Analysis of the Treatise :

*On the Resolution of Numerical Equations of all Degrees….*

By L. POINSOT Paris Academy of Sciences, etc.

Since *Leibnitz* and *Newton,* nearly all mathematicians have been occupied only in the perfection of the new calculus, or in its application to geometry and mechanics, and it must be agreed that algebra has been neglected a little. We are thus obliged in the first place to *Lagrange,* for not having lost this fundamental part of mathematics from view, and here by recalling the attention of the mathematicians to that with this excellent *Treatise* for, since all algebra is reduced in the end, to the analysis of equations, it can be said that this work, with the learned notes with which it is enriched, form the most complete treatise of algebra, and the most profound that could be wished for, in the actual state of the science.

The author gives there first, for the resolution of numerical equations, this sure and elegant method which he had published initially in the *Mémoires de l'Académie de Berlin* (in the years 1767 and 1768). He then confirms in the Notes [at the end of this volume], by some new and rigorous demonstrations, the general principles which act as the bases for this resolution. There he reviews all the methods imagined for the same end; these he compares and collates, and following the natural turn of his genius, which return to the same principle. Finally he reproduces there, along with some new ideas, all the contents of these matters which he had produced in the same Berlin records, for 1770 and 1771 : he gives a clear and precise statement of his general method founded on the art of reducing the number of permutations which multiply the functions sought, and by that to reduce the degree of the resolvants; and recalling, on the occasion of the beautiful work of *Gauss*, his former ideas on this matter, and in Note XIV he has deduced concerning that, and which is entirely new, the direct and general resolution of binomial equations of all degrees.

Such are the most important points delved into in the work of which we are going to give an account. This simple summary would without doubt suffice for mathematicians, who do not want to read the author's writings, and who know very well the elegance and simplicity which reign in all his methods : but since it can be useful for some young readers to have a neat idea of the science, of knowing what they must understand in this part of analysis, and where they must study it, we think we should give some details about the principal questions proposed here, about the solutions given, and to develop the following theorems within a certain range.

At first if we cast an eye generally on the algebra, we see that this science, made abstract form ordinary operations (for some number which we can count to eliminate), naturally to be divided into three principal parts. 1$^{o}$ . The general theory of equations, that's to say, the assembly of the properties which are common to all these. 2$^{o}$. Their general resolution, which consists in finding an expression composed from the proposed coefficients, and which, put in place of the unknown, proves to be satisfactory to that equation identically, such that everything there to be cancelled out by the change of signs alone. 3°. The resolution of numerical equations, where it is required to find some particular values which may be satisfied in a manner as close as wished, by an equation of which the coefficients are actually known and given in terms of numbers.

This last investigation is without contradiction the most useful in the application: for, apart from the resolution not extending beyond the 4th degree, the formulas used are already so complicated, and that would be so for higher degrees, if they may come to be discovered, that would never be able to be used in the calculation of the roots. Hence it will be needed to return again to the methods of approximation which make up the principal object of this treatise. Now, the principles of these methods being set out in the general properties of equatins, we are going at first to examine what can be known more generally about their theory.

The first principle, known for a long time, is that if, in some equation, two numbers put in place successively in place of the unknown give outcomes of opposite signs, it has there at least one intermediate number which would give a zero outcome, or it would be the root of that proposed. Customarily this theorem would be demonstrated by the consideration of curved lines; but M. *Lagrange* gives a neat and rigorous demonstration in Note I, based on the same nature of an algebraic polynomial of which the equality to zero is formed by the proposed equation.

The second principle is this, if a number reduces the polynomial to zero, or rather is the root of that one proposed, the polynomial is exactly divisible by the binomial form of the unknown, less this root. *D'Alembert* was the first to have shown this principle in a rigourous manner : a demonstration of this is found in Note II, also exact and furthermore complete, also in this it can be seen, not only that the division must be successful, but that actully it can be used again.

Hence it is very easy to see this to be the reciprocal part of the first theorem : because if there is a root between the two numbers, and that is only a single root, these two numbers put in place instead of the unknown will give results of opposite signs ; from which it follows that the same thing will happen for any odd number of roots, and will only happen in that case.

Such are the fundamental principles of the whole theory of equations: it is deduced at once that they can have just as many roots as there is units in the highest exponent of the unknown, and never can be seen to have more. Because the equations of odd degrees have essentially at least one real root ; from where it follows that in some equation, the roots which remain are necessarily even in number. As for these kinds of roots, which are called *imaginary*, it is apparent at first, by the known resolution of the first four degrees, that their form being the same as these of the second degree. *D'Alembert* tried to show this theorem generally, in his paper on the cause of winds, and in the *Mémoires de Berlin* for the year 1746. M. *Lagrange*, who refers to this demonstration, at the beginning of IX, on the form of imaginary roots, renders that more rigourous and simpler; but is is necessasry to agree that with the exception of the place where it can be proven that, in the passage for real to imaginary, or reciprocally, the root becomes double or quadruple, or a multiple of an ordered pair, the rest of the demonstration is not immune to very strong objections. Also M. *Lagrange* himself returns to the theorem in a more direct manner, in considering how he must act to prove in general that every polynomial of even degree is resolvable into real factors of the second degree; and since there are only these equations of odd degree where the existance of a real root can be assured always, or even these of even degrees, but of which the last term is essentially negative, all is reduced to proving that, in the search for the coefficients of a factor of even degree for the proposed polynomial, at last such a pair of equations will be stumbled on. The author, on comparing the successive works of the various mathematicians on this matter, and particularly the researches of *Euler,* of *Foncenex,* and these which he himself added in the *Mémoires de Berlin* in 1772, shows that the general theorem thereby found was shown in a rigorous manner; but at the end of the same note IX, he compares it with another very elegant demonstration deduced from the same principles, which *Laplace* had since made known, in the *Leçons de l'École Normale*. Nevertheless, if it were desired to resolve the polynomial effectively into its real factors, as it would be almost impossible to follow the procedure indicated that would have to be used, *Lagrange,* believes he ought to be able to undertake this general problem in its entirety in note X, where he shows *à priori*, not only the possibility of the decomposition of the whole polynomial into real factors of the $1^{st}$ and of the $2^{nd}$ degree, but also the precedure one would wish to follow if they actually wanted to effect this decompositon, which leaves nothing further to be desired on this important point of the general theory of equations.

The nature of the roots thereby being well known, the general problem of their numerical solution can now be proposed.

Being given a numerical equation, without any prior idea of the magnitude or the kind of these roots, to find the exact value, if it were possible, or also the approximation one would wish for each of these roots.

At first, if there are some equal roots, it will be easy to recognise them and to remove them from the equation, as can be seen in Chapter II of the Treatise. If there are some imaginary roots, the search of these imaginary parts will lead to the real roots of another equation which one can actually construct, and the real parts of these same roots will be obtained at once by the simple operation of the common divisor, as the author shows in the same chapter. From which it remains to know how the real roots of some equation can be obtained. But, for more clarity, this search itself is again divided ; for among the roots, some will be positive, others negative. Now, if we know how to find the positive ones, the same method applied to the transformation which gives the equation, on changing the sign there of the unknown, will make known the positive roots of this transformation, and as a consequence those negative ones of the proposed equation.

All is reduced finally thus to know how to find the real positive roots of some given numerical equation. Now, the first problem in that will be to recognise the number and the whole number boundaries approached most closely.

If these roots differ amongst themselves at least by one unit, so that, between two consecutive whole numbers, it could only drop by one, one will be sure that in putting the series of natural numbers in place of the unknown, the successive results would present just as many variations of the signs as there would be roots in the proposed equation. But if, between two consecutive numbers, two are found, or some even number of roots, the results given by these numbers will be of similar signs, and these roots will not be seen. If an odd number were found, the two results truly will be of different signs, and would indicate the existance of included roots, but would not make their number known, since there would be able to be one, three, or any odd number. Hence, in order to recognise at once the number of roots, it would be necessary to make a series of substitutions of which the intervals would be less than the smallest interval between the roots. Then we will see appearing in the series of results, just as many variations of sign as there will be of roots in the proposed equation. That is why *Lagrange* looks at first in the problem of no. 8, Chapter I, for an equation of which the roots shall be the differences between these of the proposed equation taken two by two. He explains how to find a quantity which shall be less than the smallest root of this equation, and as a consequence, which resolves the smallest interval between the roots of the numerical equation. He is the first who has made this great use of the equation for the differences, thus to be either for the exact separation of the roots, or to obtain the imaginary roots, and to recognise their presence in the equations. He gives finally in note IV, a simpler way of finding this boundary of the smallest difference, without calculating the whole equation ; and this method raised a little can shorten considerably the work in the resolution of these equations.

This investigation of the boundaries of the roots must be regarded as the most important of all in the resolution of the equations. This is something which the greater pasrt of authors do not appear to have felt the need: some of these, even in new works, still believe in giving a sure method, by indicating the process of substituting successively whole numbers; which is, so to speak, to set aside the only real difficulty of the problem; for, once we have these boundaries, it is quite easy to tighten these up, and to approach as far as we wish to the contained root. Furthermore, we have still on this determination of the boundaries of roots, and on their constitution of being real, several very elegant methods have been made by several mathematicians, which involve the consideration of maxima along parabolic lines. We find these together in note VIII, with *Descartes'* famous rule, but all deduced following the uniform progress of the author, through the first principles of the analysis of equations.

When the number of the roots and their initial boundaries have been determined, it is required to see how we can approximate these and also as close as desired. The author applies that ingenious theory of continued fractions to this problem, which he had perfected and rendered perhaps useful in the whole of analysis. The root we are attending to being imaginary being developed into a continued fraction, it is necessary to see, how by repetition of the same method applied to these successive transformations, we can find exactly the successive denominators of the fraction, and as a consequence also the approximate value we would wish for the unknown root. The operations to make these operations certain become very simple; for, for initially if we have had the need to change the proposed into another where the roots shall be more distant to being less than unity, since that is easy, then each transformation has only a single root greater than unity, and it is very easy to find the two whole numbers which enclose it. Hence we have, by the same nature of continued fractions, the simplest and most exact expression possible of each root, and, at each instant, the limits of the error that we would be able to commit. If the root is commensurable, the continued fraction stops ; if it is incommensurable of the second degree, the fraction becomes periodic, and the author's method still has this advantage of making the commensurable divisors of the first and second degrees which the proposed fraction may contain.

Hence we have, in the analysis of equations, this beautiful result due entirely to *Lagrange* : if one unknown is involved in a numerical equation of some degree, we can regard its value actually as determined in a perfect manner; and we are in the position of assigning the successive tems to the continued fraction which may represent that, with just as much rigor as would be required for an ordinary fraction we wished truly to develope.

Neither this rigor nor this generality occurs in each of the methods given for the solution of the same problem. Other than assuming knowledge of the bounds of the roots, which are strictly obtained only by the first analysis of the author, other methods do not give to each correction the bounds of the error, and leave in doubt the figures that we must retain. In following Newton's method, if otherwise elegant and convenient in use, not only do we not recognise commensurable roots, and the actual error bounds, but we may find successive correcting values which, in place of continually converging towards the root, on the contrary may move away further and further. *Lagrange*, who examines and appraises this method in note V, shows that the use is certain only in the case where the root sought is the greateset or the leaset of all the roots ; and if it has some imaginary roots, it is still necessary that the real parts must be less than the greatest real root, or much greater than that smallest of the roots. That besides is what can be seen from the geometric construction of *Newton's* rule. For the successive corrections of the root come from adding continually to the abscissa which represents the value approximated, the sub-tangent which corresponds to the this abscissa ; and it is seen that the end of this sub-tangent can, in some cases, fall further from the intersection sought of the curve with the axis, than the same abscissa itself does. This inconvenience may be avoided by drawing the chord of the arc of which the extremities correspond to the two abscissas which are the bounds of the root ; for this chord crossing the axis in the interval of the limits, necessarily shall give a point closer to the intersection of the curve, and certainly shall be approaching that.

The method of approximation that *Daniel Bernoulli* has described from recurring series, is subject to the same faults. It can be applied only to finding the smallest or the largest root ; and when it has some imaginary roots, it is necessary also that the root must be within certain limits with regard to the real products of the conjugate imaginary roots. It could equally be applied, by a transformation of the proposed equation, to the search of some one of the real roots. But it would be necessary to know in advance a value which was an approximation of this root determined at least to a certain point. Now these initial limits cannot be obtained, as it has been said, because the methods given in this paper ; and these values once known, it is much more exact to use the method of contined fractions in order to approach the true values of the roots quickly. For the rest, this method, deduced from the consideration of recurring series, returns to that of *Newton,* as can be seen in note XI. There *Lagrange* reduces the result of these successive substitutions indicated by this rule into a general formula. He deduces easily by his elegant analysis, the coming together of the preceding methods, both *Euler's* formula for the development in series of the root of some equation, as well as that of *Newton* for the return of the series, with the law of the terms and the means of continuing the series as far as it may be desired; finally the demonstraton of this formula he had given first, in 1768, in the *Mémoires de l'Académie de Berlin*, and which is also remarkable by its elegance and generality. This note, which is one of the most beautiful morcels of analysis, is terminated by the extension of *Newton's* rule to the simultaneous resolution of several equations where we know already the approximate values of the different unknowns. *Thomas Simpson* had shown this procedure ; but the author expands the unknowns in general series whose law he shows, which *Simpson* had not accomplished.

As for *Fontaine's* method , on which *D'Alembert* and *Condorcet* had contented themselves by casting some doubts, we find it discussed very clearly in note VII. *Lagrange* first proves the ambiguity of the characters established by the author to be recognized, by means of the coefficients of the equation, the particular system of roots which must correspond to it. These characters agree sometimes for several systems, and consequently do not always distinguish the unique system in question from all others; as consequently neither the number nor the quality of the different roots can be assured. But the method is still at fault in the second part of the investigation: we suppose there that , by the substitution of whole numbers in place of the unknown, the equations that we consider will present results of opposite signs; and that cannot happen, as we know, except for these cases where the smallest interval of the roots shall be greater than unity. So *Lagrange* does not examine this method, of which we make no use, but the idea of which is very fine, since there is nothing left to desire in the matter of equations. Since there is no outstanding matter, in the whole of analysis, into which this geometer has not cast his mind, and which he has not so to speak, observed very closely, we are sure to find in his works, at the same time as his own discoveries, all that has been thought of most profoundly and ingeniously by his predecessors; and that which is most noteworthy, everything there appears to follow uniformly from the same principles, as if the author was developing the simplest corollaries in these.

But there is a most striking example of this talent both of simplifying and extending the teaching in the famous problem of the general resolution of equations. It all consists, as we have said, in finding a formula composed of the letters of the coefficiens of the proposition, which satisfies the question in an identical manner.

The first idea which presented itself at once to mathematicians, was to look for some trick by which the unknown could be put on one side of the equation, and all the cofficients given could be put on the other. We then considered looking for transformations of the unknown that would make the equation similar to another one that could be solved or decomposed. It is from these very natural initial ideas, but hardly yet enlightened by the profound theory of equations, that we must regard the solutions of *Cardan* and of *Tartaglea,* for the $3^{rd}$ and $4^{th}$ degrees; *Descartes'* method for decomposing the equation of the $4^{th}$ into two parts of the second degree ; that of *Tschirnhaus,* in order to reduce the proposed equation to two terms by the vanishing of the intermediate terms ; that of *Euler,* which consists of imagining initially the form of the general expression of the root, and then to look for that supposed form required to be there within the roots ; finally that of *Bezout*, based on a similar principle, but where we begin to see the degrees of the reduced forms, and to indicate the law of their successive elevation. All these methods depend on the execution of an actual calculation,and it cannot be seen where it will end, unless it effectively arrives there: now by the nature of the problem, the length of the problem grows with such a speed, that the question today can be no longer about looking for the formula, but simply to predict the series of operations that would lead to it for sure. Therefore none of these methods can be considered satisfactory, and it is to higher ideas about the nature of equations that we must rise now to discover whether or not there is a certain route, which pursued, would lead to their general resolution.

*Vandermonde* attacked the problem with great exactness and depth, in the *Mémoires de l'Académie des Sciences* for the year 1771. He considered that if the formula were found, and where one put, in place of the coefficients, their values as a function of the roots, this formula which must give each of them equally, must be able to present without heeding the order, either the first, second, or any of the roots at will. According to this idea, taking several letters which represent the roots, he seeks to compose an expression which, by the equivalence of the signs, to reduce itself to one or other of the roots indifferently, as wished. The formulas known to him gave at once these expressions for the four first degrees, and by analogy it is easy to find for the higher degrees. But the difficulty remains of expressing these functions of the roots by the simple coefficients of the proposed equation, or to make these depend on other equations of which the resolution is known. Thereupon he gives abbreviated forms of the calculations, which he calls *Types*, and by means of which he can see more quickly what the outcome of these long operations will be. His method, like all the others, méthode, comme toutes les autres, succeeds very well for equations of the four first degrees ; but for the fifth, he finds himself let to and stopped by an equation of the sixth degree which it would be necessary to resolve. As regards the general equation of this last degree, he finds that he will arrive at a reduced final equation, either of the fifteenth, or a tenth degree, according to the route which he wishes to choose; so that, for compound degrees, we may form from the roots several equivocal expressions, which equally have the property of offering each of their roots indifferently; and there is a choice to be made for the least elevation of the degree of the reduced. It is an observation which the formulas of the 4$^{th}$ degree naturally will have presented to *Vandermonde*. By certain methods, we are unable to find even roots higher than the square root ; by others, we can find fourth roots. However, the formulas must be identical and indeed are, because these even roots are reducible to one another. I paused a little on this memoir, because it is full of things. Without indicating the course of the operations which he had to make, he gives the formula which solves the binomial equation of the 11$^{th}$ degree, and it is found that this result, almost ignored until now, is exact near a change of sign, as *Lagrange* has just verified in note XIV of this work, where he gives the general resolution of this whole class of equations. Thus *Vandermonde* is, according to *Lagrange* himself, the first to have crossed the boundary where the resolution of binomial equations was found to be restricted.

At about the same time, *Lagrange* , on running through the principal methods found until then on the general resolution of equations, from these recalled the same principle , and formed this radiant theory in which we can see without calculation the degrees to which we must ascend the reduced equation, and the reason for their lowering these below those proposed in the first four degrees. You can see here the general idea for this beautiful work that the author has given in the *Mémoires de Berlin*, for 1770 and 1771, and the summary of which is the subject of note XIII of this work.

Whatever these equations may be from which the resolution of the proposed equation may be made to depend, and which thus are called the *reduced* equations, their coefficients will be functions of the coefficients of this proposed equation, and

consequently their roots, functions of the roots of the other equation. Any reduced equation therefore will always be raised to a degree indicated by the number of values that the function of the roots can have which is being considered there. Now, this function in general will have just as many values as there may be permutations made among the roots present. If, therefore, it has less there, it can come only from the particular nature of the function which will be such that several permutations between the roots will bring no change. Following these principles, it is very easy for the author to bring together all the methods of the mathematicians. For, on putting into their formulas, in place of the coefficiens, their values by the roots, he discovers the particular functions which are sought, without their knowledge, so to speak ; and it happens that all these functions return to the same one, in spite of the apparent diversity of their calculations and their methods. He sees, at the same time, why their reductions into the first four degrees, fall below the degree of the equation and can resolve it; and, being able to predict the success of impractical calculations for the fifth degree, he shows that the reduced equation, which is naturally of the 120$^{th}$ degree, will fall initially to the 24$^{th}$; that this new equation will be divided into six others of the 4$^{th}$ degree, of which the coefficients will thus depend on a final equation of the 6$^{th}$ degree, which it would be necessary to reduce again, but which has hitherto resisted all the efforts of the mathematicians. He also finds the same lowering of the reduced equations to the 15$^{th}$ or the 10$^{th}$ degree, for the general resolution of the 6$^{th}$: the agreement of these results with those which *Vandermonde* obtained can be seen at the same time, by means of these forms or types of computation he had considered. But *Lagrange's* theory is much clearer, and the results can be envisaged there with equal ease, by which one can hope for in the resolution of all the higher degrees. In addition, the author derives a simple and uniform method for solving equations. For it is clear at this point that the problem can be returned to this: to find functions of the roots which are such at first that one can easily identify these roots, and in the second place, which depend only on equations of smaller degree than the proposed one, whose coefficients are known, or they themselves depend on equations inferior to this proposed one. *Lagrange* chooses a linear function of the roots: the equation which would give it, and which can be constructed now, would rise to the degree indicated by the number of permutations that may be performed between all these roots, and, after the 2$^{nd}$ degree, would always be higher than the proposed one. But if we care to, for the coefficients of this linear function, the roots of unity of the same degree as the equation, which all the methods indicate, the reduced equation will be lowered, as that can be seen in principle, from the very form of the function.
To give an idea about this, how it arises, for example, to solve the general equation of the fifth degree. The resolving equation which will give the linear function of its five roots will rise to the degree in 1. 2. 3. 4. 5 or 120 ways; the number of ways in which five roots can be permuted between themselves. But if the coefficiens of this function are the fifth roots of unity, we will observe that this function successively multiplied by these 5 roots, will provide 5 similar functions where the roots of the proposed will have changed places. Hence, if the simple function has 120 different values, its fifth power will have only the fifth part, or 24. Thus, we will look for the fifth power of the linear function. But these 24 values themselves can again be divided up into six groups. For, by the nature of the imaginary roots of unity, a single one, with its successive powers, gives all

the others; another, with its successive powers, still gives these, but arranged in a new order. Now, since here there are four of these roots, the same function in which these four roots would be used successively and in the same way, would correspond successively to four of its values, as if the roots of the proposed were interchanged four times. Any similar expression of these four functions, such as their sum, the sum of their products two by two, or three by three, etc., will therefore have only a quarter of all the values, or simply six different values.The function thus may be regarded as the root of a 4$^{th}$ degree equation whose coefficients will be given by an equation of the 6$^{th}$ degree, which will be completely known. It may be shown by the same reasoning that the resolvent of the 7$^{th}$ degree, and which will rise to the degree 1.2.3.4.5.6.7 will be reduce to the degree: 1.3.4.5; and so on: so that the method, for the degrees which are prime numbers, only removes the difficulties distinguished by the last two factors in the formula which expresses the number of all possible permutations; and this reduction is not sufficient for degrees higher than the 3$^{rd}$.
The author also applies his method to equations of composite degrees; and by the very nature of the thing, there are for these degrees particular simplifications in the course of, and in the result of, the calculation. The reduced equations are of lower degree there ; but, beyond the 4$^{th}$ degree, they always remain greater than that proposed ; and so far no on has been able to see a further reduction.

This is all we know about the general resolution of the equations where the roots are supposed to be perfectly independent. It is entirely unknown whether this resolution is possible, and whether there may not be able to have forms of functions, in which more of the permutations could be used up than in those of which we have just spoken
But when the roots are connected by some known relation, the difficulty always descends to that of the lower degrees. If one part of the roots is treated in a certain way, we can at once free-up the polynomial which contains them; and if there are several groups in which the contained roots are similarly treated, we will obtain any of these groups by an equation of a degree indicated by their number. When it is known, for example, that the roots of an equation are in conjugate pairs, in such a manner that their product becomes equal to one, this equation that we call *reciprocal,* separates easily into two others of a degree twice as small; and similarly, if the roots were combined three to three by some common relation, the equation would be divided into three other equations; and in general, the difficulty of an equation in which the roots are assembled into similar groups is reduced to the difficulties of the respective degrees marked by the number of groups, and by the number of roots contained in each of them.

This happens naturally for binomial equations of a compound degree. If you consider, for example, the binomial equation of the 15$^{th}$ degree, it has 15 roots; but among these roots there are three whose cubes are equal, three others whose cubes are equal, and so on. ; so if, instead of looking for simple roots, you first look for cubes, you will have only five values. And in the same way, if one had sought only the fifth powers, one would have had only three different values; whence it seems manifest that a binomial equation of a compound degree is reduced to the resolution of similar equations of degrees denoted by the factors of the degree of the proposition.

All that remains is to solve the binomial equation of a first degree. Now, by removing by division the linear factor which corresponds to the real root, we obtain a reciprocal equation of even degree which is doubled as we have said, and has only the difficulty of a degree twice as small.

We had not gone very far in the reduction of binomial equations, when *Gauss* showed that this reciprocal equation could be solved by means of just as many particular equations as there are factors in its degree, and whose degrees are expressed by these same factors. Thus, the binomial equation of the $13^{th}$ degree gives, by separating the real factor, a reciprocal equation of the 12th degree which requires only the resolution of three equations of the respective degrees 2, 2 and 3, which are the prime factors of 12. A binomial equation of the $19^{th}$ degree requires as well the resolution of three equations of degrees 2, 3, 3; And so on. Without entering here into the details of the properties of numbers which led *Gauss* to this new reduction, we will observe that it is essentially due to the fact that the roots to be conjugate not only in pairs, as has been known for a long time, but again group themselves 3 to 3, 5 to 5, etc ..; if 3 and 5, etc., are still factors of the number of these roots. Thus the binomial equation of the $13^{th}$ degree gives, on separating the real factor, a reciprocal equation of the $12^{th}$ degree which does not demand more for the resolution of three equations of respective degrees 2, 2 and 3, which have the prime factors of 12. The binomial equation of the $19^{th}$ degree does not demand more than the resolution of three equations of degrees 2, 3, 3; and so on hence. Without entering here into the detail of the properties of the numbers which had led *Gauss* to this new reduction, we will observe that it is essentially due to the fact that the roots may not only conjugate two by two, as has been known for a long time, but may yet be grouped together 3 to 3, 5 to 5, and so on; if 3 and 5, etc., are still factors in the number of these roots. This can be recognized with a little attention by examples. Thus, it will be easy to see that the twelve imaginary roots of the $13^{th}$ degree binomial equation can be separated into four groups of three roots, such that in each of them, putting one in place of the other, these three roots are not changed ; and therefore, if we exchange the roots of one group into another, the groups will only be interchanged while always maintaining their same roots. Then it will be seen that among these four groups there are two such that any exchange which makes one root go in the place of the other, brings the latter root back to the place of the first; thus, these other two groups are in the same situation. Thence, if you ask from a $12^{th}$ degree equation, the divisor of the $3^{rd}$ degree which resembled the three roots of a group, you will have the coefficients of this divisor by a $4^{th}$ degree equation; and if you seek from that the divisor of the second which has its roots corresponding to two conjugate groups, you will have its coefficients by a $2^{nd}$ degree equation; such that the proposed equation will be solved by auxiliary equations of the $2^{nd}$ and $3^{rd}$ degree; and so of others. As for these auxiliary equations; they themselves have only the difficulty of binomial equations of the same degree. On this point we can see the *disquisitiones arithmeticae*, in the places cited by *Lagrange*, in note XIV of this Treatise.

But, by the analysis which he has just given us in this new Note, we see, with the last evidence, the immediate reduction of the reciprocal equation proposed to a binomial equation of the same degree which is already supposed to be solved; so that its method renders superfluous this consideration of the auxiliary equations, and makes disappear the ambiguities which one meets in the process of M. Gauss, to distinguish at every instant the particular root which one has a design to release in all the continuation of the calculation.

But, by the analysis which he has just given us in this new note, we see, with the last evidence, the *immediate reduction* of the reciprocal equation proposed to a binomial equation of the same degree which is already supposed to be solved; such that its method renders superfluous this consideration of the auxiliary equations, and makes the ambiguities disappear which we meet in *Gauss's* prodedure, to distinguish at every instant the particular root which one has a design to release in the whole process of the calculation.

To explain this Analysis better, which is nothing other than a particular application of the general method explained in the preceding note, I will take the example of the binomial equation of the eleventh degree: the discussion in that will be easier, and the reasoning will not lose anything of its generality.

Thus, by separating the real root, we have a reciprocal equation of the $10^{th}$ degree which it is required to solve. Now, we know at first that the roots of this equation have this singular property, that only one of them raised successively to the powers 1, 2, 3, 4, 5, etc., gives all the others; and if one continued to raise to higher powers, one would see them reappear periodically in the same order, to infinity, finding unity with each power that would be multiple of eleven. Thus, by separating the real root, we have a reciprocal equation of the 10th degree which we must solve. This property therefore allows us to write all our roots with a single letter affected by different exponents. But, instead of arranging these exponents in arithmetic progression, *Gauss*, according to the theorem of Fermat on the residues of the powers, had the happy idea of arranging them in geometrical progression, taking for base one of those numbers, which *Euler* calls *primitive roots*, and which are such that their successive powers, divided by the prime number on which it depends, which is here eleven, leave the successive remainders all different: in this way we still have the same ten roots as if we had taken the exponents 1, 2, 3, 4, etc., but in a new order, to which it is indifferent. Now, at present it can be seen that this arrangement of the roots is such that, if one wanted to interchange two of these, and that by this change, one of the roots advances by one, two, three or four places, etc., all the others will advance at the same time by one, two, three, four places, etc.; such that all the possible permutations you would wish to make between these ten roots, by transporting one instead of another, will only reduce to the ten permutations you get by reading right away your roots, first from the first, then the second, then the third, etc., at the end of the tenth, exactly as if they were written in a circle. That being put in place, if, following the general method of note XIII, you take a linear function of your ten roots, and you put the ten tenth roots of unity as coefficients, placing these roots in the natural order of the powers of one alone, you will observe that by multiplying all this linear function by the first tenth root of the unit, you will advance all your sought-after roots by one place in the function; if you multiply by the second, you advance them two places, and so on. Thus, if at once you raise raise the linear function to the tenth power, you use up the only ten different permutations of which it was susceptible, and therefore you find there only the one value, by some exchange, which may be put in place between the contained roots. Thus you obtain this first linear function by putting the tenth root to its tenth power which is known. You also obtain a second linear function, using another tenth root of the unity, and so on; and out of these ten linear functions you extract at once your ten unknown roots, without ambiguity.

Such is the method given by *Lagrange*, as a natural continuation of his general method. We again take advantage of the simplifications that arise in the resolution of compound equations. Thus, instead of raising the linear function to the power indicated by the degree of the equation, we can first raise only to the power indicated by one of the prime factors of this degree, and thus thereafter; and we will have the double advantage of arriving more quickly at simpler formulas. These formulas, however, will be the same in regard to the nature of the roots, because roots of a compound degree are reduced to those of the respective degrees indicated by the prime factors of this degree. So we see that in the formula that solves a binomial equation of some degree first, there will be no other roots than those that respond to the simple factors of this first degree less one. Thus, for the binomial equation of the 17th degree, there will be only square roots; we may therefore construct the formula by ruler and the compass; that is why one can inscribe *geometrically* register the regular polygon of seventeen sides; and in general, any polygon of a number of sides, equal to a power of two plus one, and at the same time prime. For we know that the resolution of the binomial equation gives the division of the circle in equal parts: conversely, if we know how to divide the circle into equal parts, we can solve the binomial equation of a degree indicated by the number of these parts. Also, of all the solutions of this equation, the best in the use is that which gives the tables of trigonometry, where one finds the circumference divided in any number of parts, with a very great exactitude. But it was none the less curious and important for analysis, to examine and follow to the end this algebraic resolution of the binomial equations, which is like the key to the general resolution of the complete equations.

# LAGRANGE'S

# INTRODUCTION.

The solution of any determined problem is reduced, in the last analysis, to the resolution of one or more equations, the coefficients of which are given in numbers, and which may be called *numerical equations.* It is important thereforeto have methods to completely solve these equations, of whatever degree they may be. The one found in the Collection of Memoirs of the Berlin Academy for the year 1767 is the only one which offers direct and sure means of discovering all the real and imaginary roots of a given numerical equation, and to approach as quickly and as near as we wish to each of these roots. The present Memoir, which contains this method, and the Additions which have appeared in the volume of Memoirs of the same Academy, for the year 1768, have been collected in the present treatise. And to make this Treatise more interesting, we have attached several notes, the last two of which appear for the first time in this new edition. These notes contain some investigations into the principle points of the theory of algebraic equations.

It is necessary to distinguish the resolution of numerical equations from what is called in Algebra the general resolution of equations. The first is, strictly speaking, an arithmetic operation, founded in truth on the general principles of the theory of equations, but the results of which are only numbers, where we no longer recognize the first numbers which served as elements, and which keep no trace of the different particular operations which produced them.The extraction of square and cubic roots is the simplest operation of this kind; it is the resolution of numerical equations of the second and third degree, in which all the intermediate terms are missing. It would be advisable to give in Arithmetic the rules of the resolution of numerical equations, except to refer to Algebra the proof of those which depend on the general theory of equations.

*Newton* has called Algebra *Arithmétique universelle.* This denomination is exact in some respects; but it does not sufficiently make known the real difference between Arithmetic and Algebra. The essential character of this is that the results of its operations do not give the individual values of the quantities we are looking for, like those of arithmetic operations or geometrical constructions, but represent only the operations, either arithmetical or geometrical it will be necessary to perform first on the quantities given to obtain the sought values; I say arithmetic or geometrical, because we know since *Viéta* the geometrical constructions by which we can make certain lines do the same operations, as we do in Arithmetic on numbers.

Algebra so to speaks thus acts equally for Arithmetic and Geometry; its object is not to find the same values of the quantities sought, but the system of operations to be used on the quantities given to deduce the values of the quantities which one seeks, according to the conditions of the problem. The table of these operations represented by algebraic characters, is what is called in algebra a formula; and when a quantity depends on other quantities, so that it can be expressed by a formula which contains these quantities, then it is said to be a function of these same quantities..

Algebra, taken in the broadest sense, is the art of determining unknowns by functions of known quantities, where we can regard them as known; and the general resolution of equations consists in finding, for all the equations of the same degree, the functions of the coefficients of these equations which can represent all the roots.

Until now we have been able to find these functions only for equations of the second, third, and fourth degrees; but although these functions generally express all the roots of the equations of these same degrees, they nevertheless appear, from the third degree, in such a form that it is impossible to draw from them the numerical values of the roots by the simple substitution of those coefficiens, in the very cases where all the roots are essentially real; it is this difficulty that analysts call the irreducible case; there would be even more reason for it to happen in equations of higher degrees, if it were possible to solve them by general formulas

HapVily the winning path has been found in equations of the third and fourth degree, by the consideration of trisection of angles, and by the aid of trigonometrical tables ; but this means, which depends on the division of angles, is not applicable in higher degrees except in a very limited class of equations ; and it can be assured in advance that even if we succeed in solving the fifth degree and the following ones, we would only have algebraic formulas, valuable in themselves, but of very little use for the effective and numerical resolution, of these equations of the same degrees, and which, as a consequence, would not dispense with recourse to the arithmetic methods which are the object of this treatise..

*Vièta* was the first to occupy himself with the resolution of numerical equations of any degree. He showed in the treatise *de numerosa potestatum adfectarum resolutione* [*Concerning the numerical resolution of affected powers*] how many equations of this kind can be solved by operations analogous to those which serve to extract the roots of numbers.

*Harriot, Oughtred, Pell,* etc, have tried to facilitate the practice of this method, by giving particular rules to diminish the difficulties, according to the different cases which occur in the equations, according to the signs of their terms. But the multitude of operations it requires, and the uncertainty of success in a great number of cases, have caused it to be entirely abandoned.

Indeed, it is easy to convince oneself that it cannot succeed in a certain way, except for equations whose terms all have the same sign, all known with the exception of the last ; for then, since this term must be equal to the sum of all the others, it is possible, by these limited trial and error rules, successively to find all the figures of the value of the unknown, up to the degree of precision required to be determined. In all these other cases, trial and error methods become more or less uncertain, because of the subtractive terms

Thus it would be necessary for the use of this method, to be able by a preliminary preparation to reduce all the equations to this form. We will prove, in one of the notes, that this reduction is always possible; provided that there are two bounds on any one root, the one by being plus, the other by being minus, and which are such that all the other roots, as well as the real parts of the imaginary roots, if any, fall outside these bounds [or limits]. But the difficulty of finding these limits is itself as great, and sometimes larger than that of solving the equation.

For the method of *Viète* to succeed that of *Newton*, which is nothing more than a method of approximation, since it supposes that we already have the value of the root we are looking for, to an amount less than its tenth part; then we substitute this value plus a new unknown for the unknown of the proposed equation, and we have a second equation whose root is what remains to be added to the first value, to have the exact value of the searched root; but, because of the supposed smallness of this remainder, we neglect, in the new equation, the square and the higher powers of the unknown; and the equation being thus lowered to the first degree, the value of the unknown is known at once. This value will still be an approximation ; but we can use it to find another more exact value, by doing on the second equation the same operation as on the first, and so on. In this way, we find at each operation a new quantity to be added or subtracted from the value already found, and we have the root all the more exact, as we extend the calculation further.

This is the method commonly used to solve numerical equations; but it serves, as we see, only for those which are already nearly solved. Moreover, she is not always sure; for by neglecting at each operation terms whose value we do not know, it is impossible to judge the degree of accuracy of each new correction; and it may happen, in equations which have almost equal roots, that the series is very little convergent, or that it even becomes divergent after being convergent. Lastly, it still has the disadvantage of only giving qae approximate values of the very roots which can be expressed exactly in numbers, and consequently to leave in doubt whether they are commensurable or not.

The problem that must be proposed in this part of the analysis is this: *Given a numerical equation without any prior notion of the size or kinds of its roots, to find the exact numerical value, if it is possible, or as close as we wish to each of its roots. This problem had not yet been solved; it is the subject of the following researches*

Since the first edition of this book, different methods have appeared for the resolution of these numerical equations; but the rigorous solution of the problem in question has remained at the same point as where I had left it; and so far nothing has been found which can in all cases dispense with the search for a lower limit than the smallest difference between the roots, or which must be preferable to the means given in note IV, to make this search easier.

# INTRODUCTION.

LA solution de tout problème déterminé se réduit, en dernière analyse, à la résolution d'une ou de plusieurs équations, dont les coefficiens sont donnés en nombres, et qu'on peut appeler *équations numériques.* Il est donc important d'avoir des méthodes pour résoudre complètement ces équations, de quelque degré qu'elles soient. Celle que l'on trouve dans le Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1767, est la seule qui offre des moyens directs et sûrs de découvrir toutes les racines tant réelles qu'imaginaires d'une équation numérique donnée, et d'approcher le plus raVidenlent et aussi près que l'on veut de chacune de ces racines. On a réuni dans le présent Traité le Mémoire qui contient cette méthode, et les Additions qui ont paru dans le volume des Mémoires de la même Académie, pour l'année 1768. Et pour rendre ce Traité plus intéressant, on y a joint plusieurs Notes, dont les deux dernières paraissent pour la première fois dans cette nouvelle Édition. Ces Notes contiennent des recherches sur les principaux points de la théorie des équations algébriques.

Il faut bien distinguer la résolution des équations numériques de ce qu'on appelle en Algèbre la résolution générale des équations. La première est, à proprement parler, une opération arithmétique, fondée à la vérité sur les principes généraux de la théorie des équations, mais dont les résultats ne sont que des nombres, où l'on ne reconnait plus les premiers nombres qui ont servi d' élémens, et qui ne conservent aucune trace des différentes opérations particulières qui les ont produits. L'extraction des racines -carrées et cubiques est l'opération la plus simple de ce genre; c'est la résolution des équations numériques du second et du troisième degré, dans lesquelles tous les termes intermédiaires manquent. Aussi conviendrait-il de donner dans l'Arithmétique les règles de la résolution des équations numériques, sauf à renvoyer à l'Algèbre la démonstration de celles qui dépendent de 'la théorie générale des équations.

*Newton* a appelé l'Algèbre *Arithmétique universelle.* Cette dénomination est exacte à quelques égards; mais elle ne fait pas assez connaître la véritable différence qui se trouve entre l'Arithmétique et l'Algèbre. Le caractère essentiel de celle-ci consiste en ce que les résultats de ses opérations ne donnent pas les valeurs individuelles des quantités qu'on cherche, comme ceux des opérations arithmétiques ou des constructions géométriques, mais représentent seulement les opérations, soit arithmétiques ou géométriques qu'il faudra faire sur les premières quantités données pour obtenir les valeurs cherchées; je dis arithmétiques ou géométriques, car on connaît depuis *Viète* les constructions géometriques par lesquelles on peut faire sur les lignes les mêmes opérations que l'on fait en Arithmétique sur les nombres.

L'Algèbre plane pour ainsi dire également sur l' Arithmétique et sur la Géométrie; son objet n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais le système d'opérations à faire sur les quantités données pour en déduire les valeurs des quantités qu'on cherche, d'après les conditions du problème. Le tableau de ces opérations représentées pàr les caractères algébriques, est ce qu'on nomme en Algèbre une formule; et lorsqu'une quantité dépend d'autres quantités, de manière qu'elle peut être exprimée par une formule qui contient ces quantités, on dit alors qu'elle, est une fonction de ces mêmes quantités.

L'Algèbre, prise dans le sens le plus étendu, est l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, on qu'on regarde comme connaes; et la résolution générale des équations consiste à trouver pour toutes les équations d'un même degré, les fonctions des coefficiens de ces équations qui peuvent en représenter toutes les racines.

On n'a pu jusqu'à présent trouver ces fonctions que pour les équations du second, du troisième et du quatrième degré ; mais quoique ces fonctions expriment généralement toutes les racines des équations de ces mêmes degrés, elles se présentent néanmoins, dès le troisième degré, sous une forme telle qu'il est impossible d'en tirer les valeurs numériques des racines par la simple substitution de celles des coefficiens, dans les cas mêmes où toutes les racines sont essentiellement réeles; c'est cette difficulté que les Analystes désignent par le nom de cas irréductible; elle aurait lieu à plus forte raison dans les équations des degrés supérieurs, s'il était possible de les résoudre par des formules générales.

Heureusement on a trouvé le moyen de la vaincre dans le troisième et le quatrième degré, par la considération de la trisection des angles, et par le secours des tables trigonométriques ; mais ce moyen, qui dépend de la division des angles, n'est applicable dans les degrés plus élevés qu'à une classe d'équations très limitée ; et l'on peut assurer d'avance que quand même on parviendrait à résoudre généralement le cinquième degré et les sui vans, on n'aurait par là que des formules algébriques, précieuses en elles-mémes, mais très peu utiles pour la résolution effective et numérique des équations des mémes degrés, et qui, par conséquent, ne dispenseraient pas d'avoir recours aux méthodes arithmétiques qui sont l'objet de ce Traité.

*Viète* est le premier qui se soit occupé de la résolution des équations numériques d'un degré quelconque. Il fait voir, dans le Traité *de numerosa potestatum adfectarum resolutione,* comment on peut résoudre plusieurs équations de ce genre par des opérations analogues à celles qui servent à extraire les racines des nombres.

*Harriot*, *Oughtred, Pell,* etc, ont cherché à faciliter la pratique de cette méthode, en donnant des règles particulières pour diminuer les tâtounemens, suivant les différens cas qui ont lieu dans les équations relativement aux signes de leurs termes. Mais la multitude des opérations qu'elle demande, et l'incertitude du succès dans un grand nombre de cas, l'ont fait abandonner entièrement.

En effet, il est aisé de se convaincre qu'elle ne peut réussir d'une manière certaine, que pour les équations dont tous les termes ont le même signe, à l'exception du dernier tout connu; car alors cc terme devant être égal à la somme de tous les autres, on peut, par des tâtonnemens limités et réglés, trouver successivement tous les chiffres de la valeur de l'inconnue, jusqu'au degré de précision qu'on aura fixé. Dans tous les autres cas, les tâtonnemens deviendront plus ou moins incertains, à cause des termes soustractifs.

Il faudrait donc, pour l'emploi de cette méthode, qu'on pût par une préparation préliminaire, réduire toutes les équations à cette forme. Nous prouverons, dans une des Notes, que cette réduction est toujours possible; pourvu qu'ou ait deux limites d'une racine, l'une en plus, l'autre en moins, et qui soient telles que toutes les autres racines, ainsi que les parties réelles des racines imaginaires, s'il y en a, tombent hors de ces limites. Mais la difficulté de trouver ces limites est elle-même aussi grande, et peut être quelquefois plus grande que celle de résoudre l'équation.

A la méthode de *Viète* a succédé celle de *Newton*, qui n'est proprement qu'une méthode d'approximation, puisqu'elle suppose que l'on ait déjà la valeur de la racine qu'on cherche, à une quantité près moindre que sa dixième partie; alors on substitue cette valeur plus une nouvelle inconnue à l'inconnue de l'équation proposée, et l'on a une seconde équation dont la racine est ce qui reste à ajouter à la première valeur pour avoir ia valeur exacte de la racine cherchée; mais, à cause de la petitesse supposée de ce reste, on néglige, dans la nouvelle équation, le carré et les puissances plus hautes de l'inconnue; et l'équation étant ainsi rabaissée au premier degré, on a sur-le-champ la valeur de l'inconnue. Cette valeur ne sera encore qu'approchée; mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte, en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la première, et ainsi de suite. De cette manière, on trouve à chaque opération une nouvelle quantité à ajouter ou à retrancher de la valeur déjà trouvée, et on a la racine d'autant plus exacte, qu'on pousse le calcul plus loin.

Telle est la méthode que l'on emploie communément pour résoudre les équations numériques; mais elle ne sert, comme l'on voit, que pour celles qui sont déjà à peu près résolues. De plus, elle n'est pas toujours sûre; car en négligeant à chaque opération des termes dont on ne connatt pas la valeur, il est impossible de juger du degré d'exactitude de chaque nouvelle correction; et il peut arriver, dans les équations qui ont des racines presque égales, que la série soit très peu convergente, ou qu'elle devienne même divergente après avoir été convergente. Enfin, elle a encore l'inconvénient de ne donner qae des valeurs approchées des racines mêmes qui peuvent être exprimées exactement en nombres, et de laisser par conséquent en doute si elles sont commensurables ou non.

Le problème qu'on doit se proposer dans cette partie de ' l'Analyse, est celui-ci : *Etant donnée une équation numérique sans aucune notion préalable de la grandeur ni de l'espèce de ses racines, trouver la valeur numérique exacte, s'il est- possible, ou aussi approchée qu'on voudra de chacune de ses racines.* Ce problème n'avait pas encore été résolu; il fait l'objet des recherches suivantes.

Depuis la première édition de cet ouvrage, il a paru différentes méthodes pour la résolution des équations numériques; mais la solution rigoureuse du problème dont il s'agit, est restée au même point où je l'avais portée; et jusqu'ici on n'a rien trouvé qui puisse dispenser dans tous les cas de la recherche d'une limite moindre que la plus petite différence entre les racines, ou qui soit préférable aux moyens donnés dans la Note IV, pour faciliter cette recherche.

# ANALYSE
## DU TRAITÉ
## DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

Par M. POINSOT, de l'Académie des Sciences, etc.

DEPUIS *Leibnitz* et *Newton*, presque tous les géomètres se sont uniquement occupés du perfectionnement des nouveaux calculs, ou de leur application à la Géométrie et à la

Mécanique, et il faut convenir que l'Algèbre a été un peu négligée. On a donc cette premièrè obligation à M. *Lagrange*, de n'avoir pas perdu de vue cette partie fondamentale des mathématiques, et d'y rappeler l'attention des géomètres par cet excellent *Traité.*: car, comme toute l'Algèbre se réduit, au fond, à l'analysa des équations, on peut dire que cet ouvrage, avec les Notea savantes dont il est enrichi, forme le Traité d'Algèbre le plus complet et le plus profond que l'on puisse désirer dans l'état actuet de la science.

L'auteur y donne d'abord, pour la résolution des équations numériques, cette méthode élégante et sûre qu'il a publiée pour la première fois dans le Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin (années 1767 et 1768). Il confirme ensuite, dans les Notes, par des démonstrations nouvelles et rigoureuses, les principes généraux qui servent de base à cette résolution. Il y passe en revue toutes les méthodes imaginées pour le même objet; il les compare, les rapproche, et, suivant le tour naturet de son génie, les ramène au même principe. Il y reproduit enfin, avec des réflexions nouvelles, toute la substance de celles qu'il fit autrefois dans le même Recueil de Berlin, pour 1770 et 1771 : il donne un précis clair et rapide de sa méthode générale fondée sur l'art de réduire le nombre des permutations qui multiplie les fonctions cherchées, et d'abaisser par-là le degré des Résolvantes; et rappelant, à l'occasion du beau travail de M. *Gauss*, ses anciennes idées sur cette matière, il en déduit, dans la Note XIV, qui est entièrement nouvelle, la résolution directe et générale des équations binomes de tous les degrés.

Tels sont les points les plus importans approfondis dans l'ouvrage dont nous allons rendre compte. Ce simple sommaire suffirait sans doute aux géomètres, qui ne manquent pas de lire les écrits de l'auteur, et qui connaissent très bien l'élégance et la simplicité qui règnent dans toutes ses méthodes : mais comme il peut être utile à plusieurs jeunes lecteurs d'avoir une idée nette de la science, de savoir ce qu'ils doivent apprendre dans cette partie de l'Analyse, et où ils le doivent étudier, nous croyons devoir donner quelques détails sur les principales questions qu'on se propose ici, sur les solutions qu'on en donne, et développer la suite des théorèmes avec une certaine étendue.

D'abord si l'on jette un coup d'oeil général sur l'Algèbre, on voit que cette science, abstraction faite des opérations ordinaires (au nombre desquelles on peut compter l'élimination), se partage naturellement en trois articles principaux. 1° . La théorie générale des équations, c'est-à-dire l'ensemble des propriétés qui leur sont communes à toutes. 2°. Leur résolution générale, qui consiste à trouver une expression composée des coefficiens de la proposée, et qui, mise au lieu de l'inconnue, satisfasse identiquement à cette équation, en sorte que tout s'y détruise par la seule opposition des signes. 3°. La résolution des équations numériques, où il a'agit de trouver des valeurs particulières qui satisfassent d'une manière aussi approchée qu'on le voudra, à une équation dont tous les coefficiens sont actuellement connus et donnés en nombres.

Cette dernière recherche est sans contredit la plus utile dans l'application: car, outre que la résolution générale ne s'étend pas au-delà du 4° degré, les formules en sont déjà si compliquées, et le seraient tellement pour les degrés supérieurs, si l'on venait à les découvrir, qu'on ne pourrait jamais s'en servir pour le calcul des racines. Ainsi il faudrait encore recourir aux méthodes d'approximation qui font l'objet principal de ce Traité. Or, les principes de ces méthodes étant puisés dans les propriétés générales des équations, nous allons d'abord examiner ce que l'on sait de plus général sur leur théorie.

Le premier principe, connu depuis long-temps, est que si, dans une équation quelconque, deux nombres mis successivement au lieu de l'inconnue donnent des résultats de signes contraires, il y a nécessairement au moins un nombre intermédiaire qui donnerait un résultat nul, ou serait racine de la proposée. On avait coutume de démontrer ce théorème par la considération des lignes courbes; mais M. *Lagrange* en donne, dans la Note 1, une démonstration nette et rigoureuse, fondée sur la nature même du polynome algébrique dont l'égalité à zéro forme l'équation proposée.

Le second principe est, qùe si un nombre réduit le polynome à zéro, ou bien est racine de la proposée, le polynome est exactement divisible par le binome formé de l'inconnue moins cette racine. *D'Alembert* est le premier qui ait démontré ce principe d'une manière rigoureuse : on en trouve dans la Note II une démonstration aussi exacte et-plus complète, en ce qu'on y voit, non-seulement que la division doit réussir, mais qu'elle réussit encore actuellement.

Il est bien facile de voir ensuite cette partie réceiproque du premier théorème: que s'il y a une racine entre deux nombres, et qu'il n'y en'ait qu'une seule ces deux nombres mis au lieu de l'inconnue donneront des résultats de signes contraires ; d'où il suit que la même choise aura lieu pour un nombre quelconque impair de racines comprises, et n'aura lieu que dans ce cas.

Tels sont les principes fondamentaux de toute la théorie des équations : on en déduit sur-le-champ qu'elles peuvent avoir autant de racines qu'il y a d'unités dans le plus haut exposunt de l'inconnue, et n'en peuvent jamais avoir davantage. Que les équations de degrés impairs ont essentiellement au moins une racine réelle; d'où il suit que dans une équation quelconque, les racines qui manquent sont nécessairement en nombre pair. Quant à ces sortes de racines, que l'on nomme *imaginaires,* il parut d'abord, par la résolution connue des quatre premiers degrés, que leur forme était la même que celle des imaginaires du second degré. *D'Alembert* essaya de démontrer généralement ce théorème, dans sa pièce sur la cause des vents, et dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1746. M. *Lagrange,* qui rapporte cette démonstration, au commencement de la Note IX, sur la forme des racines imaginaire, la rend plus rigoureuse et plus simple; mais il faut convenir qu'excepté l'endroit où l'on prouve que, dans le passage du réet à l'imaginaire, ou réciproquement, la racine devient double, ou quadruple, ou multiple d'un ordre pair, le reste de la démonstration n'est point à l'abri d'objections très solides. Aussi M. *Lagrange* revient-il au théorème d'une manière plus directe, en considérant qu'il s'agit de prouver en général que tout polynome de degré pair est résoluble en facteurs réels du second degré; et, comme il n'y a que les équations de degrés impairs où l'on puisse toujours assurer l'existence d'une racine réelle, ou bien encore celles de degrés pairs, mais donc le dernier terme est essentiellement négatif, tout se réduit à prouver que, dans la recherche des coefficiens d'un facteur de degré pair pour le polynome proposé, on tombera finalement sur de telles équations. L'auteur, en rapprochant les travaux successifs des divers géomètres sur cette matière, et particulièrement les recherche *d'Euler,* de Foncenex, et celles que lui-mème ajouta dans les Mémoires de Berlin de 1772, fait voir que le théorème général ce trouvait par-là démontré d'une manière rigoureuse; mais à la fin de la même Note IX, il en rapporte une autre démonstration très élégante et déduite des mêmes principes, que M. *Laplace* a fait connattre depuis, dans les Leçons de l'École Normale. Cependant, si l'on voulait résoudre effectivement le polynome en ses facteurs réels, comme il serait presque impossible de suivre le procédé indiqué par l'analyse qu'on y emploie, M. *Lagrange*, croit devoir reprendre en entier ce problème général dans la Note X, où il fait voir *à priori*, non-seulement la possibilité de la décomposition de tout polynome en facteurs réels du le[r] et du 2[e] degré, mais encore le procédé qu'il faudrait suivre si l'on voulait actuellement effectuer cette décomposition, ce qui ne laisse plus rien à désirer sur ce point important de la théorie générale des équations.

La nature des racines étant par-là bien connue, on peut se proposer maintenant ce problème général de leur résolution numérique.

Étant donnée une équation numérique, sans aucune notion préalable de la grandeur ni de l'espèce de ses racines, trouver la valeur exacte, s'il est possible, ou aussi approchée qu'on voudra de chacune de ces racines.

D'abord, s'il y a des racines égales, il sera facile de les reconnaitre et de les dégager de l'équation, comme on le voit dans le Chapitre II du Traité. S'il y a des racines imaginaires, la recherche des parties imaginaires se réduira à celle des racines réelles d'une autre équation que l'on peut actuellement construire, et les parties réelles de ces mêmes racines s'obtiendront sur-le-champ par la simple opération du commun diviseur, comme l'auteur le fait voir dans le même chapitre. Reste donc à savoir comment on obtient les racines réelles d'une équation quelconque. Mais, pour plus de clarté, cette recherche se divise encore; car parmi les racines, les unes seront positives, les autres négatives. Or, si l'on sait trouver les positives, la même méthode appliquée à la transformée que donne l'équation, en y changeant le signe de l'inconnue, fera connaître les racines positives de cette transformée, et par conséquent les négatives de la proposée.

Tout se réduit donc enfin à savoir trouver les racines réelles et positives d'une équation numérique quelconque donnée. Or, le premier probleme sera d'en reconnaitre le nombre et les limites entières les plus approchées.

Si ces racines différaient entre elles au moins d'une unité, de sorte que, entre deux nombres entiers consécutifs, il n'en pût tomber qu'une seule, on serait sûr qu'en mettant, au lieu de l'inconnue, la suite naturelle des nombres, les résultats successifs présenteraient autant de variations de signe qu'il y aurait de racines dans la proposée. Mais si, entre les deux nombres consécutifs, il se trouve deux, ou un nombre quelconque pair de racines, les résultats donnés par ces nombres seront de signes semblables, et ces racines ne seront point aperçues. S'il s'en trouvait un nombre impair, les deux résultats seraient à la vérité de signes différens, et indiqueraient l'existence de racines comprises, mais ne feraient point connaître leur nombre, puisqu'il pourrait y èn avoir une, ou trois, ou un nombre quelconque impair. Donc, pour reconnattre à coup sûr le nombre des racines, il faudra faire une suite de substitutions dont les intervalles soient moindres que le plus petit intervalle des racines entre elles. Alors on verra paraître dans la suite des résultats, juste autant de variations de signes qu'il y aura de racines dans la proposée. C'est pourquoi M. *Lagrange* cherche d'abord dans le problème du no 8, Chapitre I, une équation dont les racines soient les différences entre celles de la proposée prises deux à deux. Il apprend à trouver une quantité qui soit moindre que la plus petite racine de cette équation, et par conséquent, que le moindre intervalle des racines de l'équation numérique à résoudre. Il est le premier qui ait fait ce grand usage de l'équation aux différences, soit pour séparer exactement les ràcines, soit pour obtenir les imaginaires, et reconnaitre leur présence dans les équations. Il donne, au reste, dans la Note IV, une manière plus simple de trouver cette limite de la plus petite différence, sans calculer en entier l'équation; et cette méthode peut abréger considérablement le travail dans la résolution des équations un peu élevées.

Cette recherche des limites des racines doit être regardée comme la plus importante de toutes dans la résolution des équations. C'est une chose qui ne parait pas avoir été sentie par la plupart des auteurs : quelques-uns, même dans des ouvrages nouveaux, croient encore donner une méthode sûre, en indiquant le procédé de la substitution successive des nombres entiers; ce qui est, pour ainsi dire, passer à côté de la seule difficulté réelle du problème; car, une fois qu'on a les limites, il est bien aisé de les resserrer, et d'approcher autant qu'on veut de la racine comprise. Au reste, on a encore sur cette détermination des limites des racines, et sur les caractères de leur réalité, plusieurs méthodes très élégantes que la considération des maxima, dans les lignes paraboliques, a fait découvrir à plusieurs géomètres. On les trouve réunies dans la Note VIII, avec la fameuse règle de *Descartes*, mais toutes déduites, suivant la marche uniforme de l'auteur, des premiers principes de l'analyse des équations.

Lorsque le nombre et les premières limites des racines sont déterminés, il s'agit de voir comment on en approche d'aussi près qu'on peut le désirer. L'auteur applique à la solution de ce problème cette ingénieuse théorie des fractions continues, qu'il a perfectionnée et rendue si féconde dans toute l'Analyse. La racine dont on s'occupe étant imaginée développée en fraction continue, il fait voir comment, par la répétition de la même méthode appliquée à des transformées successives, on peut trouver exactement les dénominateurs successifs de la fraction, et par conséquent la valeur aussi approchée qu'on voudra de la racine inconnue. Les opérations à faire sur ces transformées deviennent très simples; car, si l'on a eu soin de changer d'abord la proposée en une autre où les racines soient distantes au moins de l'unité, ce qui est facile, alors chaque transformée n'a jamais qu'une seule racine supérieure à l'unité, et il est bien aisé de trouver les deux nombres entiers qui la renferment. On a donc, par la nature même des fractions continues, l'expressiou la plus simple et la plus exacte possible de chaque racine, et, à chaque instant, les limites de l'erreur que l'on pourrait commettre. Si la racine est commensurable, la fraction continue s'arrete; si elle est incommensurable du $2^e$ degré, la fraction devient périodique, et la méthode de l'auteur a encore cet avantage de faire connaître les diviseurs commensurables du $\mathrm{le}^r$ et du $2^e$ degrés que la proposée pourrait contenir.

Ainsi l'on a, dans l'analyse des équations, ce beau résultat entièrement dû à M. *Lagrange :* si une inconnue est engagée dans une équation numérique de degré quelconque, on peut regarder actuellement sa valeur comme déterminée d'une manière parfaite; et l'on est en état d'assigner les termes successifs de la fraction continue qui la représenterait, avec autant de rigueur que s'il a'agissait d'une fraction ordinaire que l'on voudrait actuellement développer.

Ni cette rigueur, ni cette généralité n'ont lieu dans aucune des méthodes données pour la solution du même problème. Outre qu'elles supposent la connaissance des limites des racines, qui ne s'obtiennent rigoureusement que par la première analyse de l'auteur, elles ne donnent point à chaque correction les limites de l'erreur, et laissent en doute sur les chiffres que l'on doit conserver. En suivant la méthode de *Newton*, si élégante d'ailleurs, et si commode dans l'usage, non-seulement on ne reconnaîtrait point les racines commensurables, et les limites de l'erreur actuelle; mais on pourrait trouver des valeurs successives corrigées qui, au lieu de converger continuellement vers la racine, s'en éloigneraient, au conttraire, de plus en plus. M. *Lagrange*, qui examine et apprécie cette méthode dans la Note V, fait voir que l'usage n'en est sûr que dans le cas où la racine cherchée est la plus grande ou la plus petite de toutes; et s'il y a des racines imaginaires, il faut encore que les parties réelles soient moindres que la plus grande racine réelle, ou plus grandes que là plus petite de ces racines. C'est ce qu'on pourrait voir d'ailleurs par la construction géométrique de la règle de *Newton.* Car les corrections successives de la racine reviennent à ajouter continuellement à l'abscisse qui représente la valeur approchée, la sous-tangente qui répond à cette abscisse; et il est visible que l'extrémité de cette sous-tangente peut, dans plusieurs cas, tomber plus loin de l'intersection cherchée de la courbe avec l'axe, que ne le fait l'abscisse elle-même. On éviterait cet inconvénient en tirant la corde de l'arc dont les extrémités répondent aux deux abscisses qui sont les limites de la racine; car cette corde traversant l'axe dans l'intervalle des limites, donnerait un point nécessairement plus voisin de l'intersection de la courbe, et l'on serait sûr d'approcher.

La méthode d'approximation que *Daniet Bernoulli* a tirée des séries récurrentes, est sujette aux mêmes défauts. Elle ne s'applique qu'à la recherche de la plus petite ou de la plus grande racine; et lorsqu'il y a des racines imaginaires, il faut aussi que la racine soit dans de certaines limites par rapport aux produits réels des racines imaginaires conjuguées. On pourrait également l'appliquer, par une transformation de la proposée, à la recherche de l'une quelconque des racines réelles. Mais il faudrait connaître d'avance une valeur qui fût approchée de cette racine au moins jusqu'à un certain point déterminé. Or ces premières limites ne peuvent s'obtenir, comme on l'a dit, que par les méthodes données dans cet écrit; et ces valeurs une fois connues, il est bien plus exact d'employer la méthode des fractions continues pour approcher rapidement de la vraie valeur des racines. Au reste, cette méthode, déduite de la considération des séries récurrentes, revient à celle de *Newton*, comme on le voit dans la Note XI. M. *Lagrange* y réduit en formule générale le résultat des substitutions successives indiquées par cette règle. Il déduit facilement de son élégante analyse, le rapprochement des méthodes précédentes, et la formule *d'Euler* pour le développement en série de la racine d'une équation quelconque, et celle de *Newton* pour le retour des suites, avec la loi des termes et le moyen de continuer la série aussi loin qu'on peut le désirer; enfin la démonstration de cette formule qu'il a donnée le premier, en 1768, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, et qui est aussi remarquable par son élégance que par sa généralité. Cette Note, qui est un des plus beaux morcesux d'analyse, est terminée par l'extension de la règle de *Newton* à la résolution simultanée de plusieurs équations où l'on connaît déjà les valeurs approchées des diverses inconnues. *Thomas Simpson* avait indiqué ce procédé; mais l'auteur développe les inconnues en séries générales dont il montre la loi, ce que *Simpson* n'avait accompli. [?]

Quant à la méthode de *Fontaine,* sur laquelle *d'Alembert* et *Condorcet* s'étaient contentés de jeter quelques doutes, ou la trouve très nettement discutée dans la Note VII. M. *Lagrange* y prouve d'abord l'équivoque des caractères établis par l'auteur pour reconnaître, au moyen des coefficiens de l'équation, le système particulier de racines qui lui doit correspondre. Ces caractères conviennent quelquefois à plusieurs systèmes, et par conquent ne distinguent pas toujours, de tous les autres, le système uniqué dont il s'agit; de sorte qu'on ne peut assurer par-là, ni le nombre, ni la qualité des différentes racines. Mais la méthode est encore en défaut dans la seconde partie de la recherche : on y suppose que, par la substitution des nombres entiers au lieu de l'inconnue le équations que l'on considère présenteront des résultats de signes contraires; et cela n'a lieu, comme on sait, que pour celles où le plus petit intervalle des racines serait supérieur à l'unité. Aussi M. *Lagrange* n'examine-t-il cette méthode, dont on ne fait point usage, mais dont l'idée est très fine, que pour ne rien laisser à désirer sur la matière des équations. Comme il n'y a, dans toute l'Analyse, aucun point remarquable où ce géomètre n'ait porté son esprit, et qu'il n'ait, pour ainsi dire, regardé qe très près, on est sûr de trouver dans ses ouvrages, en même temps que ses propres découvertes, tout ce qui a été pensé de plus profond ou de plus ingénieux par ses prédécesseurs; et, ce qui est bien digne de remarque, tout y parait suivre uniformément des mêmes principes, comme si l'auteur en développait les plus simples corollaires.

Mais on a un exemple plus frappant de ce talent de simplifier et d'étendre à la fois les doctrines, dans le problème si fameux de la résolution générale des équations. Tout consiste, comme on l'a dit, à trouver une formule compostée des coefficiens littéraux de la proposée et qui la rende satisfaite d'une manière tout-à-fait identique. La première idée qui s'offrit aux géomètres, fut de chercher immédiatement quelque artifice par lequet on pût mettre l'inconnue toute seule dans un membre de l'équation, et tous les coefficiens donnés dans l'antre. On imagina ensuite de chercher des transformations de l'inconnue qui rendissent l'équation semblable à une autre que l'on pût résoudre ou décomposer. C'est à ces premières vues très naturelles, mais point encore éclairées par la théorie profonde des équations, qu'on doit rapporter les solutions de *Cardan* et de *Tartalea*, pour le 3$^{e}$ et le 4$^{e}$ degrés; la méthode de *Descartes* pour décomposer l'équation du 4$^{e}$, en deux autres du second; celle de *Tschirnaüs,* pour réduire la proposée aux deux termes extrêmes par l'évanouissement des termes intermédiaires; celle *d'Euler,* qui consiste à feindre d'avance la forme de l'expression générale de la racine, et à chercher ensuite ce qu 'il faut mettre sous les radicaux qu'on y suppose; enfin celle de *Bezout,* fondée sur un principe semblable, mais où l'on commence à observer les degrés des Réduites, et à indiquer la loi de leur élévation successive.

Toutes ces méthodes dépendent de l'exécution actuelle d'un calcul, et l'on n'y voit point qu'on doive arriver, à moins qu'on n'arrive effectivement: or par la nature du problème, la longueur des calculs croît avec une telle rapidité, que la question ne peut plus être aujourd'hui de chercher la formule, mais simplement de prédire la suite des opérations qui y conduirait à coup sûr. Aucune de ces méthodes ne peut donc satisfaire l'esprit, et c'est à des idées plus hautes sur la nature des équations qu'il faut s'élever à présent pour découvrir s'il y a ou non une route certaine qui ferait parvenir à leur résolution générale.

*Vandermonde* attaqua le problème avec beaucoup de justesse et de profondeur, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1771. Il considère que si la formule était trouvée, et qu'on mit, au lieu des coefficiens, leurs valeurs en fonction des racines, cette formule qui doit donner également chacune d'elles, devrait pouvoir présenter indifféremment ou la première, ou la seconde, ou l'une quelconque de ces racines, à volonté. D'après cette idée, prenant plusieurs lettres qui représentent les racines, il cherche à en composer une expression qui, par l'équivoque des signes, se réduise indifféremment à l'une ou à l'autre, comme on voudra. Les formules connues lui donnèrent sur-le-champ ces expressions pour les quatre premiers degrés, et par analogie, il est facile d'en trouver pour les degrés supérieurs. Mais la difficulté reste d'exprimer ensuite ces fonctions des racines, par les simples coefficiens de la proposée, ou de les faire dépendre d'autres équations dont la résolution soit connue. Il donne là-dessus des formes abrégées de calcul, qu'il nomme *Types,* et an moyen desquels il peut voir plus rapidement quelle sera l'issue de ces longues opérations. Sa méthode, comme toutes les autres, réussit très bien pour les équations des quatre premiers degrés ; mais pour le cinquième, il se trouve conduit et arrêté à une équation du sixième degré qu'il faudrait résoudre. Quant à l'équation générale de ce dernier degré, il trouve qu'en arrivera à une réduite finale ou du quinzième, ou du dixième, aivant la route qu'on voudra choisir; car pour les degrés composés, on peut former avec les racines plusieurs expressions équivoques, qui aient également la propriété d'offrir indifféremment chacune d'elles; et il y a un chois à faire pour la moindre élévation du degré de la réduite. C'est une remarque que les formules du 4$^e$ degré auront naturellement présentée à *Vandermonde.* Par certaines méthodes, on n'y trouve point de radicaux pairs plus élevés que le radical carré; par d'autres, on *y* trouve des radicaux quatrièmes. Toutefois les formules doivent être identiques et le sont en effet, parce que ces radicaux pairs sont réductibles entre eux. Je me suis un peu arrêté sur ce Mémoire, parce qu'il est plein de choses. L'auteur parait ne point douter du succès de sa méthode pour la résolution des équations binomes. Sans indiquer la suite des opérations qu'il a dû faire, il donne la formule qui résout l'équation binome du 1le degré, et il se trouve que ce résultat, à peu près ignoré jusqu'ici, est exact à un changement de signe près, comme M. *Lagrange* vient de le vérifer dans la note XIV de cet ouvrage, où il donne la résolution générale de toute cette classe d'équations. Ainsi *Vandermonde* est, suivant *M. Lagrange* luimême, le premier qui ait franchi les limites où la résolution des équations binomes se trouvait resserrée.

A peu près dans le mème temps, M. *Lagrange* parcourant les principales méthodes trouvées jusque-là sur la résolution générale des équations, les rappelait à un même principe, et formait cette théorie lumineuse où l'on voit sans calcul les degrés où doivent monter les réduites, et la raison de leur abaissement au-dessous de la proposée dans les quatre premiers degrés. Voici l'idée générale de ce beau travail que l'auteur a donné dans les Mémoires de Berlin, pour 1770 et 1771, et dont le précis fait l'objet de la Note XIII de cet ouvrage.

Quelles que soient ces équations d'où l'on ferait dépendre la résolution de la proposée, et qu'on nomme ainsi les *réduites,* leurs coefficiens seront fonctions des coefficiens de cette proposée, et par conséquent leurs racines, fonctions de ses racines. Toute réduite s'élèvera donc toujours à un degré marqué par le nombre de valeurs que peut avoir la fonction des racines que l'on y considère. Or, cette fonction en général aura autant de valeurs qu'on y pourra faire de permutations entre les racines qui y sont contenues. Si donc elle en a moins, cela ne pourra provenir que de la nature particulière de la fonction qui sera telle, que plusieurs permutations entre les racines n'y apporteront aucun changement. D'après ces principes, il est bien facile à l'auteur de rapprocher toutes les méthodes des géomètres. Car, en mettant sous leurs formules, à la place des coefficiens, leurs valeurs par les racines, il découvre les fonctions particulières qu'ils cherchaient, pour ainsi dire, à leur insu ; et il arrive que toutes ces fonctions reviennent à la même, malgré l'apparente diversité de leurs calculs et de leurs méthodes. Il voit en même temps pourquoi leurs réduites, dans les quatre premiers degrés, s'abaissent au-dessous de l'équation et la résolvent; et, se trouvant à même de prévoir le succès de calculs impraticables pour le cinquième degré, il montre que la réduite, qui est naturellement du $120^e$ degré, descendra d'abord au $24^e$; que cette équation nouvelle se partagera en six autres du $4^e$ degré, dont les coefficiens dépendront ainsi d'une équation finale du $6^e$ degré, qu'il s'agirait d'abaisser encore, mais qui a résisté jusqu'ici à tous les efforts des géomètres. Il trouve de même l'abaissement des réduites au $15^e$ ou au $10^e$ degré, pour la résolution générale du $6^e$: on voit l'accord de ces résultats avec ceux que *Vandermonde* obtenait dans le même temps par le moyen de ses formes ou types de calcul qu'il avait imaginés. Mais la théorie de M. *Lagrange* est bien plus claire, et l'on y prévoit avec une égale facilité les résultats qu'on peut espérer pour la résolution de tous les degrés supérieurs. De plus, l'auteur en tire une méthode simple et uniforme pour résoudre les équations. Car il est clair actuellement que le problème peut revenir à celui-ci : trouver des fonctions des racines qui soient telles d'abord qu'on en puisse aisément dégager ces racines, et en second lieu, qui ne dépendent que d'équations inférieures à la proposée, dont les coefficiens soient connus, ou dépendent eux-mêmes d'équations aussi inférieures à cette proposée. M. *Lagrange* choisit une fonction linéaire des racines: l'équation qui la donnerait, et qu'on peut actuellement construire, s'élèverait au degré marqué par le nombre des permutations qu'on pourrait faire entre toutes ces racines, et, passé le $2_e$ degré, serait toujours plus haute que la proposée. Mais si l'on a soin de prendre, pour les coefficiens de cette fonction linéaire, les racines de l'unité du même degré que l'équation, ce que toutes les méthodes indiquent, la réduite s'abaissera, comme on peut le voir *à priori,* par la forme même de la fonction.

Pour en donner une idée, qu'il s'agisse, par exemple, de résoudre l'équation générale du $5^e$ degré. L'équation résolvante qui donnera la fonction linéaire de ses cinq racines, s'élèvera au degré 1. 2. 3. 4. 5 ou 120, nombre de manières dont on peut permuter cinq choses entre elles. Mais si les coefficiens de cette fonction sont les racines cinquièmes de l'unité, on observera que cette fonction multipliée successivement par ces 5 racines, fournira 5 fonctions pareilles où les racines de la proposée auront changé de place. Cette multiplication équivaudrait donc à *5* permutations qu'on ferait entre les racines. Donc, si la fonction simple a 120 valeurs différentes, sa cinquième puissance n'en aura que la $5^e$ partie ou 24. On cherchera donc la cinquième puissance de la fonction linéaire. Mais ces 24 valeurs se partageront encore en six groupes. Car, par la nature des racines imaginaires de l'unité, une seule, avec ses puissances successives, donne toutes les autres; une autre, avec ses puissances successives, les donne encore, mais rangées dans un ordre nouveau. Or, comme il y a ici quatre de ces racines, la même fonction où l'on emploierait successivement et de la même manière ces quatre racines, répondrait successivement à quatre de ses valeurs, comme si l'on y eût permuté quatre fois les racines de la proposée. Toute expression semblable de ces quatre fonctions, telles que leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, ou trois à trois, etc., n'aura donc que le quart de toutes les valeurs, ou simplement six valeurs différentes. La fonction pourra doue être regardée comme la racine d'une équation du $4^e$ degré dont les coefficiens seront donnés par une équation du $6^e$ qui sera entièrement connue. On ferait voir par les mêmes raisonnemens que la résolvante du $7^e$ degré et qui montera au degré 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 s'abaissera au degré : 1. 3 . 4. 5 ; et ainsi de suite : de sorte que la méthode, pour les degrés qui sont des nombres premiers, ne fait disparaître que les difficultés marquées par les deux derniera facteurs dans la formule qui exprime le nombre de toutes les permutations possibles ; et cette réduction ne suffit pas pour les degrés supérieurs au $3^e$.

L'auteur applique également sa méthode aux équations de degrés composés ; et par la nature même de la chose, il y a pour ces degrés des simplifications particulières dans la marche et le résultat du calcul. Les réduites s'y abaissent davantage; mais, au-delà du $4^e$ degré, ellès restent toujours supérieures à la proposée; et l'on n'a pu y voir jusqu'ici aucune réduction ultérieure.

Voilà tout ce qu'on sait sur la résolution générale des équations où les racines sont supposées dans une parfaite indépendance. On ignore entièrement si cette résolution est possible, et s'il ne pourrait pas y avoir des formes de fonctions où l'on épuiserait plus de permutations que dans celles dont nous venons de parler.

Mais, lorsque ies racines sont liées par quelque relation connue, la difficulté descend toujours à celle des degrés inférieurs. Si une partie des racines est traitée d'une certaine manière, on pourra sur-le-champ dégager le polynome qui les renferme; et s'il y a plusieurs groupes où les racines contenues soient semblablement traitées, on obtiendra un quelconque de ces groupes par une équation d'un degré marqué par leur nombre. Quand on sait, par exemple, que les racines d'une équation se conjuguent deux à deux, de manière que leur produit fait l'unité, cette équation, qu'on nomme *réciproque*, se partage aisément en deux autres de degré deux fois moindres; et de même, si les racines se conjuguaient trois à trois par quelque relation commune, l'équation se partagerait en trois autres ; et, en général, la difficulté d'une équation où les racines s'assemblent en groupes semblables se réduit aux difficultés des degrés respectifs marqués par le nombre des groupes, et par le nombre de racines contenues dans chacun d'eux.

C'est ce qui arrive naturellement aux équations binomes d'un degré composé. Si vous considérez, par exemple, l'équation binome du $15^e$ degré, elle a 15 racines; mais, parmi ces racines, il y en a trois dont les cubes sont égaux, trois autres dont les cubes sont égaux, etc. ; donc si, au lieu de chercher les racines simples, vous ne cherchez d'abord que les cubes, vous n'aurez plus que cinq valeurs. Et de même, si l'on n'eût cherché que les cinquièmes puissances, on n'aurait eu que trois valeurs différentes; d'où il paraît manifeste qu'une équation binome d'un degré composé se réduit à la résolution d'équations semblables de degrés marqués par les facteurs du degré de la proposée.

Il ne reste donc qu'à résoudre l'équation binomc d'un degré premier. Or, en ôtant par la division le facteur linéaire qui répond à la racine réelle, on obtient une équation réciproque de degré pair,. laquelle se dédouble comme on l'a dit, et n'a plus que la difficulté d'un degré deux fois moindre.

On n'avait pas été plus loin dans la réduction des équations binomea, lorsque M. *Gauss* démontra que cette équation réciproque pouvait se résoudre à l'aide d'autant d'équations particulières qu'il y a de facteurs dans son degré, et dont les degrés sont exprimés par ces mêmes facteurs. Ainsi l'equation binome du $13^e$ degré donne, en séparant le facteur réel, une équation réciproque du $12^e$ degré qui ne demande plus que la résolution de trois équations des degrés respectifs 2, 2 et 3 qui sont les facteurs premiers de 12. L'équation binome du $19^e$ degré n'exige de même que la résolution de trois équations des degrés 2, 3, 3; et ainsi de suite. Sans entrer ici dans le détail des propriétés de nombres qui ont conduit M. *Gauss* à cette réduction nouvelle, nous ferons observer qu'elle tient essentiellement à ce que les racines se conjuguent non-seulement deux à deux, comme on le savait depuis long-temps, mais se groupent encore 3 à 3, 5 à 5, etc .. ; si 3 et 5, etc., sont encore facteurs du nombre de ces racines. C'est ce qu'on pourra reconnaître aur des exemples, avec un peu d'attention. Ainsi, l'on verra sans peine que les douze racines imaginaires de l'équation binome du $13^e$ degré se partagent en quatre groupes de trois racines, telles, dans chacun d'eux, qu'en mettant l'une à la place de l'autre' ces trois racines ne se separent pas; et par conséquent, si l'on échange les racines d'un groupe à l'autre, les groupes ne feront que changer de place en conservant toujours leurs mêmes racines. Ensuite on verra que, parmi ces quatre groupes, il y en a deux qui sont tels que, tout échange qui fait passer l'un à la place de l'autre, ramène celui-ci à la place du premier; ainsi, les deux autres groupes sont dans le même cas. Si donc vous demandez à l'équation du $12^e$ degré, le diviseur du $3^e$qui rassemblerait les trois racines d'un groupe, vous aurez les coefficiens de ce diviseur par une équation du $4^e$ degré; et si vous cherchez à celle-ci le diviseur du second qui a ses racines correspondantes aux deux groupes conjugués, vous aurez ses coefficiens par une équation du $2^e$ degré; de sorte que la proposée sera résolue par des équations auxiliaires du $2^e$ et du $3^e$ degré; et ainsi des autres. Quant à ces équations auxiliaires; elles n'ont elles-mêmes que la difficulté des équations binomes du même degré. On peut voir là-dessus les *disquisitiones arithmeticae*, aux endroits cités par M. *Lagrange*, dans la Note XIV de ce Traité.

Mais, par l'analyse qu'il vient de nous donner dans cette Note nouvelle on voit, avec la dernière évidence, *la réduction immédiate* de l'équation réciproque proposée à une équation binome du mème degré qui est déjà censée résolue ; de sorte que sa méthode rend superflue cette considération des équations auxiliaires, et fait disparaître les ambiguïtés que l'on rencontre dans le procédé de M. *Gauss*, pour distinguer à chaque instant la racine particulière qu'on a dessein de dégager dans toute la suite du calcul.

Pour mieux expliquer cette Analyse, qui n'est autre chose qu'une application particulière de la méthode générale exposée dans la Note précédente, je prendrai l'exemple de l'équation binome du onzième degré : le discours en sera plus facile, et le raisonnement ne perdra rien de sa généralité.

En séparant donc la racine réelle, on a une équation réciproque du $10^e$ degré qu'il s'agit de résoudre. Or, on sait d'abord que les racines de cette équation ont cette singulière propriété, qu'une seule d'entre elles élevée successivement aux puissances 1, 2, 3, 4, 5, etc., donne toutes les autres ; et si l'on continuait d'élever à des puissances plus hautes, on les verrait reparaître périodiquement dans le même ordre, à l'infini, en trouvant l'unité à chaque puissance qui serait on multiple de onze. Cette propriété nous permet donc d'écrire toutes nos racines avec une seule lettre affectée de différens exposans. Mais, au lieu de ranger ces exposans en progression arithmétique, M. *Gauss*, d'après le théorème de *Fermat* sur les résidus des puissances, eut l'heureuse idée de les ranger en progression géométrique, en prenant pour base un de ces nombres, qui *Euler* nomme *racines primitives*, et qui sont tels que leurs puissances successives, divisées par le nombre premier dont il s'agit, qui est ici onze, laissent des résidus successifs tous différens : de cette manière on a encore les dix mêmes racines que si l'on eût pris les exposans 1, 2, 3, 4, etc., mais dans un ordre nouveau, ce qui est indifférent. Or à présent, on peut voir que cette disposition des racines est telle que, si l'on veut mettre une d'entre elles à la place d'une autre, et que, par ce changement, une des racines s'avance d'une, de deux, de trois ou de quatre places, etc., toutes les autres s'avanceront en même temps d'une, de deux, de trois ou de quatre places, etc.; de sorte que toutes les permutations possibles que vous voudriez faire entre ces dix racines, par le transport de l'une à la place d'une autre, ae réduiront uniquement aux dix permutations que vous obtenez en lisant de suite vos racines, d'abord à partir de la première, puis de la deuxième, puis de la troisième, etc., en fin de la dixième, exactement comme ai elles étaient écrites en cercle. Cela posé, si, en suivant ln méthode générale de la Note XIII, vous prenez une fonction linéaire de vos dix racines, et que vous mettiez pour coefficiens les dix racines dixièmes de l'unité, en plaçant ces racines suivant l'ordre naturet des puissances *d'une seule*, vous observerez qu'en multipliant toute cette fonction linéaire par la première racine dixième de l'unité, voua faites avancer dans la fonction toutes vos racines cherchées d'une place ; si vous multipliez par la deuxième, vous les faites avancer de deux places, et ainsi de suite. Donc, si vous élevez tout d'un coup la fonction linéaire à la dixième puissance, vous épuisez les dix seules permutations différentes dont elle était susceptible, et par conséquent vous n'y trouvez plus qu'une seule valeur, quelque échange qu'on y fasse entre les racines contenues. Vous obtenez donc cette première fonction linéaire en remettant le radical dixième sur sa dixième puissance qui est connue. Vous obtenez de même une seconde fonction linéaire, en employant une autre racine dixième de l'unité, et ainsi de suite ; et de ces dix fonctions linéaires vous tirez sur-le-champ, sans ambiguïté, vos dix racines inconnues.

Telle est la méthode donnée par M. *Lagrange,* comme une suite naturelle de sa méthode générale. On y profite encore des simplifications qui se présentent dans la résoluùon des équations composées. Ainsi, au lieu d'élever la fonction linéaire à la puissance marquée par le degré de l'équation, on peut n'élever d'abord qu'à la puissance marquée par l'un des facteurs premiers de ce degré, et ainsi de suite; et l'on aura le double avantage d'arriver d'une manière plus prompte à des formules plus simples. Toutefois ces formules seront les mêmes eu égard à la nature des radicaux, parce que des radicaux d'un degré composé se réduisent à ceux des degrés respectifs marqués par les facteurs premiers de ce degré. On voit donc que, dans la formule qui résout une équation binome d'un degre quelconque premier, il n'y aura pas d'autres radicaux que ceux qui répondent aux facteurs simples de ce degré premier moins un. Ainsi, pour l'equation binome du 17*e* degré, il n'y aura que des racines carrées; on pourra donc construire la formule par la règle et le compas; voilà pourquoi l'on peut inscrire *géométriquement* le polygone régulier de dix-sept côtés ; et en général, tout polygone d'un nombre de côtés, égal il une puisaance de deux plus un, et en même temps premier. Car on sait que la résolution de l'équation binome donne la division du cercle ea parties égales : réciproquement, si l'on sait diviser le cercle en parties égales, on peut résoudre l'équation binome d'un degré marqué par le nombre de ces parties. Aussi, de toutes les solutions de cette équation, la meillenre dans l'usage est celle que donnent les tables de trigonomêtrie, où l'on trouve la circonférence divisée en un nombre quelconque de parties, avec une très grande exactitude. Mais il n'en était pas moins curieux et important pour 1'Analyse, d'examiner et de suivre jusqu'au bout cette résolution algébrique des équations binomes, qui est comme la clef de la résolution générale des équations complètes.