NOTE XI.

On formulas for the approximation of the roots of equations.

We have seen, in Note V, that *Newton's* method consists of substituting into the same function the results of the preceding substitutions; hence perhaps we will be able to reduce the general results of these substitutions into a formula.

1. $\mathrm{F}x = 0$ shall be the proposed equation [*i.e.* $\mathrm{F}(x) = 0$ shall be the equation in modern terms for which approximations is sought for a root or zero, though here we shall follow Lagrange's function notation; occasionally a multiplication sign is inserted by Lagrange to avoid confusion with straight multiplication of F by the following value; Lagrange's F thus resembles an operation of some kind on x], and a shall be the first approximation of one of the roots of this equation. Following the method with which it is concerned, we substitute $a + p$ in place of x, and we reject in the expansion all the terms where p rises above the first dimension.

By the known expansion of functions, the equation $\mathrm{F}x = 0$ becomes

$$\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a + \frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.} = 0,$$

and initially it is reduced to $\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a = 0$, from which we determine $p = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}$. Hence a being the first approximation, if we may put $b = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}$, we will have $a + b$ for the second approximation, and that will give in the same manner, on letting $c = -\frac{\mathrm{F}(a+b)}{\mathrm{F}'(a+b)}$, the third approximation $a + b + c$, and thus henceforth ; such that the value of x will be expressed by the series $a + b + c + d + \text{etc.}$

Now, I observe that if b is a very small quantity, the value of $\mathrm{F}(a + b)$ will be very small of the order b^2; for the expansion of $\mathrm{F}(a + b)$ gives $\mathrm{F}a + b\mathrm{F}'a + \frac{b^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.}$; but $b = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}$; hence $\mathrm{F}(a + b) = \frac{b^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.}$; and hence, since $c = -\frac{\mathrm{F}(a+b)}{\mathrm{F}'(a+b)}$,
the value of c will be also of the same order b^2; Likewise, the value of $\mathrm{F}(a + b + c)$ will be of the order c^2, and consequently of the order b^4 ; for

$$\mathrm{F}(a + b + c) = \mathrm{F}(a + b) + c\mathrm{F}'(a + b) + \frac{c^2}{2}\mathrm{F}''(a + b) + \text{etc.};$$

but $c = -\frac{\mathrm{F}(a+b)}{\mathrm{F}'(a+b)}$; thus $\mathrm{F}(a + b + c) = \frac{c^2}{2}F''(a + b) + \text{etc.}$;

then, since $d = -\frac{F(a+b+c)}{F'(a+b+c)}$, the value of d also will be of the order b^4, and hence so forth. From which it follows that if Fa is a very small quantity, the error of the approximations $a+b,\ a+b+c,\ a+b+c+d,$ etc. will be respectively of the order of the powers 2, 4, 8, etc. of Fa.

This procedure is convenient enough for the arithmetical calculation; but if we wished to have an ordered formula following the powers of Fa, it would be required to express all the functions successively, and we would find the series to be :

$$a - \frac{Fa}{F'a} - \frac{(Fa)^2 F''a}{2(F'a)^3} + \frac{(Fa)^3 F'''a}{2.3(F'a)^4} - \frac{(Fa)^3 (F''a)^2}{2(F'a)^5} + \text{etc.}$$

2. We would be able to arrive most simply at this formula, by taking the value of p from the equation

$$Fa + pF'a + \frac{p^2}{2}F''a + \frac{p^3}{2.3}F'''a + \text{etc.} = 0;$$

at first we would have

$$p = -\frac{Fa}{F'a} - \frac{1}{F'a}\left(\frac{p^2}{2}F''a + \frac{p^3}{2.3}F'''a + \text{etc.}\right),$$

and we may substitute successively the first values of their terms of p in the terms which contain $p^2,\ p^3,$etc. [*i.e.* we can repeat the above operation for p^2, p^3, etc.] ; or equally we may assume at once

$$p = A(Fa) + B(Fa)^2 + C(Fa)^3 + \text{etc.},$$

; on substituting and equating to zero the terms associated with the same powers of Fa; which will give the equations necessary for determining the undetermined coefficients A, B, C, etc., we will have

$$AF'a + 1 = 0,$$

$$BF'a + \frac{A^2}{2}F''a = 0,$$

$$CF'a + ABF''a + \frac{A^3}{2.3}F'''a = 0,$$

etc.,

from which we obtain

$$A = -\frac{1}{F'a},$$
$$B = -\frac{F''a}{2(F'a)^3},$$
$$C = -\frac{(F''a)^2}{2(F'a)^3} + \frac{F^{iv}a}{2.3(F'a)^4},$$
etc.,

and the series

$$a + AFa + B(Fa)^2 + C(Fa)^3 + \text{etc.},$$

will be the same as that which has been found above; which proves the correspondence of the two methods.
[In which case the first approximation to the root $Fa + pF'a = 0$ becomes

$p = A(Fa) = -\frac{(Fa)}{F'a}$; hence $A = -\frac{1}{F'a}$, or $AF'a + 1 = 0$.
Meanwhile, the second approximation is $p = A(Fa) + B(Fa)^2$, which is equivalent to the
$Fa + pF'a + \frac{p^2}{2}F''a = 0;\ p = A(Fa) + B(Fa)^2$
$Fa + (A(Fa) + B(Fa)^2)F'a + \frac{1}{2}(A(Fa) + B(Fa)^2)^2 F''a = 0$
$Fa + (A(Fa) + B(Fa)^2)F'a + \frac{1}{2}A^2(Fa)^2 F''a + ... = 0;$
$\cancel{Fa} + \cancel{A(Fa)F'a} + B(Fa)^2 F'a + \frac{1}{2}A^2(Fa)^2 F''a = 0;$
$BF'a + \frac{A^2}{2}F''a = 0,\text{etc.}$]

3. But we can arrive at the same result by another method more direct and more analytic.
The question consists in expressing the value of p in series from the equation $F(a + p) = 0$. I can regard the quantity a as a function of another variable quantity α, and assume that a may become $a + p$ when α will become $\alpha + i$. Hence, as a becomes in general $a + ia' + \frac{i^2}{2}a'' + \frac{i^3}{2.3}a''' + \text{etc.}$, when α becomes $\alpha + i$, we will have

$$p = ia' + \frac{i^2}{2}a'' + \frac{i^3}{2.3}a''' + \text{etc.};$$

as the quantity a is indeterminate, I can assume there such that as $Fa = \alpha$; then $F(a + p)$ will become $\alpha + i$, and the $F(a + p) = 0$ will be $\alpha + i = 0$, which gives at once $i = -\alpha = -Fa$; such that we will have

$$p = -a'Fa + \frac{a''}{2}(Fa)^2 - \frac{a'''}{2.3}(Fa)^3 + \text{etc.},$$

and there will be nothing more to do than to find the values a', a'', a''', etc.

These are the derived functions of a, considered as a function of α; now we have for the determination of α in terms of a, the equation $\mathrm{F}a=\alpha$; thus, if we take the derived functions relative to α, on regarding a as the function of α, and which we designate as has been done previously, by $\mathrm{F}'a,\ \mathrm{F}''a,\ \mathrm{F}'''a$, etc. the derived functions of $\mathrm{F}a$, with regard to a, the derived functions of $\mathrm{F}a$, $\mathrm{F}'a$, etc., relative to α, will become $a'\mathrm{F}'a,\ a'\mathrm{F}''a$, etc., and the equation $\mathrm{F}a=\alpha$ will give at first $a'\mathrm{F}'a=1$, from which we derive

$$a'=\frac{1}{\mathrm{F}'\alpha},$$

and from that, on taking always the derived functions, and substituting this value of a',

$$a''=-\frac{a'\mathrm{F}''a}{(\mathrm{F}'a)^2}=-\frac{\mathrm{F}''a}{(\mathrm{F}'a)^3},$$

$$a'''=-\frac{a'\mathrm{F}'''a}{(\mathrm{F}'a)^3}+\frac{3a'(\mathrm{F}'')^2}{(\mathrm{F}'a)^4}$$

$$=-\frac{\mathrm{F}'''a}{(\mathrm{F}'a)^4}+\frac{3(\mathrm{F}'a)^2}{(\mathrm{F}'a)^5},$$

etc.

Thus we can find successively the values of a', a'', a''', etc., by which we will be able to continue the series as far as we wish

$$a-a'\mathrm{F}a+\frac{a''}{2}(\mathrm{F}a)^2-\frac{a'''}{2.3}(\mathrm{F}a)^3+\text{etc.},$$

which expresses the value of x in the equation $\mathrm{F}x=0$, and we will have the same series which we have found above.

This formula comes from that which *Euler* had given in the second part of his Differential Calculus (chapter IX, art. 234). We see by a Memoir of *Courtivron,* published in the volume of the Academy of Sciences for the year 1744, that *Euler* had already found it by this time, and we can add that to the number of discoveries by which he has enriched Analysis. By the manner in which we have just presented that, it is a natural series in the theory of the expansion of functions.

4. We are now going to compare the preceding results with those which can be drawn from recurring series. Following the method set out in Note VI, in order to have the value of the root p of the equation

$$\mathrm{F}a+p\mathrm{F}'a+\frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a+\frac{p^3}{2.3}\mathrm{F}'''a+\text{etc.}=0;$$

it will be required to expand out the fraction

$$\frac{\mathrm{F}'a+p\mathrm{F}''a+\frac{p^2}{2}\mathrm{F}'''a+\text{etc.}}{\mathrm{F}a+p\mathrm{F}'a+\frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a+\text{etc.}}$$

following the powers of p; and if $\mathrm{T}p^{\mu}$ and $\mathrm{V}p^{\mu+1}$ are two consecutive terms, we will have $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}}$ for the value of p, becoming the more exact the further these terms will be from the beginning of the series.

In the ordinary method, the terms of a recurring series are formed one after another ; but this method, which is very convenient for arithmetical calculations, is not the proper one to give the general term for a function of the coefficients of the equation, and it is required to use other means for that.

5. In order to give to this investigation all the generality for which it is capable, I am going to consider the fractional function

$$\frac{\varphi x}{u-x+fx},$$

in which I assume that fx and φx are some such functions of x,

$$fx=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\text{etc.},$$
$$\varphi x=\mathrm{P}+\mathrm{Q}x+\mathrm{R}x^2+\mathrm{S}x^3+\text{etc.}$$

I represent by

$$(0)+(1)x+(2)x^2+(3)x^3+\text{etc.},$$

the series resulting from the expansion of this function, following the powers of x, and I propose to find the expression of the coefficient (n) of the power x^n.

I begin to expand the function following the powers of fx; I have the series

$$\frac{\varphi x}{u-x}-\frac{\varphi x fx}{(u-x)^2}+\frac{\varphi x f^2x}{(u-x)^3}+\text{etc.},$$

I consider each of these fractions in particular, and I examine the terms multiplied by x^n which are able to result from their expansion.

The fraction $\frac{1}{u-x}$ gives the known series

$$\frac{1}{u}+\frac{x}{u^2}+\frac{x^2}{u^3}+\frac{x^3}{u^4}+\text{etc.},$$

which being multiplied by the series represented by φx, will give the following terms, associated with x^n,

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{u^{n+1}}+\frac{\mathrm{Q}}{u^n}+\frac{\mathrm{R}}{u^{n-1}}+\frac{\mathrm{S}}{u^{n-2}}+\text{etc.}\right)x^n,$$

where it is required to note that, as the powers of u in the denominators go on diminishing, it will be required to stop at the term divided by *u*.

6. Now, if we consider the function φx, which we have divided by x^{n+1}, which next we change there *x* into *u*, and that we retain only the terms divided by *u* or by the powers of *u*, it is easy to see that we will have in this manner the series which multiplies x^n. Thus, the part multiplied by x^n, becoming the function $\frac{\varphi x}{u-x}$, will be able to be represented by $\frac{\varphi u}{u^{n+1}}x^n$, on needing to retain only the terms of $\frac{\varphi u}{u^{n+1}}$ which will have *u* for the denominator.

In the same manner, if we were to look for the part multiplied by x^n, arising from the expansion of the fraction $\frac{\varphi x \times fx}{u-x}$, following the powers of *x*, we would find $\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}x^n$, by keeping in $\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}$ only the terms which may arise from the denominator *u*. The quantity $\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}$ is thus identical to the coefficient of x^n in the expansion of $\frac{\varphi x \times fx}{u-x}$; thus the identity will remain still between the derived functions with respect to *u;* from which it follows that the derived function of $\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}$ which we will denote by $\left(\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}\right)'$, will be equal to the coefficient of x^n in the expansion of the derived function of $\frac{\varphi x \times fx}{u-x}$ with respect to *u.*

Now, as *u* is found here only in the denominator, and the derived function of $\frac{1}{u-x}$ is $-\frac{1}{(u-x)^2}$, we will conclude at once that $\left(\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}\right)' x^n$ will be the part of the expansion of $-\frac{\varphi x \times fx}{(u-x)^2}$ which will be multiplied by x^n, not always needing to be retained in the function $\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}$, and as a consequence also in its derived function $\left(\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}\right)'$, the terms which will have *u* for the denominator.

Likewise we will find that the part multiplied by x^n in the expansion of $\frac{\varphi x \times f^2 x}{u-x}$, following the powers of *x,* will be expressed by $\frac{\varphi x \times f^2 u}{u^{n+1}}$ by retaining only the terms divisible by the powers of *u;* thus the identity still will be maintained with regard to the derived functions with respect to *u;* consequently , the second derived function of

$\frac{\varphi x \times f^2 u}{u^{n+1}}$ with respect to *u*, which we will denote by $\left(\frac{\varphi x \times f^2 u}{u^{n+1}}\right)''$, will still be equal to the associated part of x^n in the expansion of the second derived function of $\frac{\varphi x \times f^2 x}{u-x}$. But the first derived function of $\frac{1}{u-x}$ being $-\frac{1}{(u-x)^2}$, the second will be $\frac{2}{(u-x)^3}$; thus, dividing by 2, or it will be concluded that $\left(\frac{\varphi uf^2 u}{2u^{n+1}}\right)'' x''$ will be the part of the expansion of $\frac{\varphi xf^2 x}{(u-x)^3}$ which will be multiplied by x^n, on only having the need to retain in the value of $\left(\frac{\varphi uf^2 u}{u^{n+1}}\right)''$ the terms divisible by powers of *u*.

We will prove by a similar analysis, that by denoting the third derived function of the function $\frac{\varphi uf^3 u}{2.3u^{n+1}}$ with respect to *u*, by $\left(\frac{\varphi uf^3 u}{2.3u^{n+1}}\right)'''$, and assuming that we may retain in this function only the terms divisible by powers of *u*, the part multiplied by x^n in the expansion of $-\frac{\varphi xf^3 u}{(u-x)^4}$, following the powers of *x*, will be expressed by $\left(\frac{\varphi uf^3 u}{2.3u^{n+1}}\right)''' x^n$; and hence so forth.

Thus, on comparing all these components, we will have the completer expression of the term $(n)x^n$ of the expansion of the quantity $\frac{\varphi x}{u-x+fx}$, following the positive powers of *x*, and we will find

$$(n)=\frac{\varphi u}{u^{n+1}}+\left(\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}\right)'+\left(\frac{\varphi u \times f^2 u}{2u^{n+1}}\right)''+\left(\frac{\varphi u \times f^3 u}{2.3u^{n+1}}\right)'''+\text{etc.}$$

on needing to retain only the terms which will contain the negative powers of *u*.

7. We will note here that again, on taking the successive derived functions with respect to *u*, we will be able to have the expressions of the terms multiplied by x^n in the expansions of $\frac{\varphi x}{(u-x+fx)^2}$, $\frac{\varphi x}{(u-x+fx)^3}$, of $\frac{\varphi x}{(u-x+fx)^4}$, etc. Hence on designating by $(n)'$, $(n)''$, $(n)'''$, etc. these first, second, etc. derived functions of the function of *u* designated by (n), we will have

$$-(n)'x^n,\ (n)''\frac{x^n}{2},\ -(n)'''\frac{x^n}{2.3},\ \text{etc.}$$

for the expressions of the terms in question. And to have the values of $(n)'$, $(n)''$, etc. it will be necessary only to add an expression or two, etc., to the functions

$\frac{\varphi u}{u^{n+1}}$, $\left(\frac{\varphi ufu}{u^{n+1}}\right)'$, etc. of the expressions of (n)

8. Assuming that we desire the general term $(n)x^n$ arising from the expansion of the rational function

$$\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}x}{1-2x\cos\omega+x^2}.$$

At first we will divide the numerator and the denominator by $2\cos\omega$ in order to reduce it to the form $\frac{\varphi x}{u-x+fx}$, and we will have by the comparison with this formula :

$$\varphi x=\frac{\mathrm{P}}{2\cos\omega}+\frac{\mathrm{Q}}{2\cos\omega}x,$$
$$fx=\frac{x^2}{2\cos\omega},\ u=\frac{1}{2\cos\omega}.$$

Thus we will have :

$$\varphi u=\frac{\mathrm{P}}{2\cos\omega}+\frac{\mathrm{Q}}{2\cos\omega}u,$$
$$fu=\frac{u^2}{2\cos\omega},\ \ f^2u=\frac{u^4}{(2\cos\omega)^2},$$
$$f^3u=\frac{u^6}{(2\cos\omega)^3},\ \text{etc.}$$

Thus,

$$\frac{\varphi u}{u^{n+1}}=\frac{\mathrm{P}u^{-n-1}}{2\cos\omega}+\frac{\mathrm{Q}u^{-n}}{2\cos\omega},$$
$$\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}=\frac{\mathrm{P}u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{\mathrm{Q}u^{-n+2}}{(2\cos\omega)^2},$$
$$\frac{\varphi u\times f^2u}{u^{n+1}}=\frac{\mathrm{P}u^{-n+3}}{(2\cos\omega)^3}+\frac{\mathrm{Q}u^{-n+4}}{(2\cos\omega)^3}.$$

On taking the derived functions with respect to u; we will have thus :

$$\left(\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}\right)'=-\frac{(n-1)\mathrm{P}u^{-n}}{(2\cos\omega)^2}-\frac{(n-2)\mathrm{Q}u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2},$$
$$\left(\frac{\varphi u\times f^2u}{2u^{n+1}}\right)''=\frac{(n-3)(n-2)\mathrm{P}u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3}+\frac{(n-4)(n-3)\mathrm{Q}u^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3},$$
etc.

and consequently,

$$(n)=\mathrm{P}\left(\frac{u^{-n-1}}{2\cos\omega}-\frac{(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\frac{u^{-n}}{2\cos\omega}-\frac{(n-2)u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-4)(n-3)u^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right)$$

where there will be nothing further to do than to substitute its value $\frac{1}{2\cos\omega}$ in place of u. Hence we will have:

$$(n)=\mathrm{P}\left(\begin{array}{l}(2\cos\omega)^{n}-(n-1)(2\cos\omega)^{n-2}+\frac{(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4}\\ -\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{2.3}(2\cos\omega)^{n-6}+\text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\begin{array}{l}(2\cos\omega)^{n-1}-(n-2)(2\cos\omega)^{n-3}+\frac{(n-4)(n-3)}{2}(2\cos\omega)^{n-5}\\ -\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{2.3}(2\cos\omega)^{n-7}+\text{etc.}\end{array}\right),$$

where it will suffice not to allow negative powers of $\cos\omega$.

This expression may be reduced to a simpler form, on employing the known formulas of the sines of multiple angles; by this means we will have

$$(n)=\mathrm{P}\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega}+\mathrm{Q}\frac{\sin n\omega}{\sin\omega},$$

as *Euler* has found in the *Introduction to Analysis* ; but the preceding formula has the advantage of being able to be applied easily to fractions of which the denominator is some power.

Indeed, for the fraction

$$\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}x}{(1-2x\cos\omega+x^{2})^{2}},$$

we will have the general term $-(n)'x^{n}$; and on taking the derived function of the expression of (n) in u, we will have :

$$-(n)'=\mathrm{P}\left(\frac{(n+1)u^{-n-2}}{2\cos\omega}-\frac{(n-1)u^{-n-1}}{(2\cos\omega)^{2}}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)u^{-n}}{2(2\cos\omega)^{3}}-\text{etc.}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\frac{nu^{-n-1}}{2\cos\omega}+\frac{(n-2)(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^{2}}+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^{3}}-\text{etc.}\right);$$

and substituting for u its value $\frac{1}{2\cos\omega}$, it will become

$$-(n)'=\mathrm{P}\left(\begin{array}{l}(n+1)(2\cos\omega)^{n+1}-(n-1)n(2\cos\omega)^{n-1}\\ +\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2}(2\cos\omega)^{n-3}-\text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\begin{array}{l}n(2\cos\omega)^{n}-(n-2)(n-1)(2\cos\omega)^{n-2}\\ +\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4}-\text{etc.}\end{array}\right),$$

where it will suffice also to place the series between exclusive negative powers of $\cos\omega$, and hence so forth.

9. We now resume the general expression in *u*, of the coefficient (*n*) of the power x^n in the expansion of the fraction $\frac{\varphi x}{u-x+fx}$; and assuming that the numerator φx shall be $1-f'x$, or more generally, of the form $\psi x(1-f'x)$, that's to say it shall be the product of the derived function of the denominator taken negatively, by a function ψx, which we assume entire and rational. Making the substitution of $\psi u(1-f'u)$ in place of φx, we will have

$$(n)=\frac{\psi u}{u^{n+1}}-\frac{\psi u\times f'u}{u^{n+1}}+\left(\frac{\psi u\times fu}{u^{n+1}}\right)'-\left(\frac{\psi u\times fuf'u}{u^{n+1}}\right)'$$
$$+\left(\frac{\psi u\times f^2u}{2u^{n+1}}\right)''-\left(\frac{\psi u\times f'uf^2u}{2u^{n+1}}\right)''+\text{etc.}$$

Now,

$$\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}fu\right)'=\frac{\psi u}{u^{n+1}}f'u+\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}\right)'fu$$
$$\left(\frac{\psi u}{2u^{n+1}}f^2u\right)'=\frac{\psi u}{u^{n+1}}fu\,f'u+\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}\right)'\frac{f^2u}{2},$$

and consequently,

$$\left(\frac{\psi u\times f^2u}{2u^{n+1}}\right)''=\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}fuf'u\right)'+\left[\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}\right)'\frac{f^2u}{2}\right]'.$$

Thus making these reductions, and assuming to abbreviate

$$\Psi u=\frac{\psi u}{u^{n+1}},$$

we will have :

$$(n)=\Psi u+\Psi' u\times fu+\left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi' u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

This formula will help to find the expression of the general term $(n)x^n$ in the expansion of the fraction

$$\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx},$$

following the powers of *x*, provided that we needed to retain the terms which contained only the negative powers of *u*.

10. Assuming $\psi x = 1$, and consequently $\psi u = 1,\ \Psi u = u^{-n-1}$, we will have the general term $(n)x^n$ of the expansion of the fraction $\frac{1-f'x}{u-x+fx}$. Now, if $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ are the roots of the equation $u - x + fx = 0$, this term will be expressed by

$$\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}\right)x^n,$$

by that which we have shown in Note VI (n° 6). Thus now we will have, on putting *n* in place of $n+1$,

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}+\text{etc.} = u^{-n} + (u^{-n})' fu + \left(\frac{(u^{-n})'\times f^2u}{2}\right)'$$
$$+\left(\frac{(u^{-n})'\times f^3u}{2.3}\right)'' + \text{etc.},$$

on retaining only the negative powers of *u*.

11. For example, let the equation be proposed :

$$a - bx + cx^2 = 0,$$

of which the roots shall be α and β.

We will divide that by *b* in order to reduce that to the form $u - x + fx$, where we will have $fx = \frac{cx^2}{b}$, and the value of *u* will be $\frac{a}{b}$. Then changing *x* into *u* in *fx,* we will have $fu = \frac{cu^2}{b}$ and from that

$$(u^{-n})'\times fu = -\frac{ncu^{-n+1}}{b},\ (u^{-n})'\times f^2u = -\frac{nc^2u^{-n+3}}{b^2},$$
$$(u^{-n})'\times f^3u = -\frac{nc^3u^{-n+5}}{b^3},\ \text{etc.}$$

Thus,

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n} = u^{-n} - \frac{nc}{b}u^{-n+1} + \frac{n(n-3)c^2}{2b^2}u^{-n+2}$$
$$-\frac{n(n-5)(n-4)c^3}{2.3b^3}u^{-n+3} + \text{etc.},$$

where there will be no more to do than to make $u = \frac{a}{b}$. We will have thus :

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n-\frac{nc}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\frac{n(n-3)c^2}{2b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}$$
$$-\frac{n(n-5)(n-4)c^3}{2.3b^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3}+\text{etc.},$$

on continuing this series as long as there will be positive powers of $\frac{a}{b}$.

If we wished to have the sum of the positive powers $\alpha^n+\beta^n$, we would only have to consider the equation $ax^2-bx+c=0$, which results from the preceding equation, on changing x into $\frac{1}{x}$, and the roots of which are consequently $\frac{1}{\alpha}$ and $\frac{1}{\beta}$; which requires only that *a* is changed into *c* and *c* into *a*. Thus we will have :

$$\alpha^n+\beta^n=\left(\frac{b}{c}\right)^n-\frac{na}{b}\left(\frac{b}{c}\right)^{n+1}+\frac{n(n-3)a^2}{2b}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}$$
$$-\frac{n(n-5)(n-4)a^3}{2.3b^3}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-3}+\text{etc.}$$

12. In general, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, etc. being the roots of the equation

$$u-x+fx=0,$$

we will have

$$u-x+fx=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).....$$

k being the coefficient of the highest power of *x*; and taking the derived functions of both sides,

$$-1+f'x=k(x-\beta)(x-\gamma).....+k(x-\alpha)(x-\gamma).....+$$
$$+k(x-\alpha)(x-\beta).....;$$

then on dividing, and changing the signs,

$$\frac{1-f'x}{u-x+fx}=\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\beta-x}+\frac{1}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

and multiplying by ψx,

$$\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx}=\frac{\psi x}{\alpha-x}+\frac{\psi x}{\beta-x}+\frac{\psi x}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

Now, ψx being assumed to be an entire function of *x*, we will be able to divide that by $\alpha-x$, until we come to a remainder without x ; and, in order to find this remainder at once, it has only to be considered that $\psi\alpha-\psi x$ is divisible by $\alpha-x$, the quotient being an entire function of x and α, which we will designate by $\mathrm{F}(x,\alpha)$; and if ψx is a function of degree *m*, it is clear that $\mathrm{F}(x,\alpha)$ will be of degree $m-1$. Hence, since $\psi\alpha-\psi x=\mathrm{F}(x,\alpha)\times(\alpha-x)$, we will have $\psi x=\psi\alpha-\mathrm{F}(x,\alpha)\times(\alpha-x)$; thence

$\frac{\psi x}{\alpha-x}=-\mathrm{F}(x,\alpha)+\frac{\psi\alpha}{\alpha-x}$. We will find likewise $\frac{\psi x}{\beta-x}=-\mathrm{F}(x,\beta)+\frac{\psi\beta}{\beta-x}$, and hence for the others. Thus, on making these substitutions, we will have

$$\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx}=-\mathrm{F}(x,\alpha)-\mathrm{F}(x,\beta)-\mathrm{F}(x,\gamma)-\text{etc.}$$
$$+\frac{\psi\alpha}{\alpha-x}+\frac{\psi\beta}{\beta-x}+\frac{\psi\gamma}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

On resolving these fractions in series, we will have after the first $m-1$ terms, in which the entire parts $-\mathrm{F}(x,\alpha),\ -\mathrm{F}(x,\beta),$ etc. are found, a regular series of which the general term will be

$$\left(\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}\right)x^n;$$

such that we will have, *n* being $>m$,

$$(n)=\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}$$

It is the general term of the recurring series which arises from the fraction $\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx}$, expressed by the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. of the equation $u-x+fx=0$.

On comparing this expression with the general expression of (*n*) in terms of *u* found above, and for greater simplicity putting *n* in place of $n+1$, we will have

$$\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}$$
$$=\Psi u+\Psi'u\times fu+\left(\frac{\Psi'u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi'u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.};$$

where $\Psi u=\frac{\psi u}{u^n}$, and where we must retain only the terms which will contain negative powers of *u*.

13. Now assuming that the exponent *n* shall be infinitely large, such that the term $(n)x^{n-1}$, to which it corresponds in the recurring series shall be taken a very great distance from the origin, then we will be able to regard the function $\Psi u=\frac{\psi u}{u^n}$, as containing only negative powers of *u*, and likewise all the functions $\Psi'u\times fu,\ \Psi'u\times f^2u,$ etc., as only containing negative powers of *u;* at least this supposition will be all the more exact, as the number *n* will be so great. According to this hypothesis, there will be no term to reject in the expression of (*n*), and we will be able to regard the series

$$\Psi u+\Psi' u\times fu+\left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi' u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

as going to infinity without any interruption.

13. Now, I observe that any series of this form, in which Ψu and fu are some functions of *u,* has this remarkable property, that if we multiply that by another similar series, in which in place of the function Ψu, it may have some other function Πu, the product will be still a similar infinite series, but in which there will be $\Psi u\times \Pi u$ in place of Ψu. Indeed, if we multiply together the two series

$$\Psi u+\Psi' u\times fu+\left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi' u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

$$\Pi u+\Pi' u\times fu+\left(\frac{\Pi' u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Pi' u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

we will have

$$\begin{aligned}&\Psi u\times \Pi u\\&+(\Psi u\times \Pi' u+\Psi' u\times \Pi u)\,fu+\Psi u\left(\frac{\Pi' u\times f^2u}{2}\right)'+\Psi' u\times \Pi' u\times f^2u\\&+\Pi u\left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)',\text{etc.}\end{aligned}$$

Now,

$$\Psi u\times \Pi' u+\Pi u\times \Psi' u=(\Psi u\times \Pi u)',$$

$$\left(\frac{\Pi' u\times f^2u}{2}\right)'=\tfrac{1}{2}\Pi''\times f^2u+\Pi' u\times fuf'u,$$

$$\left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)'=\tfrac{1}{2}\Psi''\times f^2u+\Psi' u\times fuf'u;$$

thus the series becomes

$$\begin{aligned}&\Psi u\times \Pi u+(\Psi u\times \Pi u)'\,fu\\&+\tfrac{1}{2}(\Psi u\times \Pi'' u+2\Psi' u\times \Pi' u+\Pi u\times \Psi'' u)\,f^2u\\&+(\Psi u\times \Pi u)'\,fuf'u+\text{etc.}\end{aligned}$$

namely,

$$\Psi u\times \Pi u+(\Psi u\times \Pi u)'\,fu+\left(\frac{(\Psi u\times \Pi u)'\,f^2u}{2}\right)'+\text{etc.}$$

And we will find the same thing on doing the multiplication further, and on reassembling the terms which contain the same of dimensions of *fu*.

Thus in general, if we denote the series which contains the function Ψu by (Ψu), and likewise by (Πu) the series which contains Πu, the function *fu* remaining the same in the two series, it results that from what we have just found, that we will have

$$(\Psi u)\times(\Pi u)=(\Psi u\times\Pi u);$$

and as this property occurs whatever the functions Ψu and Πu shall be, if we make $\Psi u\times\Pi u=\Phi u;$ we will have $(\Psi u)\times(\Pi u)=(\Phi u);$ thus $(\Pi u)=\frac{(\Phi u)}{(\Psi u)}$; but $\Pi u=\frac{\Phi u}{\Psi u}$; thus $\frac{(\Phi u)}{(\Psi u)}=\left(\frac{\Phi u}{\Psi u}\right)$, that's to say [the series which will be] the quotient of two similar series, which contain two different functions, Ψu and Πu, also will be [that of] a similar function which will contain the quotient of the same functions.

15. Thus, if we take the two numbers n and $n+r$ very large, the difference *r* of which shall be some positive or negative number, the quotient of the quantity

$$\frac{\psi\alpha}{\alpha^n}+\frac{\psi\beta}{\beta^n}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^n}+\text{etc.},$$

divided by the quantity

$$\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+r}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+r}}+\text{etc.},$$

shall be expressed by the infinite series

$$\Psi u+\Psi' u\times fu+\left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)'+\text{etc.},$$

on making $\Psi u=\frac{\psi u}{u^n}$ divided by $\frac{\psi u}{u^{n+r}}$, that is : $\Psi u=u.$

On the one hand, *n* being an infinitely large number, it is seen that the two above quantities are reduced to their first terms $\frac{\psi\alpha}{\alpha^n}$ and $\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}}$, α being the smallest of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. Thus the quotient of the first of these quantities, divided by the second, will itself be reduced to α^r; from which this most remarkable theorem arises :

If α is the smallest root of the equation

$$u + x + fx = 0,$$

we will have :

$$\alpha^r = u^r + (u^r)' \times fu + \left(\frac{(u^r)' \times f^2 u}{2}\right)' + \left(\frac{(u^r)' \times f^3 u}{2.3}\right)'' + \text{etc.},$$

r being some positive or negative number.

Thus we have by this formula, not only the root α, but also any power of the same root.

16. Now if we make $r = n$, n being some finite number, and we compare this formula with that we have given previously for the value of $\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n} + \text{etc.}$, we will draw from that the following most unusual conclusion.

If, in the formula

$$u^{-n} + (u^{-n})' \times fu + \left(\frac{(u^{-n})' \times f^2 u}{2}\right)' + \left(\frac{(u^{-n})' \times f^3 u}{2.3}\right)'' + \text{etc.},$$

we keep only the terms which are negative powers of u , *it gives the value of the sum of the powers* $-n$ *of all the roots* α, β, γ, etc., *and if we keep all the terms, it will only give the same power of the smallest root* α.

17. Hence, as we have found already previously of the roots α and β of the equation $cx^2 - bx + a = 0$, the formula

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n - \frac{nc}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)c^3}{2b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} - \frac{n(n-5)(n-4)c^3}{2.3b^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} + \text{etc.},$$

in continuing the series only as long as there are positive powers of $\frac{b}{a}$; if we continue this same series to infinity without any interruption, we will then have the value of the term $\frac{1}{\alpha^n}$ alone, on taking the smallest of the two roots α and β for α; and likewise we will be able to make n positive or negative, as it pleases.

The two roots of the equation $cx^2 - bx + a = 0$, being α and β, these of the equation $ax^2 - bx + c = 0$, will be $\frac{1}{\alpha}$ and $\frac{1}{\beta}$, and we will have

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a},$$

α being assumed the smaller of the two roots. Hence the series

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n - \frac{nc}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)c^3}{2b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} - \text{etc.},$$

on retaining only the positive powers of $\frac{b}{a}$, that's to say the negative powers *a*, will be equal to

$$\frac{\left[b+\sqrt{(b^2-4ac)}\right]^n + \left[b-\sqrt{(b^2-4ac)}\right]^n}{(2a)^n},$$

n being some whole number; and if we continue the series to infinity, it will become equal to

$$\left(\frac{b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^n,$$

n being some whole positive or negative number.

The first part of this proposition is easy to verify by the simple expansion of the n^{th} powers, since the root $\sqrt{(b^2-4ac)}$ of the same disappears; and besides it is known already by *de Moivre's* theorem.

In order to verify the other part, it is required to reduce the root of the same into a series. Hence on making, for example, $n=1$, the series becomes

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{2ac^3}{2b^3} - \frac{3.4a^2c^3}{2.3b^5} - \text{etc.},$$

which can be put into this form :

$$\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2c}{b} - \frac{1\cdot1}{2\cdot4}\frac{8ac^3}{b^3} - \frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\frac{.32a^2c^3}{b^5} - \text{etc.},$$

Now this series is evidently equal to $\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$.

18. The indefinite series shall be :

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.} = 0 \;;$$

we will make, in the general formula of the above series,

$$fu = \frac{cu^2 - du^3 + eu^4 - fu^5 + \text{etc.}}{b},$$

from which we derive:

$$f^2u = \frac{c^2u^4 - 2cdu^5 + (d^2 + 2ce)u^6 + \text{etc.}}{b^2},$$

$$f^3u = \frac{c^3u^6 - 3cdu^7 + \text{etc.}}{b^3},$$

$$f^4u = \frac{c^4u^8 - \text{etc.}}{b^4},$$

etc.

Now $(u^r)' = ru^{r-1}$; hence,

$$(u^r)' \times fu = r\frac{cu^{r+1} - du^{r+2} + eu^{r+3} - fu^{r+4} + \text{etc.}}{b},$$

$$(u^r)' \times f^2u = r\frac{c^2u^{r+3} - 2cdu^{r+4} + (d^2 + 2ce)u^{r+5} + \text{etc.}}{b^2},$$

$$(u^r)' \times f^3u = r\frac{c^3u^{r+5} - 3cdu^{r+5} + \text{etc.}}{b^3},$$

$$(u^r)' \times f^4u = r\frac{c^4u^{r+7} + \text{etc.}}{b^4}.$$

Taking these derived functions, and substituting into the formula to which it refers, we will have, after having made $u = \frac{a}{b}$, and changing α into x,

$$x^r = \frac{a^r}{br^2} + r\left(\frac{a^{r+1}c}{b^{r+2}} - \frac{a^{r+2}d}{b^{r+3}} + \frac{a^{r+3}e}{b^{r+4}} - \frac{a^{r+4}e}{b^{r+5}} + \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{r}{2}\left(\frac{(r+3)a^{r+2}c^2}{b^{r+4}} - \frac{(r+4)a^{r+3}\times 2cd}{b^{r+5}} + \frac{(r+5)a^{r+4}(a^2+2ce)}{b^{r+6}} + \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{r}{2.3}\left(\frac{(r+5)(r+4)(a^{r+3}c^3)}{b^{r+6}} - \frac{(r+6)(r+5)(a^{r+4}\times 3cd)}{b^{r+7}} + \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{r}{2.3.4}\left(\frac{(r+7)(r+6)(r+5)(a^{r+4}c^4)}{b^{r+8}} + \text{etc.}\right),$$

etc.

$$x=\frac{a}{b}+\frac{a^2c}{b^3}-\frac{a^3d}{b^4}+\frac{a^4e}{b^5}-\frac{a^5f}{b^6}+\text{etc.}$$
$$+\frac{2a^3c^2}{b^5}-\frac{5a^4cd}{b^6}+\frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7}+\text{etc.}$$
$$+\frac{5a^4c^3}{b^7}-\frac{21a^5cd}{b^8}+\text{etc.}$$
$$+\frac{14a^5c^4}{b^9}+\text{etc.},$$
etc.

It is *Newton's* known formula, for the inversion of series, which one could find only by the method of indeterminates. The preceding analysis, at the same time that it gives the law of this formula and the means of continuing that as far as one would wish, lets us see that the value of x which it expresses is the smaller of the roots of the proposed equation.

20. If we wish to apply the preceding formula to the determination of the value of p in the equation

$$\mathrm{F}a+p\mathrm{F}'a+\tfrac{p^2}{2}\mathrm{F}''a+\tfrac{p^3}{2.3}\mathrm{F}'''a+\text{etc.}=0,$$

which we have considered at the start of this Note, we will have to do no more than to substitute $\mathrm{F}a,\ -\mathrm{F}'a,\ \tfrac{1}{2}\mathrm{F}''a,\ -\tfrac{1}{2.3}\mathrm{F}'''a,$ etc., in place of *a, b, c, d,* etc., and p in place of *x;* hence we will have

$$p=-\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}-\frac{(\mathrm{F}a)^2\mathrm{F}''a}{2(\mathrm{F}'a)^3}+\frac{(\mathrm{F}a)^3\mathrm{F}'''a}{2.3(\mathrm{F}'a)^4}-\frac{(\mathrm{F}a)^3(\mathrm{F}''a)^2}{2(\mathrm{F}'a)^5}+\text{etc.},$$

which gives the same series that we have found by two different methods.
Again we are able to generalize the formula of the theorem given higher up. Indeed, since α is one of the values of x, this theorem can be presented thus.

21. The equation $x=u+fx$ gives in general

$$x^r=u^r+(u^r)'\times fu+\left(\frac{(u^r)'\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{(u^r)'\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

Now , Fx shall be some given function of x; we can assume that reduced to the form $\mathrm{M}x^r+\mathrm{N}x^s+\mathrm{P}x^t+\text{etc.}$; hence, for the value of Fx, there will only have to be added together the values of $x^r,\ x^t,\ x^s,$ etc., multiplied respectively by M, N, P, etc.; by this means we will have a formula in which, in place of u^r, it will have $\mathrm{M}u^r+\mathrm{N}u^s+\mathrm{P}u^t+\text{etc.}$, that's to say F$u$, and consequently F$'u$ in place of $(u^r)'$.

From that at last results this new theorem, remarkable both by it generality as by its simplicity.

The equation $x = u + fx$ *gives*

$$Fx = \mathrm{F}u + \mathrm{F}'u \times fu + \tfrac{1}{2}(\mathrm{F}'u \times f^2u)' + \tfrac{1}{2.3}(\mathrm{F}'u \times f^3u)'' + \text{etc.},$$

where the symbols f *and* F' *can designate any functions.*

Indeed, this theorem, presented in this manner, is independent of the consideration of the roots, and is no more than the result of the transformation of the functions, that we can verify by the successive elimination of x or of *u*. I gave this theorem first in the *Mémoires de 1'Académie de Berlin*, for the year I768; I had arrived at that by an analysis a little more similar to the preceding, but less rigorous. Several mathematicians since then have occupied themselves in demonstrating that by the later expansion of functions ; but concerning that *Laplace* has given a direct and elegant demonstration, in the *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, for the year 1777, based on the differential calculus ; it is this demonstration that I have carried across in the *Théorie des fonctions* (n$^{\circ}$ 99).

It is appropriate to note that on making $u = 0$, the equation $x = u + fx$ becomes $x = fx$, which can represent some equation in *x*; and we will have the value of some function F*x*, on making $u = 0$ in the series

$$\mathrm{F}u + \mathrm{F}'u \times fu + \tfrac{1}{2}(\mathrm{F}'u \times f^2u)' + \tfrac{1}{2.3}(\mathrm{F}'u \times f^3u)'' + \text{etc.},$$

after the expansion of the functions; which is much more simple.

22. Before finishing this Note, I am going to see how the method of n$^{\circ}$ 13, for resolving by approximation the equation $\mathrm{F}(a+p) = 0,$ can be applied to the simultaneous resolution of several equations in several unknowns.

Assuming that we may have two equations in the two unknowns x and *y* which we designate in general by $\mathrm{F}(x, y) = 0,$ and $f(x, y) = 0.$
Assuming at the same time that we know already two approximate values of *a* and *b,* of *x* and *y*; such that on making $x = a + p,\ y = b + q,$ the quantities p and *q* may have very small values. It will be a question of expressing these two equations

$$\mathrm{F}(a+p,\ b+q) = 0,\ \ f(a+p,\ b+q) = 0.$$

Following in the spirit of *Newton's* method, we may expand these two functions in series, the two equations will become thus

$$\mathrm{F}(a,b) + \mathrm{M}p + \mathrm{N}q + \text{etc.} = 0,$$
$$f(a,b) + mp + nq + \text{etc.} = 0,$$

where we have taken for the first approximation

$$p=\frac{\mathrm{N}f(a,b)-n\mathrm{F}(a,b)}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},$$
$$q=\frac{\mathrm{M}f(a,b)-m\mathrm{F}(a,b)}{\mathrm{N}m-\mathrm{M}n}.$$

Thus *a* and *b* being the first approximate values of x and *y,* $a+p,\ b+q$ will be the closest approximations we will be able to substitute in place of a and *b* in the functions *p* and *q;* and designating the new values of p and *q* by $p_1,\ q_1$, we will have $a+p+p_1$, and $b+q+q_1$ for the values of *x* and *y* still more close, and thus so on.

This procedure has been given by *Thomas Simpson,* in his *Select Exercises in Mathematics,* and it is convenient enough for arithmetical calculations ; but it would be difficult to derive the expressions of *x* and *y* from that in ordered series following the powers of the quantities $\mathrm{F}(a,b)$, and $f(a,b)$, which express the errors arising from the first assumptions, and especially to have the law of these series; here is how we can arrive at this.

We will consider the quantities *a* and *b* as some functions of the two other quantities α and β, etc., such that these quantities becoming $\alpha+i$ and $\beta+o$, the quantities *a* and *b* become $a+p$ and $b+q$ *;* and we will assume that these functions shall be such that $\mathrm{F}(a,b)=\alpha$ and $f(a,b)=\beta$; which will give, on putting $\alpha+i$ and $\beta+o$ in place of α and β ,

$$\mathrm{F}(a+p,\ b+q)=\alpha+i,\ \ f(a+p,\ b+q)=\beta+o;$$

such that the proposed equations will become then $\alpha+i=0$ and $\beta+o=0$; from which we obtain :

$$i=-\alpha=-\mathrm{F}(a,b)\ \text{ and }\ o=-\beta=-f(a,b).$$

Now, on adopting the notation of derived functions, indicated in the preceding Note (n° 9), the functions *a* and *b* of the quantities α and β , when these quantities become $\alpha+i$ and $\beta+o$, expand into the series

$$a+\left(\frac{a'}{\alpha'}\right)i+\left(\frac{a'}{\beta'}\right)o+\left(\frac{a''}{\alpha'^2}\right)\frac{i^2}{2}+\left(\frac{a''}{\alpha'\beta'}\right)io+\left(\frac{a''}{\beta'^2}\right)\frac{o^2}{2}+\text{etc.}$$
$$b+\left(\frac{b'}{\alpha'}\right)i+\left(\frac{b'}{\beta'}\right)o+\left(\frac{b''}{\alpha'^2}\right)\frac{i^2}{2}+\left(\frac{b''}{\alpha'\beta'}\right)io+\left(\frac{b''}{\beta'^2}\right)\frac{o^2}{2}+\text{etc.}$$

Thus, substituting $-\mathrm{F}(a,b)$ for i and $-f(a,b)$ for *o*, we will have

$$p=-\left(\tfrac{a'}{\alpha'}\right)\mathrm{F}(a,b)-\left(\tfrac{a'}{\beta'}\right)f(a,b)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a''}{\alpha'^2}\right)\overline{\mathrm{F}(a,b)}^2+\left(\tfrac{a''}{\alpha'\beta'}\right)\mathrm{F}(a,b)\times f(a,b)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a''}{\beta'^2}\right)\overline{f(a,b)}^2+\text{etc.},$$
$$q=-\left(\tfrac{b'}{\alpha'}\right)\mathrm{F}(a,b)-\left(\tfrac{b'}{\beta'}\right)f(a,b)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b''}{\alpha'^2}\right)\overline{\mathrm{F}(a,b)}^2+\left(\tfrac{b''}{\alpha'\beta'}\right)\mathrm{F}(a,b)\times f(a,b)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b''}{\beta'^2}\right)\overline{f(a,b)}^2+\text{etc.},$$

where it will be necessary only to substitute the values of the partial functions $(\frac{a'}{\alpha'}),\ (\frac{a'}{\beta'}),\ (\frac{b'}{\alpha'}),$ etc. from which we will derive the equations

$$\mathrm{F}(a,b)=\alpha,\ \text{et}\ \ f(a,b)=\beta,$$

on taking successively the derived functions relative to α and β, and substituting the values found already as you go in the following.
Hence we will have at first

$$\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{\alpha'}\right)=1,\quad \left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{\beta'}\right)=0,$$
$$\left(\tfrac{f'(a,b)}{\alpha'}\right)=0,\quad \left(\tfrac{f'(a,b)}{\beta'}\right)=1.$$

But in general we have, relative to a and b,

$$\mathrm{F}'(a,b)=\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{a'}\right)a'+\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{b'}\right)b',$$
$$f'(a,b)=\left(\tfrac{f'(a,b)}{a'}\right)a'+\left(\tfrac{f'(a,b)}{b'}\right)b';$$

thus , on regarding a and b as functions of α and β, we will have relative to each of these quantities in particular,

$$\left(\frac{F'(a,b)}{\alpha'}\right)=\left(\frac{F'(a,b)}{a'}\right)\left(\frac{a'}{\alpha'}\right)+\left(\frac{F'(a,b)}{b'}\right)\left(\frac{b'}{\alpha'}\right)=1,$$
$$\left(\frac{F'(a,b)}{\beta'}\right)=\left(\frac{F'(a,b)}{a'}\right)\left(\frac{a'}{\beta'}\right)+\left(\frac{F'(a,b)}{b'}\right)\left(\frac{b'}{\beta'}\right)=0,$$
$$\left(\frac{f'(a,b)}{\alpha'}\right)=\left(\frac{f'(a,b)}{a'}\right)\left(\frac{a'}{\alpha'}\right)+\left(\frac{f'(a,b)}{b'}\right)\left(\frac{b'}{\alpha'}\right)=0,$$
$$\left(\frac{f'(a,b)}{\beta'}\right)=\left(\frac{f'(a,b)}{a'}\right)\left(\frac{a'}{\beta'}\right)+\left(\frac{f'(a,b)}{b'}\right)\left(\frac{b'}{\beta'}\right)=1;$$

from which we will derive the values of the four partial derivative functions of the first order $\left(\frac{a'}{\alpha'}\right),\ \left(\frac{a'}{\beta'}\right),\ \left(\frac{b'}{\alpha'}\right),\ \left(\frac{b'}{\beta'}\right),$ expressed by the partial functions $\left(\frac{F'(a,b)}{a'}\right),\ \left(\frac{F'(a,b)}{b'}\right),\ \left(\frac{f'(a,b)}{a'}\right),\ \left(\frac{f'(a,b)}{b'}\right),$ which are easy to deduce from the given functions $F(a,b),\ f(a,b),$ on taking their derived functions, relatively to a and b in particular.

Then, on taking again the derived functions of the values $\left(\frac{a'}{\alpha'}\right),\ \left(\frac{a'}{\beta'}\right),$ etc. relative to α and β we will have the values of $\left(\frac{a''}{\alpha'^2}\right),\ \left(\frac{a''}{\alpha'\beta'}\right),$ etc., etc. and hence so forth.

If to abbreviate we make

$$\left(\frac{F'(a,b)}{a'}\right)=M,\ \left(\frac{F'(a,b)}{b'}\right)=N,$$
$$\left(\frac{f'(a,b)}{a'}\right)=m,\ \left(\frac{f'(a,b)}{b'}\right)=n,$$

we will have

$$\left(\frac{a'}{\alpha'}\right)=\frac{n}{Mn-Nm},\ \left(\frac{a'}{\beta'}\right)=-\frac{N}{Mn-Nm},$$
$$\left(\frac{b'}{\alpha'}\right)=-\frac{m}{Mn-Nm},\ \left(\frac{b'}{\beta'}\right)=-\frac{M}{Mn-Nm},$$

and the first values of p and q will be

$$p=\frac{nF(a,b)}{Mn-Nm}+\frac{Nf(a,b)}{Mn-Nm},$$
$$q=\frac{mF(a,b)}{Mn-Nm}-\frac{Mf(a,b)}{Mn-Nm}.$$

These first values of p and q coincide with these which we have found above ; but the formulas which we have just given for the general expressions of p and q have the advantage of presenting all the series expanded, and easy to continue as far as wished.

NOTE XI.

Sur les formules à approximation pour les racines des équations.

Nous avons vu, dans la Note V, que la méthode de *Newton* consisté à substituer successivelment dans une même fonction les résultats des substitutions précédentes; ainsi l'on peut réduire en formule le résultat général de ces substitutions.

1. Soit $\mathrm{F}x = 0$ l'équation proposée, et a la premiere valeur approchée d'une des racines de cette équation. Suivant la méthode dont il s'agit, on substitue $a + p$ à la place de x, et l'on rejette dans le développement tous les termes où p monte au-dessus de la première dimension.

Par le développement connu des fonctions, l'équation $\mathrm{F}x = 0$ devient

$$\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a + \frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.} = 0,$$

et se réduit d'abord à $\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a = 0$, d'où l'on tire $p = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}$. Ainsi a étant une première approximation, si l'on fait $b = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}$, on aura $a + b$ pour seconde approximation, et celle-ci donnera de la même manière, en laisant $c = -\frac{\mathrm{F}(a+b)}{\mathrm{F}'(a+b)}$, la troisième approximation $a + b + c$, et ainsi de suite; de sorte que la valeur de x sera exprimée par la série $a + b + c + d + \text{etc.}$

Or, je remarque que si b est une quantité très petite, la valeur de $\mathrm{F}(a + b)$ sera très petite de l'ordre de b^2; car le développement de $\mathrm{F}(a + b)$ donne $\mathrm{F}a + b\mathrm{F}'a + \frac{b^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.}$; mais $b = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}$; donc $\mathrm{F}(a + b) = \frac{b^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.}$; donc, puisque $c = -\frac{\mathrm{F}(a+b)}{\mathrm{F}'(a+b)}$, la valeur de c sera aussi du même ordre b^2; De même, la valeur de $\mathrm{F}(a + b + c)$ sera de l'ordre de c^2, et par conséquent de l'ordre b^4 ; car

$$\mathrm{F}\left(a + b + c\right) = \mathrm{F}\left(a + b\right) + c\mathrm{F}'\left(a + b\right) + \mathrm{F}''(a + b) + \text{etc.};$$

mais $c = -\frac{\mathrm{F}(a+b)}{\mathrm{F}'(a+b)}$; donc $\mathrm{F}(a + b + c) = \frac{c^2}{2}F''(a + b) + \text{etc.}$;

donc, puisque $d = -\frac{\mathrm{F}(a+b+c)}{\mathrm{F}'(a+b+c)}$, la valeur de d sera aussi de l'ordre de b^4, et ainsi de suite.

D'où il suit que si $\mathrm{F}a$ est une quantité très petite, l'erreur des approximations $a + b,\ a + b + c,\ a + b + c + d,$ etc. sera respectivement de l'ordre des puissances 2, 4, 8, etc. de Fa.

Ce procédé est assez commode pour le calcul arithmétique; mais si l'on voulait avoir une formule ordonnée suivant les puissances de Fa, il faudrait développer successivement toutes les fonctions, et l'on trouverait la série

$$a-\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}-\frac{(\mathrm{F}a)^2\mathrm{F}''a}{2(\mathrm{F}'a)^3}+\frac{(\mathrm{F}a)^3\mathrm{F}'''a}{2.3(\mathrm{F}'a)^4}-\frac{(\mathrm{F}a)^3(\mathrm{F}''a)^2}{2(\mathrm{F}'a)^5}+\text{etc.}$$

2. On pourrait parvenir plus simplement à cette formule, en tirant la valeur de p de l'équation

$$\mathrm{F}a+p\mathrm{F}'a+\frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a+\frac{p^3}{2.3}\mathrm{F}'''a+\text{etc.}=0;$$

on aurait d'abord

$$p=-\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a}-\frac{1}{\mathrm{F}'a}\left(\frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a+\frac{p^3}{2.3}\mathrm{F}'''a+\text{etc.}\right),$$

et l'on substituerait successivement les premières valeurs de p dans les termes qui contiennent $p^2,\ p^3,$etc.; ou bien on supposerait tout de suite

$$p=\mathrm{AF}a+\mathrm{B}(\mathrm{F}a)^2+\mathrm{C}(\mathrm{F}a)^3+\text{etc.},$$

et égalant à zéro les termes affectés des mêmes puissances de Fa; ce qui donnera les équations nécessaires pour la détermination des coefficiens indéterminés A, B, C, etc., on aurait

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AF}'a+1=0,\\
&\mathrm{BF}'a+\frac{\mathrm{A}^2}{2}\mathrm{F}''a=0,\\
&\mathrm{CF}'a+\mathrm{ABF}''a+\frac{\mathrm{A}^3}{2.3}\mathrm{F}'''a=0,\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}=-\frac{1}{\mathrm{F}'a},\\
&\mathrm{B}=-\frac{\mathrm{F}''a}{2(\mathrm{F}'a)^3},\\
&\mathrm{C}=-\frac{(\mathrm{F}''a)^2}{2(\mathrm{F}'a)^3}+\frac{\mathrm{F}^{iv}a}{2.3(\mathrm{F}'a)^4},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

et la série

$$a + \mathrm{AF}a + \mathrm{B}(\mathrm{F}a)^2 + \mathrm{C}(\mathrm{F}a)^3 + \text{etc.},$$

sera la même que celle qu'on a trouvée ci-dessus; ce qui prouve la correspondance des deux méthodes.

3. Mais on peut arriver à ce même résultat par une autre méthode plus directe et plus analytique.

La question consiste à tirer de l'équation $\mathrm{F}(a+p)=0$, la valeur de p en série. Je puis regarder la quantité a comme une fonction d'une autre quantité α, et supposer que a devienne $a+p$ lorsque α deviendra $\alpha+i$. Ainsi, comme a devient en général $a + ia' + \frac{i^2}{2}a'' + \frac{i^3}{2.3}a''' + \text{etc.}$, lorsque α devient $\alpha+i$, on aura

$$p = ia' + \frac{i^2}{2}a'' + \frac{i^3}{2.3}a''' + \text{etc.};$$

comme la quantité a est indéterminée, je puis la supposer telle que l'on sit $\mathrm{F}a=\alpha$; alors $\mathrm{F}(a+p)$ deviendra $\alpha+i$, et l'équation $\mathrm{F}(a+p)=0$ deviendra $\alpha+i=0$, laquelle donne sur-le-champ $i=-\alpha=-\mathrm{F}a$; de sorte qu'on aura

$$p = -a'\mathrm{F}a + \frac{a''}{2}(\mathrm{F}a)^2 - \frac{a'''}{2.3}(\mathrm{F}a)^3 + \text{etc.},$$

et il n'y aura plus qu'à trouver les valeurs de a', a'', a''', etc.

Ces valeurs sont les fonctions dérivées de a, considérées comme fonction de α ; or on a pour la détermination de α en a, l'équation $\mathrm{F}a=\alpha$; donc, si l'on prend les fonctions dérivées relativement à α, en regardant a comme la fonction de α, et qu'on désigne, comme on l'a fait plus haut, par $\mathrm{F}'a$, $\mathrm{F}''a$, $\mathrm{F}'''a$, etc. les fonctions dérivées de $\mathrm{F}a$, par rapport à a, les fonctions dérivées de $\mathrm{F}a$, $\mathrm{F}'a$, etc., relativement à α, seront $a'\mathrm{F}'a$, $a'\mathrm{F}''a$, etc., et l'équation $\mathrm{F}a=\alpha$ donnera d'abord $a'\mathrm{F}'a=1$, d'où l'on tire

$$a' = \frac{1}{\mathrm{F}'a},$$

et de là, en prenant toujours les fonctions dérivées, et substituant cette valeur de a',

$$a'' = -\frac{a'\mathrm{F}''a}{(\mathrm{F}'a)^2} = -\frac{\mathrm{F}''a}{(\mathrm{F}'a)^3},$$

$$a''' = -\frac{a'\mathrm{F}'''a}{(\mathrm{F}'a)^3} + \frac{3a'(\mathrm{F}'')^2}{(\mathrm{F}'a)^4}$$

$$= -\frac{\mathrm{F}'''a}{(\mathrm{F}'a)^4} + \frac{3(\mathrm{F}'a)^2}{(\mathrm{F}'a)^5},$$

etc.

On peut trouver ainsi successivement les valeurs de a', a'', a''', etc., par lesquelles on pourra continuer aussi loin qu'on voudra la série

$$a - a'\mathrm{F}a + \frac{a''}{2}(\mathrm{F}a)^2 - \frac{a'''}{2.3}(\mathrm{F}a)^3 + \text{etc.},$$

qui exprime la valeur de x dans l'équation $\mathrm{F}x = 0$, et l'on aura la même série qu'on a trouvée ci-dessus.

Cette formule revient à celle qu'*Euler* a donnée dans la seconde partie du Calcul différentiel (chapitre IX, art. 234). On voit par un Mémoire de *Courtivron,* imprimé dans le volume de l'Académie des Sciences, pour l'année 1744, qu' *Euler* l'avait déjà trouvée à cette époque, et l'on peut la compter au nombre des découvertes dont il a enrichi l'Analyse. Par la manière dont nous venons de la présenter, elle est une suite naturelle de la théorie du développement des fonctions.

4. Nous allons maintenant rapprocher les résultats précédens de ceux qu'on peut tirer des séries récurrentes. Suivant la méthode exposée dans la Note VI, pour avoir la valeur de la racine p de l'équation

$$\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a + \frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a + \frac{p^3}{2.3}\mathrm{F}'''a + \text{etc.} = 0;$$

il faudrait développer la fraction

$$\frac{\mathrm{F}'a + p\mathrm{F}''a + \frac{p^2}{2}\mathrm{F}'''a + \text{etc.}}{\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a + \frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a + \text{etc.}}$$

suivant les puissances de p; et si $\mathrm{T}p^{\mu}$ et $\mathrm{V}p^{\mu+1}$ sont deux termes consécutifs, on aura $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}}$ pour la valeur de p, d'autant plus exacte que ces termes seront plus éloignés du commencement de la série.

Dans la méthode ordinaire, les termes d'une série récurrente se forment les uns d'après les autres; mais cette manière, qui est très commode pour le calcul arithmétique, n'est pas propre à donner le terme général en fonction des coefficiens de l'équation , et il faut , pour cela, employer d'autres moyens.

5. Pour donner à cette recherche toute la généralité dont elle est susceptible, je vais considérer la fonction fractionnaire

$$\frac{\varphi x}{u - x + fx},$$

dans laquelle je suppose que fx et φx sont des fonctions de x telles, que

$$fx = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \text{etc.},$$
$$\varphi x = \mathrm{P} + \mathrm{Q}x + \mathrm{R}x^2 + \mathrm{S}x^3 + \text{etc.}$$

Je représente par

$$(0)+(1)x+(2)x^2+(3)x^3+\text{etc.},$$

la série résultante du développement de cette fonction , suivant les puissances de x, et je me propose de trouver l'expression du coefficient (n) de la puissance x^n.

Je commence par développer la fonction suivant les puissances de fx; j'ai la série

$$\frac{\varphi x}{u-x}-\frac{\varphi x fx}{(u-x)^2}+\frac{\varphi x f^2 x}{(u-x)^3}+\text{etc.},$$

je considère chacune de ces fractions en particulier, et je cherche les termes multipliés par x^n qui peuvent résulter de leur développement.

La fraction $\frac{1}{u-x}$ donne la série connue

$$\frac{1}{u}+\frac{x}{u^2}+\frac{x^2}{u^3}+\frac{x^3}{u^4}+\text{etc.},$$

laquelle étant multipliée par la série représentée par φx, donnera les termes suivans, affectés de x^n,

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{u^{n+1}}+\frac{\mathrm{Q}}{u^n}+\frac{\mathrm{R}}{u^{n-1}}+\frac{\mathrm{S}}{u^{n-2}}+\text{etc.}\right)x^n,$$

où il faut remarquer que ; comme les puissances de u dans les dénominateurs vont en diminuant, il faudra s'arrêter au terme divisé par u.

6. Or, si l'on considère la fonction φx, qu'on la divise par x^{n+1}, qu'ensuite on y change x en u, et qu'on ne retienne que les termes divisés par u ou par des puissances de u, il est aisé de voir qu'on aura de cette manière la série qui multiplie x^n. Donc, la partie multipliée par x^n, provenant de la fonction $\frac{\varphi x}{u-x}$, pourra être représentée par $\frac{\varphi u}{u^{n+1}}x^n$, en ayant soin de ne retenir que les termes de $\frac{\varphi u}{u^{n+1}}$ qui auront u au dénominateur.

De la même manière, si l'ou cherchait la partie multipliée par x^n, provenant du développement de la fraction $\frac{\varphi x\times fx}{u-x}$, suivant les puissances de x, on trouvcrait $\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}x^n$, en ne retenant dans $\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}$ que les termes qui auraient une puissance de u au dénominateur. La quantité $\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}$ est donc identique avec le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{\varphi x\times fx}{u-x}$; donc l'identité subsistera encore entre les fonctions dérivées relativement à u; d'où il suit que la fonction dérivée de $\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}$ que nous denoterons par

$\left(\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}\right)'$, sera égale au coefficient de x^n dans le développement de la fonction dérivée de $\frac{\varphi x\times fx}{u-x}$ relativement à *u*.

Or, comme *u* ne se trouve ici que dans le dénominateur, et que la fonction dérivée de $\frac{1}{u-x}$ est $-\frac{1}{(u-x)^2}$, on en conclura tout de suite que $\left(\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}\right)' x^n$ sera la partie du développement de $-\frac{\varphi x\times fx}{(u-x)^2}$ qui sera multipliée par x^n, en ayant toujours soin de ne retenir dans la fonction $\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}$, ct par conséquent aussi dans sa fonction dérivée $\left(\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}\right)'$, que les termes qui auront *u* au dénominateur.

On trouvera pareillement que la partie multipliée par x^n dans le developpement de $\frac{\varphi x\times f^2x}{u-x}$, suivant les puissances de *x*, sera exprimée par $\frac{\varphi x\times f^2u}{u^{n+1}}$ en ne retenant que les termes divisés par des puissances de *u;* donc l'identité subsistera encore à l'égard des fonctions dérivées relativement à *u;* par conséquent , la seconde fonction dérivée de $\frac{\varphi x\times f^2u}{u^{n+1}}$ relatevement à *u,* que nous dénoterons par $\left(\frac{\varphi x\times f^2u}{u^{n+1}}\right)''$, sera encore égale à la partie affectée de x^n dans le développement de la seconde fonction dérivée de $\frac{\varphi x\times f^2x}{u-x}$. Mais la première fonction dérivée de $\frac{1}{u-x}$ étant $-\frac{1}{(u-x)^2}$, la seconde sera $\frac{2}{(u-x)^3}$; donc, divisant par 2, ou en conclura que $\left(\frac{\varphi uf^2u}{2u^{n+1}}\right)'' x''$ sera la partie du développement de $\frac{\varphi xf^2x}{(u-x)^3}$ qui sera multipliée par x^n, en ayant soin de ne retenir dans la valeur de $\left(\frac{\varphi uf^2u}{u^{n+1}}\right)''$ que les termes divisés par des puissances de *u*.

On prouvera par une analyse semblable, qu'en dénotant par $\left(\frac{\varphi uf^3u}{2.3u^{n+1}}\right)'''$ la troisième fonction dérivée, relativement à *u* de la fonction $\frac{\varphi uf^3u}{2.3u^{n+1}}$, et supposant qu'on ne retienne dans cette fonction que les termes divisés par des puissances de *u,* la partie multipliée par x^n dans le développement de $-\frac{\varphi xf^3u}{(u-x)^4}$, suivant les puissances de *x*, sera exprimée par $\left(\frac{\varphi uf^3u}{2.3u^{n+1}}\right)''' x^n$; et ainsi de suite.

Donc, en rassemblant toutes ces parties, on aura l'expression complète du terme $(n)x^n$ du développement de la quantité $\frac{\varphi x}{u-x+fx}$, suivant les puissances positives de *x,* et l'on trouvera

$$(n)=\frac{\varphi u}{u^{n+1}}+\left(\frac{\varphi u\times fu}{u^{n+1}}\right)'+\left(\frac{\varphi u\times f^2u}{2u^{n+1}}\right)''+\left(\frac{\varphi u\times f^3u}{2.3u^{n+1}}\right)'''+\text{etc.}$$

en ayant soin de ne retenir que les termes qui contiendront des puissances négatives de *u.*

7. Nous remarquerons ici qu'en prenant encore successivement les fonctions dérivées suivant *u,* on pourra avoir les expressions des termes multipliés par x^n dans les développemens de $\frac{\varphi x}{(u-x+fx)^2}$, de $\frac{\varphi x}{(u-x+fx)^3}$, de $\frac{\varphi x}{(u-x+fx)^4}$, etc. Ainsi en désignant par $(n)',\ (n)'',\ (n)''',$ etc. les fonctions dérivées, première, seconde, etc; de la fonction de *u* désignée par (*n*), on aura

$$-(n)'x^n,\ (n)''\frac{x^n}{2},\ -(n)'''\frac{x^n}{2.3},\ \text{etc.}$$

pour les expressions des termes dont il s'agit. Et pour avoir les valeurs de $(n)',\ (n)'',$ etc. il n'y aura qu'à ajouter un trait, deux traits, etc. aux fonctions $\frac{\varphi u}{u^{n+1}}$, $\left(\frac{\varphi ufu}{u^{n+1}}\right)'$, etc.

8. Supposons qu'on demande le terme général $(n)x^n$ de la série provenant du développement de la fraction rationnelle

$$\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}x}{1-2x\cos\omega+x^2}.$$

On divisera d'abord le numératenr et le dénominateur par $2\cos\omega$ pour le réduire à la forme $\frac{\varphi x}{u-x+fx}$, et l'on aura par la comparaison avec cette formule

$$\varphi x=\frac{\mathrm{P}}{2\cos\omega}+\frac{\mathrm{Q}}{2\cos\omega}x,$$
$$fx=\frac{x^2}{2\cos\omega},\ u=\frac{1}{2\cos\omega}.$$

Donc on aura

$$\varphi u=\frac{\mathrm{P}}{2\cos\omega}+\frac{\mathrm{Q}}{2\cos\omega}u,$$
$$fu=\frac{u^2}{2\cos\omega},\ f^2u=\frac{u^4}{(2\cos\omega)^2},$$
$$f^3u=\frac{u^6}{(2\cos\omega)^3},\ \text{etc.}$$

Donc

$$\frac{\varphi u}{u^{n+1}} = \frac{\mathrm{P}u^{-n-1}}{2\cos\omega} + \frac{\mathrm{Q}u^{-n}}{2\cos\omega},$$

$$\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}} = \frac{\mathrm{P}u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{\mathrm{Q}u^{-n+2}}{(2\cos\omega)^2},$$

$$\frac{\varphi u \times f^2u}{u^{n+1}} = \frac{\mathrm{P}u^{-n+3}}{(2\cos\omega)^3} + \frac{\mathrm{Q}u^{-n+4}}{(2\cos\omega)^3}.$$

En prenant les fonctions dérivées par rapport à *u;* on aura donc

$$\left(\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}\right)' = -\frac{(n-1)\mathrm{P}u^{-n}}{(2\cos\omega)^2} - \frac{(n-2)\mathrm{Q}u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2},$$

$$\left(\frac{\varphi u \times f^2u}{2u^{n+1}}\right)'' = \frac{(n-3)(n-2)\mathrm{P}u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3} + \frac{(n-4)(n-3)\mathrm{Q}u^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3},$$

etc.

et par conséquent

$$(n) = \mathrm{P}\left(\frac{u^{-n-1}}{2\cos\omega} - \frac{(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3} - \text{etc.}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\frac{u^{-n}}{2\cos\omega} - \frac{(n-2)u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{(n-4)(n-3)u^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3} - \text{etc.}\right)$$

où il n'y a plus qu'à substituer au lieu de *u* sa valeur $\frac{1}{2\cos\omega}$.
On aura ainsi

$$(n) = \mathrm{P}\left(\begin{array}{l}(2\cos\omega)^n - (n-1)(2\cos\omega)^{n-2} + \frac{(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4} \\ -\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{2.3}(2\cos\omega)^{n-6} + \text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\begin{array}{l}(2\cos\omega)^{n-1} - (n-2)(2\cos\omega)^{n-3} + \frac{(n-4)(n-3)}{2}(2\cos\omega)^{n-5} \\ -\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{2.3}(2\cos\omega)^{n-7} + \text{etc.}\end{array}\right),$$

où il suffira de ne point admettre de puissances négatives de $\cos\omega$.

Cette expression peut se réduire à une forme plus simple, en employant les formules connues des sinus des angles multiples; on aura par ce moyen

$$(n) = \mathrm{P}\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega} + \mathrm{Q}\frac{\sin n\omega}{\sin\omega},$$

comme *Euler* l'a trouvé dans l'Introduction à l'Analyse; mais la formule précédente a l'avantage de pouvoir s'appliquer facilement aux fractions dont le dénominateur est une puissance quelconque.

En effet, pour la fraction

$$\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}x}{(1-2x\cos\omega+x^2)^2},$$

on aura le terme général $-(n)'x^n$; et en prenant la fonction dérivée de l'expression de (n) en u, on aura

$$-(n)'=\mathrm{P}\left(\frac{(n+1)u^{-n-2}}{2\cos\omega}-\frac{(n-1)u^{-n-1}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)u^{-n}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\frac{nu^{-n-1}}{2\cos\omega}+\frac{(n-2)(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right);$$

et substituant pour u sa valeur $\frac{1}{2\cos\omega}$, il viendra

$$-(n)'=\mathrm{P}\left(\begin{array}{l}(n+1)(2\cos\omega)^{n+1}-(n-1)n(2\cos\omega)^{n-1}\\ +\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2}(2\cos\omega)^{n-3}-\text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+\mathrm{Q}\left(\begin{array}{l}n(2\cos\omega)^{n}-(n-2)(n-1)(2\cos\omega)^{n-2}\\ +\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4}-\text{etc.}\end{array}\right),$$

où il suffira aussi de pousser les séries jusqu'aux puissances négatives de $\cos\omega$ exclusivement, et ainsi de suite.

9. Reprenons maintenant l'expression générale en u, du coefficient (n) de la puissance x^n dans le développement de la fraction $\frac{\varphi x}{u-x+fx}$; et supposons que le numérateur φx soit $1-f'x$, ou plus généralement, de la forme $\psi x(1-f'x)$, c'est-à-dire qu'il soit le produit de la fonction dérivée du dénominateur prise négativement, par une fonction ψx, qu'on suppose entière et rationnelle. Faisant la substitution de $\psi u(1-f'u)$ au lieu de φx, on aura

$$(n)=\frac{\psi u}{u^{n+1}}-\frac{\psi u\times f'u}{u^{n+1}}+\left(\frac{\psi u\times fu}{u^{n+1}}\right)'-\left(\frac{\psi u\times fuf'u}{u^{n+1}}\right)'$$
$$+\left(\frac{\psi u\times f^2u}{2u^{n+1}}\right)''-\left(\frac{\psi u\times f'uf^2u}{2u^{n+1}}\right)''+\text{etc.}$$

Or

$$\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}fu\right)'=\frac{\psi u}{u^{n+1}}f'u+\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}\right)'fu$$

$$\left(\frac{\psi u}{2u^{n+1}}f^2u\right)'=\frac{\psi u}{u^{n+1}}fu\,f'u+\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}\right)'\frac{f^2u}{2},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{\psi u\times f^2u}{2u^{n+1}}\right)'' = \left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}fuf'u\right)' + \left[\left(\frac{\psi u}{u^{n+1}}\right)'\frac{f^2u}{2}\right]'.$$

Donc faisant ces réductions, et supposant pour abréger

$$\Psi u = \frac{\psi u}{u^{n+1}},$$

on aura

$$(n) = \Psi u + \Psi' u\times fu + \left(\frac{\Psi' u\times f^2u}{2}\right)' + \left(\frac{\Psi' u\times f^3u}{2.3}\right)'' + \text{etc.}$$

Cette formule servira à trouver l'expression du terme général $(n)x^n$ dans le développement de la fraction

$$\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx},$$

suivant les puissances de *x*, pourvu qu'on ait soin de ne retenir que les termes qui contiennent des puissances négatives de *u*.

10. Supposons $\psi x = 1$, et par conséquent $\psi u = 1$, $\Psi u = u^{-n-1}$, on aura le terme général $(n)x^n$ du développement de la fraction $\frac{1-f'x}{u-x+fx}$. Or, si $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont les racines de l'equation $u-x+fx=0$, ce terme sera exprimé par

$$\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \text{etc.}\right)x^n,$$

par ce qu'on a démontré dans la Note VI (n° 6). On aura donc, en mettant *n* à la place de $n+1$,

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n} + \text{etc.} = u^{-n} + (u^{-n})' fu + \left(\frac{(u^{-n})'\times f^2u}{2}\right)'$$
$$+ \left(\frac{(u^{-n})'\times f^3u}{2.3}\right)'' + \text{etc.},$$

en ne conservant que les puissances négatives de *u*.

11. Soit proposée, par exemple, l'équation

$$a-bx+cx^2=0,$$

dont les racines soient α et β.

On la divisera par b pour la réduire à la forme $u-x+fx$, on aura $fx=\frac{cx^2}{b}$, et la valeur de u sera $\frac{a}{b}$. Donc changeant x en u dans fx, on aura $fu=\frac{cu^2}{b}$ et de là

$$(u^{-n})'\times fu=-\tfrac{ncu^{-n+1}}{b},\ (u^{-n})'\times f^2u=-\tfrac{nc^2u^{-n+3}}{b^2},$$
$$(u^{-n})'\times f^3u=-\tfrac{nc^3u^{-n+5}}{b^3},\ \text{etc.}$$

Donc,

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}=u^{-n}-\frac{nc}{b}u^{-n+1}+\frac{n(n-3)c^2}{2b^2}u^{-n+2}$$
$$-\frac{n(n-5)(n-4)c^3}{2.3b^3}u^{-n+3}+\text{etc.},$$

où il n'y aura plus qu'a' faire $u=\frac{a}{b}$. On aura ainsi

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n-\frac{nc}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\frac{n(n-3)c^2}{2b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}$$
$$-\frac{n(n-5)(n-4)c^3}{2.3b^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3}+\text{etc.},$$

en continuant cette série tant qu'il y aura de puissances positives de $\frac{a}{b}$.

Si l'on voulait avoir la somme des puissances positives $\alpha^n+\beta^n$, il n'y aurait qu'à considérer l' équation $ax^2-bx+c=0$, qui résulte de l'équation précédente, en changeant x en $\frac{1}{x}$, et dont les racines sont par conséquent $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$; ce qui ne demande que de changer a en c et c en a. On aura donc ainsi

$$\alpha^n+\beta^n=(\tfrac{b}{c})^n-\tfrac{na}{b}(\tfrac{b}{c})^{n+1}+\tfrac{n(n-3)a^2}{2b}(\tfrac{b}{c})^{n-2}$$
$$-\tfrac{n(n-5)(n-4)a^3}{2.3b^3}(\tfrac{b}{c})^{n-3}+\text{etc.}$$

12. En général, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, etc. étant les racines de l'équation

$$u-x+fx=0,$$

on aura

$$u-x+fx=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).....$$

k étant le coefficient de la plus haute puissance de *x;* et prenant les fonctions dérivées de part et d'autre,

$$-1+f'x=k(x-\beta)(x-\gamma).....+k(x-\alpha)(x-\gamma).....+$$
$$+k(x-\alpha)(x-\beta).....;$$

donc divisant et changeant les signes,

$$\frac{1-f'x}{u-x+fx}=\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\beta-x}+\frac{1}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

et multipliant par ψx,

$$\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx}=\frac{\psi x}{\alpha-x}+\frac{\psi x}{\beta-x}+\frac{\psi x}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

Or ψx étant supposé une fonction entière de *x,* on pourra la diviser par $\alpha-x$, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste sans x ; et, pour trouver tout de suite ce reste, il n'y a qu'à considérer que $\psi\alpha-\psi x$ est divisible par $\alpha-x$, le quotient étant une fonction entière de *x* et *α,* que nous désignerons par $\mathrm{F}(x,\alpha)$*;* et si ψx est une fonction du degré *m,* il est clair que $\mathrm{F}(x,\alpha)$ sera du degré $m-1$. Donc, puisque $\psi\alpha-\psi x=\mathrm{F}(x,\alpha)\times(\alpha-x)$, on aura $\psi x=\psi\alpha-\mathrm{F}(x,\alpha)\times(\alpha-x)$; donc $\frac{\psi x}{\alpha-x}=-\mathrm{F}(x,\alpha)+\frac{\psi\alpha}{\alpha-x}$. On trouvera de même $\frac{\psi x}{\beta-x}=-\mathrm{F}(x,\beta)+\frac{\psi\beta}{\beta-x}$, et ainsi des autres.
Donc, en faisant ces substitutions, on aura

$$\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx}=-\mathrm{F}(x,\alpha)-\mathrm{F}(x,\beta)-\mathrm{F}(x,\gamma)-\text{etc.}$$
$$+\frac{\psi\alpha}{\alpha-x}+\frac{\psi\beta}{\beta-x}+\frac{\psi\gamma}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

En résolvant ces fractions en séries, on aura après les $m-1$ premiers termes, dans lesquels se fondent les parties entières $-\mathrm{F}(x,\alpha),-\mathrm{F}(x,\beta),\text{etc.}$ une suite régulière dont le terme général sera

$$\left(\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}\right)x^n;$$

de sorte qu'on aura, *n* étant > *m,*

$$(n)=\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}$$

C'est le terme général de la suite récurrente qui résulte de la fraction $\frac{\psi x(1-f'x)}{u-x+fx}$, exprimé par les racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. de l'équation $u-x+fx=0$.

En comparant cette expression avec l'expression générale de (n) en u trouvée ci-dessus, et mettant pour plus de simplicité n à la place de $n+1$, on aura

$$\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+1}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+1}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+1}}+\text{etc.}$$
$$=\Psi u+\Psi'u\times fu+\left(\frac{\Psi'u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi'u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.};$$

où $\Psi u=\frac{\psi u}{u^n}$, et où l'on ne doit retenir que les termes qui contiendront des puissances négatives de u.

13. Supposons maintenant que l'exposant n soit infiniment grand, en sorte que le terme $(n)x^{n-1}$, auquel il répond dans la série récurrente, soit pris à une très grande distance de l'origine, on pourra alors regarder la fonction $\Psi u=\frac{\psi u}{u^n}$, comme ne contenant que des puissances négatives de u, et même toutes les fonctions $\Psi'u\times fu$, $\Psi'u\times f^2u$, etc., comme ne contenant aussi que des puissances négatives de u; du moins cette supposition sera d'autant plus exacte, que le nombre n sera plus grand. Dans cette hypothèse, il n'y aura aucun terme à rejeter dans l'expression de (n), et l'on pourra regarder la série

$$\Psi u+\Psi'u\times fu+\left(\frac{\Psi'u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi'u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

comme allant à l'infini sans aucune interruption.

13. Or, j'observe que toute série de cette forme, dans laquelle Ψu et fu sont des fonctions quelconques de u, a cette propriété remarquable, que si on la multiplie par une autre série semblable, dans laquelle, à la place de là fonction Ψu, il y ait une autre fonction quelconque Πu, le produit sera encore une série semblable, mais dans laquelle il y aura $\Psi u\times\Pi u$ à la place de Ψu. En effet, si l'on multiplie ensemble les deux séries

$$\Psi u+\Psi'u\times fu+\left(\frac{\Psi'u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Psi'u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$
$$\Pi u+\Pi'u\times fu+\left(\frac{\Pi'u\times f^2u}{2}\right)'+\left(\frac{\Pi'u\times f^3u}{2.3}\right)''+\text{etc.}$$

on a

$$\Psi u \times \Pi u$$
$$+(\Psi u \times \Pi' u + \Psi' u \times \Pi u)\, fu + \Psi u\left(\frac{\Pi' u \times f^2 u}{2}\right)' + \Psi' u \times \Pi' u \times f^2 u$$
$$+\Pi u\left(\frac{\Psi' u \times f^2 u}{2}\right)', \text{etc.}$$

Or,

$$\Psi u \times \Pi' u + \Pi u \times \Psi' u = (\Psi u \times \Pi u)',$$
$$\left(\frac{\Pi' u \times f^2 u}{2}\right)' = \tfrac{1}{2}\Pi'' \times f^2 u + \Pi' u \times fuf'u,$$
$$\left(\frac{\Psi' u \times f^2 u}{2}\right)' = \tfrac{1}{2}\Psi'' \times f^2 u + \Psi' u \times fuf'u;$$

donc la série devient

$$\Psi u \times \Pi u + (\Psi u \times \Pi u)'\, fu$$
$$+\tfrac{1}{2}(\Psi u \times \Pi'' u + 2\Psi' u \times \Pi' u + \Pi u \times \Psi'' u)\, f^2 u$$
$$+(\Psi u \times \Pi u)'\, fuf'u + \text{etc.}$$

savoir,

$$\Psi u \times \Pi u + (\Psi u \times \Pi u)'\, fu + \left(\frac{(\Psi u \times \Pi u)'\, f^2 u}{2}\right)' + \text{etc.}$$

Et l'on trouvera la même chose en poussant la multiplication plus loin, et en rassemblant les termes qui contiennent les mêmes dimensions de *fu*.

Donc en général, si l'on dénote par (Ψu) la série qui contient la fonction Ψu, et de même par (Πu) la série qui contient Πu, la fonction *fu* demeurant la même dans les deux séries, il résulte de ce que nous venons de trouver, que l'on aura

$$(\Psi u) \times (\Pi u) = (\Psi u \times \Pi u);$$

et comme cette propriété a lieu quelles que soient les fonctions Ψu et Πu, si l'on fait $\Psi u \times \Pi u = \Phi u$; on aura $(\Psi u) \times (\Pi u) = (\Phi u)$; donc $(\Pi u) = \frac{(\Phi u)}{(\Psi u)}$; mais $\Pi u = \frac{\Phi u}{\Psi u}$; donc $\frac{(\Phi u)}{(\Psi u)} = \left(\frac{\Phi u}{\Psi u}\right)$, c'est-à-dire que le quotient de deux séries semblables, lesquelles contiennent deux fonctions différentes, Ψu et Πu, sera aussi une semblable fonction qui contiendra le quotient de ces mêmes fonctions.

15. Donc, si l'on prend deux nombres très grands, n et $n + r$, dont la différence r soit un nombre quelconque positif ou négatif, le quotient de la quantité

$$\frac{\psi\alpha}{\alpha^n}+\frac{\psi\beta}{\beta^n}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^n}+\text{etc.},$$

divisée par la quantité

$$\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}}+\frac{\psi\beta}{\beta^{n+r}}+\frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+r}}+\text{etc.},$$

sera exprimée par la série infinie

$$\Psi u+\Psi' u\times fu+\left(\frac{\Psi' u\times f^2 u}{2}\right)'+\text{etc.},$$

en faisant $\Psi u=\frac{\psi u}{u^n}$ divisé par $\frac{\psi u}{u^{n+r}}$, c'est-à -dire $\Psi u=u.$

D'un autre côté, n étant un nombre infiniment grand, il est visible que les deux quantités ci-dessus se réduisent à leurs premiers termes $\frac{\psi\alpha}{\alpha^n}$ et $\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}}$, α étant la plus petite des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. Donc le quotient de la première des quantités, divisée par la seconde, se réduira à α^r ; d'où il résulte ce théorème très remarquable :

Si α est la plus petite racine de l' équation

$$u+x+fx=0,$$

on aura

$$\alpha^r=u^r+(u^r)'\times fu+\left(\frac{(u^r)'\times f^2 u}{2}\right)'+\left(\frac{(u^r)'\times f^3 u}{2.3}\right)''+\text{etc.},$$

r étant un nombre quelconque positif ou négatif.

Ainsi l'on a par cette formule, non-seulement la racine α, mais encore une puissance quelconque de la même racine.

16. Si l'on fait maintenant $r=n$, n étant un nombre fini quelconque, et qu'on compare cette formule avec celle qu'on a donnée plus haut pour la valeur de $\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}+\text{etc.},$ on en tirera la conclusion suivante, très singulière.

Si, dans la formule

$$u^{-n}+(u^{-n})'\times fu+\left(\frac{(u^{-n})'\times f^2 u}{2}\right)'+\left(\frac{(u^{-n})'\times f^3 u}{2.3}\right)''+\text{etc.},$$

on ne retient que les termes qui ont des puissances négatives de u , elle donne la valeur de la somme des puissances $-n$ de toutes les racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., et si l'on y conserve tous les termes, elle ne donnera que la même puissance de la plus petite racine α.

17. Ainsi, comme nous avons déjà trouvé plus haut pour les racines α et β de l'équation $cx^2 - bx + a = 0$, la formule

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n - \frac{nc}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)c^3}{2b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} - \frac{n(n-5)(n-4)c^3}{2.3b^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} + \text{etc.},$$

en ne continuant la série que tant qu'il y a de puissances positives de $\frac{b}{a}$; si l'on continue cette même série à l'infini sans aucune interruption, on aura alors la valeur du seul terme $\frac{1}{\alpha^n}$, en prenant pour α la plus petite des deux racines α et β ; et même on pourra y faire n positif ou négatif, à volonté.

Les deux racines de l'équation $cx^2 - bx + a = 0$, étant α et β, celles de l'équation $ax^2 - bx + c = 0$, seront $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$, et l'on aura

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},\ \frac{1}{\beta} = \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},$$

α étant supposée la plus petite des deux racines. Ainsi la série

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n - \frac{nc}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)c^3}{2b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} - \text{etc.},$$

en ne retenant que les puissances positives de $\frac{b}{a}$ c'est-à-dire les puissances négatives de a, sera égale à

$$\frac{\left[b+\sqrt{(b^2-4ac)}\right]^n + \left[b-\sqrt{(b^2-4ac)}\right]^n}{(2a)^n},$$

n étant un nombre entier quelconque; et si l'on continue la série à l'infini, elle deviéndra égale à

$$\left(\frac{b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^n,$$

n étant un nombre quelconque positif on négatif.
La premiére partie de cette proposition est facile à vérifier par le simple développement des puissances $n^{tèmes}$, puisque le radical $\sqrt{(b^2-4ac)}$ disparaît de lui-même; et d'ailleurs elle est déjà connue par le théorème de *Moivre*.

Pour vérifier l'autre partie, il faut réduire en série le radical luimême.
Ainsi en faisant, par exemple, $n = 1$, la série devient

$$\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{2ac^3}{2b^3}-\frac{3.4a^2c^3}{2.3b^5}-\text{etc.},$$

laquelle peut se mettre sous cette forme

$$\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2c}{b}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\frac{8ac^3}{b^3}-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\frac{.32a^2c^3}{b^5}-\text{etc.},$$

Or cette série est évidemment égale à $\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$.

18. Soit l'équation indéfinie

$$a-bx+cx^2-dx^3+ex^4-fx^5+\text{etc.}=0\ ;$$

on fera, dans la formule générale du théorème ci~dessus,

$$fu=\frac{cu^2-du^3+eu^4-fu^5+\text{etc.}}{b},$$

d'où l'on tire

$$f^2u=\frac{c^2u^4-2cdu^5+(d^2+2ce)u^6+\text{etc.}}{b^2},$$
$$f^3u=\frac{c^3u^6-3cdu^7+\text{etc.}}{b^3},$$
$$f^4u=\frac{c^4u^8-\text{etc.}}{b^4},$$
etc.

Or $(u^r)'=ru^{r-1}$; donc,

$$(u^r)'\times fu=r\frac{cu^{r+1}-du^{r+2}+eu^{r+3}-fu^{r+4}+\text{etc.}}{b},$$
$$(u^r)'\times f^2u=r\frac{c^2u^{r+3}-2cdu^{r+4}+(d^2+2ce)u^{r+5}+\text{etc.}}{b^2},$$
$$(u^r)'\times f^3u=r\frac{c^3u^{r+5}-3cdu^{r+5}+\text{etc.}}{b^3},$$
$$(u^r)'\times f^4u=r\frac{c^4u^{r+7}+\text{etc.}}{b^4}.$$

Prenant les fonctions dérivées, et substituant dans la formule dont il s'agit, on aura, après avoir fait $u=\frac{a}{b}$, et changé α en *x*,

$$x^r = \frac{a^r}{br^2} + r\left(\frac{a^{r+1}c}{b^{r+2}} - \frac{a^{r+2}d}{b^{r+3}} + \frac{a^{r+3}e}{b^{r+4}} - \frac{a^{r+4}e}{b^{r+5}} + \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{r}{2}\left(\frac{(r+3)a^{r+2}c^2}{b^{r+4}} - \frac{(r+4)a^{r+3}\times 2cd}{b^{r+5}} + \frac{(r+5)a^{r+4}(a^2+2ce)}{b^{r+6}} + \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{r}{2.3}\left(\frac{(r+5)(r+4)(a^{r+3}c^3)}{b^{r+6}} - \frac{(r+6)(r+5)(a^{r+4}\times 3cd)}{b^{r+7}} + \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{r}{2.3.4}\left(\frac{(r+7)(r+6)(r+5)(a^{r+4}c^4)}{b^{r+8}} + \text{etc.}\right),$$

etc.

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4e}{b^5} - \frac{a^5f}{b^6} + \text{etc.}$$
$$+\frac{2a^3c^2}{b^5} - \frac{5a^4cd}{b^6} + \frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7} + \text{etc.}$$
$$+\frac{5a^4c^3}{b^7} - \frac{21a^5cd}{b^8} + \text{etc.}$$
$$+\frac{14a^5c^4}{b^9} + \text{etc.},$$

etc.

C'est la formule connue de *Newton*, pour le retour des suites, qui on n'avait encore trouvée que par la méthode des indéterminées. L'analyse précédente, en même temps qu'elle donne la loi de cette formule et le moyen de la continuer aussi loin qu'on voudra, fait voir que la valeur de x qu'elle exprime est la plus petite des racines de l'équation proposée.

20. Si l'on veut appliquer la formule précédente à la détermination de la valeur de p dans l'équation

$$\mathrm{F}a + p\mathrm{F}'a + \frac{p^2}{2}\mathrm{F}''a + \frac{p^3}{2.3}\mathrm{F}'''a + \text{etc.} = 0,$$

que nous avons considérée au commencement de cette Note, il n'y aura plus qu'à substituer $\mathrm{F}a,\ -\mathrm{F}'a,\ \frac{1}{2}\mathrm{F}''a,\ -\frac{1}{2.3}\mathrm{F}'''a,$ etc., , au lieu de $a, b, c, d,$ etc., et p au lieu de $x;$ on aura ainsi

$$p = -\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}'a} - \frac{(\mathrm{F}a)^2\mathrm{F}''a}{2(\mathrm{F}'a)^3} + \frac{(\mathrm{F}a)^3\mathrm{F}'''a}{2.3(\mathrm{F}'a)^4} - \frac{(\mathrm{F}a)^3(\mathrm{F}''a)^2}{2(\mathrm{F}'a)^5} + \text{etc.},$$

ce qui donne la même série que nous avons trourée par deux méthodes différentes. Nous pouvons généraliser encore la formule du théorème donnée plus haut. En effet, puisque α est une des valeurs de x, ce théorème peut se présenter ainsi.

21. L'équation $x = u + fx$ donne én général

$$x^r = u^r + (u^r)'\times fu + \left(\frac{(u^r)'\times f^2u}{2}\right)' + \left(\frac{(u^r)'\times f^3u}{2.3}\right)'' + \text{etc.}$$

Or , soit Fx une fonction quelconque donnée de x peut la supposer réduite à la forme $\mathrm{M}x^r + \mathrm{N}x^s + \mathrm{P}x^t + \text{etc.}$; ainsi, pour la valeur de Fx, il n'y aura qu'à ajouter ensemble les valeurs de x^r, x^t, x^s, etc., multipliées respectivement par M, N, P, etc.; on aura par ce moyen une formule dans laquelle, à la place de u^r, il y aura $\mathrm{M}u^r + \mathrm{N}u^s + \mathrm{P}u^t + \text{etc.}$, c'est-à-dire F*u*, et par conséquent F'*u* à la place de $(u^r)'$.

De là résulte enfin ce nouveau théorème, remarquable autant par sa généralité que par sa simplicité.

L'équation $x = u + fx$ *donne*

$$Fx = \mathrm{F}u + \mathrm{F}'u \times fu + \tfrac{1}{2}(\mathrm{F}'u \times f^2u)' + \tfrac{1}{2.3}(\mathrm{F}'u \times f^3u)'' + \text{etc.},$$

où les fonctions désignées par les caractéristiques f et F', *peuvent être quelconques.*

En effet, ce théorème, présenté de cette manière, est indépendant de la considération des racines, et n'est plus qu'un résultat de la transformation des fonctions, qu'on peut vérifier par l'élimination successive de *x* ou de *u.* J'ai donné, le premier, ce théorème dans les Mémoires de 1' Académie de Berlin, pour l'année I768; j'y étais parvenu par une analyse à peu près semblable à la précédente, mais moins rigoureuse. Plusieurs géomètres se sont occupés, depuis, à le démontrer *à posteriori* par le développement des fonctions ; mais *Laplace* en a donné , dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, pour J'année 1777, une démonstration directe et élégante, tirée du calcul différentiel; c'est cette démonstration que j'ai transportée dans la *Théorie des fonctions* (n° 99).

Il est bon de remarquer qu'en faisant $u = 0$, l'équation $x = u + fx$ devient $x = fx$, laquelle peut représenter une équation quelconque en *x;* et l'on aura la valeur d'une fonction quelconque *Fx,* en faisant $u = 0$ dans la série

$$\mathrm{F}u + \mathrm{F}'u \times fu + \tfrac{1}{2}(\mathrm{F}'u \times f^2u)' + \tfrac{1}{2.3}(\mathrm{F}'u \times f^3u)'' + \text{etc.},$$

après le développement des fonctions; ce qui est beaucoup plus simple.

22. Avant de terminer cette Note, je vais faire voir comment la méthode du n°13 , pour résoudre par approximation l'équation $\mathrm{F}(a + p) = 0$, peut être appliquée à la résolution sumultanée de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Supposons que l'on ait deux équations entre les deux inconnues *x* et *y* que nous désignerons en général par $\mathrm{F}(x, y) = 0$, et $f(x, y) = 0$.

Supposons en même temps qu'on connaisse déjà deux valeurs approchées *a* et *b,* de *x* et *y*; ensorte qu'en faisant $x = a + p,\ y = b + q,$ les quantités *p* et *q* aient des valeurs fort petites. Il s'agira de tirer ces valeurs des deux équations

$$\mathrm{F}(a + p,\ b + q) = 0,\ \ f(a + p,\ b + q) = 0.$$

Suivant l'esprit de la méthode de *Newton,* on développerait les deux fonctions en séries, les deux équations deviendraient ainsi

$$\mathrm{F}(a,b)+\mathrm{M}p+\mathrm{N}q+\text{etc.}=0,$$
$$f(a,b)+mp+nq+\text{etc.}=0,$$

d'où l'on tire pour première approximation

$$p=\tfrac{\mathrm{N}f(a,b)-n\mathrm{F}(a,b)}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},$$
$$q=\tfrac{\mathrm{M}f(a,b)-m\mathrm{F}(a,b)}{\mathrm{N}m-\mathrm{M}n}.$$

Ainsi a et b étant les premières valeurs approchées de x et y, $a+p$, $b+q$ seront des valeurs plus approchées qu'on pourra substituer à la place de a et b dans les fonctions p et q; et désignant par p_1, q_1 ces nouvelles valeurs de p et q, on aura $a+p+p_1$, et $b+q+q_1$ pour les valeurs de x et y encore plus approchées, et ainsi de suite.

Ce procédé a été donné par *Thomas Simpson,* dans ses *Essais sur plusieurs Sujets mathématiques,* et il est assez commode pour le calcul arithmétique ; mais il serait difficile d'en tirer des expressions de x et y en séries ordonnées suivant les puissances des quantités $\mathrm{F}(a,b)$, et $f(a,b)$, qui expriment les erreurs provenantes des premières suppositions, et surtout d'avoir la loi de ces séries; voici comment on peut y parvenir.

On regardera les quantités a et b comme des fonctions quelconques de deux autres quantités α et β, etc. , de manière que ces quantités devenant $\alpha+i$ et $\beta+o$, les quantités a et b deviennent $a+p$ et $b+q$; et on supposera que ces fonctions soient telles que $\mathrm{F}(a,b)=\alpha$ et $f(a,b)=\beta$; ce qui donnera, en mettant $\alpha+i$ et $\beta+o$ au lieu de α et β,

$$\mathrm{F}(a+p,\ b+q)=\alpha+i,\ \ f(a+p,\ b+q)=\beta+o\,;$$

de sorte que les équations proposées deviendront alors $\alpha+i=0$ et $\beta+o=0$; d'où l'on tire

$$i=-\alpha=-\mathrm{F}(a,b)\ \text{ et }\ o=-\beta=-f(a,b).$$

Or, en adoptant la notation des fonctions dérivées, indiquée dans la Note précédente (n° 9), les fonctions a et b des quantités α et β, lorsque ces quantités deviennent $\alpha+i$ et $\beta+o$, se développent dans les séries

$$a+\left(\tfrac{a'}{\alpha'}\right)i+\left(\tfrac{a'}{\beta'}\right)o+\left(\tfrac{a''}{\alpha'^2}\right)\tfrac{i^2}{2}+\left(\tfrac{a''}{\alpha'\beta'}\right)io+\left(\tfrac{a''}{\beta'^2}\right)\tfrac{o^2}{2}+\text{etc.}$$
$$b+\left(\tfrac{b'}{\alpha'}\right)i+\left(\tfrac{b'}{\beta'}\right)o+\left(\tfrac{b''}{\alpha'^2}\right)\tfrac{i^2}{2}+\left(\tfrac{b''}{\alpha'\beta'}\right)io+\left(\tfrac{b''}{\beta'^2}\right)\tfrac{o^2}{2}+\text{etc.}$$

Donc, substituant $-\mathrm{F}(a,b)$ pour i et $-f(a,b)$ pour o, on aura

$$p=-\left(\tfrac{a'}{\alpha'}\right)\mathrm{F}(a,b)-\left(\tfrac{a'}{\beta'}\right)f(a,b)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a''}{\alpha'^2}\right)\overline{\mathrm{F}(a,b)}^2+\left(\tfrac{a''}{\alpha'\beta'}\right)\mathrm{F}(a,b)\times f(a,b)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a''}{\beta'^2}\right)\overline{f(a,b)}^2+\text{etc.},$$
$$q=-\left(\tfrac{b'}{\alpha'}\right)\mathrm{F}(a,b)-\left(\tfrac{b'}{\beta'}\right)f(a,b)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b''}{\alpha'^2}\right)\overline{\mathrm{F}(a,b)}^2+\left(\tfrac{b''}{\alpha'\beta'}\right)\mathrm{F}(a,b)\times f(a,b)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b''}{\beta'^2}\right)\overline{f(a,b)}^2+\text{etc.},$$

où il n'y aura plus qu'à substituer les valeurs des fonctions partielles
$(\tfrac{a'}{\alpha'})$, $(\tfrac{a'}{\beta'})$, $(\tfrac{b'}{\alpha'})$, etc. qu'on tirera des équations

$$\mathrm{F}(a,b)=\alpha,\ \text{et}\ \ f(a,b)=\beta,$$

en prenant successivement les fonctions dérivées relativement à α et β, et substituant à mesure les valeurs déjà trouvées dans les suivantes.
Ainsi on aura d'abord

$$\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{\alpha'}\right)=1,\quad \left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{\beta'}\right)=0,$$
$$\left(\tfrac{f'(a,b)}{\alpha'}\right)=0,\quad \left(\tfrac{f'(a,b)}{\beta'}\right)=1.$$

Mais on a en général, relativement à a et b,

$$\mathrm{F}'(a,b)=\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{a'}\right)a'+\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{b'}\right)b',$$
$$f'(a,b)=\left(\tfrac{f'(a,b)}{a'}\right)a'+\left(\tfrac{f'(a,b)}{b'}\right)b';$$

donc , en regardant a et b comme fonctions de α et β, on aura relativement à chacune de ces quantités en particulier,

$$\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{\alpha'}\right)=\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{a'}\right)\left(\tfrac{a'}{\alpha'}\right)+\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{b'}\right)\left(\tfrac{b'}{\alpha'}\right)=1,$$
$$\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{\beta'}\right)=\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{a'}\right)\left(\tfrac{a'}{\beta'}\right)+\left(\tfrac{\mathrm{F}'(a,b)}{b'}\right)\left(\tfrac{b'}{\beta'}\right)=0,$$
$$\left(\tfrac{f'(a,b)}{\alpha'}\right)=\left(\tfrac{f'(a,b)}{a'}\right)\left(\tfrac{a'}{\alpha'}\right)+\left(\tfrac{f'(a,b)}{b'}\right)\left(\tfrac{b'}{\alpha'}\right)=0,$$
$$\left(\tfrac{f'(a,b)}{\beta'}\right)=\left(\tfrac{f'(a,b)}{a'}\right)\left(\tfrac{a'}{\beta'}\right)+\left(\tfrac{f'(a,b)}{b'}\right)\left(\tfrac{b'}{\beta'}\right)=1;$$

d'où l'on tirera les valeurs des quatre fonctions dérivées partielles du premier ordre $\left(\frac{a'}{\alpha'}\right)$, $\left(\frac{a'}{\beta'}\right)$, $\left(\frac{b'}{\alpha'}\right)$, $\left(\frac{b'}{\beta'}\right)$, exprimées par les fonctions partielles $\left(\frac{\mathrm{F}'(a,b)}{a'}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{F}'(a,b)}{b'}\right)$, $\left(\frac{f'(a,b)}{a'}\right)$, $\left(\frac{f'(a,b)}{b'}\right)$, qui sont facile à déduire des fonctions données $\mathrm{F}(a,b)$, $f(a,b)$, en prenant leurs fonctions dérivées, relativement à a et b en particulier. Ensuite, en prenant de nouveau les fonctions dérivées des valeurs $\left(\frac{a'}{\alpha'}\right)$, $\left(\frac{a'}{\beta'}\right)$, etc. relativement à α et β on aura les valeurs de $\left(\frac{a''}{\alpha'^2}\right)$, $\left(\frac{a''}{\alpha'\beta'}\right)$, etc., etc. et ainsi de suite.

Si l'on fait pour abréger

$$\left(\frac{\mathrm{F}'(a,b)}{a'}\right) = \mathrm{M},\ \left(\frac{\mathrm{F}'(a,b)}{b'}\right) = \mathrm{N},$$
$$\left(\frac{f'(a,b)}{a'}\right) = m,\ \left(\frac{f'(a,b)}{b'}\right) = n,$$

on aura

$$\left(\frac{a'}{\alpha'}\right) = \frac{n}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},\ \left(\frac{a'}{\beta'}\right) = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},$$
$$\left(\frac{b'}{\alpha'}\right) = -\frac{m}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},\ \left(\frac{b'}{\beta'}\right) = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},$$

et les premières valeurs de p et q seront

$$p = \frac{n\mathrm{F}(a,b)}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m} + \frac{\mathrm{N}f(a,b)}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m},$$
$$q = \frac{m\mathrm{F}(a,b)}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m} - \frac{\mathrm{M}f(a,b)}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}m}.$$

Ces premières valeurs de p et q coïncident avec celles que nous avons trouvées ci-dessus; mais les formules que nous venons de donner pour les expressions générales de p et q ont l'avantage de présenter des séries toutes développées, et faciles à continuer aussi loin que l'on veut.