NOTE X.

On the decomposition of a polynomial of any degree into real factors.

1. I propose to show in this Note, how any polynomial of whatever degree can always be resolved into real polynomials of the first or second degree. By regarding a polynomial as composed of just as many simple factors as it has units in the highest power of the indeterminate, we see clearly that it can have for factors only polynomials composed from such of its factors; from which it follows at first that if m is the degree of the given polynomial , it will be able to have just as many different divisors of degree $n,$ as it has ways of taking n items from m items, that is by the theory of combinations, that it has of units in the number

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ .....\ (m-n+1)}{1.2.3.............n},$$

which we will designate by μ in the following.

We put this single consideration in place in order to determine initially the coefficients of the polynomial divisor, without spending time on the long and tiresome operations of the ordinary method, based on the division or comparison of the product of two indeterminate polynomials with the polynomial divisor, and on the successive elimination of the unknowns.

2. Indeed let the polynomial of degree m be:

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{etc.} \pm h,$$

which we will suppose composed of the m simple factors $x-\alpha,\ x-\beta,\ x-\gamma,$ etc.

In expanding the product of these factors, and comparing it with the given polynomial term by term, we will have as we know,

$$\begin{aligned}
&a = \alpha \quad + \beta \quad + \gamma \quad + \delta \quad + \text{ etc.},\\
&b = \alpha\beta \ + \ \beta\gamma \ + \ \beta\gamma \ + \ \alpha\delta + \text{etc.},\\
&c = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \text{etc.},\\
&\text{etc.},\\
&h = \alpha\beta\gamma\delta ...
\end{aligned}$$

If we represent likewise a divisor of the same polynomial, represented by

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + \text{etc.} \pm u,$$

this polynomial divisor will be able to be composed of a number *n* of the same simple factors ; thus we will have, in taking n quantities only from among the *m* quantities, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc.

$$\begin{aligned}
&p=\alpha\ \ +\ \beta\ \ +\ \gamma+\ \ \text{etc.},\\
&q=\alpha\beta\ +\ \alpha\gamma\ +\ \beta\gamma\ +\text{etc.},\\
&r=\alpha\beta\gamma+\text{etc.},\\
&\text{etc.},\\
&u=\alpha\beta\gamma...
\end{aligned}$$

As the given coefficients *a*, *b*, *c,* etc. *h* are some functions of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. in which these quantities all enter equally, and which hence remain invariable, on making such changes as wished between these same quantities, it follows that every rational expression of these coefficients will have the same property ; and as the coefficients *p, q,* r, etc. *u* of the divisor, are composed of similar functions, but only of a number *n* of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., it is evident that these coefficients cannot be expressed by rational functions of the coefficients *a, b, c,* etc. ; but we will be able to make each of these to be depending on an equation, all the coefficients of which will be rational functions of *a, b, c,* etc., in composing this equation in such a manner that it may have all the different values of *p, q,* or *r* etc. for roots, the number of which is equal to the number μ given above.

3. Considering the last coefficient *u,* which is composed from the product of *n* of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. we will have $\alpha\beta\gamma...,\ \beta\gamma\delta...,\alpha\gamma\delta...,$ etc. for the different values of *u.* Thus, if we form a polynomial from the product of these simple factors,

$$u-\alpha\beta\gamma...,\ u-\beta\gamma\delta...,\ u-\alpha\gamma\delta...,\ \text{etc.}$$

this polynomial will have the property of being an invariable function of $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., independent of the indeterminate *u*; as a consequence, on being expanded, all its coefficients will still have the same property.

Thus let this polynomial be

$$u^{\mu}-\mathrm{A}x^{\mu-1}+\mathrm{B}x^{\mu-2}-\mathrm{C}x^{\mu-3}+\text{etc.}\pm\mathrm{V},$$

we will have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}=\alpha\beta\gamma...+\beta\gamma\delta...+\ \alpha\gamma\delta...,\ \text{etc.},\\
&\mathrm{B}=\ \alpha\beta\gamma...\times\beta\gamma\delta...+\ \alpha\gamma\delta......\times\alpha\gamma\delta\\
&\quad+\ \beta\gamma\delta...\times\alpha\gamma\delta...+\ \text{etc.},\\
&\qquad\qquad\text{etc.},\\
&\mathrm{V}=\alpha\beta\gamma...\times\beta\gamma\delta...\times\alpha\gamma\delta...,
\end{aligned}$$

where we can see that the coefficients A, B, C, etc. are indeed invariable functions of $\alpha\beta\gamma$, etc. Now, we know that these kinds of functions can always be determined by rational functions of the coefficients *a, b, c,* etc. and *h.*

4. Indeed, at first we are able to determine by these functions the sum of the powers of the same degree of the quantities α, β, γ, etc., as we have seen in Note VI (n° 1). Thus, if we multiply $\Sigma\alpha^{\lambda}$, the sum of the powers α^{λ} by $\Sigma\alpha^{\mu}$, the sum of the powers α^{μ}, the product $\Sigma\alpha^{\lambda}\times\Sigma\alpha^{\mu}$ will be equal to $\Sigma\alpha^{\lambda+\mu}+\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}$; thus we will have the sum of the terms $\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}$; by means of that of the powers. Likewise we will find

$$\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\times\Sigma\gamma^{\lambda}=\Sigma\alpha^{\lambda+\nu}\beta^{\mu}+\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu+\nu}+\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\gamma^{\nu};$$

thus we will also have this last sum in terms of functions of the sums of powers, and thus so on.

Meanwhile, it is easy to see that any rational and invariable function of the quantities α, β, γ, etc. can be formed only from one or more sums of the preceding forms ; from which it will be able to be determined always in terms of functions of the coefficients *a, b, c,* etc.

Thus it is one of the most fruitful principles of the theory of equations. *Newton*, and a long time before him *Albert Girard*, had given the way of determining the sum of the powers of the roots of an equation by functions of these coefficients. Look in the work of *Albert Girard*, with the title *Invention nouvelle en Algèbre*, and printed in Amsterdam in 1629, the second example of the second theorem. *Euler,* in the Memoirs of the Berlin Academy for the year 1748, and *Cramer*, at the end of his *Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, had shown how one would always be able to determine, form the coefficients of an equation, the sums of the products of its roots, taken in pairs ; taken in threes, etc., and raised to different powers; and *Waring* following has given general formulas for finding these kinds of functions of roots ; but in particular cases, it is perhaps more simple to use the method indicated above.

5. With regard to the coefficients A, B , C, etc. of the polynomial, we will be able to calculate these in the following manner.

We will begin by determining the sums of the powers by these formulas :

$$\Sigma\alpha=a,$$
$$\Sigma\alpha^{2}=a\Sigma\alpha-2b,$$
$$\Sigma\alpha^{3}=a\Sigma\alpha^{2}-b\Sigma\alpha+3c,$$
etc.

Next we will look for the n^{th} terms of the series

$$\Sigma\alpha = a,\quad \Sigma\alpha\beta = b,\quad \Sigma\alpha\beta\gamma = c,\quad \text{etc.}$$

$$\Sigma\alpha^2,\quad \Sigma\alpha^2\beta^2 = \tfrac{\Sigma\alpha^2\times\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha^4}{2},\quad \Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \tfrac{\Sigma\alpha^2\beta^2\times\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha^2\times\Sigma\alpha^4+\Sigma\alpha^6}{3},\ \text{etc.}$$

$$\Sigma\alpha^3,\quad \Sigma\alpha^3\beta^3 = \tfrac{\Sigma\alpha^3\times\Sigma\alpha^3-\Sigma\alpha^6}{2},\quad \Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3 = \tfrac{\Sigma\alpha^3\beta^3\times\Sigma\alpha^3-\Sigma\alpha^3\times\Sigma\alpha^6+\Sigma\alpha^6+}{3},\ \text{etc.}$$

These terms will be the values of the sums $\Sigma\alpha\beta\gamma.....,\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2.....,\Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3.....,$etc. Finally we will have

$$\text{A} = \Sigma\alpha\beta\gamma.....,$$
$$\text{B} = \tfrac{\Sigma\alpha\beta\gamma....-\ \Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2.....}{2},$$
$$\text{C} = \tfrac{\text{B}\Sigma\alpha\beta\gamma....-\ \text{A}\Sigma^2\alpha^2\beta^2\gamma^2.....+\ \Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3.....}{3},$$
etc.

For the rest, it is seen at first that without calculation we will have the values of the first coefficient A and of the last V; for the coefficient A evidently is equal to the coefficient of the power x^{m-n} in the given polynomial $x^m - ax^{m-1} + \text{etc.}$ As regards the coefficient V, it is seen that it must be of the form $\alpha^v\beta^v\gamma^v\delta^v.... = h^v$; and, in order to determine the exponent *v*, it will suffice to consider that this coefficient must be the product of the μ quantities, each of which is the product of *n* quantities taken amongst the *m* quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., such that this coefficient will be of dimension $n\mu$; thus it will be required that $mv = n\mu$, and as a consequence $v = \frac{n\mu}{m}$.
Thus, since

$$\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ .....\ (m-n+1)}{1.2.3.............n},$$

we will have,

$$v = \frac{(m-1)(m-2)\ .....\ (m-n+1)}{1.2.3.............(n-1)},$$

and the value of V will be h'.

Hence having the value of the last coefficient V of the polynomial in *u,* we will be able to content ourselves to calculate directly the first part of the coefficients A, B, C, etc. of this polynomial. For let T, S, R, etc. be the terms which precede the last term V, it is easy to show that we shall have :

$$\frac{\text{T}}{\text{V}} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma...} + \frac{1}{\beta\gamma\delta...} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta...} + \text{etc.}$$

Now, if we designate by (*n*) the coefficient of the power x^n in the given polynomial, we will have also

$$\frac{(n)}{h} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma...} + \frac{1}{\beta\gamma\delta...} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta...} + \text{etc.}$$

Thus $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}}=\frac{(n)}{h}$; and as a consequence $\mathrm{T}=\frac{(n)\mathrm{V}}{h}$.

Then if we designate the coefficients of the given polynomial which precede the last term *h*, by *g, f, e,* etc. ; when we will have found the expression B in terms of *a, b, c,* etc., we will only have to change a into $\frac{g}{h}$, b into $\frac{f}{h}$, c into $\frac{e}{h}$, etc., in order to have the value of $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{S}}$, and making the same changes in the expression of C, we will have the value of $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{V}}$, and hence so on.

Hence having formed the polynomial in *u,* if we make it equal to zero, we will have an equation of which the roots will be $\alpha\beta\gamma...$, $\beta\gamma\delta...$, $\alpha\gamma\delta...$, etc., and which will serve, consequently, to determine the value of *u.* It will remain only thus further to find the values of all the other coefficients *p, q, r,* etc. of the divisor polynomial.

6. The simplest manner of finding these coefficients , is to do the actual division of the polynomial $x^m-ax^{m-1}+\text{etc.}$ by the polynomial $x^n-px^{n-1}+\text{etc.}\pm u$, until we must come to a remainder in which the highest power of *x* shall be less than x^n ; then on equating to zero each of the terms of this remainder, so that it may become zero independent of the unknown *x,* we will have *n* equations between the *n* coefficients *p, q*, etc. *u;* and we will be able, speaking generally, by these equations, to determine the values of *p, q*, etc. as rational functions of *u.* We will then have the same equation in *u,* by the substitution of these values into the remaining equation ; but since we cannot see, in this way, of what degree this final equation in *u* must become, so that we may be able even to arrive at an equation in *u* of a degree higher than it cannot be, which is a common inconvenience of the methods of elimination, we have believed to have shown how we can find this equation *à priori,* and to be assured of the precise degree which it must show.

For the same reason, we know that it is necessary to have a direct method for finding the expressions of the coefficients *p, q,* etc. in *u,* and in order to be assured that these expressions can be rational always, with the special cases excepted where they must depend on equations of the second or third degree, as we have observed already in the preceding Note. Thus here is how, on assuming the equation in *u,* we can have the value of the coefficients *p, q* , etc. as functions of *u.*

7. I consider that as the quantity *x* being indeterminate, we can put $x-i$ in place of x, both in the polynomial given $x^m-ax^{m-1}+\text{etc.}$, as well as in the divisor polynomial $x^n+px^{n-1}+\text{etc.}$ By this substitution , the first of these polynomials will become

$$x^m-a_1x^{m-1}+b_1x^{m-2}-\text{etc.}\pm h_1,$$

where we will have

$$a_1 = a + mi,$$
$$b_1 = b + (m-1)ai + \tfrac{m(m-1)}{2} i^2,$$
$$c_1 = c + (m-1)bi + \tfrac{(m-1)(m-2)}{2} ai^2 + \tfrac{m(m-1)(m-2)}{2.3} i^3, \text{etc.}$$
$$h_1 = h + gi + fi^2 + ei^3 + \text{etc.}$$

And the second polynomial will become likewise

$$x^n - p_1 x^{m-1} + q_1 x^{m-2} - \text{etc.} \pm u_2,$$

on making

$$p_1 = a + ni,$$
$$q_1 = q + (n-1)pi + \tfrac{m(m-1)}{2} i^2,$$
$$r_1 = r + (n-2)qi + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{2} pi^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3} i^3,$$
etc.
$$u_1 = u + ti + si^2 + ri^3 + \text{etc.}$$

From which we can conclude that if, for the equation in *u,*

$$u^\mu - \mathrm{A}u^{\mu-1} + \mathrm{B}u^{\mu-2} - \text{etc.} \pm \mathrm{V} = 0,$$

in which the coefficients A, B, C, etc. are some functions of $a, b,$ c, etc. $h,$ we can substitute respectively $a_1, b_1, c_1,$ etc. h_1 in place of these quantities, the value of u will become that of u_1 *,* whatever the value of i may be; such that in developing the terms following the powers of $i,$ it will be necessary that the sum of all these terms multiplied by the same power must be zero ; which will give several equations, each of which will serve to determine one of the coefficients t, s , $r,$ etc. by the preceding ones.

8. We will even be able to find these equations directly from the algorithm of derived functions. Indeed, if we put $\frac{i}{m}$ everywhere in place of $i,$ it follows of the preceding formulas, that with a becoming $a + i,$ b will become

$$b + \tfrac{m-1}{m} ai + \tfrac{m(m-1)}{2m^2} i^2,$$

c will become

$$c + \tfrac{m-2}{m} bi + \tfrac{(m-1)(m-2)}{2m^2} ai^2 + \tfrac{m(m-1)(m-2)}{2.3m^3} i^3, \text{etc.},$$

and finally u will become

$$u+\tfrac{t}{m}i+\tfrac{s}{m^2}i^2+\tfrac{r}{m^3}i^3+\text{etc.}$$

Thus, if we consider, which is permitted, the coefficients $b, c,$ etc., h and $u,$ as some functions of $a,$ and we recall that a becomes $a+i$, every function of $a,$ such as u, becomes

$$u+iu'+\tfrac{i^2}{2}u''+\tfrac{i^3}{2.3}u'''+\text{etc.},$$

we will assume further

$$b'=\tfrac{m-1}{m}a,\ b''=\frac{m(m-1)}{m^2},\ b'''=0;$$

$$c'=\tfrac{m-2}{m}b,\ c''=\frac{(m-1)(m-2)}{m^2}a,$$

$$c'''=\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3},\ c^{iv}=0;$$

$$d'=\tfrac{m-3}{m}c,\ d''=\frac{(m-2)(m-3)}{m^2}b,$$

$$d'''=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{m^3}a,\ d^{iv}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{m^4},$$

$$d^{v}=0;\text{etc.}$$

$$u'=\tfrac{t}{m},\ u''=\tfrac{2s}{m^2},\ u'''=\tfrac{2.3r}{m^3},\ \text{etc.},$$

and we will only have to take the successive derived functions of the equation in $u,$ and to make there the preceding substitutions.

9. Assuming

$$\mathrm{Z}=u^{\mu}-\mathrm{A}u^{\mu-1}+\mathrm{B}u^{\mu-2}-\mathrm{C}u^{\mu-3}+\text{etc.}\pm\mathrm{V};$$

such that $\mathrm{Z}=0$ shall be the equation which determines the value of u: this quantity Z, being regarded as a function of $a,$ will give the derived equations
$\mathrm{Z}'=0,\ \mathrm{Z}''=0,\ \mathrm{Z}'''=0,$ etc.

But in order to be able to distinguish in these functions what is due to the variations of the quantities a, $b,$ $c,$ etc. h and u in particular, we will represent in general, in analogy with what we practice in the calculus calling $\left(\frac{Z'}{a'}\right), \left(\frac{Z'}{b'}\right), \left(\frac{Z'}{c'}\right),$ etc. the partial differentials for the coefficients of $a', b', c',$ etc. in the expression for Z'; by $\left(\frac{Z''}{a'^2}\right), \left(\frac{Z''}{a'b'}\right), \left(\frac{Z''}{b'^2}\right),$ etc., the coefficients of the quantities $a'^2, a'b', b'^2,$ etc., in the general expression Z'', and thus henceforth, and likewise we will call these functions partial derived functions. When a is the principal variable of which the others are, or may be able to be considered functions, we will have $a'=1$; but we are going to retain the letter a' under the letters $\mathrm{Z}', \mathrm{Z}''$, etc.

to represent in general the coefficients of the terms of Z', Z'', etc. which will contain this same letter, if *a* were some function of another principal variable, and in order to denote as a consequence what is due in particular to the variation of *a*.

This notation is neater and more expressive that that which I have used in the *Théorie des fonctions,* in placing the accents differently, according to the different variables to which they belong. In substituting that into these, the algorithm of the derived functions will conserve all the advantages of the differential calculus, and further it will have that advantage of riding the formulas of this multitude of *d*, which lengthen and even disfigure them in some way, and which continually remind us of the false idea of the infinitely small.

10. Hence we will have, on regarding all the quantities *a, b, c,* etc. *h,* and *u,* as some functions of a fundamental variable,

$$Z' = \left(\tfrac{Z'}{a'}\right)a' + \left(\tfrac{Z'}{b'}\right)b' + \left(\tfrac{Z'}{c'}\right)c' + \left(\tfrac{Z'}{u'}\right)u',$$

and again taking the derived functions,

$$\begin{aligned}
Z'' &= \left(\tfrac{Z'}{a'}\right)a'' + \left(\tfrac{Z'}{b'}\right)b'' + \left(\tfrac{Z'}{c'}\right)c'' + \left(\tfrac{Z'}{u'}\right)u'' + \text{etc.}\\
&+\left(\tfrac{Z''}{a'^2}\right)a'^2 + 2\left(\tfrac{Z''}{a'b'}\right)a'b'' + \left(\tfrac{Z''}{b'^2}\right)b'^2 + \text{etc.}\\
&+2\left(\tfrac{Z''}{a'u'}\right)a'u' + 2\left(\tfrac{Z''}{b'u'}\right)b'u' + 2\left(\tfrac{Z''}{c'u'}\right)c'u' + \text{etc.}\\
&+\left(\tfrac{Z''}{u'^2}\right)u'^2,
\end{aligned}$$

and thus so forth.

Thus, making

$$a' = 1,\ a'' = 0,\ \text{etc.},\ b' = \tfrac{m-1}{m}a,\ b'' = \tfrac{m(m-1)}{m^2},\ b''' = 0,\ c' = \tfrac{m-2}{m}b,\ \text{etc.},$$

as we have found above, we will have the equation $Z' = 0,\ Z'' = 0,\ \text{etc.},$ namely :

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{Z'}{a'}\right) + \left(\tfrac{Z'}{b'}\right)\tfrac{m-1}{m}a + \left(\tfrac{Z'}{c'}\right)\tfrac{m-2}{m}b + \text{etc.} + \left(\tfrac{Z'}{u'}\right)\tfrac{t}{m} = 0,\\
&\left(\tfrac{Z'}{b'}\right)\tfrac{m(m-1)}{m^2} + \left(\tfrac{Z'}{c'}\right)\tfrac{(m-1)(m-2)}{m^2}a + \text{etc.} + \left(\tfrac{Z'}{u'}\right)\tfrac{2s}{m^2} +\\
&+\left(\tfrac{Z''}{a'^2}\right) + 2\left(\tfrac{Z''}{a'b'}\right)\tfrac{m-1}{m} + \left(\tfrac{Z''}{b'^2}\right)\left(\tfrac{m-1}{m}a\right)^2 + \text{etc.}\\
&+2\left[\left(\tfrac{Z''}{a'u'}\right)\tfrac{1}{m} + \left(\tfrac{Z''}{b'u'}\right)\tfrac{m-1}{m^2}a + \left(\tfrac{Z''}{c'u'}\right)\tfrac{m-2}{m^2}b + \text{etc.}\right]\\
&+\left(\tfrac{Z''}{u'^2}\right)\tfrac{t^2}{m^2} + \text{etc.} = 0,
\end{aligned}$$

and thus so forth, in which the derived partial functions
$\left(\frac{Z'}{a'}\right)$, $\left(\frac{Z'}{b'}\right)$, etc., $\left(\frac{Z''}{a'^2}\right)$, $\left(\frac{Z''}{a'b'}\right)$, etc. will be some known functions of *a, b, c,* etc. *u.*

Thus the first equation will give the value of *t;* the second will give that of *s*, etc. as rational functions of *a, b, c,* etc. *u;* as long as the partial function $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ does not become zero, for which case the first equation no longer will contain *t,* nor the second *s,* etc. In this case thus it will be necessary to express the value of *t* from the second equation, in which *t* rises to the second degree ; and the equations following then will give the values of *s, r,* etc. by some rational functions. If the derived function $\left(\frac{Z''}{u'^2}\right)$ also shall be zero, the equation in *t* shall no longer be of the first degree, and if the sum of the functions which multiply *t* were zero at the same time, the quantity *t* would disappear from the second equation, and it would only be given by the third, where it would rise to the third degree, and hence so forth.

Now the partial function $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ is equal to

$$\mu u^{\mu-1}-(\mu-1)\mathrm{A}u^{\mu-2}+(\mu-2)\mathrm{B}u^{\mu-3}-\text{etc.},$$

and we see that the equation $\left(\frac{Z'}{u'}\right)=0$ contains the conditions of the equality of the roots of the equation $\mathrm{Z}=0$. From which it follows that if this equation has some equal roots, and that we use for the value of *u* one of these equal roots, such that the function $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ becomes zero at the same time as Z, the coefficient *t* then will become a particular equation of the second degree ; and as a consequence all the other coefficients of the polynomial divisor, will depend at the same time on the resolution of two equations in *u* and *t.* We have given above (Note preceding n° 13) the abstract reason drawn from the equality of the roots ; but here we have a rigorous analytical demonstration.

11. One essential consequence which results from the preceding formulas, is that as long as the function $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ shall not be zero, all the coefficients *t, s, r,* etc. will be given as rational functions of the coefficient *u*; and that as a consequence this necessarily will always happen when the equation in *u* will have no equal roots, or at least when we will only use unequal roots for the value of *u* .

Now I note that we can always make a kind of equation in *u* that shall not have equal roots, unless the polynomial given may not have equal factors itself ; but as we can eliminate these factors in advance, we will always be able to assume that all the factors of these polynomials shall be unequal. With that assumed, if we substitute $x-\lambda$ into this polynomial in place of *x,* which will change the coefficients *a, b, c,* into

$a+m\lambda$

$b+(m-1)a\lambda+\frac{m(m-1)}{2}\lambda^2,$

etc.,

the factors of the new polynomial will be $x-\alpha-\lambda,\ x-\beta-\lambda,\ x-\gamma-\lambda,$ etc. that's to say the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. will become $\alpha+\lambda,\ \beta+\lambda,\ \gamma+\lambda,$ etc.

Thus the roots of the equation in *u,* will be all the products possible of the *n* quantities, taken among the m quantities $\alpha+\lambda,\ \beta+\lambda,\ \gamma+\lambda,$ etc.; and it is clear that two of these roots will never be known to become equal unless it may have two or more equal products from two or more dimensions, formed from these different quantities. Now it is evident that as long as the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. will be unequal, we will always be able to take λ in such as way that each of these equalities cannot happen ; considering for example, the two products $(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)$ and $(\gamma+\lambda)(\delta+\lambda)$ which are reduced to $\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta$ and $\lambda^2+(\gamma+\delta)\lambda+\gamma\delta$, we see that there is only one value of λ which may be able to render them equal; and that, consequently, it will have an infinity of values which render them unequal, unless we may have $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ and $\alpha\beta=\gamma\delta$, which would imply the equality of α and β with γ and δ.

It will be likewise of products of a greater number of factors ; from which we will conclude in general, that we can always thus transform the basic polynomial, on increasing the indeterminate *x* by some quantity, in such a way that the resulting equation in *u* may not have equal roots.

12. We have just given, not only the manner, but even the formulas by which we will be able always to find a divisor of degree *n* of some polynomial of degree *m;* and we have just shown by these formulas, that this divisor will only be taken from the root of a single equation of degree μ, namely :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots\ (m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n}.$$

Thus it will suffice that this equation may have one real root for which every divisor shall be real ; but since it will have in general only equations of an odd degree, or these of even degrees of which the last term is negative, where we must be assured of the existence of a real root, it remains to see what the values are of *n* for which these conditions necessarily will happen.

Whatever the number *m* shall be*,* it is always reducible to the form $2^\rho i$*, i* being an odd number. Assuming $n=2^\rho$, we will have

$$\mu=\frac{2^\rho i(2^\rho i-1)(2^\rho i-2)\ \ldots\ldots\ (2^\rho i-2^\rho+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ 2^\rho},$$

or rather, which is the same thing,

$$\mu=\frac{2^{\rho}i(2^{\rho}i-1)(2^{\rho}i-2)\;........\;(2^{\rho}i-2^{\rho}+1)}{2^{\rho}(2^{\rho}-1)(2^{\rho}-2)\;....................(2^{\rho}-2^{\rho}+1)},$$

and dividing the top and bottom of this fraction by 2^{ρ}, then by 2, by 4, etc. we will have

$$\mu=\frac{i(2^{\rho}i-1)(2^{\rho-1}i-1)\;........\;(2^{\rho}i-2^{\rho}+1)}{(2^{\rho}-1)(2^{\rho-1}-2)\;....................(2^{\rho}-2^{\rho}+1)}.$$

As the numerator and the denominator only contain odd factors, and that the number μ is, by its nature, a whole number, it follows necessarily that it will be odd.

It follows from there that every polynomial of degree $2^{\rho}i$ can always have a real divisor of degree 2^{ρ}; the resulting polynomial remaining after the division thus will be real also, and of degree $2^{\rho}i-2^{\rho}$, namely, $2^{\rho}(i-1)$; now, *i* being an odd number, $i-1$ will be an even number, that we will be able to represent by $2^{\sigma}k$, *k* being an odd number ; the remaining polynomial then will be of degree $2^{\rho+\sigma}k$, and it will have a divisor of degree $2^{\rho+\sigma}$, and hence so forth. As in this manner every whole number can be decomposed into a certain number of known powers of 2, such as $2^{\rho}+2^{\rho+\sigma}+\text{etc.}$, it follows that every polynomial of whatever degree, will be able to be decomposed at once into a similar number of polynomials, of which the degrees will be these same powers of two.

13. Thus it remains to consider the polynomials of which the degree is a simple power of 2. In the general formula for μ, making

$m=2^{\rho}$, and $n=\frac{m}{2}=2^{\rho-1}$, we will have

$$\mu=\frac{2^{\rho}(2^{\rho}-1)(2^{\rho}-2)\;........\;(2^{\rho}-2^{\rho-1}+1)}{1.\quad 2.\quad 3\;.........................2^{\rho-1}}$$
$$=\frac{2^{\rho}(2^{\rho}-1)(2^{\rho}-2)\;.................\;(2^{\rho}-2^{\rho-1}+1)}{2^{\rho-1}(2^{\rho-1}-1)(2^{\rho-1}-2)\;...............(2^{\rho-1}-2^{\rho-1}+1)};$$

dividing the top and the bottom of this fraction by $2^{\rho-1}$, and then by 2, 4, etc., we will have

$$\mu=\frac{2(2^{\rho}-1)(2^{\rho-1}-1)\;.................\;(2^{\rho}-2^{\rho-1}+1)}{(2^{\rho-1}-1)(2^{\rho-2}-1)\;...............(2^{\rho-1}-2^{\rho-1}+1)}.$$

As all the factors of the numerator, with the exception of the first 2, just as all the factors of the denominator, are odd, it follows that the number μ, which is besides whole by its nature, necessarily will be of the form 2*i*, *i* being an odd number.

Considering in this case the equation in *u;* since the degree of the divisor is half of that of the polynomial, the roots of this equation will be all the products that we will be able to make on taking the half of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. of which the number is assumed even. Thus, since the product of all these quantities is *h,* it follows that if u is one of these similar products, $\frac{h}{u}$ will be another one ; consequently if *u* is one root of the equation with which it is concerned, $\frac{h}{u}$ will be one also. This equation hence will become to remain the same, on substituting there $\frac{h}{u}$ for *u*.

By this substitution, the equation

$$u^{\mu}-\mathrm{A}u^{\mu-1}+\mathrm{B}u^{\mu-2}-Cu^{\mu-3}+\text{etc.}-\mathrm{R}u^{3}+\mathrm{S}u^{2}-Tu+\mathrm{V}=0$$

will become, after having been multiplied by u^{μ} and divided by V,

$$u^{\mu}-\frac{h\mathrm{T}}{\mathrm{V}}u^{\mu-1}-\frac{h^{2}\mathrm{S}}{\mathrm{V}}u^{\mu-2}-\frac{h^{3}\mathrm{R}}{\mathrm{V}}u^{\mu-3}+\text{etc.}-\frac{h^{\mu-3}\mathrm{C}}{\mathrm{V}}u^{3}$$
$$+\frac{h^{\mu-2}\mathrm{B}}{\mathrm{V}}u^{2}-\frac{h^{\mu-1}\mathrm{A}}{\mathrm{V}}u+\frac{h^{\mu}}{\mathrm{V}}=0;$$

and as the two equations must be identical, we will have

$$\mathrm{A}=\frac{h\mathrm{T}}{\mathrm{V}},\ \mathrm{B}=\frac{h^{2}S}{\mathrm{V}},\ \mathrm{C}=\frac{h^{3}\mathrm{R}}{\mathrm{V}},\ \text{etc.};$$

but we have found above $\mathrm{V}=h^{\nu}$, ν being $=\frac{\mu n}{m}=\frac{\mu}{2}$ (since $m=2n$, in the present case), and as a consequence odd ; thus we will have

$$\mathrm{T}=\mathrm{A}h^{\nu-1},\ \mathrm{S}=\mathrm{B}h^{\nu-2},\ \mathrm{R}=Ch^{\nu-3},\ \text{etc.};$$

hence, on substituting 2ν in place of μ, and gathering together the terms equally distant from the centre, the equation in *u* will become

$$u^{2\nu}+h^{\nu}-\mathrm{A}(u^{2\nu-1}+h^{\nu-1}u)+\mathrm{B}(u^{2\nu-2}+h^{\nu-2}u^{2})$$
$$-\mathrm{C}(u^{2\nu-3}+h^{\nu-3}u^{3})+\text{etc.}=0.$$

14. This is the general form of equations that we call reciprocals, and which are able always to lower to a degree less than half.

Indeed, on dividing the preceding equation by u^{ν}, it becomes

$$u^{v}+\frac{h^{v}}{u^{v}}-\mathrm{A}(u^{v-1}+\frac{h^{v-1}}{u^{v-1}})+\mathrm{B}(u^{v-2}+\frac{h^{v-2}}{u^{v-2}})$$
$$-\mathrm{C}(u^{v-3}+\frac{h^{v-3}}{u^{v-3}})+\text{etc.}=0.$$

Now, if we make $y=u+\frac{h}{u}$, we will have $y^{2}=u^{2}+\frac{h^{2}}{u^{2}}+2h,\ y^{3}=u^{3}+\frac{h^{3}}{u^{3}}+3h(u+\frac{h}{u})$, and so on thus; from which we express

$$u+\frac{h}{u}=y,$$
$$u^{2}+\frac{h^{2}}{u^{2}}=y^{2}-2h,$$
$$u^{3}+\frac{h^{3}}{u^{3}}=y^{3}-3hy,$$
etc.,

and in general

$$u^{\lambda}+\frac{h^{\lambda}}{u^{\lambda}}=y^{\lambda}-\lambda hy^{\lambda-2}+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}h^{2}y^{\lambda-4}$$
$$-\frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{2.3}h^{3}y^{\lambda-6}+\text{etc.}$$
etc.,

By means of these substitutions, the equation in u of degree $2v$, will be transformed into an equation in y of degree v, which will be of the form

$$y^{v}-(\mathrm{A})y^{v-1}+(\mathrm{B})y^{v-2}-(\mathrm{C})y^{v-3}+\text{etc.}=0,$$

on assuming

$$(\mathrm{A})=\mathrm{A},$$
$$(\mathrm{B})=\mathrm{B}-vh,$$
$$(\mathrm{C})=\mathrm{C}-(v-1)h\mathrm{A},$$
$$(\mathrm{D})=\mathrm{D}-(v-2)h\mathrm{B}+\frac{v(v-3)}{2}h^{2},$$
etc.

Then we will have u given in terms of y by the equation $u^{2}-uy+h=0,$ which gives $u=\frac{y+\sqrt{(y^{2}-4h)}}{2}$.

15. Now we see that it will suffice to calculate directly half of the coefficients A, B, C, etc. of the equation in u; which reduces the calculation by half. We see further that, as the exponent μ is, in the present case, a number of the form $2i$, i being odd, the number v will be odd, and consequently the equation in y necessarily will have a real root.

But in order that u may have a real value, it does not suffice that the value of y shall be real, it is necessary yet that $y^{2}-4h$ shall be a positive quantity. That will happen necessarily when h has a negative value ; hence, in this case, the polynomial of degree 2^{ρ} is resolvable into two real polynomials of degree $2^{\rho-1}$. But if h has a positive value, it will be required to see further if we can always find a real value of *y,* such that $y^2 > 4h$.

16. Thus let there be $y^2 - 4h = z$; which we substitute into the preceding equation in *y,* $\sqrt{(z^2+4h)}$ in place of *y*, we will have, after we have made the root disappear by raising to the square, and ordered the terms following the powers of *z,* an equation in *z* of the same degree *v*, which necessarily will have a positive real root, if its last term is negative. Now, since *v* is an odd number, the last term will be the product of all the roots, taken negatively ; hence the question is reduced to seeing if the product of all the values of *z* is essentially a positive quantity, on assuming that the value of *h* shall be positive.

Since $z = y^2 - 4h$, and $y = u + \frac{h}{u}$, we will have

$$z^2 = u^2 + \frac{h^2}{u^2} - 2h = (u - \tfrac{h}{u})^2.$$

Now *u* has for values all the products that we can form by multiplying together half of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., and we have already seen that the values of $\frac{h}{u}$ are the products that we can make by multiplying together the other half of the same values; thus the values of $u - \frac{h}{u}$ will be in equal pairs and of opposite signs ; as a consequence, we will have all the different values of *z*, on giving to *u* only half of the different values ; it is evident that the product of all the values of *z* will be positive, if the product of the values $u - \frac{h}{u}$ can be expressed by a rational function of the coefficients *a, b, c,* etc., since then its square will be necessarily a positive quantity.

If there are, for example, only four quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$ all the values of *u* will be $\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\gamma,\ \beta\delta,\ \gamma\delta;$ and the different values of $u - \frac{h}{u}$ will be, on taking for *u* only the first three products,

$$\alpha\beta - \gamma\delta,\ \alpha\gamma - \beta\delta,\ \alpha\delta - \beta\gamma;$$

the product of these three quantities being expanded, gives

$$\begin{gathered}\alpha^3\beta\gamma\delta + \alpha\beta^3\gamma\delta + \alpha\beta\gamma^3\delta + \alpha\beta\gamma\delta^3 \\ -\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2\delta^2,\end{gathered}$$

where we have seen that the positive parts and the negative parts are each an invariable and symmetric function of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$ and are able as a consequence to be determined in terms of *a, b, c, d,* by the formulas given previously.

17. Now generalizing this result, and designating, for the greatest simplicity, by P, Q, R, etc. the different products that we can make with half of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$ in

conserving there the same quantity $\alpha,$ and by $p, q, r,$ etc. the products formed from the other half of the same quantities, and which I may call reciprocals. At first I am going to prove that the quantities P, Q, R, etc. and their reciprocals $p, q, r,$ etc. include all the values of u. We have seen that these values are μ in number ; and because of $m = 2n$, we have

$$\mu = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\,\ldots\ldots\,(n+1)}{1\;.\;2\;\;.\;3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,n}.$$

On the other hand, as we have assumed that the quantities P, Q, R, etc. will all contain a like quantity $\alpha,$ it is clear that the number of these quantities will be that of which all the products we can make in taking only $n-1$ from $2n-1$ quantities ; thus this number will be

$$\frac{(2n-1)(2n-2)\,\ldots\ldots(n+1)}{1\;.\;2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(n-1)} = \frac{\mu}{2} = \nu.$$

Thence, since the quantities P, Q, R, etc. form half of all the values of u, it will suffice to take these quantities for the different values of u, and $p, q, r,$ etc. will be the corresponding values of $\frac{h}{u}$. Hence it will be required to see if the product

$$(P-p)(Q-q)(\mathrm{R}-r).....$$

is necessarily an invariable function of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., in which case we will be able to assured that it can be determined rationally by the coefficients $a, b, c,$ etc; At first it is evident that all the permutations that we can make of the quantities $\beta,\ \gamma,\ \delta,$ etc. between themselves, can only interchange the products P, Q, R, etc. among themselves, and likewise their reciprocals between themselves; such that no change can result in the product

$$(P-p)(Q-q)(\mathrm{R}-r).....$$

from these permutations

Next considering the interchanges of α with each of the other quantities $\beta,\ \gamma,\ \delta,$ etc.; it is clear that in interchanging α and β, those quantities P, Q, R, etc. which contain α and β at the same time, will not experience any change; thus we will have to consider only those which do not contain β. Now if P, for example, does not contain β, as the two products P and p will contain all the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., it follows that β will be held in p, and thus of the others ; thus, by the exchange of α and β every quantity P or Q, etc. which will not contain β, will only become one of the reciprocals p, q, r, etc. which are not assumed to contain α; hence P will become for example q, and then Q will become necessarily p; thus $\mathrm{P}-p$ will become $q-Q$, and at the same time $Q-q$ will become $p-P$. From which we can conclude in general that, by the interchanges of α into $\beta,\ \gamma,$etc., the different factors $P-p,\ Q-q,\ \mathrm{R}-r,$ etc. either will be allowed to remain the same, or to be interchanged among themselves, with a change in sign at the same time.

18. Now, if we look for the number of products P, Q, R, etc. which will not change on exchanging α and β this number will be that of these products where α and β are found together ; then the total number of these quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. being $2n,$ and the number of these quantities in each product being *n,* the number of products which will contain α and β at the same time, will be that of the combinations we can make on choosing $n-2$ items in $2n-2$ items; as a consequence it will be expressed by

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ ....(n+1)}{1\ .\ 2\ ....\ (n-2)};$$

comparing this number to that number *v* given above, it will be able to be expressed by

$$\frac{v(n-1)}{2n-1}.$$

Now the total number of the quantities P, Q, R, etc. being *v*, if we subtract from that the number $\frac{v(n-1)}{2n-1},$ we will have $\frac{nv}{2n-1}$ for the number of products P, Q, R, etc. which, by the exchange of α into β*,* will be changed into the reciprocals *p, q, r,* etc.; consequently, this number will be also that of the factors $\mathrm{P}-p,\ \mathrm{Q}-q,\ \mathrm{R}-r,$ etc., which will change sign with this same exchange ; thus, as long as *n* shall be an even number, and as a consequence as long as the exponent $m=2n$ shall be a power of 2, greater than 2, the number on which it depends necessarily will be even; from which it follows that the total product

$$(\mathrm{P}-p)(\mathrm{Q}-q)(\mathrm{R}-r).....$$

will not change with the exchange of α into β*;* it will be the same for the other exchanges of α into $\gamma,\ \delta,$ etc.

Thus at last, this product will be an invariable function of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., and as a consequence it will be able to determine by rational functions the coefficients *a, b, c,* etc. of the given polynomial . Thus the equation in *z* of odd degree *v* will have its last term negative; as a consequence, it will have necessarily a real positive root (n° 3).

On taking this value positive for *z,* we will have $\left(u-\frac{h}{u}\right)^2=z,$ and from that $u-\frac{h}{u}=\sqrt{z}$. Then , $u^2-u\sqrt{z}-h=0,$ and from that $u=\frac{1}{2}\sqrt{z}\pm\sqrt{(\frac{z}{4}+h)},$ necessarily a real quantity, since we have assumed the quantity *h* to be positive (n° 16).

Thus every polynomial of degree 2^ρ*,* as long as ρ shall be greater than unity, whether its last term *h* shall be positive or negative, will be able to be decomposed by the formulas we have just given, into two real polynomials of degree $2^{\rho-1}$, and we will have these two polynomials at once, in using the double value of *u.* Thus, on combining this conclusion with that which we have found previously for the whole polynomial of degree $2^{\rho}i$, we will conclude from that generally that we can always resolve some polynomial into its real factors of the first or second degree.

19. On applying the theory we have just given to equations, on the decomposition of polynomials, we see that we can always resolve any equation into two other equations of which the coefficients will be real and only will depend on the real root of an equation of odd degree. Now we have seen in the 1st chapter, that at once we can have the bounds of this root by the simple substitution of the natural numbers 1 , 2 , 3 , etc. ; and that having the first limits, it is easy to restrict these as desired by successive substitutions.

Thus, when the given equation is numerical, we will be able to resolve that into two other numerical equations of which the coefficients will be as precise as desired ; and resolving likewise each of these into two others, we will arrive finally at equations of the first or second degree, which at once consequently will give all the real and imaginary roots. From that there arises a method of resolving numerical equations, which is independent of the search for the bounds between the roots, and which, in this regard, appears to have some advantage over the method of the first two chapters. But on the one hand, it is necessary to admit that the exception of some particular cases where the decomposition of the equation is easy, this method will be unpractable by the multiplicity and the length of the operations which it can demand. Also, the principal object of this Note is to prove *à priori* the possibility of the decomposition of polynomials and of equations into real factors of the first or second degree, an objective that had not yet been fulfilled in a direct and complete manner.

NOTE X .

Sur la décomposition des polynomes d'un degré quelconque en facteurs réels.

1. JE me propose de montrer, dans cette Note, comment tout polynome d'un degré quelconque peut toujours se résoudre en polynomes réels du premier ou du second degré. En regardant un polynome comme composé d'autant de facteurs simples qu'il y a

d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de l'indéterminée, on voit clairement qu'il ne peut avoir pour diviseurs que des polynomes composés de quelques-uns de ses facteurs; d'où il suit d'abord que si m est le degré du polynome donné, il pourra avoir autant de diviseurs différens· du degré n, qu'il y a de manières de prendre n choses sur m choses, c'est-à-dire par la théorie des combinaisons, qu'il y a d'unités dans le nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ .....\ (m-n+1)}{1.2.3.............n},$$

que nous désignerons par μ dans la suite.

Cette seule considération nous met en état de déterminer *à priori* les coefficiens du polynome diviseur, sans passer par les opératious longues et pénibles de la méthode ordinaire, fondée sur la division ou sur la comparaison du produit de deux polynomes indéterminés, aveè le polynome diviseur, et sur l'élimination successive des inconnues.

2. Soit en effet le polynome du degré m,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{etc.} \pm h,$$

que nous supposerons composé des m facteurs simples $x-\alpha,\ x-\beta,\ x-\gamma,$ etc.

En développant le produit de ces facteurs, et le comparant terme à terme avec le polynome donné, on aura, comme l'on sait,

$$\begin{aligned}
&a = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.},\\
&b = \alpha\beta + \beta\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \text{etc.},\\
&c = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \text{etc.},\\
&\text{etc.},\\
&h = \alpha\beta\gamma\delta...
\end{aligned}$$

Si l'on représente de même par

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + \text{etc.} \pm u,$$

un diviseur du même polynome, ce polynome diviseur ne pourra être composé que d'un nombre n des mêmes facteurs simples; ainsi on aura, en ne prenant que n quantités parmi les m quantités, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc.

$$\begin{aligned}
&p = \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.},\\
&q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{etc.},\\
&r = \alpha\beta\gamma + \text{etc.},\\
&\text{etc.},\\
&u = \alpha\beta\gamma...
\end{aligned}$$

Comme les coefficiens donnés *a* , *b* , *c,* etc. *h* sont des fonctions des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. dans lesquelles ces quantités entrent toutes également, et qui demeurent ainsi invariables, en faisant entre ces mêmes quantités tels échanges que l'on voudra, il s'ensuit que toute expression rationnelle de ces coefficiens aura la même propriété ; et comme les coefficiens *p, q,* r, etc. *u* du diviseur, sont de semblables fonctions, mais seulement d'un nombre *n* des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. , il est évident que ces coefficiens ne peuvent pas être exprimés par des fonctions rationnelles des coefficiens *a, b, c,* etc. ; mais on pourra les faire dépendre chacun d'une équation dont tous les coefficiens seront des fonctions rationnelles de *a, b, c,* etc., en composant cette équation de manière qu'telle ait pour racines toutes les différentes valeurs de *p,* ou de *q,* ou de *r*, etc., dont le nombre est égal au nombre μ donné ci-dessus.

3. Considérons le dernier coefficient *u,* qui est formé du produit de *n* des qùantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. on aura $\alpha\beta\gamma...,\ \beta\gamma\delta...,\alpha\gamma\delta...,$ etc. pour les différentes valeurs de *u.* Donc, si l'on forme un polynome du produit de ces facteurs simples,

$$u-\alpha\beta\gamma...,\ u-\beta\gamma\delta...,\ u-\alpha\gamma\delta...,\text{ etc.}$$

ce polynome aura la propriété d'être une fonction invariable de $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., indépendamment de l'indéterminée *u;* par conséquent, étant développé, tous ses coefficiens auront encore la même propriété.

Car soit ce polynome

$$u^{\mu}-\mathrm{A}x^{\mu-1}+\mathrm{B}x^{\mu-2}-\mathrm{C}x^{\mu-3}+\text{etc.}\pm\mathrm{V},$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}=\alpha\beta\gamma...+\beta\gamma\delta...+\alpha\gamma\delta...,\text{ etc.},\\
&\mathrm{B}=\alpha\beta\gamma...\times\beta\gamma\delta...+\alpha\gamma\delta......\times\alpha\gamma\delta\\
&\quad+\beta\gamma\delta...\times\alpha\gamma\delta...+\text{etc.},\\
&\qquad\qquad\text{etc.},\\
&\mathrm{V}=\alpha\beta\gamma...\times\beta\gamma\delta...\times\alpha\gamma\delta...,
\end{aligned}$$

où l'on voit que les coefficiens A, B, C, etc. sont en effect des fonctions invariables de $\alpha\beta\gamma,$ etc . Or , on sait que ces sortes de fonctions peuvent toujours être déterminées par des fonctions rationnelles des coefficiens *a, b, c,* etc. *h.*

4. En effet, on peut d'abord déterminer par ces fonctions la somme des puissances d'un même degré des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., comme nous l'avons vu dans la Note VI (n$^{\text{o}}$ 1). Ensuite, si l'on multiplie $\Sigma\alpha^{\lambda}$ somme des puissances α^{λ} par $\Sigma\alpha^{\mu}$, somme des puissances α^{μ}, le produit $\Sigma\alpha^{\lambda}\times\Sigma\alpha^{\mu}$ sera égal à $\Sigma\alpha^{\lambda+\mu}+\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}$; ainsi on aura la somme des termes $\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}$; au moyen de celle des puissances. On trouvera pareillement

$$\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\times\Sigma\gamma^{\lambda}=\Sigma\alpha^{\lambda+v}\beta^{\mu}+\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu+v}+\Sigma\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\gamma^{v};$$

ainsi on aura aussi cette dernière somme en fonctions des sommes des puissances, et ainsi de suite.

Maintenant, il est facile de voir que toute fonction rationnelle et invariable des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. ne peut être formée que d'une ou plusieurs sommes des formes précédentes; elle pourra donc toujours être déterminée en fonctions des coefficiens *a, b, c,* etc.

C'est là un des principes les plus féconda de la théorie des équations. *Newton*, et long-temps avant lui *Albert Girard*, avaient donné la manière de déterminer la somme des puissances des racines d'une équation par des fonctions de ces coefficiens. Voyez dans l'ouvrage *d'Albert* Girard, intitulé *Invention nouvelle en Algèbre*, et imprimé à Amsterdam en 1629, l'exemple second du théorème second. *Euler,* dans les Mémoires de l'Acàdémie de Berlin pour l'année 1748, et *Cramer*, à la fin de son Introduction à l'Analyse des lignes courbes, ont fait voir que l'on pouvait toujours déterminer, par les coefficiens d'une équation, les sommes des produits de ses racines, prises deux à deux; trois à trois, etc., et élevées à différentes puissances; et *Waring* a donné ensuite des formules générales pour trouver ces sortes de fonctions des racines ; mais dans les cas particuliers, il est peut-être plus simple d'employer la méthode indiquée ci-dessus.

5. A l'égard des coefficiens A, B , C, etc. du polynome, on pourra les calculer de la manière suivante.

On commencera par déterminer les sommes des puissances par ces formules

$$\begin{aligned}&\Sigma\alpha=a,\\&\Sigma\alpha^2=a\Sigma\alpha-2b,\\&\Sigma\alpha^3=a\Sigma\alpha^2-b\Sigma\alpha+3c,\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Ensuite on cherchera les termes $n^{iémes}$, des séries

$$\begin{aligned}&\Sigma\alpha=a,\quad \Sigma\alpha\beta=b,\quad \Sigma\alpha\beta\gamma=c,\quad \text{etc.}\\&\Sigma\alpha^2,\quad \Sigma\alpha^2\beta^2=\tfrac{\Sigma\alpha^2\times\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha^4}{2},\quad \Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2=\tfrac{\Sigma\alpha^2\beta^2\times\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha^2\times\Sigma\alpha^4+\Sigma\alpha^6}{3},\ \text{etc.}\\&\Sigma\alpha^3,\quad \Sigma\alpha^3\beta^3=\tfrac{\Sigma\alpha^3\times\Sigma\alpha^3-\Sigma\alpha^6}{2},\quad \Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3=\tfrac{\Sigma\alpha^3\beta^3\times\Sigma\alpha^3-\Sigma\alpha^3\times\Sigma\alpha^6+\Sigma\alpha^6+}{3},\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Ces termes seront les valeurs des sommes $\Sigma\alpha\beta\gamma.....,\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2.....,\Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3.....,$etc.
Enfin on aura

$\mathrm{A} = \Sigma\alpha\beta\gamma.....,$

$\mathrm{B} = \frac{\Sigma\alpha\beta\gamma....-\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2}{2},$

$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{B}\Sigma\alpha\beta\gamma....-\mathrm{A}\Sigma^2\alpha^2\beta^2\gamma^2.....+\Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3.....}{3},$

etc.

Au reste, il est visible qu'on aura d'abord sans calcul les valeurs du premier coefficient A et du dérnier V; car le coefficient A est évidemment égal au coefficient de la puissance x^{m-n} dans le polynome donné $x^m - ax^{m-1} + \text{etc.}$ Quant au coefficient V, il est visble qu'il doit être de la forme $\alpha^\nu\beta^\nu\gamma^\nu\delta^\nu.... = h^\nu$; et, pour déterminer l'exposant *ν*, il suffira de considérer que ce, coefficient doit être le produit de *μ* quantités, dont chacune est le produit de *n* quantités prises parmi les *m* quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., de sorte que ce coefficient sera de la dimension *nμ*; donc il faudra que $m\nu = n\mu$, et par conséquent $\nu = \frac{n\mu}{m}$.
Donc, puisque

$$\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ .....\ (m-n+1)}{1.2.3.............n},$$

ou aura,

$$\nu = \frac{(m-1)(m-2)\ .....\ (m-n+1)}{1.2.3.............(n-1)},$$

et la valeur de V sera *h'*.

Ayant ainsi la valeur du dernier coefficient V du polynome en *u,* on pourra se contenter de calculer directement la première moitié des coefficiens A, B, C, etc. de ce polynome. Car soient T, S, R, etc. les termes qui précèdent le dernier V, il est facile de voir qu'on aura :

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma...} + \frac{1}{\beta\gamma\delta...} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta...} + \text{etc.}$$

Or, si l'on désigne par (*n*) le coefficient de la puissance x^n dans le polynome donné, on aura aussi

$$\frac{(n)}{h} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma...} + \frac{1}{\beta\gamma\delta...} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta...} + \text{etc.}$$

Donc $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}} = \frac{(n)}{h}$; et par conséquent $\mathrm{T} = \frac{(n)\mathrm{V}}{h}$.

Ensuite si l'on désigne par *g, f, e,* etc. les coefficiens du polynome donné, qui précèdent le dernier *h* ; lorsqu'on aura trouvé l'expression de B en *a, b, c,* etc., il n'y aura qu'à y changer *a* en $\frac{g}{h}$, *b* en $\frac{f}{h}$, *c* en $\frac{e}{h}$, etc., pour avoir la valeur de $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{S}}$, et faisant les mêmes changemens dans l'expression de C, on aura lâ valeur de $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{V}}$, et ainsi de suite.

Ayant ainsi formé le polynome en *u,* si on le fait égal à zéro, on aura une équation dont les racines seront $\alpha\beta\gamma...,\ \beta\gamma\delta...,\ \alpha\gamma\delta...,$ etc., et qui servira, par conséquent, à déterminer la valeur de *u.* Il ne restera donc plus qu'à trouver les valeurs de tous les autres coefficiens $p, q, r,$ etc. du polynome diviseur.

6. La manière la plus simple de trouver ces coefficiens , est de faire la division actuelle du polynome $x^m - ax^{m-1} + \text{etc.}$ par le polynome $x^n - px^{n-1} + \text{etc.} \pm u$, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste dans lequel la plus haute puissance de x soit moindre que x^n; alors en égalant à zéro chacun des termes de ce reste, pour qu'il devienne nul indépendamment de l'inconnue $x,$ on aura n équations entre les n coefficiens p, q, etc. $u;$ et l'on pourra, généralement parlant, par ces équations, déterminer les valeurs de p, q, etc. en fonctions rationneles de $u.$ On aurait ensuite l'équation même en $u,$ par la substitution de ces valeurs dans l'équation restante; mais comme on ne voit pas, de cette manière, de quel degré devrait être cette équation finale en u, qu'on pourrait même parvenir à une équation en u d'un degré plus haut qu'elle ne devrait être, ce qui est l'inconvénient ordinaire des méthodes d'élimination, nous avons cru devoir montrer comment on peut trouver cette équation *à priori,* et s'assurer du degré précis auquel elle doit monter.

Par la même raison, nous croyons qu'il est nécessaire d'avoir une méthode directe pour trouver les expressions des coefficiens $p, q,$ etc. en $u,$ et pour être assuré que ces expressions peuvent toujours être rationnelles, excepté les cas particuliers où elles doivent dépendre d'équations du second ou du troisième degré, comme nous l'avons déjà observé dans la Note précédente. Voici donc comment , en supposant l'équation en $u,$ on peut avoir la valeur des coefficiens p, q , etc. en fonctions de $u.$

7. Je considère que la quantité x étant indéterminée, on peut mettre $x - i$ à la place de $x,$ tant dans le polynome donné $x^m - ax^{m-1} + \text{etc.}$, que dans le polynome diviseur $x^n + px^{n-1} + \text{etc.}$, Par cette substitution , le premier de ces polynomes deviendra

$$x^m - a_1x^{m-1} + b_1x^{m-2} - \text{etc.} \pm h_1,$$

où l'on aura

$$\begin{aligned}
&a_1 = a + mi,\\
&b_1 = b + (m-1)ai + \tfrac{m(m-1)}{2}i^2,\\
&c_1 = c + (m-1)bi + \tfrac{(m-1)(m-2)}{2}ai^2 + \tfrac{m(m-1)(m-2)}{2.3}i^3, \text{etc.}\\
&h_1 = h + gi + fi^2 + ei^3 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Et le second polynome deviendra pareillement

$$x^n - p_1x^{m-1} + q_1x^{m-2} - \text{etc.} \pm u_2,$$

en faisant

$p_1 = a + ni,$

$q_1 = q + (n-1)pi + \frac{m(m-1)}{2}i^2,$

$r_1 = r + (n-2)qi + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}pi^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}i^3,$

etc.

$u_1 = u + ti + si^2 + ri^3 + \text{etc.}$

D'où l'on peut conclure que si, dans l'équation en *u,*

$$u^\mu - \mathrm{A}u^{\mu-1} + \mathrm{B}u^{\mu-2} - \text{etc.} \pm \mathrm{V} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens A, B, C, etc. sont des fonctions de *a, b,* c, etc. *h,* on substitue r_espectivement $a_1, b_1, c_1,$ etc. h_1 au lieu de ces quantités, la valeur de *u* deviendra celle de u_1 *,* quelle que soit la valeur de *i* ; de sorte qu'en développant les termes suivant les puissances de *i,* il faudra que la somme de tous les termes multipliés par une même puissance soit nulle; ce qui donnera plusieurs équations, dont chacune servira à déterminer un des coefficiens *t*, *s* , *r,* etc. par les précédens.

8. On pourra même trouver directement ces équations par l'algorithme des fonctions dérivées. En effet, si l'on met partout $\frac{i}{m}$ à la place de *i,* il s'ensuivra des formules précédentes, que *a* devenant $a+i,\ b$ deviendra

$$b + \frac{m-1}{m}ai + \frac{m(m-1)}{2m^2}i^2,$$

c deviendra

$$c + \frac{m-2}{m}bi + \frac{(m-1)(m-2)}{2m^2}ai^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3m^3}i^3, \text{etc.},$$

et enfin *u* deviendra

$$u + \frac{t}{m}i + \frac{s}{m^2}i^2 + \frac{r}{m^3}i^3 + \text{etc.}$$

Donc, si l'on regarde, ce qui est permis , les coefficiens *b, c,* etc., *h* et *u,* comme des fonctions de *a,* et qu'on se rappelle que *a* devenant $a+i$ *,* toute fonction de *a,* comme *u*, devient

$$u + iu' + \frac{i^2}{2}u'' + \frac{i^3}{2.3}u''' + \text{etc.},$$

on pourra supposer

$$b' = \frac{m-1}{m}a,\ b'' = \frac{m(m-1)}{m^2},\ b''' = 0;$$

$$c' = \frac{m-2}{m}b,\ c'' = \frac{(m-1)(m-2)}{m^2}a,$$

$$c''' = \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3},\ c^{iv} = 0;$$

$$d' = \frac{m-3}{m}c,\ d'' = \frac{(m-2)(m-3)}{m^2}b,$$

$$d''' = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{m^3}a,\ d^{iv} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{m^4},$$

$$d^{v} = 0; \text{etc.}$$

$$u' = \frac{t}{m},\ u'' = \frac{2s}{m^2},\ u''' = \frac{2.3r}{m^3},\ \text{etc.},$$

et il n'y aura plus qu'à prendre les fonctions dérivées successives de l'équation en *u,* et y faire les substitutions précédentes.

9. Supposons

$$\mathrm{Z} = u^{\mu} - \mathrm{A}u^{\mu-1} + \mathrm{B}u^{\mu-2} - \mathrm{C}u^{\mu-3} + \text{etc.} \pm \mathrm{V};$$

en sorte que $\mathrm{Z} = 0$ soit l'équation qui détermine la valeur de *u:* cette quantité Z étant regardée comme une fonction de *a,* donnera les équation*s* dérivées
$\mathrm{Z}' = 0,\ \mathrm{Z}'' = 0,\ \mathrm{Z}''' = 0$, etc.
Mais pour pouvoir distinguer dans ces fonctions ce qui est dû en particulier aux variations des quantités *a*, *b, c,* etc. *h* et *u,* nous représenterons en général, à l'imitation de ce qu'on pratique dans le calcul qu'on appelle aux différences partielles, par $\left(\frac{Z'}{a'}\right),\ \left(\frac{Z'}{b'}\right),\ \left(\frac{Z'}{c'}\right)$, etc. les coefficiens des fonctions dérivées $a',\ b',\ c'$, etc. dans l'expression de Z' ; par, $\left(\frac{Z''}{a'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{a'b'}\right),\ \left(\frac{Z''}{b'^2}\right)$, etc., les coefficiens des quantités $a'^2,\ a'b',\ b'^2$, etc., dans l'expression générale Z'', et ainsi de suite, et nous appellerons de même ces fonctions, fonctions dérivées partielles. Lorsque *a* est la variable principale dont les autres sont ou peuvent être censées fonctions, on aura $a' = 1$; mais nous retiendrons la lettre a' sous les lettres $\mathrm{Z}',\ \mathrm{Z}''$, etc. pour représenter en général les coefficiens des termes de $\mathrm{Z}',\ \mathrm{Z}''$, etc. qui contiendraient cette même lettre , si *a* était une fonction quelconque d'une autre variable principale, et pour dénoter par conséquent ce qui est dû en particulier à la variation de *a.*

Cette notation est plus nette et plus expressive que celle que j'ai employée dans la *Théorie des fonctions,* en plaçant les accens différemment, suivant les différentes variables auxquelles ils se rapportent. En la substituant à celle-ci, l'algorithme des fonctions dérivées conservera tous les avantages du calcul différentiel, et aura, de plus, celui de débarrasser les formules de cette multitude de *d* qui les alongent et les défigurent même en quelque façon, et qui rappellent continuellement à l'esprit l'idée fausse des infiniment petits.

10. On aura ainsi, en regardant toutes les quantités *a, b, c,* etc. *h,* et *u,* comme les fonctions quelconques d'une variable primitive,

$$Z' = \left(\frac{Z'}{a'}\right)a' + \left(\frac{Z'}{b'}\right)b' + \left(\frac{Z'}{c'}\right)c' + \left(\frac{Z'}{u'}\right)u',$$

et prenant de nouveau les fonctions dérivées,

$$\begin{aligned}Z'' &= \left(\frac{Z'}{a'}\right)a'' + \left(\frac{Z'}{b'}\right)b'' + \left(\frac{Z'}{c'}\right)c'' + \left(\frac{Z'}{u'}\right)u'' + \text{etc.}\\ &+\left(\frac{Z''}{a'^2}\right)a'^2 + 2\left(\frac{Z''}{a'b'}\right)a'b'' + \left(\frac{Z''}{b'^2}\right)b'^2 + \text{etc.}\\ &+2\left(\frac{Z''}{a'u'}\right)a'u' + 2\left(\frac{Z''}{b'u'}\right)b'u' + 2\left(\frac{Z''}{c'u'}\right)c'u' + \text{etc.}\\ &+\left(\frac{Z''}{u'^2}\right)u'^2,\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Donc, faisant

$$a' = 1,\ a'' = 0,\ \text{etc.},\ b' = \frac{m-1}{m}a,\ b'' = \frac{m(m-1)}{m^2},\ b''' = 0,\ c' = \frac{m-2}{m}b,\ \text{etc.},$$

comme nous l'avons trouvé ci-dessus , on aura les équations $Z' = 0,\ Z'' = 0,\ \text{etc.},$ savoir :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{Z'}{a'}\right) + \left(\frac{Z'}{b'}\right)\frac{m-1}{m}a + \left(\frac{Z'}{c'}\right)\frac{m-2}{m}b + \text{etc.} + \left(\frac{Z'}{u'}\right)\frac{t}{m} = 0,\\ &\left(\frac{Z'}{b'}\right)\frac{m(m-1)}{m^2} + \left(\frac{Z'}{c'}\right)\frac{(m-1)(m-2)}{m^2}a + \text{etc.} + \left(\frac{Z'}{u'}\right)\frac{2s}{m^2} +\\ &+\left(\frac{Z''}{a'^2}\right) + 2\left(\frac{Z''}{a'b'}\right)\frac{m-1}{m} + \left(\frac{Z''}{b'^2}\right)\left(\frac{m-1}{m}a\right)^2 + \text{etc.}\\ &+2\left[\left(\frac{Z''}{a'u'}\right)\frac{1}{m} + \left(\frac{Z''}{b'u'}\right)\frac{m-1}{m^2}a + \left(\frac{Z''}{c'u'}\right)\frac{m-2}{m^2}b + \text{etc.}\right]\\ &+\left(\frac{Z''}{u'^2}\right)\frac{t^2}{m^2} + \text{etc.} = 0,\end{aligned}$$

et ainsi de suite, dans lesquelles les fonctions dérivées partielles $\left(\frac{Z'}{a'}\right),\ \left(\frac{Z'}{b'}\right),\ \text{etc.},\ \left(\frac{Z''}{a'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{a'b'}\right),\ \text{etc.}$ seront des fonctions connues de *a, b, c,* etc. *u.*

La première équation donnera donc la valeur de *t;* la seconde donnera celle de *s*, etc. en fonctions rationnelles de *a, b, c,* etc. *u;* à moins que la fonction partielle $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ ne devienne nulle, auquel cas la première équation ne contiendra plus *t,* ni la seconde *s,* etc. Dans ce cas donc il faudra tirer la valeur de *t* de la seconde équation, dans laquelle *t* monte au second degré; et les équations suivantes donneront alors les valeurs de *s, r,* etc. par des fonctions rationnelles. Si la fonction dérivée $\left(\frac{Z''}{u'^2}\right)$ était aussi nulle, l'équation en *t* nè serait plus que du premier degré, et si la somme des fonctions qui multiplient *t* était nulle en même temps, la quantité *t* disparaîtrait de la seconde équation , et ne pourrait être donnée que par la troisième, où elle monterait au troisième degré, et ainsi de suite.

Or la fonction partielle $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ est égale à

$$\mu u^{\mu-1}-(\mu-1)\mathrm{A}u^{\mu-2}+(\mu-2)\mathrm{B}u^{\mu-3}-\text{etc.},$$

et l'on voit que l'équation $\left(\frac{Z'}{u'}\right)=0$ renferme les conditions de l'égalité des racines de l'équation $\mathrm{Z}=0$. D'où il suit que si cette équation a des racines égales, et qu'on emploie pour la valeur de *u* une des racines égales , en sorte que la fonction $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ devienne nulle en même temps que Z, le coefficient *t* dépendra alors d'une équation particulière du second degré; et par conséquent tous les autres coefficiens du polynome diviseur, dépendront à la fois de la résolution des deux équations en *u* et en *t.* Nous en avons donné ci-dessus (Note précédente, n° 13) la raison métaphysique tirée de l'égalité des racines; mais on en a ici une démonstration analytique rigoureuse.

11. Une conséquence essentielle qui résulte des formules précédentes, c'est que tant que la fonction $\left(\frac{Z'}{u'}\right)$ ne sera pas nulle, tous les coefficiens *t, s, r,* etc. seront données en fonctions rationnelles du coefficient *u;* et que par conséquent cela aura lieu nécessairement lorsque l'équation en *u* n'aura point de racines égales, ou du moins lorsqu'on n'emploiera pour la valeur de *u* que des racines inégales.

Or j'observe qu'on peut toujours faire en sorte que l'équation en *u* n'ait point de racines égales, à moins que le polynome donné n'ait lui-même des facteurs égaux; mais comme on peut éliminer ces facteurs d'avance, on pourra toujours supposer que tous les facteurs de ces polynomes soient inégaux. Cela supposé, si on substitue dans ce polynome $x-\lambda$ à la place de *x,* ce qui changera les coefficiens *a, b, c,* en

$$\begin{aligned}&a+m\lambda\\&b+(m-1)a\lambda+\tfrac{m(m-1)}{2}\lambda^2,\\&\text{etc.,}\end{aligned}$$

les facteurs du nouveau polynome seront $x-\alpha-\lambda,\ x-\beta-\lambda,\ x-\gamma-\lambda,$ etc. c'est-à-dire que les quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. deviendront $\alpha+\lambda,\ \beta+\lambda,\ \gamma+\lambda,$ etc.
Donc les racines de l'équation en *u,* seront tous les produits possibles de *n* quantités, prises parmi les *m* quantités $\alpha+\lambda,\ \beta+\lambda,\ \gamma+\lambda,$ etc.; et il est clair que deux de ces racines ne sauraient devenir égales à moins qu'il n'y ait deux produits égaux de deux ou de plusieurs dimensions, formés de ces différentes quantités. Or il est visible que tant que les quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. seront inégales, on pourra toujours prendre λ de manière

qu'aucune de ces égalités n'ait lieu; car en considérant, par exemple, les deux produits $(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)$ et $(\gamma+\lambda)(\delta+\lambda)$ qui se réduisent à $\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta$ et $\lambda^2+(\gamma+\delta)\lambda+\gamma\delta$, on voit qu'il n'y a qu'une valeur de λ qui puisse les rendre égaux; et que, par conséquent, il y en âura une infinité qui les rendront inégaux, à moins que l'on ait $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ et $\alpha\beta=\gamma\delta$, ce qui emporterait l'égalité de α et β avec γ et δ.

Il en sera de même des produits d'un plus grand nombre de facteurs ; d'où 1'on conclura en général, qu'on peut toujours transformer ainsi le polynome primitif, en augmentant l'indéterminée x d'une quantité quelconque, de manière que l'équation résultante en u n'ait point de racines égales.

12. Nous venons de donner, non-seulement la manière, mais les formules mêmes par lesquelles on pourra toujours trouver un diviseur d'un degré n d'un polynome quelconque du degré m; et nous venons de démontrer par ces formules, que ce diviseur ne déprendra que de la racine d'une seule équation du degré μ, savoir :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots\ (m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n}.$$

Il suffira donc que cette équation ait une racine réelle pour que tout le diviseur soit réel; mais comme il n'y a, en général, que les équations d'un degré impair, ou celles des degrés pairs dont le dernier terme est négatif, où l'on soit assuré de l'existence d'une racine réelle, il reste à voir quelles sont les valeurs de n pour lesquelles ces conditions auront nécessairement lieu.

Quel que soit le nombre m, il est toujours réductible à la forme $2^\rho i$, i étant un nombre impair. Supposons $n=2^\rho$, on aura

$$\mu=\frac{2^\rho i(2^\rho i-1)(2^\rho i-2)\ \ldots\ldots\ (2^\rho i-2^\rho+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2^\rho},$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$\mu=\frac{2^\rho i(2^\rho i-1)(2^\rho i-2)\ \ldots\ldots\ (2^\rho i-2^\rho+1)}{2^\rho(2^\rho-1)(2^\rho-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2^\rho-2^\rho+1)},$$

et divisant le haut et le bas de cette fraction par 2^ρ, ensuite par 2, par 4, etc. on aura

$$\mu=\frac{i(2^\rho i-1)(2^{\rho-1}i-1)\ \ldots\ldots\ (2^\rho i-2^\rho+1)}{(2^\rho-1)(2^{\rho-1}-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2^\rho-2^\rho+1)}.$$

Comme le numérateur et le dénominator ne contiennent plus que des facteurs impairs, et que le nombre μ est, par sa nature, un nombre entier, il s'ensuit qu'il sera nécessairement impair.

Il suit de là que tout polynome du degré $2^{\rho}i$ peut toujours avoir un diviseur réel du degré 2^{ρ}; le polynome restant après la division sera donc aussi réel, et du degré $2^{\rho}i-2^{\rho}$, savoir, $2^{\rho}(i-1)$; or , i étant un nombre impair, $i-1$ sera un nombre pair, qu'on pourra représenter par $2^{\sigma}k$, k étant un nombre impair; le polynome restant sera alors du degré $2^{\rho+\sigma}k$, et aura un diviseur réel du degré $2^{\rho+\sigma}$, et ainsi de suite. Comme de cette manière tout nombre entier peut être décomposé en un certain nombre de puissances croissantes de 2, comme $2^{\rho}+2^{\rho+\sigma}+\text{etc.}$, il s'ensuit que tout polynome d'un degré quelcumque, pourra être décomposé immédiatement en un pareil nombre de polynomes, dont les degrés seront ces mêmes puissances de deux.

13. Il reste donc à considérer les polynomes dont le degré est une simple puissance de 2. Faisons dans la formule générale de μ,

$m=2^{\rho}$, et $n=\frac{m}{2}=2^{\rho-1}$, on aura

$$\mu=\frac{2^{\rho}(2^{\rho}-1)(2^{\rho}-2)\;........\;(2^{\rho}-2^{\rho-1}+1)}{1.\quad 2.\quad 3\;........................2^{\rho-1}}$$
$$=\frac{2^{\rho}(2^{\rho}-1)(2^{\rho}-2)\;................\;(2^{\rho}-2^{\rho-1}+1)}{2^{\rho-1}(2^{\rho-1}-1)(2^{\rho-1}-2)\;..............(2^{\rho-1}-2^{\rho-1}+1)};$$

divisant le haut et le bas de cette fraction par $2^{\rho-1}$, et ensuite par 2, par 4, etc., on aura

$$\mu=\frac{2(2^{\rho}-1)(2^{\rho-1}-1)\;................\;(2^{\rho}-2^{\rho-1}+1)}{(2^{\rho-1}-1)(2^{\rho-2}-1)\;..............(2^{\rho-1}-2^{\rho-1}+1)}.$$

Comme tous les facteurs du numérateur, à l'exception du premier 2, ainsi que tous les facteurs du dénominateur, sont impairs, il s'ensuit que le nombre μ, qui est d'ailleurs entier par sa nature, sera nécessairement de la forme $2i$, i étant un nombre impair. Considérons dans ce cas l'équation en u; puisque le degré du diviseur est la moitié de celui du polynome, les racines de cette équation seront tous les produits qu'on pourra faire en prenant la moitié des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. dont le nombre est supposé pair. Donc, puisque le produit de toutes ces quantités est h, il s'ensuit que si u est un de ces produits partiels, $\frac{h}{u}$ en sera un autre; par conséquent si u est une racine de l'équation dont il s'agit, $\frac{h}{u}$ en sera une aussi. Cette équation devra donc demeurer la même,en y substituant $\frac{h}{u}$ pour u.

Par cette substitution, l'équation

$$u^{\mu}-\mathrm{A}u^{\mu-1}+\mathrm{B}u^{\mu-2}-Cu^{\mu-3}+\text{etc.}-\mathrm{R}u^{3}+\mathrm{S}u^{2}-Tu+\mathrm{V}=0$$

deviendra, après avoir été multipliée par u^{μ} et divisée par V,

$$u^{\mu}-\frac{h\mathrm{T}}{\mathrm{V}}u^{\mu-1}-\frac{h^2\mathrm{S}}{\mathrm{V}}u^{\mu-2}-\frac{h^3\mathrm{R}}{\mathrm{V}}u^{\mu-3}+\text{etc.}-\frac{h^{\mu-3}\mathrm{C}}{\mathrm{Y}}u^3$$
$$+\frac{h^{\mu-2}\mathrm{B}}{\mathrm{V}}u^2-\frac{h^{\mu-1}\mathrm{A}}{\mathrm{V}}u+\frac{h^{\mu}}{\mathrm{V}}=0;$$

et comme ces deux équations doivent être identiques, on aura

$$\mathrm{A}=\frac{h\mathrm{T}}{\mathrm{V}},\ \mathrm{B}=\frac{h^2S}{\mathrm{V}},\ \mathrm{C}=\frac{h^3\mathrm{R}}{\mathrm{V}},\ \text{etc.};$$

mais on a trouvé ci-dessus $\mathrm{V}=h^{\nu}$, ν étant $=\frac{\mu n}{m}=\frac{\mu}{2}$ (à cause de $m=2n$, dans le cas présent), et par conséquent impair; on aura donc

$$\mathrm{T}=\mathrm{A}h^{\nu-1},\ \mathrm{S}=\mathrm{B}h^{\nu-2},\ \mathrm{R}=Ch^{\nu-3},\ \text{etc.};$$

ainsi, en substituant 2ν à la place de μ, et réunissant les termes également éloignés du milieu, l'équation en u deviendra

$$u^{2\nu}+h^{\nu}-\mathrm{A}(u^{2\nu-1}+h^{\nu-1}u)+\mathrm{B}(u^{2\nu-2}+h^{\nu-2}u^2)$$
$$-\ \mathrm{C}(u^{2\nu-3}+h^{\nu-3}u^3)+\text{etc.}=0.$$

14. C'est la forme générale des équations qu'on appelle réciproques, et qui peuvent toujours s'abaisser à un degré moindre de la moitié.

En effet, en divisant l'équation précédente par u^{ν}, elle devient

$$u^{\nu}+\frac{h^{\nu}}{u^{\nu}}-\mathrm{A}\left(u^{\nu-1}+\frac{h^{\nu-1}}{u^{\nu-1}}\right)+\mathrm{B}\left(u^{\nu-2}+\frac{h^{\nu-2}}{u^{\nu-2}}\right)$$
$$-\ \mathrm{C}\left(u^{\nu-3}+\frac{h^{\nu-3}}{u^{\nu-3}}\right)+\text{etc.}=0.$$

Or, si l'on fait $y=u+\frac{h}{u}$, on aura $y^2=u^2+\frac{h^2}{u^2}+2h$, $y^3=u^3+\frac{h^3}{u^3}+3h(u+\frac{h}{u})$, et ainsi de suite; d'où l'on tire

$$u+\frac{h}{u}=y,$$
$$u^2+\frac{h^2}{u^2}=y^2-2h,$$
$$u^3+\frac{h^3}{u^3}=y^3-3hy,$$
$$\text{etc.},$$

et en général

$$u^{\lambda}+\frac{h^{\lambda}}{u^{\lambda}}=y^{\lambda}-\lambda h y^{\lambda-2}+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}h^{2}y^{\lambda-4}$$
$$-\frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{2.3}h^{3}y^{\lambda-6}+\text{etc.}$$
etc.,

Par le moyen de ces substitutions, l'équation en u du degré $2v$, sera transformée en une équation en y du degré v, laquelle sera de la forme

$$y^{v}-(\mathrm{A})y^{v-1}+(\mathrm{B})y^{v-2}-(\mathrm{C})y^{v-3}+\text{etc.}=0,$$

en supposant

$$(\mathrm{A})=\mathrm{A},$$
$$(\mathrm{B})=\mathrm{B}-vh,$$
$$(\mathrm{C})=\mathrm{C}-(v-1)h\mathrm{A},$$
$$(\mathrm{D})=\mathrm{D}-(v-2)h\mathrm{B}+\frac{v(v-3)}{2}h^{2},$$
etc.

Ensuite on aura u en y par l'équation $u^{2}-uy+h=0,$ laquelle donne $u=\frac{y+\sqrt{(y^{2}-4h)}}{2}$.

15. Maintenant on voit qu'il suffit de calcùler directement la moitié des coefficiens A, B, C, etc. de l'équation en *u;* cé qui réduit le calcul à la moitié. On voit de plus que, comme l'exposant μ est, dans le cas présent, un nombre de la forme $2i$, i étant impair, le nombre v, sera impair, et par conséquent l'équation en y aura nécessairement une racine réelle.

Mais pour que u ait une valeur réelle, il ne suffit pas que la valeur de y soit réelle, il faut encore que $y^{2}-4h$ soit une quantité positive. Cela aura lieu nécessairement lorsque h a une valeur négative; ainsi, dans ce cas, le polynome du degré 2^{ρ} est résoluble par deux polynomes réels du degré $2^{\rho-1}$.Mais si h a une valeur positive, il faut voir de plus si l'on peut toujours trouver une valeur réelle de y, telle que $y^{2}>4h$.

16. Soit donc $y^{2}-4h=z$; qu'on substitue dans l'équation précédente en y, $\sqrt{(z^{2}+4h)}$ au lieu de y, on aura, après avoir fait disparaître le radical par l'élvation au carré, et ordonné les termes suivant les puissances de z, une équation en z du mêm degré v, laquelle aura nécessairement une racine réelle positive, si son dernier terme est négatif. Or, puisque v est un nombre impair, le dernier terme sera le product de toutes les racines, pris négativement; ainsi la question est réduite à voir si le produit de toutes les valeurs de z est essentiellement une quantité positive, en supposant que la valeur de h soit positive.

Puisque $z=y^{2}-4h,$ et $y=u+\frac{h}{u},$ on aura

$$z^2 = u^2 + \frac{h^2}{u^2} - 2h = (u - \frac{h}{u})^2.$$

Or u a pour valeurs tous les produits qu'on peut faire en multipliant ensemble une moitié des quantités $\alpha, \beta, \gamma,$ etc., et nous avons déjà vu que les valeurs de $\frac{h}{u}$ sont les produits qu'on peut faire en multipliant ensemble l'autre moitié des mêmes quantités; donc les valeurs de $u - \frac{h}{u}$ seront deux à deux égales et de signes contraires; par conséquent, on aura toutes les valeurs différentes de z, en ne donnant à u que la moitié de ses différentes valeurs; il est évident que le produit de toutes les valeurs de z sera positif, si le produit des valeurs $u - \frac{h}{u}$ peut être exprimé par une fonction rationnelle des coefficiens *a, b, c,* etc., car alors son carré sera nécessairement une quantité positive.

S'il n'y a, par exemple, que quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ toutes les valeurs de u seront $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta$; et les valeurs différentes de $u - \frac{h}{u}$ seront, en ne prenant pouru que les trois premiers produits,

$$\alpha\beta - \gamma\delta,\ \alpha\gamma - \beta\delta,\ \alpha\delta - \beta\gamma;$$

le produit de ces trois quantités étant développé, donne

$$\begin{gathered}\alpha^3\beta\gamma\delta + \alpha\beta^3\gamma\delta + \alpha\beta\gamma^3\delta + \alpha\beta\gamma\delta^3 \\ -\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2\delta^2,\end{gathered}$$

où l'on voit que la partie positive et la partie négative sont chacune une fonction invariable et symétrique des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ et peuvent par conséquent être déterminées en *a, b, c, d,* par les formules données plus haut.

17. Généralisons maintenant ce résultat, et désignons, pour plus de simplicité, par P, Q, R, etc. les différens produits qu'on peut faire avec la moitié des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ en y conservant une même quantité $\alpha,$ et par *p, q, r,* etc. les produits formés par l'autre moitié des mêmes quantités, et que j'appellerai réciproques. Je vais d'abord prouver que les quantités P, Q, R, etc. et leurs réciproques *p, q, r,* etc. renferment toutes les valeurs de *u.* On a vu que ces valeurs sont au nombre de μ; et à cause de $m = 2n$, on a

$$\mu = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ \ldots\ldots\ (n+1)}{1\ .\ 2\ \ .\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n}.$$

D'un autre côté, comme on a supposé que les quantités P, Q, R, etc. contiennent toutes une même quantité $\alpha,$ il est clair que le nombre de ces quantités sera celui de tous les produits qu'on peut faire en ne prenant que $n-1$ quantités sur $2n-1$ quantités; donc ce nombre sera

$$\frac{(2n-1)(2n-2)\ \ldots\ldots(n+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-1)} = \frac{\mu}{2} = \nu.$$

Donc, puisque les quantités P, Q, R, etc. forment la moitié de toutes les valeurs de u, il suffira de prendre ces quantités pour les différentes valeurs de u, et p, q, r, etc. seront les valeurs correspondantes de $\frac{h}{u}$. Ainsi il s'agira de voir si le produit

$$(P-p)(Q-q)(\mathrm{R}-r).....$$

est nécessairement une fonction invariable des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., auquel cas on sera assuré qu'il peut être déterminé rationnellement par les coefficiens $a, b, c,$ etc; D'abord il est évident que toutes les permutations qu'on peut faire des quantités $\beta,\ \gamma,\ \delta,$ etc. entre elles, ne peuvent que faire échanger les produits P, Q, R, etc. entre eux, et leurs réciproques en mêmé temps entre eux; de sorte qu'il ne peut résulter de ces permutations aucun changement dans le produit

$$(P-p)(Q-q)(\mathrm{R}-r).....$$

Considérons ensuite les échanges de α contre chacune des autres quantités $\beta,\ \gamma,\ \delta,$ etc.; il est clair qu'en échangeant α en β, celles des quantités P, Q, R, etc. qui contiennent à la fois α et β, ne souffriront aucun changement; il n'y aura donc à considérer que celles qui ne contiennent point β. Or si P, par exemple, ne contient point β, comme les deux produits P et p contiennent toutes les quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., il s'ensuit que β sera contenu dans p, et ainsi des autres; donc, par l'échange de α en β toute quantité P ou Q, etc. qui ne contiendra point β, ne pourra que devenir une des réciproques p, q, r, etc. qui sont supposées ne point contenir α; ainsi P deviendra par exemple q, et alors Q deviendra nécessairement p; donc $\mathrm{P}-p$ deviendra $q-Q$, et en même temps $Q-q$ deviendra $p-P$. D'où l'on peut conclure en général que, par les échanges de α en $\beta,\ \gamma,$etc., les différens facteurs $P-p,\ Q-q,\ \mathrm{R}-r,$ etc. ne pourront que rester les mêmes, ou s'échanger entre eux, en changeant en même temps de signe.

18. Maintenant, si on cherche le nombre des produits P, Q, R, etc. qui ne changeront pas par l'échange α en β ce nombre sera celui de ces produits où α et β se trouveront ensemble; donc le nombre total des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. étant $2n$, et le nombre de ces quantités dans chaque produit étant n, le nombre des produits qui contiendront à la fois α et β, sera celui des combinaisons qu'on peut faire en prenant $n-2$ choses sur $2n-2$ choses; par conséquent, il sera exprime par

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ ....(n+1)}{1\ .\ 2\ ....\ (n-2)};$$

comparant ce nombre au nombre v donné ci-dessus, il pourra s'exprimer par $\frac{v(n-1)}{2n-1}$.

Or le nombre total des quantités P, Q, R, etc. étant v, si l'on en retranche le nombre $\frac{v(n-1)}{2n-1}$, on aura $\frac{nv}{2n-1}$ pour le nombre des produits P, Q, R, etc. qui, par l'échange de α en β, se changeront dans les réciproques $p, q, r,$ etc.; par conséquent, ce nombre sera aussi celui des facteurs $\mathrm{P}-p,\ \mathrm{Q}-q,\ \mathrm{R}-r,$ etc., qui changeront de signe par ce même échange; donc, tant que n sera un nombre pair, et par conséquent tant que l'exposant

$m = 2n$ sera une puissance de *2* , plus grande que 2 , le nombre dont il s'agit sera nécessairement pair; d'où il suit que le produit total

$$(\mathrm{P}-p)(\mathrm{Q}-q)(\mathrm{R}-r).....$$

ne changera pas par l'échange de α en β *;* il en sera de même des autres échanges de α en $\gamma,\ \delta,$ etc.

Donc enfin, ce produit sera une fonction· invariable des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc.*,* et pourra par conséquent se déterminer par des fonctions rationnelles des coefficiens *a, b, c,* etc. du polynome donné. Donc l'équation en *z* du degré impair *v* aura son dernier terme négatif; par conséquent, elle aura nécessairement une racine réelle positive (n° 3). . En prenant cette valeur positive pour *z,* on aura $\left(u-\frac{h}{u}\right)^2 = z,$ et de là $u-\frac{h}{u}=\sqrt{z}$. Donc , $u^2 - u\sqrt{z} - h = 0,$ et de là $u = \frac{1}{2}\sqrt{z} \pm \sqrt{(\frac{z}{4}+h)},$ quantité nécessairement réelle, puisque nous avons supposé la quantité *h* positive (n° 16).

Donc tout polynome du degré 2^{ρ}*,* tant que *ρ* sera plus grand que l'unité , soit que son dernier terme *h* soit positif ou négatif, pourra se décomposer par les formules que nous venons de donner, en deux polynomes réels du degré $2^{\rho-1}$, et l'on aura ces deux polynomes à la fois, en employant la double valeur de *u.* Donc, en combinant cette conclusion avec celle qu'on n trouvée plus haut pour tout polynome du degré $2^{\rho} i$*,* on en conclura généralément qu'on peut toujours résoudre un polynome quelconque en facteurs réels du premier ou du second degré.

19. En appliquant aux équations la théorie que nous venons de donner sur la décomposition des polynomes, on voit qu'on peut toujours résoudre une équation quelconque en deux autres équations dont les coefficiens seront réels et ne dépendront que de la racine réelle d'une équation de degré impair. Or nous avons vu dans le chapitre I$^{\text{er}}$, qu'on peut tout de suite avoir les limites de cette racine par la simple substitution des nombres naturels 1 , 2 , 3 , etc. ; et qu'ayant les premières limites, il est facile de les resserrer à volonté par des substitutions successives.

Ainsi, lorsque l'équation donnée est numérique, on pourra la résoudre en deux autres équations numériques dont les coefficiens seront aussi exacts qu'on voudra; et résolvant de même chacune de celles-ci en deux autres, on parviendra enfin à des équations du premier ou du second degré, lesquelles donneront par conséquent immédiatement toutes les racines réelles et les racines imaginaires. De là naît une méthode de résoudre les équations numériques, qui est indépendante de la recherche des limites entre racines, et qui, à cet égard, paraît avoir quelque avantage sur la méthode des deux premiers chapitres. Mais d'un autre côté, il faut avouer qu'à l'exception de quelques cas particuliers où la décomposition de l'équation est facile, cette méthode sera impraticable par la multiplicité et la longueur des opérations qu'elle peut demander. Aussi l'objet principal de cette Note est de prouver *à priori* la possibilité de la décomposition des polynomes et des équations en facteurs réels du premier ou du second degré, objet qui n'avait pas encore été rempli d'une manière directe et complète.