1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{s+\ldots\ldots;}};$$

and if we had this one:

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{s+\ldots\ldots}}}}$$

it would be reduced at first to

$$p+1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{s+\ldots\ldots,}}}$$

and then to :

$$p+1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{s+1+\ldots\ldots,}}$$

from where it is easy to conclude, in general, that if we have a continued fraction which has only positive signs $+$, and where it may have some denominators equal to unity, we can always change that into another which may have just as many terms less as it would have denominators equal to unity, provided that they do not follow immediately; for, when there will be two following , we can make only a single term vanish ; when there will be three following, we will be able to make two disappear ; and in general, if there are $2n$, or $2n+1$ following, we will be able to make only n or $n+1$ terms vanish.

Hence, the continued fraction which expresses the ratio of the circumference to the diameter of a circle being, as we know,

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots,}}}}}}}}$$

that can be reduced to another which now has three terms less, and which will be

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3+\ldots\ldots,}}}}}$$

69. In order to take under the same general form the continued fractions where the signs are all positive, and these where there are some negative signs, it is worthwhile to transform these latter, such that the denominators are affected only by negative signs, which is very easy; as having, for example, the fraction

$$p-\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r-\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

it is clear that at first that this can be changed into

$$p+\cfrac{1}{-q-\cfrac{1}{r-\cfrac{1}{s+\ldots,}}};$$

then into this,

$$p+\cfrac{1}{-q+\cfrac{1}{-r+\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

and hence for the others.

In this way, the general form of the continued fractions we have just discussed above, will be

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\ldots,}}$$

of which the numbers $p, q, r,$ etc. all being whole, but which can be positive or negative, rather than as until now we have always assumed them positive. Nevertheless it is required to note that, if any of the denominators $q, r, \ldots..$ found equal to unity taken positively or negatively, then the following denominator must always be of the same sign ; that it, what followed a positive denominator equal to unity was never known to be followed by a negative sign − (§ 68).

70. It follows from that , that the method of approximation given in Chapter III, may be able to be generalised in this manner. Let x be the root so sought, we will take at first for p the approximate whole value of x, that is we will make p equal to one of the two whole numbers between which the true value of x falls, and which we can always find by the method of Ch. I, then we assume

$$x=p+\frac{1}{y},$$

which will give a transformation in y which will be necessarily a positive or negative root greater than one; likewise we will take for q the nearest whole number value of y, to be larger of smaller than y, and we will make

$$y = q + \tfrac{1}{z},$$

and thus henceforth. If the equation in x had several roots, we would make on the transformations in y, z, u, etc. remarks similar to these of §19. Thus having

$$x = p + \tfrac{1}{y},\ \ y = q + \tfrac{1}{z},\ z = r + \tfrac{1}{u},\ .....,$$

we will have

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + ...,}}$$

where the denominators q, r, etc. will be able to be positive or negative, as we have assumed above, and this fraction itself will be able to be reduced, if wished, to another of which the denominators shall be all positive, and which besides contain only positive signs + (§ 67).

The advantage of the method we propose here, consists in that we are free to take for the numbers p, q, r, etc. the whole numbers which are immediately larger or smaller than the roots x, y, z, etc. [*i.e.* to the same degree of accuracy], which will be able to accommodate the abbreviations of the calculation of which we say more below.

For the remainder, if we wish to have the shortest continued fraction, and consequently the most convergence that shall be possible, it will be required always to take the numbers p, q, r, etc. smaller than the roots x, t, z, etc., while these numbers will be less than unity; but, as soon as we have found one equal to unity, then it will be required to increase the preceding one by unity, that is, we will take that value greater than the value of the corresponding root; this evidently follows from what we have shown on this subject (§ 68).

71. Now, if we make, as in § 23,

$$\begin{array}{ll}
\alpha = p, & \alpha' = 1, \\
\beta = \alpha q + 1, & \beta' = \alpha' q, \\
\gamma = \beta r + \alpha, & \gamma' = \beta' r + \alpha', \\
\delta = \gamma s + \beta, & \delta' = \gamma' s + \beta', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

we will have, on adding at the beginning the fraction $\frac{1}{0}$, which is greater than any given quantity, the fractions

$$\tfrac{1}{0},\ \ \tfrac{\alpha}{\alpha'},\ \ \tfrac{\beta}{\beta'},\ \ \tfrac{\gamma}{\gamma'},\ \ \tfrac{\delta}{\delta'},\ ....,$$

which necessarily will be converging to the value of *x*. And to be able to judge the nature of these fractions, we will note :

1°. That we will have always

$$\begin{aligned} \alpha 0 - 1\alpha' &= -1, \\ \beta\alpha' - \alpha\beta' &= 1, \\ \gamma\beta' - \beta\gamma' &= -1, \\ \delta\gamma' - \gamma\delta' &= 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

from which we see that the numbers $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$......., will not have any common divisor, and consequently the fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \ldots\ldots$, will be already reduced to their least terms.

2°. That the numbers $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \alpha', \beta', \gamma' \ldots\ldots$ will be able to be positive or negative (when the value of x is positive, the two terms of each fraction will be of the same sign, but they will be of different signs when the value of x will be negative), and with their signs removed, these numbers will go on increasing ;

3°. That we will have, since

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \ \ldots..,$$

$$x = \frac{\alpha\gamma + 1}{\alpha' y},$$

$$x = \frac{\beta z + \alpha}{\beta' z + \alpha'},$$

$$x = \frac{\gamma u + \beta}{\gamma' u + \beta'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

72. Thus, in general, if π, ρ, σ , shall be any three consecutive terms of the series $\alpha, \beta, \gamma, \ldots..$ and π', ρ', σ' the corresponding terms of the series $\alpha', \beta', \gamma', \ldots..$, such that, $\frac{\pi}{\pi'}, \frac{\rho}{\rho'}, \frac{\sigma}{\sigma'}, \ldots..$ shall be three consecutive fractions converging towards the value of *x,* we will have $\rho\pi' - \pi\rho' = \pm 1$, and $\sigma\rho' - \sigma'\rho = \mp$, the upper signs being for the case where the magnitude of the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ is odd, and the lower signs for these where the magnitude is even, by counting from the first fraction $\frac{1}{0}$; further, we will have (with the signs excluded)

$$\rho > \pi, \ \sigma > \rho, \ \rho' > \pi', \text{ and } \ \sigma' > \rho' \ ;$$

finally, if we indicate the corresponding term in the series $x, y, z, \ldots.$, by *t,* we will have rigorously:

$$x = \frac{\rho t + \pi}{\rho' t + \pi'} \ .$$

And if k is the nearest whole number to *t,* be it larger or smaller than *t,* we will have

$$\sigma = \rho k + \pi, \quad \sigma' = \rho' k + \pi'.$$

73. With that in place, considering the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$, and seeing by how much it differs from the true value of x ; for that, we will have

$$x - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho t + \pi}{\rho' t + \pi'} - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho'\pi - \rho\pi'}{\rho'(\rho' t + \pi')} = \mp \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')},$$

thus

$$x = \frac{\rho}{\rho'} \mp \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}.$$

Hence the error will be

$$\mp \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$$

now, if θ and $\theta + 1$ are the two whole number between which the true value of *t* falls, it is clear that the quantity $\rho' t + \pi'$ will lie between these two numbers $\rho'\theta + \pi'$ and $\rho'(\theta + 1) + \pi'$, and thence the error of the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ will be contained between these two limits

$$\mp \frac{1}{\rho(\rho'\theta + \pi')} \text{ and } \mp \frac{1}{\rho[(\rho'(\theta + 1) + \pi')]}.$$

Now, we can take $k = \theta$ or $= \theta + 1$; such that we will have

$$\sigma' = \rho'\theta + \pi' \text{ or } = \rho(\theta + 1) + \pi',$$

hence I conclude that if, in order to distinguish between the two cases, we call σ' the denominator of the fraction which follows $\frac{\rho}{\rho'}$, where we take the closest value of t in default, and Σ' the denominator of the same fraction, when we take the closest value of t to be in excess, the error of the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ necessarily will be held between these two limits

$$\mp \frac{1}{\rho'\sigma'} \text{ and } \mp \frac{1}{\rho'\Sigma'}.$$

From which we see that the error will go always into diminishing one fraction from the other, since the denominators ρ', σ' or Σ',...... necessarily go into increasing. We see also, since $\sigma' > \rho'$ and $\Sigma' > \rho'$, that the error will always be less than $\mp\frac{1}{\rho'^2}$; that is, because the error of each fraction will be less than one divided by the square of the denominator of that fraction. From which it is easily to conclude that the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ will approach closer to the value of x, than any other fraction may be able to be made which may be conceived in more simple terms; for assuming that the fraction $\frac{m}{n}$ approaches closer to x than the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$, n being $< \rho'$, as the value of x is contained between $\frac{\rho}{\rho'}$ and $\frac{\rho}{\rho'} + \frac{1}{\rho'^2}$, or between $\frac{\rho}{\rho'} - \frac{1}{\rho'^2}$, it will be necessary that the value of $\frac{m}{n}$ likewise shall be contained between these limits; thus the difference between $\frac{\rho}{\rho'}$ and $\frac{m}{n}$ must become $< \frac{1}{\rho'^2}$; but this difference is $\frac{n\rho - m\rho'}{\rho' n}$, of which the numerator must never be less than unity, and of which the denominator will be necessarily greater than ρ'^2, because $\rho' > n$; hence, etc.

74. We must observe, for the remainder, that if the denominators $\alpha', \beta', \gamma', ...$ are all of the same sign or of alternating signs, the errors will be alternatively positive of negative ; such that the fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, ...$ will be alternatively smaller and larger than the true value of x, as we have said in § 23 ; but that will cease to be the case when the numbers $\alpha', \beta', \gamma', ...$ will no longer be in pairs of the same or opposite signs ; that is what will arise necessarily when, among the denominators $q, r, s, ...$ of the continued fraction, it will have both positives and negatives, that is, when we take the nearest values of $x, y, z,$ etc., they will be sometimes bigger, sometimes smaller than the true values.

75. If in place of converging fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, ...$ we would like more to have a series of decreasing terms, we may observe that

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'\beta'} = \frac{1}{\alpha'\beta'},$$

and, likewise

$$\frac{\gamma}{\gamma'} - \frac{\beta}{\beta'} = -\frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'},$$

and hence forthwith; where we can express, since $\alpha' = 1$,

$$\frac{\beta}{\beta'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'},$$
$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'},$$
$$\frac{\delta}{\delta'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+\frac{1}{\delta'\gamma'},$$

and, in general

$$\frac{\rho}{\rho'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+\frac{1}{\gamma'\delta'}-....\pm\frac{1}{\pi'\rho'}.$$

Hence we will have for the value of x, the series

$$\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+.....,$$

which will approach that value all the more, the further the series will be extended ; and if after having continued this series as far as some term $\pm\frac{1}{\pi'\rho'}$, we wish to know by how much that still differs from the true value of x, we will be assured that the error will be found between the two limits $\mp\frac{1}{\rho'\sigma'}$ and $\mp\frac{1}{\rho'\Sigma'}$ (§ 73) such that it will necessarily be less than $\frac{1}{\rho'^2}$.

76. It is to be observed that each term of the series

$$\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+.....,$$

corresponds to each term of the continued fraction

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}$$

from which it is derived; such that the series of which we talk will be more or less convergent, following which this fraction will be equal to that one. Now, we have given previously (§ 68) the manner of rendering a continued fraction to be the most convergent as possible; thus we will be able to have series also to be the most convergent as possible.

Hence, in order to have as series those which shall be the most convergent of all for the ratio of the circumference to the diameter, we will take the continued fraction which expresses this ratio ; and after having simplified that as we have done before (§ 68), we will put that into the following form :

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{-294+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{-3+\text{etc.}}}}}}$$

such that we will have

$$p=3,\ q=7,\ r=16,\ s=-294,.....;$$

hence we will find (§ 71)

$$\alpha'=1,\ \beta'=7,\ \gamma'=7\times16+1=113,\ \delta'=113\times(-294)+7=-332\text{I}5,$$
$$\varepsilon'=-\ 33215\times3+113=-\ 99532,\ \zeta'=-99532\times(-3)-33215=265381,....,\ \text{etc.}$$

such that the series sought shall be

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7\times113}-\frac{1}{113\times33215}-\frac{1}{33215\times99532}-\frac{1}{99532\times265381}.......$$

ARTICLE IV.

Where we propose different means for simplifying the calculation of roots by continued fractions.

77. We have found in general (§ 72) that if $\frac{\pi}{\pi'}$ and $\frac{\rho}{\rho'}$ are two consecutive fractions converging towards the value of x, we will have

$$x=\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'};$$

thus if we substitute this expression for x, into the equation in x, the root of which we are searching, we will have a transformation in t, which will be necessarily the same as we would have had by the successive substitutions of $p+\frac{1}{y}$ in place of x, of $q+\frac{1}{z}$ in place of y, etc., and in order to have the following fraction $\frac{\sigma}{\sigma'}$, it will be required to find the whole number closest to t, which being called k, we will have

$$\sigma=k\rho+\pi,\ \sigma'=k\rho'+\pi'.$$

In this manner, knowing the first two $\frac{\alpha}{\alpha'}$ and $\frac{\beta}{\beta'}$, which are always $\frac{1}{0}$ and $\frac{p}{1}$ (§71), we will be able to find successively all the others, with the aid of the single equation in x.

78. Now, were we to use the successive substitutions $p+\frac{1}{y}$ in place of x, of $q+\frac{1}{z}$ in place of y, etc., we would make use of the general substitution $\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'}$ in place of x, the difficulty will be reduced always to finding in each transformed equation, the whole number value nearest to the root, positive or negative, more than unity, which this equation necessarily will contain (§70). If the first whole number value of p has only a single root, then all the transformed equations in y, in z, etc. each will have only a single root greater than unity ; such that we will be able to find the whole number values nearest to the root by the simple substitution of the natural numbers (§ 19). But if the same value pertains to several roots, the transformed equations necessarily will have several roots greater than unity, whether positive or negative, until we come to one of these transformations which has only one similar root ; as then all the following can have only a single value greater than unity, as we have shown in the section cited.

Before arriving at this transformation, it happens often that the simple substitution of natural numbers will not suffice to make the nearest whole numbers found of which we will have a need, because the equation will have some roots which will be different amongst themselves by quantities less than unity. In this case therefore, it appears that it would be necessary to have recourse to the general method which we have given in the first chapter; but, having already employed this method in order to find the first nearest values of the roots x of the primitive equation, we will be able to dispense with doing a new calculation for each transformed equation, which will be well worth developing.

79. In making use of the method of which we speak, we will find at first the limits between which each real root of the proposed equation will be contained, such that only a single root will be had between the two limits found (§13).

Let λ and Λ be the limits of the root sought; the expression

$$x = \frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'}$$

gives

$$t = \frac{\pi' x-\pi}{\rho-\rho' x};$$

thence the value of t will be between the limits

$$\frac{\pi'\lambda-\pi}{\rho-\rho'\lambda},\ \frac{\pi'\Lambda-\pi}{\rho-\rho'\Lambda};$$

as a consequence, if these last limits differ from each other by less than unity, we will have at once the whole number value nearest to t; but if they differ from each other by an amount equal to or greater than one, then this will be an indication that the root sought t will differ from the other roots of the transformed equation in t by some amounts equal to or greater than one ; such that we will have certainly be able to find the value of the nearest whole number of this root, by the simple substitution of natural numbers in place of t; and the same thing will occur all the more in the following transformations.

80. The formula $t = \frac{\pi' x-\pi}{\rho-\rho' x};$ can also be very useful to reduce into a continued fraction every quantity x which will be contained between the given limits, at least to find the terms of this fraction which will be able to be given by these limits; for calling as above, these two limits of x, λ and Λ ,we will have:

$$\frac{\pi'\lambda-\pi}{\rho-\rho'\lambda} \text{ and } \frac{\pi'\Lambda-\pi}{\rho-\rho'\Lambda}$$

for these of t; such that, while the difference between these last limits will not be greater than unity, we will be able to find the whole number value of t exactly: hence, taking $\frac{1}{0}$ and $\frac{p}{1}$ (p being the nearest whole number of x) for the first two fractions, we will be able to advance the series of converging fractions, and as a consequence the continued fraction, until these limits of which we speak differ between themselves by an amount not greater than one ; then it will be necessary to stop, because the limits given λ and Λ will not be able to be taken to a greater precision in the value of x.

By this means, we will never have to be afraid of being mistaken in pushing the continued fraction further than we should, since that may happen easily if, in order to have this fraction, we may be content to take one of the numbers λ and Λ, and from that practice the same operation of which we have made use in order to find the greatest common measure, conforming to the same manner used of reducing ordinary fractions to continued fraction.

In order to be able to use this method with complete confidence, it will be necessary to perform the same operation on the two numbers λ and Λ, and to admit only that part of the continued fraction which may provide the two operations equally; but the preceding method appears more convenient and simpler.

81. Now considering other means of simplifying further the search for the nearest whole number values in the different equations transformed. Let

$$t^n - a^{n-1} + bt^{n-2} - .... = 0$$

be some one of these equations, in which it is necessary to find the nearest whole number to *t,* which we will designate in general by *k* ; this equation, being derived from the equation proposed in *x,* will be of the same degree as that one, and will have consequently the same number of roots, which we assume equal to *n.*

We have found in general (§79)

$$t = \frac{\pi' x - \pi}{\rho - \rho' x},$$

which is reduced to

$$t = \frac{\pi'}{\rho'} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\rho}{\rho'} - x} = \frac{\pi'}{\rho'} \cdot \left(\frac{\frac{\rho}{\rho'} - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\rho}{\rho'} - x} - 1 \right);$$

but

$$\frac{\rho}{\rho'} - \frac{\pi}{\pi'} = \pm \frac{1}{\rho' \pi'},$$

the upper sign being for the case where the quantity of the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ is even, and the lower sign for that where this quantity is odd; thus we will have

$$t = \pm \frac{1}{\rho'^2 \left(\frac{\rho}{\rho'} - x \right)} - \frac{\pi'}{\rho'}.$$

Thus, if we denote the root sought by x , and by x', x'', etc. the other roots of the equation in *x*, which are *n* in number, and which we denote in the same manner by *t, t, t'',* ….the corresponding values of *t*, we will have

$$t = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x\right)} - \frac{\pi'}{\rho'},$$

$$t' = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x'\right)} - \frac{\pi'}{\rho'},$$

$$t'' = \pm \frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'} - x''\right)} - \frac{\pi'}{\rho'},$$

....

But the equation in *t* gives $a = t + t' + t'' + ...;$ thus substituting the values of t', t'', etc. which we have just found, and which are of number $n-1$, we will have

$$a = t - \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} \pm \frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x''} + \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'} - x'''} + ... \right).$$

Now we have found (§73)

$$\frac{\rho}{\rho'} = x \pm \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')},$$

or rather, on making $\rho' t + \pi' = \psi\rho'$,

$$\frac{\rho}{\rho'} = x \pm \frac{1}{\psi\rho'^2},$$

where we will not that $\rho' t + \pi'$ being enclosed between the limits σ' et Σ', which are both greater than ρ' (§ 72), the quantity ψ necessarily will be greater than one. Thus, making this substitution in the preceding formula, we will have

$$t = a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'} \mp \left(\frac{1}{\rho'^2(x-x') \pm \frac{1}{\psi}} + \frac{1}{\rho'^2(x-x'') \pm \frac{1}{\psi}} + ... \right).$$

But the quantities $x - x'$, $x - x''$,..... are given, and the quantity ρ' always goes on increasing ; thus since the fraction $\frac{1}{\psi}$ is less than one always, it is clear that each of the quantities

$$\frac{1}{\rho'^2(x-x') \pm \frac{1}{\psi}}, \frac{1}{\rho'^2(x-x'') \pm \frac{1}{\psi}}, ...$$

necessarily will go on decreasing, and that consequently the sum of these quantities, which are of number $n-1$, will go on decreasing also; such that it will become necessarily less than $\frac{1}{2}$.

Thus, necessarily we will arrive at a transformed equation, such that its root t will be close to $\frac{1}{2}$, equal to

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$$

(a being the coefficient of the second term taken negatively), that is this root will be contained between the limits

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}+\frac{1}{2} \text{ and } a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}-\frac{1}{2},$$

and the same thing will happen all the more for all the following transformations.

Thus, since we will have arrived at a similar transformation it will be necessary only to take the closest whole number of the quantity,

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'},$$

that is, that which will be contained between the same limits

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}+\frac{1}{2} \text{ and } a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}-\frac{1}{2},$$

and this number will be necessarily one of two consecutive numbers, between which the true value of t will be found, such that it will be able to be taken with total confidence for that closest value k (§77). Thus we will be able to continue the approximation as far as one would wish, without the least uncertainty.

82. Since $a=t+t'+t''+....,$ on substituting the values of t, t', etc., (§ 81) we will have

$$a=\pm\frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''}+.....\right)-\frac{n\pi'}{\rho}.$$

Now, let

$$x^n-\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}...=0$$

be the proposed equation ; where we may make the first member of this equation equal to X , it is easy to see, by the theory of equations, that the quantity $\frac{1}{\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ will become, on putting $\frac{\rho}{\rho'}$ there in place of x, after differentiation,

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''}+....,$$

because $x, x', x'',....$ are different roots of the equation $\mathrm{X}=0$. Thus we will have

$$a = \pm\frac{1}{\rho'^2 \mathrm{X}}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{n\pi'}{\rho'},$$

and as a consequence, the quantity

$$a + \frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$$

will become

$$\pm\frac{1}{\rho'^2 \mathrm{X}}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{\pi'}{\rho'}.$$

Thus, if we make

$$\mathrm{R} = \frac{n\rho^{n-1} - (n-1)\mathrm{A}\rho^{n-2}\rho' + (n-2)\mathrm{B}\rho^{n-3}\rho'^2 - \ldots}{\rho^n - \mathrm{A}\rho^{n-1}\rho' + \mathrm{B}\rho^{n-2}\rho'^2 - \ldots},$$

thus the quantity in question will be $\frac{\pm\,\mathrm{R} - \pi'}{\rho'}$; as a consequence the limits of which we have spoken in the preceding section will be

$$\frac{\pm\,\mathrm{R} - \pi'}{\rho'} + \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \frac{\pm\,\mathrm{R} - \pi'}{\rho'} - \frac{1}{2},$$

Hence we will be able to find the limits independently of the transformed equation in t, and alone by means of the equation proposed in x, which will be able to act to shorten the calculation.

83. It remains now to see how we will be able to understand if the root t is contained between the limits upon which it depends ; now, that is easy as soon as we shall know the two consecutive whole numbers $\theta,\ \theta+1$, between which this root is found ; for, $\lambda + \frac{1}{2}$ and $\lambda - \frac{1}{2}$ shall be the two given limits ; it is clear that, since t is found between these two limits, it is required that λ falls between the same number $\theta,\ \theta+1$ and even closer to that one of these two numbers to which t will approach more. Thus we will examine:

1° if λ lies between $\theta,\ \theta+1$; 2° that being so, we will take that one of these two numbers to which λ is closer for the nearest value of t, which we will call k, and making $t = k + \frac{1}{\omega}$, we will see if the transformed equation in ω has a positive or negative root greater than 2; if this second condition happens, we will be assured that the root t really will lie between the limits $\lambda + \frac{1}{2}$ and $\lambda - \frac{1}{2}$, and we will be able to pursue the calculation, as we have said in §81.

84. Again, we may be able to consider the following manner, in order to be certain that the root t lies between the limits $\lambda + \frac{1}{2}$ and $\lambda - \frac{1}{2}$. It is easy to see by §81 that the difficulty is reduced to knowing if the sum of the two quantities

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''},\ldots,$$

divided by ρ'^2 is less than $\frac{1}{2}$; thus it will only be a matter of finding a quantity which shall be greater than this sum, and then of seeing if this quantity is less than $\frac{\rho'^2}{2}$.

Now, $x, x', x'', \ldots$ shall be the real roots of the proposed equation, which we will assume to be of number μ, and

$$\xi+\psi\sqrt{-1},\ \xi-\psi\sqrt{-1},\ \xi'+\psi'\sqrt{-1},\ \xi'-\psi'\sqrt{-1},\ \ldots$$

the imaginary roots which we will suppose to be of number 2ν, such that $\mu+2\nu=n$; since the fraction $\frac{\rho}{\rho'}$, differs from the root x by an amount less than $\frac{1}{\rho'^2}$ (§73), it is clear that if Δ is a quantity equal to or less than the smallest of the differences between these real roots of the same equation, each of these real quantities

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''},\ldots,$$

necessarily will be less than

$$\frac{1}{\Delta\pm\frac{1}{\rho'^2}},$$

and as a consequence the sum of these quantities, which are of number $\mu-1$, will be less than

$$\frac{1}{\Delta\pm\frac{1}{\rho'^2}},$$

Then considering the imaginary quantities, which will be in pairs of the form

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-\xi-\psi\sqrt{-1}},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-\xi+\psi\sqrt{-1}},$$

such that we will have ν quantities of the form

$$\frac{2\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)}{\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)^2+\psi^2};$$

now, I observe that whatever the numbers $\frac{\rho}{\rho'}$, ξ and ψ may be , the quantity

$$\frac{2\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)}{\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)^2+\psi^2}$$

will always be less than $\frac{1}{\psi}$; indeed if we consider the quantity

$$\frac{2y}{y^2+\psi^2},$$

and on making $y=\psi\operatorname{tang}\varphi$, which is always possible, it will become

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\psi}=\frac{\sin 2\varphi}{\psi};$$

now, the greatest value of $\sin 2\varphi$ is one ; and so on, thus.

Thus, if we denote by Π an amount equal to or less than the smallest of these two quantities $\psi,\psi',\ldots..$, the quantity $\frac{\nu}{\Pi}$ necessarily will be greater than the sum of these imaginary quantities we are discussing. Thus, in general, the amount

$$\frac{\mu-1}{\Delta\pm\frac{1}{\rho'^2}}+\frac{\nu}{\Pi}$$

will be greater than the sum of all these quantities

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''},\ldots.,$$

Thus, if we have

$$\frac{\mu-1}{\rho'^2\Delta\pm1}+\frac{\nu}{\rho'^2\Pi}=,\text{or}<\frac{1}{2},$$

Δ and Π and *n* being taken positive, we will be sure that the root *t* will fall between the proposed limits.

Now, to have for the numbers Δ and Π, when we do not know in advance the roots of the proposed equation, we will only have to search in the equation of the differences (D) of §8, for the limit *l* of the positive roots, and the limit $-h$ of the negative roots, and we will take for Δ some number $=,\text{or}<\frac{1}{\sqrt{l}}$, and for Π some number $=\text{or},<\frac{2}{\sqrt{h}}$; evidently that follows from what we have shown in the place indicated.

85. If we had

$$\frac{\mu-1}{\Delta-1}+\frac{\nu}{\Pi}<\frac{1}{2},$$

then the condition required will be found at the start of the series ; such that we may approximate the value of x without any uncertainty; here is the procedure of the calculation.

Having found the first value of the whole number closest to x, so that we will be able to take either a smaller or larger value than x as desired, and calling this value p , we will have the two first fractions $\frac{1}{0},\frac{p}{1}$.

1°. Thus we will have, $\pi=1,\ \pi'=0,\ \rho=p,\ \rho'=1,$ and substituting these values into the expression for R (§ 82), we will take the whole number which is closest to

$$\frac{-R-\pi'}{\rho'},$$

that's to say −R, which being called k, we will have the fraction

$$\frac{k\rho+\pi}{k\rho'+\pi'}=\frac{k\rho+1}{k}.$$

2°. We will take $\pi=\rho,\ \pi'=1,\ \rho=kp+1,\ \rho'=k,$ and substituting into R, we will take the whole number which comes closest to $\frac{R-\pi'}{\rho'}$, that is $\frac{R-1}{k}$, and this number being called k', we will have the fraction

$$\frac{k'\rho+\pi}{k'\rho'+\pi'}=\frac{k'(k\rho+1)+\rho}{k'k+1}.$$

3°. We will have $\pi=kp+1,\ \pi'=k,\ \rho=k'(kp+1),\ \rho'=k'k+1,$

and we will take the whole number value approaching closest to

$$\frac{-R-\pi'}{\rho'}\ \text{or}\ \frac{-R-k'}{k'k+1},$$

which being called k'', we will have the fraction

$$\frac{k''\rho+\pi}{k''\rho'+\pi'}=\ldots\ldots,$$

and hence so on. In this manner, the value of x will be expressed by the continued fraction :

$$p+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k'+\cfrac{1}{k''+\text{etc.},}}}$$

or, by the converging fractions,

$$\frac{1}{0},\ \frac{\rho}{1},\ \frac{kp+1}{k'},\ \frac{k'(k\rho+1)+\rho}{k'k+1},\ldots\ldots.$$

86. At first, if we do not have

$$\frac{\mu-1}{\Delta-1}+\frac{v}{\Pi}<\frac{1}{2},$$

we will only have to search the continued fraction by the ordinary method, until we come upon a fraction of which the denominator ρ' must be such that we shall have

$$\frac{\mu-1}{\rho'^2\Delta-1}+\frac{v}{\rho'^2\Pi}<\frac{1}{2},$$

or rather, until we come upon a transformation which shall be in the case of §83.

For the rest, as on increasing all the roots of an equation in some ratio, we will increase the differences between the roots in the same ratio, it is clear that if, in the proposed equation, we put $\frac{x}{f}$ in place of x, which will increase the roots in the ratio of $1:f$, the numbers Δ and Π, which will agree in the new equation, will be increased in the same ratio, and consequently will become $f\,\Delta$ and $f\,\Pi$; thus we will be able to accomplish, so that the condition of § 85 shall be verified, in giving to f a value such that

$$\frac{\mu-1}{f\,\Delta-1}+\frac{v}{f\,\Pi}=,\text{or}<,\frac{1}{2}.$$

Then we will always be able to make use of the method referred to in the section, in order to approach without uncertainty the value of x sought; it will be required only then to divide this number by f, in order to have the true root of the equation proposed: it is true that, according to this manner, we will no longer have this root expressed by a simple continued fraction ; but nevertheless we will be able to approach as close to that as we wish; which suffices for normal usage.

87. Let the proposed equation be $x^n-A=0$, such that we ask for the n^{th} root of the number A.

1^{o}. Let n be even, and $=2m$, the equation will have, as we know, two real roots $+\sqrt[n]{\text{A}}$ and $-\sqrt[n]{\text{A}}$, and $n-2$ imaginary roots which will be expressed thus :

$$\left(\cos\tfrac{sc}{n} \pm \sin\tfrac{sc}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\mathrm{A}},$$

c being the circumference or an angle of 360 degrees, and s being successively $=1,\ 2,\ 3,$ etc. as far as $m-1$; thus we will have in this case (§ 84) $\mu = 2,\ \nu = m-1$, and we will be able to take

$$\Delta = 2\sqrt[n]{\mathrm{A}},\quad \Pi = \sin\tfrac{c}{n}\times\sqrt[n]{\mathrm{A}},$$

since $\sin\frac{c}{n}$ is the smallest of all the terms of the form $\sin\frac{sc}{n}$; thus the condition of §85 will arise if

$$\frac{1}{2\sqrt[n]{\mathrm{A}}-1} + \frac{m-1}{\sin\frac{c}{n}\times\sqrt[n]{\mathrm{A}}} =, \text{or} < \tfrac{1}{2};$$

thus it will certainly always happen whenever we will have

$$\mathrm{A} =, \text{or} > \left(\frac{n}{\sin\frac{360^0}{n}}\right)^n.$$

2°. Let n be odd and $=2m+1$, the equation will have only one real root $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$, and it will have $2m$ imaginary roots of the form

$$\left(\cos\tfrac{sc}{n} \pm \sin\tfrac{sc}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\mathrm{A}},$$

and making successively $s = 1,\ 2, \ldots$ as far as m; thus we will have in this case, $\mu = 1,\ \nu = m,$ and since the smallest of the $\sin\frac{sc}{n}$ is $\sin\frac{mc}{n}$ or $\sin\frac{180^0}{n}$, since $n = 2m+1$, we will be able to take

$$\Pi = \sin\frac{180^0}{n}\times\sqrt[n]{\mathrm{A}};$$

such that the condition of the section expressed will occur here, if

$$\frac{m}{\sin\frac{180^0}{n}\times\sqrt[n]{\mathrm{A}}} =, \text{or} < \tfrac{1}{2},$$

that is, if we have

$$\mathrm{A} =, \text{or} > \left(\frac{n-1}{\sin\frac{180^0}{n}}\right)^n.$$

Hence, when the number A will not be below these limits which we have just found, we can always, in making use of the method of § 85, find the n^{th} root of the number directly and without uncertainty ; and if it is smaller than these limits, we will always be able to make it greater by multiplying by some number which shall be an exact power of the same number n ; such that after having found the root of the composite number, it will only have to divide that by its multiplier in order to have the root sought of A.

As for the value of R (§ 83), for the equation $x^n - \mathrm{A} = 0,$ it will become

$$\mathrm{R} = \frac{n\rho^{n-1}}{\rho^n - \mathrm{A}\rho'^n}.$$

88. Since the case $n = 2$ can be resolved by the method of article II above, we will not do this here ; thus there shall be

1°. $n = 4,$ we will have $\sin\frac{360^0}{4} = 1,$

thus,

$$\mathrm{A} =, \text{or } > 4^4;$$

2°. $n = 6,$ we will have $\sin\frac{360^0}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

thus

$$\mathrm{A} =, \text{or } > 3^3 \cdot 4^6;$$

3°. $n = 8,$ we will have $\sin\frac{360^0}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

thus

$$\mathrm{A} =, \text{or} > 2^4 \cdot 4^8;$$

and thus henceforth.

In the same way, if we may make

1°. $n = 3,$ we will have $\sin\frac{360^0}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

thus

$$\mathrm{A} =, \text{or} > \frac{4^3}{3\sqrt{3}};$$

2°. $n = 5,$ we will have $\sin\frac{360^0}{5} = \sin 36^0,$

and, doing the calculation with logarithms, we will find

$$\mathrm{A} =, \text{or} > 14595,$$

and hence forthwith. Assuming, for example, that we demand the cube root of 17; then 17 is $>\frac{4^3}{3\sqrt{3}}$, since $3\sqrt{3}>4$, we will be able to use from the start the method of §85. Thus here we will have, since $n=3$ and $\mathrm{A}=17$ (§ 87),

$$\mathrm{R}=\frac{3\rho^2}{\rho^3-17\rho'^3}.$$

Now, the closest whole number of $\sqrt[3]{17}$ is 2 or 3; such that we will be able to make as we wish $p=2$ or $p=3$.

Making $p=2$, and the first fractions will be $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}$; thus,

1°. $\pi=1,\ \pi'=0,\ \rho=2,\ \rho'=1$;

thus,

$$\mathrm{R}=\frac{3\cdot 4}{8-17}=-\frac{4}{3},$$

and the closest whole number of

$$\frac{-\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}=\frac{4}{3}$$

will be 1; thus $k=1$, which gives the fraction

$$\frac{k\rho+1}{k}=\frac{3}{1}.$$

2°. $\pi=2,\ \pi'=1,\ \rho=3,\ \rho'=1$;

thus

$$\mathrm{R}=\frac{3\cdot 9}{10} \text{ and } \frac{\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}=\frac{17}{10};$$

and the closest whole of $\frac{17}{10}$ being 2, we will make $k'=2$, which will give the fraction

$$\frac{k'\rho+\pi}{k'\rho'+\pi'}=\frac{8}{1}.$$

3°. $\pi=2,\ \pi'=1,\ \rho=8,\ \rho'=3$;

thus,

$$\mathrm{R}=\frac{3\cdot 8^2}{8^3-17\cdot 3^3}=\frac{192}{53}$$

and

$$\frac{-\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}=-\frac{241}{159},$$

the closest whole number of this fraction being -2 ; thus, $k''=-2$, and the fraction $\frac{k''\rho+\pi}{k''\rho'+\pi'}$ will become $\frac{-13}{-5}$, etc. In this manner, we will have the fractions converging towards $\sqrt[3]{17}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{-13}{-5}$,......, and the continued fraction will be :

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\text{etc.}}}}$$

ARTICLE III.

Généralisation de la théorie des fractions continues.

65. Nous avons supposé dans le chapitre III que les nombres $p, q, r, \ldots$, étaient les valeurs entières approchées des racines $x, y, z, \ldots$, mais plus petites que ces racines, c'est-à-dire que $p, q, r, \ldots$, étaient les nombres entiers qui seraient immédiatement plus petits que les valeurs de $x, y, z, \ldots$; cependant il est clair que rien n'empêcherait qu'on ne prit pour $p, q, r,$ etc., les nombres entiers qui seraient immédiatement plus grands que les racines $x, y, z, \ldots$.

66. Imaginons donc qu'on prenne pour p le nombre entier qui est immédiatement plus grand que x, en sorte que $p > x$ et $p-1 < x$, il est clair qu'il faudra dans ce cas $x = p - \frac{1}{y}$, c'est-à-dire qu'il faudra prendre y négativement, et comme $x < p$ et $> p-1$, on aura $\frac{1}{y} > 0$ et < 1, et par conséquent $y > 1$, comme dans le cas où l'on aurait pris p plus petit que x (§18). Ainsi on pourra prendre de nouveau pour q, le nombre entier qui serait immédiatement plus petit que y, ou celui qui serait immédiatement plus grand, et l'on fera dans le premier cas, $y = q + \frac{1}{z}$, et dans le second, $y = q - \frac{1}{z}$, et ainsi de suite. De cette manière on aurait donc $x = p \pm \frac{1}{y}$, $y = q \pm \frac{1}{z}$, $z = r \pm \frac{1}{u}, \ldots$, ce qui donnerait la fraction continue

$$x = p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cfrac{1}{s \pm \ldots,}}}$$

où il est bon de remarquer que chacun des dénominateurs $q, r,$ etc. , qui sera suivi d'un signe $-$, devra nécessairement être $= 2$, ou > 2 ; car, puisque $y > 1$, si on fait $y = q - \frac{1}{z}$, on aura $q - \frac{1}{z} > 1$, donc $q + \frac{1}{z} > 1$, donc q devant être un nombre entier , sera nécessairement $= 2$, ou > 2 ; et ainsi des autres.

67. J'observe maintenant que ces sortes de fractions qui procèdent ainsi par addition et par soustraction , peuvent toujours facilement se changer en d'autres qui ne soient formées que par la simple addition. En effet, supposons en général

$$a - \frac{1}{t} = \mathrm{A} + \frac{1}{\mathrm{T}},$$

a et A devant être des nombres entiers, et t, T des nombres plus grands que l'unité; on aura donc

$$a - \mathrm{A} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{T}};$$

donc , puisque $\frac{1}{t}<1$ et $\frac{1}{\mathrm{T}}<1$, $\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{T}}$ sera < 2 ; donc on ne pourra supposer que $a-\mathrm{A}=1$, ce qui donne $\mathrm{A}=a-1$; on aura donc $a-\frac{1}{t}=a-1+\frac{1}{\mathrm{T}}$; donc

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=1-\frac{1}{t},\ \text{et } \mathrm{T}=\frac{1}{t-1}=1+\frac{1}{t-1};$$

de sorte qu'on aura en général

$$a-\frac{1}{t}=a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{t-1}},$$

et cette formule servira pour faire disparaître tous les signes − dans une fraction continue quelconque.

Soit, par exemple, la fraction

$$p-\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\ldots,}}$$

elle deviendra, en faisant $a=p$ et $t=q+\frac{1}{r},\ldots,$

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1+\cfrac{1}{r+\ldots,}}}.$$

Si l'on avait la fraction

$$p-\cfrac{1}{q-\cfrac{1}{r-\ldots,}}$$

elle se changerait d'abord en

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1-\cfrac{1}{r-}\ldots,}}$$

et ensuite en

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r-1\ldots,}}}}$$

et ainsi des autres fractions semblables. Il est bon de remarquer qu'il peut arriver que, dans ces sortes de transformations, quelqu'un des dénominateurs devienne nul, auquel cas la fraction deviendra plus simple.

En effet, supposons que la fraction à réduire soit

$$p-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r+\ldots,}}$$

la transformée sera

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{r+\ldots\ldots,}}}$$

c'est-à-dire

$$p-1+\frac{1}{1+r+\ldots..}$$

De même, si l'on avait la fraction

$$p-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{r+\ldots..,}}$$

elle se réduirait à celle-ci

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r-1+\ldots\ldots,}}}}$$

savoir,

$$p-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{r-1+\ldots..,}}$$

et ainsi du reste.

68. La formule que nous avons trouvée ci-dessus, et qu'on peut mettre sous cette forme

$$a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{t}}=a+1-\frac{1}{t+1},$$

fait voir qu'une fraction continue dont tous les termes ont le signe +, peut quelquefois être simplifiée en *y* introduisant des signes − ; c'est ce qui a lieu lorsqu'il y a des dénominateurs égaux à l'unité; car soit, par exemple , la fraction

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r+\ldots,}}$$

elle pourra se réduire par la formule précédente à celle-ci ,

$$p+1-\frac{1}{r+1+\ldots,}$$

qui a, comme l'on voit, un terme de moins; donc si l'on avait la fraction

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

elle se réduirait à celle-ci

$$p+1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{s+\ldots;}}$$

et si l'on avait celle-ci

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{s+\ldots,}}}}$$

elle se réduirait d'abord à

$$p+1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

et ensuite à

$$p+1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{s+1+\ldots,}}$$

d'où il est facile de conclure, en général, que si l'on a une fraction continue qui n'ait que des signes +, et où il y ait des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra toujours la changer en une autre qui ait autant de termes de moins qu'il y aura de pareils dénominateurs, pourvu qu'ils ne se suivent pas immédiatement; car, lorsqu'il y en aura deux de suite, on ne pourra faire disparaître qu'un seul terme; lorsqu'il y en aura trois de suite, on pourra faire disparaître deux termes; et en général, s'il y en a $2n$, ou $2n+1$ de suite, on ne pourra faire disparaître que n ou $n+1$ termes.

Ainsi, la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre étant, comme l'on sait,

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots,}}}}}}}}$$

elle peut se réduire à une autre qui ait déjà trois termes de moins, et qui sera

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3+\ldots,}}}}}$$

69. Pour pouvoir comprendre sous une même forme générale les fractions continues où les signes sont tous positifs, et celles où il y a des signes négatifs , il est bon de transformer ces demières, en sorte que les signes négatifs n'affectent que les dénominateurs, ce qui est très facile; car ayant, par exemple, la fraction

$$p-\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r-\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

il est clair qu'elle peut d'abord se changer en

$$p+\cfrac{1}{-q-\cfrac{1}{r-\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

ensuite en celle-ci

$$p+\cfrac{1}{-q+\cfrac{1}{-r+\cfrac{1}{s+\ldots,}}}$$

et ainsi des autres.

De cette manière, la fractions générale des fractions nous venons de parler ci-dessus , sera

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\ldots,}}$$

continues dont les nombres $p, q, r,$ etc. étant tous entiers, mais pouvant être positifs ou négatifs, au lieu que jusqu'ici nous les avions toujours supposés positifs. Il faut cependant remarquer que, si quelqu'un des dénominateurs $q, r, \ldots$.. se trouve égal à l'unité prise positivement ou négativement, alors le dénominateur suivant devra être de même signe; c'est ce qui suit de ce qu'un dénominateur positif, et égal à l'unité, ne saurait jamais être suivi du signe − (§ 68).

70. Il suit de là que la méthode d'approximation donnée dans le chapitre III, peut être généralisée en cette sorte. Soit x la racine cherchée, on prendra d'abord pour p la valeur entière approchée de x, c'est-à-dire qu'on fera p égal à l'un des deux nombres entiers entre lesquels tombe la vraie valeur de x, et qu'on peut toujours trouver par la méthode du chapitre I$^{\text{er}}$; l'on supposera ensuite

$$x = p + \frac{1}{y},$$

ce qui donnera une transformée en y qui aura nécessairement une racine positive ou négative plus grande que l'unité; on prendra de même pour q la valeur entière approchée de y, soit plus grande ou plus petite que y, et l'on fera

$$y = q + \frac{1}{z},$$

et ainsi de suite. Si l'équation en x avait plusieurs racines, on ferait sur les transformées en y , en z , en u, etc. des remarques analogues à celles du §19. Ayant donc

$$x = p + \frac{1}{y},\ \ y = q + \frac{1}{z},\ z = r + \frac{1}{u},\ .....,$$

on aura

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + ...,}}$$

où les dénominateurs q, r, etc. pourront être positifs ou négatifs, comme nous l'avons supposé ci-dessus; et cette fraction pourra ensuite se réduire, si l'on veut, à une autre dont les dénominateurs soient tous positifs, et qui ne contienne d'ailleurs que des signes + (§ 67).

L'avantage de la méthode que nous proposons ici, consiste en ce qu'on est libre de prendre pour les nombres p, q, r, etc. les nombres entiers qui sont immédiatement plus grands ou plus petits que les racines x, y, z, etc., ce qui pourra souvent donner lieu à des abrégés de calcul dont nous parlerons plus bas.

Au reste, si l'on veut avoir la fraction continue la plus courte, et par conséquent la plus convergente qu'il soit possible, il faudra prendre toujours les nombres p, q, r, etc. plus petits que les racines x, t , z, etc., tant que ces nombres seront différens de l'unité; mais, dès que l'on en trouvera un égal à l'unité , alors il faudra augmenter le précédent d'une unité, c'est-à-dire qu'on le prendra plus grand que la racine correspondante; cela suit évidemment de ce que nous avons démontré sur ce sujet (§ 68).

71. Maintenant, si l'on fait, comme dans le § 23,

$$\begin{array}{ll}
\alpha = p, & \alpha' = 1, \\
\beta = \alpha q + 1, & \beta' = \alpha' q, \\
\gamma = \beta r + \alpha, & \gamma' = \beta' r + \alpha', \\
\delta = \gamma s + \beta, & \delta = \gamma' s + \beta', \\
..............., & ....,
\end{array}$$

on aura , en ajoutant au commencement la fraction $\frac{1}{0}$ qui est plus grande que toute quantité donnée, les fractions

$$\tfrac{1}{0},\ \tfrac{\alpha}{\alpha'},\ \tfrac{\beta}{\beta'},\ \tfrac{\gamma}{\gamma'},\ \tfrac{\delta}{\delta'},\ \ldots,$$

lesquelles seront nécessairement convergentes vers la valeur de *x*. Et pour pouvoir juger de la nature de ces fractions , nous remarquerons :

1°. Que l'on aura toujours

$$\begin{aligned}&\alpha 0 - 1\alpha' = -1,\\ &\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1,\\ &\gamma\beta' - \beta\gamma' = -1,\\ &\delta\gamma' - \gamma\delta' = 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

d'où l'on voit que les nombres $\alpha,\alpha',\beta,\beta'\ldots\ldots$, n'auront aucun diviseur commun, et que par consequent les fractions $\tfrac{\alpha}{\alpha'},\tfrac{\beta}{\beta'},\ldots\ldots$, seront déjà réduites à leurs moindres termes.

2°. Que les nombres $\alpha,\beta,\gamma\ldots\ldots\alpha',\beta',\gamma'\ldots\ldots$ pourront être positifs ou négatifs (lorsque la valeur de *x* est positive, les deux termes de chaque fraction seront de même signe, mais ils seront de signes différens lorsque la valeur de *x* sera négative), et qu'abstraction faite de leurs signes, ces nombres iront en augmentant;

$$x = p + \tfrac{1}{y},\ \ y = q + \tfrac{1}{z},\ \ldots,$$

$$x = \tfrac{\alpha\gamma+1}{\alpha' y},$$

3°. Que l'on aura, à cause de $x = \tfrac{\beta z+\alpha}{\beta' z+\alpha'}$,

$$x = \tfrac{\gamma u+\beta}{\gamma' u+\beta'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

72. Donc, en général, si π,ρ,σ, sont trois termes consécutifs quelconques de la série $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ et π',ρ',σ' les termes correspondans de la série $\alpha',\beta',\gamma',\ldots$, en sorte que, $\tfrac{\pi}{\pi'},\tfrac{\rho}{\rho'},\tfrac{\sigma}{\sigma'},\ldots$ soient trois fractions consécutives convergentes vers la valeur de *x,* on aura $\rho\pi' - \pi\rho' = \pm 1$, et $\sigma\rho' - \sigma'\rho = \mp$, , les signes supérieurs étant pour le cas où le quantième de la fraction $\tfrac{\rho}{\rho'}$ est impair, et les inférieurs pour celui où ce quantième est pair, à compter depuis la première fraction $\tfrac{1}{0}$; de plus, on aura (abstraction faite des signes)

$$\rho > \pi,\ \sigma > \rho,\ \rho' > \pi',\ \text{et}\ \ \sigma' > \rho'\ ;$$

enfin, si l'on dénote par *t* le terme correspondant dans la série $x,y,z,\ldots$, , on aura rigoureusement

$$x = \frac{\rho t + \pi}{\rho' t + \pi'}.$$

Et si k est la valeur entière approchée de t, soit plus grande ou plus petite que t, on aura

$$\sigma = \rho k + \pi, \quad \sigma' = \rho' k + \pi'.$$

73. Cela posé, considérons la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$, et voyons de combien elle différe de la vraie valeur de x ; pour cela, nous aurons

$$x - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho t + \pi}{\rho' t + \pi'} - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho'\pi - \rho\pi'}{\rho'(\rho' t + \pi')} = \mp \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')},$$

donc

$$x = \frac{\rho}{\rho'} \mp \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}.$$

Ainsi l'erreur sera

$$\mp \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$$

or, si θ et $\theta + 1$ sont les deux nombres entiers entre lesquels tombe la vraie valeur de t, il est clair que la quantité $\rho' t + \pi'$ tombera entre ces deux $\rho'\theta + \pi'$ et $\rho'(\theta + 1) + \pi'$, et qu'ainsi l'erreur de la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ sera renfermée entre ces deux limites

$$\mp \frac{1}{\rho(\rho'\theta + \pi')} \quad \text{et} \quad \mp \frac{1}{\rho[(\rho'(\theta + 1) + \pi')]}.$$

Or, on peut prendre $k = \theta$ ou $= \theta + 1$; de sorte que l'on aura

$$\sigma' = \rho'\theta + \pi' \ \text{ ou } \ = \rho(\theta + 1) + \pi',$$

d'où je conclus que si, pour distinguer les deux cas, on nomme σ' le dénominateur de la fraction qui suit $\frac{\rho}{\rho'}$, lorsqu'on prend la valeur approchée de t en défaut, et Σ' le dénominateur de la même fraction , lorsqu'on prend la valeur approchée de t en excès, l'erreur de la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ sera nécessairement renfermée entre ces deux limites

$$\mp \frac{1}{\rho'\sigma'} \quad \text{et} \quad \mp \frac{1}{\rho'\Sigma'}.$$

D'où l'on voit que l'erreur ira toujours en diminuant d'une fractio à l'autre, à cause que les dénominateurs ρ', σ' ou Σ',...... vont nécessairement en augmentant. On voit aussi, à cause de $\sigma' > \rho'$ et $\Sigma' > \rho'$, que l'erreur sera toujours moindre que $\mp\frac{1}{\rho'^2}$; c'est-à-dire que l'erreur de chaque fraction sera moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette fraction. D'où il est facile de conclure que la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ approchera plus de la valeur de *x,* que ne pourrait faire aucune autre fraction quelconque qui serait conçue en termes plus simples; car supposons que la fraction $\frac{m}{n}$ approche plus de x que la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$, n étant $< \rho'$, comme la valeur de x est contenue entre $\frac{\rho}{\rho'}$ et $\frac{\rho}{\rho'} + \frac{1}{\rho'^2}$, ou entre $\frac{\rho}{\rho'} - \frac{1}{\rho'^2}$, il faudra que la valeur de $\frac{m}{n}$ soit pareillement contenue entre ces limites; donc la différence entre $\frac{\rho}{\rho'}$ et $\frac{m}{n}$ devra être $< \frac{1}{\rho'^2}$; mais cette différence est $\frac{n\rho - m\rho'}{\rho' n}$, dont le numérateur ne peut jamais être moindre que l'unité, et dont le dénominateur sera nécessairement plus grand que ρ'^2, à cause de $\rho' > n$; donc, etc.

74. On doit remarquer, au reste, que si les dénominateurs α', β', γ',..... sont tous de même signe ou de signes alternatifs, les erreurs seront alternativement positives ou négatives; de sorte que les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$,.... seront alternatevement plus petites et plus grandes que la véritable valeur de *x,* comme nous l'avons dit dans le § 23 ; mais cela cessera d'avoir lieu lorsque les nombres α', β', γ',..... ne seront pas deux à deux de même signe ou de signes différens; c'est ce qui arrivera nécessairement lorsque, parmi les dénominateurs *q, r, s,* …. de la fraction continue, il y en aura de positifs et de négatifs, c'est-à-dire, lorsqu'on prendra les valeurs approchées de *x, y, z,* etc. tantôt plus grandes, tantôt plus petites que les véritables.

75. Si au lieu des fractions convergentes $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$,.... on aimait mieux avoir une suite de termes décroissants, on remarquerait que

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'\beta'} = \frac{1}{\alpha'\beta'},$$

et, de même

$$\frac{\gamma}{\gamma'} - \frac{\beta}{\beta'} = -\frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'},$$

et ainsi de suite; d'où l'on tire, à cause de $\alpha' = 1$,

$$\frac{\beta}{\beta'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'},$$
$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'},$$
$$\frac{\delta}{\delta'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+\frac{1}{\delta'\gamma'},$$

et, en général

$$\frac{\rho}{\rho'}=\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+\frac{1}{\gamma'\delta'}-....\pm\frac{1}{\pi'\rho'}.$$

Ainsi l'on aura pour la valeur de x, la série

$$\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+.....,$$

laquelle en approchera d'autant plus qu'elle sera poussée plus loin; et si après avoir continué cette série jusqu'à un terme quelconque $\pm\frac{1}{\pi'\rho'}$, on veut savoir de combien elle diffère encore de la véritable valeur de x, on sera assuré que l'erreur se trouvera entre ces deux limites $\mp\frac{1}{\rho'\sigma'}$ et $\mp\frac{1}{\rho'\Sigma'}$ (§ 73) de sorte qu'elle sera nécessairement moindre que $\frac{1}{\rho'^2}$.

76. Il est à remarquer que chaque terme de la série

$$\alpha+\frac{1}{\alpha'\beta'}-\frac{1}{\beta'\gamma'}+.....,$$

répond à chaque terme de la fraction continue

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}$$

d'où elle dérive; de sorte que la série dont nous parlons sera plus ou moins convergente, suivant que cette fraction le sera. Or nous avons donné plus haut (§ 68) le moyen de rendre une fraction continue la plus convergente qu'il est possible; donc on pourra avoir aussi la suite la plus convergente qu'il soit possible.

Ainsi, pour avoir une suite qui soit la plus convergente de toutes vers le rapport de la circonférence au diamètre, on prendra la fraction continue qui exprime ce rapport; et après l'avoir simplifiée comme nous l'avons fait (§ 68), on la mettra sous la forme suivante:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{-294+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{-3+\text{etc.}}}}}}$$

de sorte qu'on aura

$$p=3,\ q=7,\ r=16,\ s=-294,.....;$$

donc on trouvera (§ 71)

$$\alpha'=1,\ \beta'=7,\ \gamma'=7\times16+1=113,\ \delta'=113\times(-294)+7=-332I5,$$
$$\varepsilon'=-\ 33215\times3+113=-\ 99532,\ \zeta'=-99532\times(-3)-33215=265381,....,\ \text{etc.}$$

de sorte que la série cherchée sera

$$3+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{7\times113}-\tfrac{1}{113\times33215}-\tfrac{1}{33215\times99532}-\tfrac{1}{99532\times265381}.......$$

ARTICLE IV.

Où l'on propose différens moyens pour simplifier le calcul des racines par les fractions continues.

77. Nous avons trouvé en général (§ 72) que si $\frac{\pi}{\pi'}$ et $\frac{\rho}{\rho'}$ sont deux fractions consécutives convergentes vers la valeur de x, on aura

$$x=\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'};$$

donc si l'on substitue cette expression de x, dans l'équationen x dont on cherche la racine, on aura une transformée en t, qui sera nécessairement la même que celle qu'on aurait eue par la substitutions successives de $p+\frac{1}{y}$ à la place de x, de $q+\frac{1}{z}$ à la place de y, etc., et pour avoir la fraction suivante $\frac{\sigma}{\sigma'}$, il faudra trouver la valeur entière approchée de t, laquelle étant nommée k, on aura

$$\sigma=k\rho+\pi,\ \sigma'=k\rho'+\pi'.$$

De cette maniere, connaissant les deux premières fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$, qui sont toujours $\frac{1}{0}$ et $\frac{p}{1}$ (§71), on pourra trouver successivement toutes les autres, à l'aide de la seule équation en x.

78. Or, soit qu'on emploie les substitutions successives de $p+\frac{1}{y}$ à la place de x, de $q+\frac{1}{z}$ à la place de y, etc. soit qu'on fasse usage de la substitution générale de $\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'}$ à la place de x, la difficulté se réduira toujours à trouver dans chaque équation transformée, la valeur entière approchée de la racine positive ou négative, au-dessus de l'unité que cette équation contiendra nécessairement (§70). Si la première valeur approchée de p ne convient qu'à une seule racine, alors toutes les équations transformées en y, en z, etc. n'auront chacune qu'une seule racine plus grande que l'unité; de sorte qu'on pourra trouver les valeurs entières approchées de ces racines par la simple substitution des nombres naturels (§19). Mais si la même valeur appartient à plusieurs racines, les transformées auront nécessairement plusieurs racines plus grandes que l'unité, soit positives ou négatives, jusqu'à ce que l'on arrive à une de ces transformées qui n'ait plus qu'une pareille racine; car alors toutes les suivantes n'en auront plus qu'une seule au-dessus de l'unité, comme nous l'avons démontré dans le numéro cité.

Avant d'être parvenu à cette transformée, il arrivera souvent que la simple substitution des nombres naturels ne suffira pas pour faire trouver les valeurs entières approchées dont on aura besoin , parce que l'équation aura des racines qui différeront entre elles par des quantités moindres que l'unité. Dans ce cas donc, il semble qu'il faudrait avoir recours à la méthode générale que nous avons donnée dans le chapitre premier; mais, ayant déjà employé cette méthode pour trouver les premières valeurs approchées des racines x de l'équation primitive, on pourra se dispenser de faire un nouveau calcul à chaque équation transformée; c'est ce qu'il est bon de développer.

79. En faisant usage de la méthode dont nous parlons, on trouvera d'abord les limites entre lesquel1es chaque racine réelle de l'équation proposée sera renfermée, en sorte qu'entre deux limites trouvées, il n'y ait qu'une seule racine (§13).

Soient λ et Λ les limites de la racine cherchée; l'expression

$$x=\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'}$$

donne

$$t=\frac{\pi' x-\pi}{\rho-\rho' x};$$

donc la valeur de t sera renfermée entre les limites

$$\frac{\pi'\lambda-\pi}{\rho-\rho'\lambda},\ \frac{\pi'\Lambda-\pi}{\rho-\rho'\Lambda};$$

par consequent, si ces dernières limites diffèrent l'une de l'autre moins que de l'unité, on aura sur-le-champ la valeur entière approchée de t; mais si elles diffèrent l'une de l'autre d'une quantité égale ou plus grande que l'unité, alors ce sera une marque que la racine cherchée t différera des autres racines de l'équation transformée en t par des quantités égales ou plus grandes que l'unité; de sorte qu'on sera sûr de pouvoir trouver la valeur entière approchée de cette racine, par la simple substitution des nombres naturels à la place de t; et la même chose aura lieu, à plus forte raison, dans les transformées suivantes.

80. La formule $t=\frac{\pi' x-\pi}{\rho-\rho' x};$ peut être aussi très utile pour réduire en fraction continue toute quantité x qui sera renfermée entre des limites données, au moins pour trouver les termes de cette fraction qui pourront être donnés par ces limites; car nommant, comme ci-dessus, λ et Λ les deux limites de x, on aura

$$\frac{\pi'\lambda-\pi}{\rho-\rho'\lambda} \text{ et } \frac{\pi'\Lambda-\pi}{\rho-\rho'\Lambda}$$

pour celles de t; de sorte que, tant que la différence entre ces dernières limites ne sera pas plus grande que l'unité, on pourra trouver exactement la valeur entière de t : ainsi, prenant $\frac{1}{0}$ et $\frac{p}{1}$ (p étant la valeur entière approchée de x) pour les deux premières fractions , on pourra pousser la suite des fractions convergentes, et par conséquent la fraction continue, justqu'à ce que les limites dont nous parlons different entre elles d'une quantité plus grande que l'unité; alors il faudra s'arrêter, parce que les limites données λ et Λ ne comporteront pas une plus grande exactotide dans la valeur *x.*

Par ce moyen, on n'aura jamais à craindre de se tromper en poussant la fraction continue plus loin qu'on ne doit, comme cela arriverait facilement si, pour avoir cette fraction, on se contentait de prendre l'un des nombres λ et Λ, et d'y pratiquer la même opération dont on se sert pour trouver la plus grande commune mesure, conformément à la manière usitée de réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Pour pouvoir employer cette méthode en toute sûreté, il faudrait faire la même opération sur les deux nombres λ et Λ, et n'admettre ensuite que la partie de la fraction continue qui proviendrait également des deux opérations; mais la méthode précédente paraît plus commode et plus simple.

81. Voyons maintenant d'autres moyens pour simplifier encore la recherche des valeurs entières approchées dans les différentes équations transformées. Soit

$$t^n - a^{n-1} + bt^{n-2} - .... = 0$$

une quelconque de ces équations, dans laquelle il s'agit de trouver la valeur entière approchée de *t,* que nous désignerons en général par *k* cette équation étant dérivée de l'équation proposée en *x,* sera du même degré que cette-ci, et aura par conséquent le même nombre de racines, que nous supposons égal à *n.*

Nous avons trouvé en général (§ 79)

$$t = \frac{\pi' x - \pi}{\rho - \rho' x},$$

ce qui se réduit à

$$t = \frac{\pi'}{\rho'} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\rho}{\rho'} - x} = \frac{\pi'}{\rho'} \cdot \left(\frac{\frac{\rho}{\rho'} - \frac{\pi}{\pi'}}{\frac{\rho}{\rho'} - x} - 1 \right);$$

mais

$$\frac{\rho}{\rho'} - \frac{\pi}{\pi'} = \pm \frac{1}{\rho' \pi'},$$

le signe supérieur étant pour le cas où le quantième de la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$ est pair, et l'inférieur pour celui où ce quantième est impair; donc on aura

$$t = \pm \frac{1}{\rho'^2 \left(\frac{\rho}{\rho'} - x \right)} - \frac{\pi'}{\rho'} \cdot$$

Donc, si l'on dénote par *x* la racine cherchée, et par *x', x''*, ete. les autres racines de l'équation en *x*, qui sont au nombre de *n*, et qu'on dénote de même par *t, t, t'',* ….les valeurs correspondantes de *t*, on aura

$$t=\pm\frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'}-x\right)}-\frac{\pi'}{\rho'},$$
$$t'=\pm\frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'}-x'\right)}-\frac{\pi'}{\rho'},$$
$$t''=\pm\frac{1}{\rho'^2\left(\frac{\rho}{\rho'}-x''\right)}-\frac{\pi'}{\rho'},$$
....

Mais l'équation en t donne $a=t+t'+t''+.....;$ donc substituant les valeurs de t', t'', etc. que nous venons de trouver, et qui sont au nombre de $n-1$, on aura

$$a=t-\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}\pm\frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'''}+.....\right).$$

Or nous avons trouvé (§ 73)

$$\frac{\rho}{\rho'}=x\pm\frac{1}{\rho'(\rho't+\pi')},$$

ou bien, en faisant $\rho't+\pi'=\psi\rho'$,

$$\frac{\rho}{\rho'}=x\pm\frac{1}{\psi\rho'^2},$$

où l'on remarquera que $\rho't+\pi'$ étant renfermé entre les limites σ' et Σ', qui sont l'une et l'autre plus, grandes que ρ' (§ 72), la quantité ψ sera nécessairement plus grande que l'unité. Donc, faisant cette substitution dans la formule précédente, on aura

$$t=a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}\mp\left(\frac{1}{\rho'^2(x-x')\pm\frac{1}{\psi}}+\frac{1}{\rho'^2(x-x'')\pm\frac{1}{\psi}}+.....\right).$$

Mais les quantités $x-x'$, $x-x''$,..... sont données, et la quantité ρ' va toùjours en augmentant ; donc puisque la fraction $\frac{1}{\psi}$ est toujours moindre que l'unité, il est clair que chacune des quantités

$$\frac{1}{\rho'^2(x-x')\pm\frac{1}{\psi}},\frac{1}{\rho'^2(x-x'')\pm\frac{1}{\psi}},....$$

ira nécessairement en diminuant, et que par conséquent la somme de ces quantités, qui sont au nombre de $n-1$, ira en diminuant aussi ; de sorte qu'elle deviendra nécessairement moindre que $\frac{1}{2}$.

Donc, on parviendra nécessairement à une équation transformée telle , que sa racine t sera, à $\frac{1}{2}$ près, égale à

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$$

(a étant le coefficient du second terme pris négativement), c'est-à-dire que cette racine sera contenue entre les limites

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}+\frac{1}{2} \text{ et } a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}-\frac{1}{2},$$

et la même chose aura lieu à plus forte raison pour toutes les transformées suivantes.

Donc, dès qu'on sera parvenu à une pareille transformée' il n'y aura qu'à prendre le nombre entier qui approchera le plus de la quantite,

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'},$$

c' est-a' dire , celui qui sera contenu entre les mêmes limites

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}+\frac{1}{2} \text{ et } a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}-\frac{1}{2},$$

et ce nombre sera nécessairement un des deux consécutifs, entre lesquels se trouvera la vraie valeur de t, de sorte qu'il pourra être pris en toute sûreté pour la valeur approchée k (§77). Ainsi on pourra continuer l'approximation aussi loin qu'on voudra, sans le moindre tâtonnement.

82. Puisque $a=t+t'+t''+....,$ en substituant les valeurs de t, t', etc., (§ 81) on aura

$$a=\pm\frac{1}{\rho'^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''}+.....\right)-\frac{n\pi'}{\rho}.$$

Or, soit

$$x^n-\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}...=0$$

l'équation proposée; qu'on fasse le premier membre de cette, équation égal à X , il est facile de voir, par la théorie des équations, que la quantité $\frac{1}{\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ deviendra, en y mettant $\frac{\rho}{\rho'}$ à la place de x, après la differentiation,

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'}+\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''}+\ldots,$$

à cause que $x, x', x'', \ldots$ sont les différentes racines de l'équation $\mathrm{X}=0$. Donc on aura

$$a=\pm\frac{1}{\rho'^2\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}-\frac{n\pi'}{\rho'},$$

et par conséquent la quantite,

$$a+\frac{(n-1)\pi'}{\rho'}$$

deviendra

$$\pm\frac{1}{\rho'^2\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}-\frac{\pi'}{\rho'}.$$

Donc, si l'on fait

$$\mathrm{R}=\frac{n\rho^{n-1}-(n-1)\mathrm{A}\rho^{n-2}\rho'+(n-2)\mathrm{B}\rho^{n-3}\rho'^2-\ldots}{\rho^n-\mathrm{A}\rho^{n-1}\rho'+\mathrm{B}\rho^{n-2}\rho'^2-\ldots},$$

la quantité dont il s'agit sera $\frac{\pm\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}$; par conséquent les limites dont nous avons parlé dans le numéro précédent seront

$$\frac{\pm\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}+\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\frac{\pm\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}-\frac{1}{2},$$

Ainsi l'on pourra trouver ces limites indépendamment de l'équation transformée en *t*, et par le seul moyen de l'équation proposée en *x*, ce qui pourra servir à abréger le calcul.

83. Il reste maintenant à voir comment on pourra reconnaître si la racine *t* est renfermée entre les limites dont il s'agit; or, cela est facile dès qu'on connait les deux nombres entiers consécutifs $\theta,\ \theta+1$, entre lesquels se trouve cette racine; car, soient $\lambda+\frac{1}{2}$ et $\lambda-\frac{1}{2}$ les deux limites données ; il est clair que, pour que *t* se trouve entre ces deux limites , il faudra que λ tombe entre les mêmes nombres $\theta,\ \theta+1$ et même plus près de celui de ces deux nombres dont *t* approchera davantage. On examinera donc:

1° si λ tombe entre $\theta,\ \theta+1$; 2° cela étant, on prendra celui de ces deux nombres dont λ approche davantage pour la valeur approchée de *t*, que nous nommerons *k*, et faisant $t=k+\frac{1}{\omega}$, on verra si l'équation transformée en ω a une racine positive ou négative plus grande que 2; si cette seconde condition a lieu, on sera assuré que la racine *t* tombera réellement entre les limites $\lambda+\frac{1}{2}$ et $\lambda-\frac{1}{2}$, et l'on pourra poursuivre le calcul, comme nous l'avons dit dans le §81.

84. On pourrait s'y prendre encore de la manière suivante, pour s'assurer si la racine t tombe entre les limites $\lambda+\frac{1}{2}$ et $\lambda-\frac{1}{2}$. Il est facile de voir par le § 81 que la difficulté se réduit à savoir si la somme des quantités

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''},\ldots,$$

divisée par ρ'^2 est moindre que $\frac{1}{2}$; ainsi il ne s'agira que de trouver une quantité qui soit plus grande que cette somme, et de voir ensuite si cette quantité est moindre que $\frac{\rho'^2}{2}$.

Or, soient $x,\ x',\ x'',\ \ldots$ les racines réelles de l'équation proposée, que nous supposerons au nombre de μ, et

$$\xi+\psi\sqrt{-1},\ \xi-\psi\sqrt{-1},\ \xi'+\psi'\sqrt{-1},\ \xi'-\psi'\sqrt{-1},\ \ldots$$

les racines imaginaires que nous supposerons au nombre de $2v$, en sorte que $\mu+2v=n$; comme la fraction $\frac{\rho}{\rho'}$, diffère de la racine x d'une quantité moindre que $\frac{1}{\rho'^2}$ (§ 73), il est clair que si Δ est une quantité égale ou moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de la même équation, chacune des quantités réelles

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''},\ldots,$$

sera nécessairement moindre que

$$\frac{1}{\Delta\pm\frac{1}{\rho'^2}},$$

et par conséquent la somme de ces quantités, qui sont au nombre de $\mu-1$, sera moindre que

$$\frac{\mu-1}{\Delta\pm\frac{1}{\rho'^2}}.$$

Considérons ensuite les quantités imaginaires, lesquelles seront deux à deux de la forme

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-\xi-\psi\sqrt{-1}},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-\xi+\psi\sqrt{-1}},$$

de sorte qu'on aura v quantités de la forme

$$\frac{2\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)}{\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)^2+\psi^2};$$

or, je remarque que , quels que soient les nombres $\frac{\rho}{\rho'}$, ξ et ψ , la quantité

$$\frac{2\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)}{\left(\frac{\rho}{\rho'}-\xi\right)^2+\psi^2}$$

sera toujours moindre que $\frac{1}{\psi}$; en effet si l'on considère la quantité

$$\frac{2y}{y^2+\psi^2},$$

et qu'on fasse, ce qui est toujours possible, $y=\psi\,\mathrm{tang}\varphi$, elle deviendra

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\psi}=\frac{\sin 2\varphi}{\psi};$$

or, la plus grande valeur de $\sin 2\varphi$ est l'unité ; donc , etc.

Donc, si on dénote par Π une quantité égale ou moindre que la plus petite des quantités $\psi,\psi',.....$, la quantité $\frac{\nu}{\Pi}$ sera nécessairement plus grande que la somme des quantités imaginaires dont nous parlons. Donc , en général , la quantité

$$\frac{\mu-1}{\Delta\pm\frac{1}{\rho'^2}}+\frac{\nu}{\Pi}$$

sera plus grande que la somme de toutes les quantités

$$\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x'},\ \frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}-x''},....,$$

Donc, si l'on a

$$\frac{\mu-1}{\rho'^2\Delta\pm1}+\frac{\nu}{\rho'^2\Pi}=\text{ou}<\frac{1}{2},$$

Δ et Π et n étant prises positivement , on sera sûr que la racine t tombera entre les limites proposées.

Or, pour avoir les nombres Δ et Π , lorsqu'on ne connaît pas d'avance les racines de l'équation proposée , il n'y aura qu'à chercher dans l'équation des différences (D) du §8, la limite l des racines positives, et la limite $-h$ des racines négatives, et on pourra prendre pour A un nombre quelconque $=$ ou $<\frac{1}{\sqrt{l}}$, et pour Π un nombre quelconque $=$ ou $<\frac{2}{\sqrt{h}}$; cela suit évidemment de ce que nous avons démontré dans l'endroit cité.

85. Si l'on avait

$$\frac{\mu-1}{\Delta-1}+\frac{\nu}{\Pi}<\frac{1}{2},$$

alors la condition requise aurait lieu dès le commencement de la série; de sorte qu'on pourrait approcher de la valeur de x sans aucun tâtonnement; voici le procédé du calcul.

Ayant trouvé la première valeur entière approchée de x, qu'on pourra prendre ou plus petite ou plus grande que x à volonté, et nommant cette valeur p , on aura les deux premières fractions $\frac{1}{0},\frac{p}{1}$.

1°. On fera donc, $\pi=1,\ \pi'=0,\ \rho=p,\ \rho'=1,$ et substituant ces valeurs dans l'expression de R (§ 82) , on prendra le nombre entier qui approchera le plus de

$$\frac{-R-\pi'}{\rho'},$$

c'est-à-dire de −R, lequel étant nommé k, on aura fraction

$$\frac{k\rho+\pi}{k\rho'+\pi'}=\frac{k\rho+1}{k}.$$

2°. On fera $\pi=\rho,\ \pi'=1,\ \rho=kp+1,\ \rho'=k,$, et substituant dans R, on prendra le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{R-\pi'}{\rho'}$, , c' est-à- dire $\frac{R-1}{k}$, et ce nombre étant nommé k', on aura la fractione .

$$\frac{k'\rho+\pi}{k'\rho'+\pi'}=\frac{k'(k\rho+1)+\rho}{k'k+1}.$$

3°. On fera $\pi=kp+1,\ \pi'=k,\ \rho=k'(kp+1),\ \rho'=k'k+1,$

et on prendra. la valeur entière la plus approchée de

$$\frac{-R-\pi'}{\rho'}\ \text{ou}\ \frac{-R-k'}{k'k+1},$$

laquelle etant nommée k'', on aura la fraction

$$\frac{k''\rho+\pi}{k''\rho'+\pi'}=......,$$

et ainsi de suite. De cette manière, la valeur de x sera exprimée par la fraction continue

$$p+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k'+\cfrac{1}{k''+\text{etc.},}}}$$

ou par les fractions convergentes

$$\frac{1}{0},\ \frac{\rho}{1},\ \frac{kp+1}{k'},\ \frac{k'(k\rho+1)+\rho}{k'k+1},\ldots\ldots.$$

86. Si l'on n'a pas d' abord

$$\frac{\mu-1}{\Delta-1}+\frac{\nu}{\Pi}<\frac{1}{2},$$

il n' y aura qu'a chercher la fraction continue par la méthode ordinaire, jusqu'à ce que l'ou arrive à une fraction dont le dénominateur ρ' soit tel que l'on ait

$$\frac{\mu-1}{\rho'^2\Delta-1}+\frac{\nu}{\rho'^2\Pi}<\frac{1}{2},$$

ou seu jusqu a ce que on parvienne a une transformée qui soit dans le cas du § 83.

Au reste, comme en augmentant toutes les racines d'une équation dans une raison quelconque, on augmente aussi dans la même raison les différences entre ces racines, il est clair que si, dans l'équation proposée, on met $\frac{x}{f}$ à la place de *x*, ce qui en augmentera les racines en raison de $1:f$, les nombres Δ et Π qui conviendront à la nouvelle équation, en seront augmentés dans la même raison, et par conséquent deviendront $f\,\Delta$ et $f\,\Pi$; donc on pourra faire en sorte que la condition du § 85 soit vérifiée , en donnant à *f* une valeur telle que

$$\frac{\mu-1}{f\,\Delta-1}+\frac{\nu}{f\,\Pi}=\text{ou}<\frac{1}{2}.$$

Alors on pourra toujours se servir de la méthode du numéro cité, pour, approcher sans tâtonnement de la valeur cherchée de *x*; il faudra seulement diviser ensuite cette valeur par *f*, pour avoir la véritable racine de l'équation proposée : il est vrai que, de cette manière, on n'aura plus cëtte racine exprimée par une simple fraction continue; mais on pourra néanmoins en approcher aussi près qu'on voudra; ce qui suffit pour l'usage ordinaire.

87. Soit l'equation proposée $x^n-A=0,$ en sorte que l'on demande la racine n$^{\text{ième}}$ du nombre A. Soit,

1$^{\text{o}}$. *n* pair, et $=2m$, l'équation aura, comme on sait, deux racines réelles $+\sqrt[n]{\text{A}}$ et $-\sqrt[n]{\text{A}}$, et $n-2$ racines imaginaires qui s'exprimeront ainsi

$$\left(\cos\tfrac{sc}{n} \pm \sin\tfrac{sc}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\mathrm{A}}\ ,$$

c étant la circonférence ou l'angle de 360 degrés, et s étant successivement $=1,\ 2,\ 3,$ etc. jusqu'à $m-1$; donc on aura dans ce cas (§ 84) $\mu = 2,\ ,\nu = m-1$, et on pourra prendre

$$\Delta = 2\sqrt[n]{\mathrm{A}},\ \ \Pi = \sin\tfrac{c}{n} \times \sqrt[n]{\mathrm{A}}\ ,$$

à cause que $\sin\frac{c}{n}$ est le plus petit de tous les $\sin\frac{sc}{n}$; donc la condition du § 85 aura lieu si

$$\frac{1}{2\sqrt[n]{\mathrm{A}}-1} + \frac{m-1}{\sin\frac{c}{n}\times\sqrt[n]{\mathrm{A}}} = \text{ou} < \tfrac{1}{2};$$

donc elle aura lieu sûrement toutes les fois que l'on aura

$$\mathrm{A} = \text{ou} > \left(\frac{n}{\sin\frac{360^0}{n}}\right)^n .$$

2°. Soit n impair et $=2m+1$, l'équation n'aura qu'une seule racine réelle $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$, et elle aura $2m$ imaginaires de la forme

$$\left(\cos\tfrac{sc}{n} \pm \sin\tfrac{sc}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\mathrm{A}}\ ,$$

en faisant successivement $s=1,\ 2,\!\ldots\!..$ jusqu'à m ; donc on aura dans ce cas, $\mu=1,\ \nu=m,$ et comme le plus petit des $\sin\frac{sc}{n}$ est $\sin\frac{mc}{n}$ ou $\sin\frac{180^0}{n}$, à cause de $n=2m+1$, on pourra prendre

$$\Pi = \sin\tfrac{180^0}{n} \times \sqrt[n]{\mathrm{A}}\ ;$$

de sorte que la condition du numéro cité aura lieu ici , si

$$\frac{m}{\sin\frac{180^0}{n}\times\sqrt[n]{\mathrm{A}}} = \text{ou} < \tfrac{1}{2},$$

c'est-à-dire, si l'on a

$$\mathrm{A} = \text{ou} > \left(\frac{n-1}{\sin\frac{180^0}{n}}\right)^n .$$

Donc, lorsque le nombre A ne sera pas au-dessous des limites que nous venons de trouver, on pourra toujours , en faisant usage de la méthode du § 85, trouver directement et sans tâtonnement la racine n$^{\text{ième}}$ de ce nombre ; et s'il est plus petit que ces limites, on pourra toujours le rendre plus grand en le multipliant par un nombre quelconque qui soit une puissance exacte du même exposant n ; en sorte qu'après avoir trouvé la racine de ce nombre composé, il n'y aura plus qu'à la diviset par celle de son multiplicateur pour avoir la racine cherchée de A.

Quant à la valeur de R (§ 83), elle sera pour l'équation $x^n - \mathrm{A} = 0$,

$$\mathrm{R} = \frac{n\rho^{n-1}}{\rho^n - \mathrm{A}\rho'^n}.$$

88. Puisque le cas de $n = 2$ peut se résoudre par la méthode de l'article II ci-dessus, nous en ferons abstraction ici ; soit donc

1°. $n = 4$, on aura $\sin\frac{360^0}{4} = 1$,

donc

$$\mathrm{A} => \text{ ou } 4^4;$$

2°. $n = 6$, on aura $\sin\frac{360^0}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc

$$\mathrm{A} = \text{ou } > 3^3 \cdot 4^6;$$

3°. $n = 8$, on aura $\sin\frac{360^0}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

donc

$$\mathrm{A} = \text{ou } > 2^4 \cdot 4^8;$$

et ainsi de suite.

De même, si l'on fait

1°. $n = 3$, on aura $\sin\frac{360^0}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc

$$\mathrm{A} = \text{ou } > \frac{4^3}{3\sqrt{3}};$$

2°. $n = 5$, on aura $\sin\frac{360^0}{5} = \sin 36^0$,

et, faisant le calcul par les logarithmes , on trouvera

$$\mathrm{A} = \text{ou } > 14595,$$

et ainsi de suite. Bg. Supposons, par exemple, qu'on demande la racine cubique de 17; puisque 17 est $>\frac{4^3}{3\sqrt{3}}$, à cause de $3\sqrt{3}>4$, on pourra employer d'abord la méthode du § 85. On aura donc ici, à cause de $n=3$ et $\mathrm{A}=17$ (§ 87),

$$\mathrm{R}=\frac{3\rho^2}{\rho^3-17\rho'^3}.$$

Or, le nombre entier le plus proche de $\sqrt[3]{17}$ est 2 ou 3; de sorte qu'on pourra faire à volonté $p=2$ ou $p=3$.

Faisons $p=2$, et les premières fractions seront $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$; donc,

1°. $\pi=1,\ \pi'=0,\ \rho=2,\ \rho'=1$;

donc

$$\mathrm{R}=\frac{3\cdot4}{8-17}=-\frac{4}{3},$$

et le nombre entier qui approche le plus de

$$\frac{-\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}=\frac{4}{3}$$

sera 1; donc $k=1$, ce qui donne la fraction

$$\frac{k\rho+1}{k}=\frac{3}{1}.$$

2°. $\pi=2,\ \pi'=1,\ \rho=3,\ \rho'=1$;

donc

$$\mathrm{R}=\frac{3\cdot9}{10}\ \text{ et }\ \frac{\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}=\frac{17}{10};$$

et le nombre entier qui approche le plus de $\frac{17}{10}$ étant 2, on fera $k'=2$, ce qui donnera la fraction

$$\frac{k'\rho+\pi}{k'\rho'+\pi'}=\frac{8}{1}.$$

3°. $\pi=2,\ \pi'=1,\ \rho=8,\ \rho'=3$;

donc

$$\mathrm{R}=\frac{3\cdot8^2}{8^3-17\cdot3^3}=\frac{192}{53}$$

et

$$\frac{-\mathrm{R}-\pi'}{\rho'}=-\frac{241}{159},$$

le nombre entier qui approche le plus de cette ractio étant -2 ; donce on fera $k''=-2$, et a fraction $\frac{k''\rho+\pi}{k''\rho'+\pi'}$ sera $\frac{-13}{-5}$, etc. De cette manière, on aura les fractions convergentes vers $\sqrt[3]{17}$,

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{-13}{-5},\ldots\ldots,$$

et la fraction continue sera

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\text{etc.}}}}$$