NOTE XII.

On the way of transforming any equation, such that the terms which contain the unknown may have the same sign, and that the wholly known term may have a different sign.

I have noted in the Introduction, that the methods of *Vieta* and of *Harriot,* for the resolution of numerical equations, can only be applied in a certain manner to equations of which all the terms which contain the unknown have the same sign, and the term completely known has the opposite sign, and I have said that we can always return any equation to this form, provided that we have two boundaries of one of these roots, which shall be close enough for all the other real roots, as well as for the real parts of the imaginary roots, if it has any, falling outside these limits. As I do not know if this transformation is known, I think I ought to establish it here, so that those who wish to use the old methods will always be able to do so with success.

1. Let a, b be the two bounds given, or known in some way, a the smaller and b the greater limit. In assuming that x shall be the unknown of the equation proposed, we will make $x=\frac{a+by}{1+y}$, and after the substitutions and reductions, we will have an equation transformed into y, of the same degree as the equation in x, which will have the form required, if the limit a is close enough to the value of the root.
For $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. shall be the roots of the proposed equation in x, and α the root of which a and b are the limits. Since $x=\frac{a+by}{1+y}$, we will have $y=\frac{x-a}{b-x}$; hence the roots of the equation in y will be $\frac{\alpha-a}{b-\alpha}, \frac{\beta-a}{b-\beta}, \frac{\gamma-a}{b-\gamma},$ etc. Now, by the hypothesis we have $\alpha > a < b$; hence, $\alpha-a>0,\ b-\alpha>0;$ hence the root $\frac{\alpha-a}{b-\alpha}$ will be positive and in addition the difference between the limit a and the root α will be smaller. Hence, as the other roots $\beta, \gamma,$ etc. are assumed to fall beyond the limits a and b, if $\beta<a$, necessarily we will have also $\beta<b$; hence $\beta-a<0,$ and $b-\beta>0;$ hence the root $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ necessarily will be negative. If, on the other hand, $\beta>b$, we will have also $\beta>a$; hence $\beta-a>0$, and $b-\beta<0$; hence $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ still will be a negative quantity. Hence the root $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ will be negative in all the cases. It will be the same in any other case, such as $\frac{\gamma-a}{b-\gamma}$, which corresponds to a real root γ of the equation in x.

But supposing that β and γ shall be imaginary, necessarily they will be of the form $\rho+\sigma\sqrt{-1},\ \rho-\sigma\sqrt{-1},\ \rho$ and σ being real quantities (Note IX) ; then making $\beta=\rho+\sigma\sqrt{-1},$ the root $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ will become $\frac{\rho-a+\sigma\sqrt{-1}}{b-\rho-\sigma\sqrt{-1}}$; multiplying above and below by $\rho-a+\sigma\sqrt{-1}$, we will have $\frac{(\rho-a)(b-\rho)-\sigma^2+(b-a)\sigma\sqrt{-1}}{(b-\rho)^2+\sigma^2}$.

But we may assume that the real part p also falls outside the limits a and b; hence if $\rho < a$, we will have also $\rho < b$; consequently $\rho - a < 0,\ b - \rho > 0$; hence the quantity $(\rho - a)(b - \rho) < 0$; will be negative in all cases.

Hence, since σ^2 and $(b-\rho)^2$ are essentially positive quantities, the root $\frac{\beta - a}{b - \beta}$ will become of the form $-\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$ in this case, P and Q being real quantities, and P being essentially positive. Likewise, on making $\gamma = \rho - \sigma\sqrt{-1}$, the root $\frac{\gamma - a}{b - \gamma}$ will become $-\mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1}$, and thus for the other imaginary roots.

Hence, on taking the quantities p, q, r, etc., P, Q, R, etc. positive, the real roots of the equation in x will give in the transformation into y the real roots $p,\ -q,\ -r,$ etc., and the imaginary roots of the same equation will give in that transformed the roots $-\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},\ -\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1},\ -\mathrm{R}+\mathrm{S}\sqrt{-1},\ -\mathrm{R}-\mathrm{S}\sqrt{-1},$ etc. Hence the transformed equation in y will be formed from the factors

$$y-p,\quad y+q,\quad y+r,\quad \text{etc.}\qquad y+\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$
$$y+\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},\ y+\mathrm{R}-\mathrm{S}\sqrt{-1},\ y+\mathrm{R}+\mathrm{S}\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Now, the two imaginary factors $y+\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1}$ and $y+\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$, will give the twofold real factor $y^2 + 2\mathrm{P}y + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2$, and thus for the others.
Hence the equation in y will be

$$(y-p)(y+q)(y+r)(y^2+2\mathrm{P}y+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)(y^2+2\mathrm{R}y+\mathrm{R}^2+\mathrm{S}^2)=0,$$

2. Considering the product of all these factors, except for the first, $y-p$; since all the terms of these factors are positive, it is seen that their product, ordered with respect to y, will be able to contain positive terms only. Hence the product will be of the form

$$y^{n-1} + \mathrm{A}y^{n-2} + \mathrm{B}y^{n-3} + \text{ etc.} + \mathrm{K},$$

where the coefficients A, B, C, etc. K will all be positive, without any able to be zero.
Now multiplying this polynomial by the factor $y-p$, we will have

$$y^n + (\mathrm{A}-p)y^{n-1} + (\mathrm{B}-p)y^{n-2} + (\mathrm{C}-p)y^{n-3} + \text{ etc.} - \mathrm{K}p = 0,$$

for the equation in y.

We see here that the last term $-\mathrm{K}p$ is essentially negative, and that the preceding terms will all be positive, if we have $\mathrm{A} > p,\ \mathrm{B} > \mathrm{A}p,\ \mathrm{C} > Bp,$ etc. Since on approaching the limit a of the root α, the value of p, which is $\frac{\alpha - a}{b - \alpha}$, can become as small as desired, it is clear that we can always take a such that we may have $\mathrm{P} < \mathrm{A}, < \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, < \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, etc., which will render all the terms positive, except for the last.

We must not be afraid that hence in diminishing the value of p, the values of $q, r,$ etc., P, Q, etc. to be diminished at the same time, to become zero with P accordingly. For in making $a = \alpha$, which gives $p = 0$, the value of q, which is $\frac{\beta - a}{b - \beta}$ will become $-\frac{\beta - a}{b - \beta}$; and the values of P and Q, which are $-\frac{(\rho - a)(b - \rho) - \sigma^2}{(b - \rho)^2 + \sigma^2}$ and $\frac{(b - a)\sigma}{(b - \rho)^2 + \sigma^2}$ will become $\frac{(\rho - a)(b - \rho) - \sigma^2}{(b - \rho)^2 + \sigma^2}$ and $\frac{(b - a)\sigma}{(b - \rho)^2 + \sigma^2}$, and hence for the others.

Hence, we are assured that the substitution of $\frac{a + by}{1 + y}$ in place of x, will give a transformation in y which will have the required condition, since the limit a must at least be close enough to the root of which it is the bound; which we will always be able to obtain on trying successively larger values for a.

3. We have found in Chap. IV (n° 27), that the equation $x^3 - 7x + 7 = 0$ has three roots, two positive and one negative; and that the two positive roots are expressed by continued fractions, the terms of which are 1, 1, 2, 4, etc. et 1, 2, 1, 4, etc. ; from that we can form these fractions converging towards the two roots

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{22}{13},\ \text{etc.},$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{19}{14},\ \text{etc.}$$

We see at first that 1 and 2 are two bounds of the first root; but, as the second root is contained between the two numbers 1 and $\frac{3}{2}$, necessarily it is found to be contained between the same limits ; hence we will take the following limits 2 and $\frac{5}{3}$, and we will make $a = \frac{5}{3},\ b = 2$, and consequently $x = \frac{\frac{5}{3} + 2y}{1 + y} = \frac{5 + 6y}{3(1 + y)}$.
But, since multiples of y do not change the signs of the equation in y, we will be able to make simply $x = \frac{5 + 2y}{3 + y}$, on putting y for $3y$. Hence we will find the transformation

$$y^3 + 4y^2 + 3y - 1 = 0,$$

which is, as we see, the condition required.

Likewise, if we take $\frac{3}{2}$ and $\frac{4}{3}$ for the bounds of the other root, on making $a = \frac{4}{3}$ and $b = \frac{3}{2}$, we will have the substitution $x = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}y}{1 + y} = \frac{8 + 9y}{6(1 + y)}$, or rather, on putting simply y in place of $3y$, $x = \frac{8 + 3y}{6 + 2y}$, and we will find the transformation

$$y^3 + 8y^2 + 4y - 8 = 0,$$

which also has the form required.

The bounds that we have used have led directly to the transformations sought, but if we had taken, for example, the bound 2 and $\frac{3}{2}$ for the first root which equally have the property that no other root is found to be included there, since the other real root is less than $\frac{3}{2}$, we would have $a=\frac{3}{2},\ b=2$; which would have given the substitution $x=\frac{\frac{3}{2}+2y}{1+y}=\frac{3+4y}{2(1+y)}$, or rather, on putting *y* for *2y*, $x=\frac{3+2y}{2+y}$, and we would have found there the transformation :

$$y^3+y^2-2y-1=0,$$

which still does not have the form demanded, because the positive root is found to be too large.

But, without recourse to a new substitution in increasing the value of *a*, it will suffice to diminish all the roots by the same amount *i*, on making $y=z+i$, and then by some trials to look for a value of i which may satisfy all the conditions required. Hence we will have this transformation

$$z^3+(3i+1)z^2+(3i^2+2i-2)z+i^3+i^2-2i-1=0,$$

and it will be required to take *i* positive, and such that $3i^2+2i>2$ and $i^3+i^2<2i+1$. We see at once that $i=1$ satisfies , and we have the transformation

$$z^3+4z^2+3z-1=0,$$

which is the same as the transformation found at first in y .

4. We have seen in article III of Chapter V (n° 72), that if $\frac{\pi}{\pi'}$ and $\frac{\rho}{\rho'}$ are two fractions converging towards one of the roots of the equation in *x*, the transformation in *t* which must serve to find the following fraction, results directly from the substitution of $\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'}$ in place of x in the proposed equation. Making $t=\frac{\pi' y}{\rho'}$, we will have

$$x=\frac{\frac{\rho\pi' y}{\rho'}+\pi}{\pi'(y+1)}=\frac{\frac{\rho}{\rho'}y+\frac{\pi}{\pi'}}{y+1}.$$

This substitution is, as we see, analogous to that which we have used above, on taking $\frac{\pi}{\pi'}$ and $\frac{\rho}{\rho'}$ for the two limits which we have called *a* and *b.*

Now, as two consecutive fractions are themselves alternative bounds greater and smaller than the root sought, and which continually become closer together, it follows that the transformations which correspond to fractions smaller than the root, will approach more and more to have the necessary conditions in order to be of the proposed form; and the intermediate transformations will have the same property, on substituting there $\frac{1}{y}$ in place of *y;* since if $\frac{\pi}{\pi'} > \frac{\rho}{\rho'}$, the expression for *x* becomes, by this substitution, $\frac{\frac{\rho}{\rho'}y+\frac{\pi}{\pi'}}{y+1}$.

The difference between the two fractions $\frac{\pi}{\pi'}$ and $\frac{\rho}{\rho'}$ being $\frac{1}{\pi'\rho'}$, since this difference will have become less than the smallest difference between the roots of the equation proposed, that is, less than the limit $\frac{1}{\mathrm{L}}$ (Note IV), we will be assured that only a single root will lie between these fractions ; but, with regard to the real parts of the imaginary roots, it will not be easy to be assured *à priori* that they will fall outside these fractions, unless by forming an equation of which the roots shall be $\alpha - \frac{\beta+\gamma}{2}$, and then by looking for a limit smaller than each of these roots, in order to compare that with the same difference $\frac{1}{\pi'\rho'}$.

For the rest, because the consecutive fractions provide limits which restrict around the same root more and more, it is possible that the transformations will never acquire the form in question, because the two limits are coming together at the same time, the positive root can go on increasing in place of decreasing. But, when we have arrived at fractions between which there is only a single real root and no real parts of imaginary roots, it will suffice to diminish all the roots of the corresponding transformation, to the same quantity that we would be able to find by several trials, as we have seen above.

When an equation has been reduced to the form of which we speak, that's to say all its terms have the same sign, all known with the exception of the last term , and we will be able to extract the root just as in equations of two terms where we have only a single power of the unknown ; only we will have need of more trials and proofs, because the different powers of the unknown which it may contain.

Thus, for example, if we have an equation of the third degree

$$y^3 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y - \mathrm{N} = 0,$$

in which A, B, N are assumed to be positive numbers, on putting that into the form

$$y^3 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y = \mathrm{N},$$

we see that in place of simply extracting the root of the power y^3 of N, it is required to extract that from the sum of the powers $y^3 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y$; and if α is a part of this root already found, and *p* the rest, we will have

$$(3a^2 + 2\mathrm{A}a + \mathrm{B})p + (3a + \mathrm{A})p^2 + p^3 = \mathrm{N} - a^3 - \mathrm{A}a^2 - \mathrm{B}a;$$

and as a consequence,

$$p < \frac{\mathrm{N}-a(a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B})}{3a^2+2\mathrm{A}a+\mathrm{B}},$$

a formula which corresponds to this one $p < \frac{\mathrm{N}-a^3}{3a^2}$, on which is based the procedure of extracting the cube root.

Taking the equation found above :

$$y^3+4y^2+3y-1=0,$$

the formula here will be

$$p < \frac{1-a(a^2+4a+3)}{3a^2+8a+3}$$

It is easy at first to see that the first figure of the value of a can only be 0,2 ; hence making $a=0{,}2$, we will find $p < \frac{0{,}232}{4{,}72} > 0{,}05$. On taking $p=0{,}04$, the new value of a will be 0,24, and we will find $p < \frac{0{,}0368\ldots}{5{,}093\ldots} < 0{,}008,$ etc.

NOTE XIII.

On the resolution of algebraic equations.

The resolution of equations of the second degree is found in *Diophantus*, and can also be deduced from some propositions of *Euclid's Data* ; but it appears that the first Italian algebraists had found out about it from the Arabs. Then they had resolved the equations of the third and fourth degree ; but all the attempts that we have made since then to extend further the resolution of equations, have only succeeded in making known new ways of resolving equations of the third and fourth degree, without being able to start higher degrees, if this is not for particular classes of equations, such as reciprocal equations, which can always be reduced to a degree less than half, of which the roots of these are similar to the roots of equations of the third degree, and which *de Moivre* had given first, and some others of the same kind.

1. In the Memoirs of the Berlin Academy (the years 1770 and 1771), I have examined and compared the principal known methods for the resolution of algebraic equations, and I have found that these methods all reduce, in the final analysis, to using a secondary equation which we call the *resolvent,* the root of which is of the form

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \text{etc.}$$

on designating by $x', x'', x''',$ etc . the roots of the proposed equation, and by α one of the roots of unity, of the same degree as for that of the equation.

Thence I am going to begin with this general form of the roots, and I will look for initially, the degree of the resolving equation and the divisors it is able to have, and I have given the reason why this equation, which is always of a degree higher than the equation given, and is capable of being lowered for equations of the third or fourth degree, and can be used to resolve them.

I have thought that a summary of this theory would not be out of place in the present treatise, not only because it results in a uniform method for the resolution of equations of the four first degrees, but again because this method applies itself with success to equations for two terms, of whatever degree they may be.

2. Representing the proposed equation by the general formula:

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

and designating its m roots by $x', x'', x''',$ etc. $x^{(m)}$; we will have, by the known properties of equations,

$$\mathrm{A} = x' + x'' + x''' + \text{etc.} + x^{(m)},$$
$$\mathrm{B} = x'x'' + x'x''' + \text{etc.} + x''x''' + \text{etc.},$$
$$\mathrm{C} = x'x''x''' + \text{etc.}$$

Let t be the unknown of the resolving equation; we will make, after what we have just said,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \text{etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

the quantity α being one of the m^{th} roots of unity, that is, one of the roots of the equation from the two terms $y^m - 1 = 0$.

In order to solve the equation in t, it will be necessary to eliminate the m unknowns $x',\ x'',\ x''',$ etc , by means of the preceding equations which are also of number m; but this procedure may demand a long calculation, and further it may have the inconvenience of leading only to a final equation of a higher degree than it should be.

3. We can arrive directly and in a simpler manner at the required equation, on using the method of which we have made frequent use up to this stage, which consists in finding first the form of all the roots of the equation sought, and then to compose this equation by means of its roots.

It is evident at first that in the expression t, we can exchange the roots $x',\ x''$, etc., amongst themselves as wished, since there is nothing to distinguish between them at this point. From which it follows that we will have all the different values of t, on making all the possible permutations between the roots $x',\ x'',\ x''',$ etc ; and these values necessarily will be the roots of the equation reduced in t, which it is required to construct.

Now, we know, by the theory of combinations, that the number of permutations which can be had between m items, is expressed in general by the product $1.2.3....m$; hence the equation in t will have generally just as many roots as there are ones in this number, and it will be as a consequence of a degree expressed by the number $1.2.3....m$; but we are going to see that this equation is capable of being lowered by the very form of its roots.

Since this form depends on the α which we assume to be one root of the equation $y^m - 1 = 0$, we will start with some notes on the properties of the roots of this equation ; and for that, we will consider separately the cases where the exponent m is a prime number, and that where the exponent is a composite number.

4. Assuming at first that the number m shall be prime ; in this case, all the powers of α as far as to α^m will be of different values, as long as we may not have $\alpha = 1$. For if two powers α^n and α^v were equal, we would have $\alpha^n = \alpha^v$, and from that $\alpha^{n-v} = 1$; or no power of α less than m can be $= 1$ as long as α is not $= 1$. Indeed, since $\alpha^m - 1 = 0$, if we

had at the same time $\alpha^n - 1 = 0$, n being < m, it would be necessary that these two equations would have had a common root ; and on examining by the ordinary rules, the greatest common divisor of the two quantities $\alpha^m - 1 = 0$ and $\alpha^n - 1 = 0$, we find $\alpha - 1$ necessarily for this divisor, because m is a prime number ; such that the common root of the two equations $\alpha^m - 1 = 0$ and $\alpha^n - 1 = 0$ can only be one.

5. From that it follows, 1° that the powers $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m represent all the roots of the equation $y^m - 1 = 0$, on taking for α any one of the roots of this equation, other than unity. For since $\alpha^m = 1$, we will have also $\alpha^{2m} = 1,\ \alpha^{3m} = 1,$ etc.; such that the powers $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m will be also the powers of the same equation ; and since they are of number m, and all of different values, they will give necessarily all the roots of the equation $y^m - 1 = 0$.

6. It follows also, 2°. that if, in the series of the powers $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m, we may substitute for α any one of these powers, such as α^n, n being < m; the new series $\alpha^n,\ \alpha^{2n},\ \alpha^{3n},$ etc., on lowering all the powers below α^m , because $\alpha^m = 1$, it will contain still the same powers, but in a different order ; for it is seen that all the exponents $n,\ 2n,\ 3n,$ etc. are different, and that their remainders from the division by m are that also, since m is a prime number ; such that these remainders being in number m, and all different among themselves, can only be the numbers 1, 2, 3, etc. m.

7. Now we consider the case where m is a composite number. In this case, if n were a divisor of m , then all the roots of the equation $y^m - 1 = 0$ would be common to the roots of the equation $y^n - 1 = 0$, because on assuming the number r to be a root of the equation $y^n - 1 = 0$, we would have $r^n = 1$, and as a consequence also $r^m = 1$; such that r would be also a root of the equation $y^m - 1 = 0$. Hence on making $\alpha = r$, we will have $\alpha^m = 1$; and if $m = np$, it is seen that in the series of powers $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m, each will be found repeated p times ; as a consequence these powers will no longer be able to represent all the powers of the equation $y^m - 1 = 0$, because this equation cannot have equal roots.

8. Let $m = pq$, p and q being two prime numbers, and β shall be one of the roots of the equation $y^p - 1 = 0$, and γ one of the roots of the equation $y^q - 1 = 0$, it is clear that β and γ will be also roots of the equation $y^m - 1 = 0$ because β^p and γ^q , being $= 1$, we will have also $\beta^{pq} = 1$ and $\gamma^{pq} = 1$; but all the roots of the equation $y^m - 1 = 0$ will not be able to be represented by the successive powers of these roots β and γ.

We see also that the product $\beta\gamma$ will be a root of the same equation $y^m - 1 = 0$; but no power of this root, of which the exponent shall be less than *m,* will be able to be equal to unity, except when β or γ shall be $= 1$; for it will be required that the exponent of this power shall be a divisor of m, and consequently equal to *p* or to *q;* hence we shall have $(\beta\gamma)^p = 1$, or $(\beta\gamma)^q = 1$. In the first case, we shall have $\gamma^p = 1$, since $(\beta)^p = 1$(hyp.) ; and as we have already $\gamma^q - 1 = 0$ (hyp.), it shall result in $\gamma - 1 = 0$, since *p* and *q* are prime to each other; in the second case, we shall have $\beta - 1 = 0$.

9. Thus, as long as β and γ are different from one, the root $\beta\gamma$ of the equation $y^m - 1 = 0$, has when $m = pq$, the same property as the root α when *m* is a prime number, namely, that all the roots of this equation to be represented by the successive powers of $\beta\gamma$.

10. As the values of β are *p* in number, and those of γ, *q* in number*,* the values of $\beta\gamma$ will be *pq* in number, that is *m;* and it is easy to prove that these values will all be different from each other, because they will be represented by $\beta^r\gamma^s$, on making successively $r = 1, 2, 3 ... p$ and ... $s = 1, 2, 3 ... q$, because the numbers p and *q* are supposed prime. From which it follows that all the roots of the equation $y^m - 1 = 0$, *m* being $= pq$, are able to be represented by the products $\beta\gamma$ of the roots of the equations $y^p - 1 = 0, y^q - 1 = 0$, *p* and *q* being prime numbers.

Likewise we will show that if $m = pqr$, on assuming p, q, r to be prime numbers, and that α, β, γ shall be respectively some roots of the three equations $y^p - 1 = 0, y^q - 1 = 0, y^r - 1 = 0$, the product $\beta\gamma\delta$, on giving successively all their values to β, γ, δ, will be able to represent all the roots of the equation $y^m - 1 = 0$; and that these ones of these roots which will be expressed by $\beta\gamma\delta$, on excluding unity the values of β, γ, δ will have the same properties as the roots of the equation $y^m - 1 = 0$, when *m* is a prime number.

And hence so forth.

11. But if we had $m = p^2$, *p* being a prime number, on taking β for any one of the roots of the equation $y^p - 1 = 0$, it is clear that β also shall be a root of the equation $y^m - 1 = 0$, and that $\sqrt[p]{\beta}$ will be that also. Hence we may take, in this case, some one of the values of $\sqrt[p]{\beta}$ for γ, and we may have equally $\beta\gamma$ for the expression of all the roots $y^m - 1 = 0$.

Likewise, if $m = p^3$, on keeping the values of β and γ, we shall have, further, $\delta = \sqrt[p^3]{\beta}$ and we will have $\beta\gamma\delta$ for the expression of all the roots of $y^m - 1 = 0$, on giving all their values successively to β, γ, δ. And thus henceforth.

12. Hence, in general, if $m = p^\mu q^\nu r^\pi ...,$ and that $\beta,\ \gamma,\ \delta$ etc. shall be respectively any roots of the equations ….
$y^p - 1 = 0,\ y^q - 1 = 0,\ y^r - 1 = 0,$ etc., $p,\ q,\ r,$ etc., being prime numbers, if we may make further,

$$\beta' = \sqrt[p]{\beta},\ \beta'' = \sqrt[p]{\beta'},\ \text{etc.},\ \gamma' = \sqrt[q]{\gamma},\ \gamma'' = \sqrt[q]{\gamma'},\ \text{etc.},\ \delta' = \sqrt[r]{\delta},\ \delta'' = \sqrt[r]{\delta'},\ \text{etc.},$$

we will have …

$$\beta\beta'\beta'' .... \times \gamma\gamma'\gamma'' .... \times \delta\delta'\delta'' ...$$

for the general expression of the roots of the equation $y^m - 1 = 0$ on giving successively to $\beta,\ \beta',$ etc. $\gamma,\ \gamma',$ etc. $\delta\ \delta'$ etc. all the values of which these quantities are capable, each in particular.

We see there that in order to have the roots of the equation for two terms $y^m - 1 = 0$, when *m* is not a prime number, it suffices to resolve equations of similar degrees of which the exponents shall be prime numbers constituting the number *m*.

13. Finally we will note that as the equation $y^m - 1 = 0$ lacks all the intermediary terms, if we call these roots $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., we will have by the general formulas given at the start of Note VI,

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{etc.} = 0,$$
etc.,
$$1 + \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \text{etc.} = 0,$$

then, since $\alpha^m = 1,\ \beta^m = 1,$ etc., we will have

$$1 + \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \text{etc.} = m,$$
$$1 + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \gamma^{m+1} + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^{m+2} + \beta^{m+2} + \gamma^{m+2} + \text{etc.} = 0,$$

and hence so on.

These different remarks will be very useful in what follows.

14. These preliminaries established, considering the function

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \alpha^4 x^{v} + \text{ etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

in which $x',\ x'',\ x''',\text{etc. } x^{(m)}$ are the roots of the proposed equation of degree *m,* and α is some root of the equation .... $y^m - 1 = 0$, such that we may have $\alpha^m = 1$.

We see at first that this expression is an invariant function of the quantities $\alpha^0 x',\ \alpha x'',\ \alpha^2 x''',\text{ etc.,}$ and that hence the result of permutations of the roots $x',\ x'',\ x''',\text{etc.}$ between themselves, will be the same as that of the powers of α between themselves.

15. It follows from there that αt will be the result of the simultaneous permutations of x' into x'', x'' into x''',etc., $x^{(m)}$ into x', since $\alpha^m = 1$.
Likewise $a^2 t$ will be the result of the simultaneous permutations of x' en x''', x'' into x^{iv},etc., $x^{(m-1)}$ into x', and $x^{(m)}$ into x'', since $\alpha^m = 1,\ \alpha^{m+1} = \alpha,$ and hence so forth.

Thus, t being one of the roots of the resolvent equation in $t,\ \alpha t,\ \alpha^2 t,\ \ \alpha^3 t,\text{ etc., }\alpha^{m-1} t$ will be also the roots of the same equation; as a consequence the equation in *t* will be able to be such that it does not change in changing t into αt,into $a^2 t$,into $a^3 t$,etc., into $a^{m-1} t$; from which it is easy to conclude at first that this equation will be able to contain only the powers *t* the exponents of which shall be multiples of *m.*

Hence, if we make $t^m = \theta$, we will have an equation in θ which will be only of degree $1.2.3...m-1$, and of which the roots will be the different values of θ resulting from the permutations of the $m-1$ roots $x'',\ x''',\text{ etc. } x^{(m)}$ between themselves.

16. The expression for θ will be, because $\alpha^m = 1,\ \alpha^{2m} = 1,\text{ etc.,}$ of the form

$$\theta = \xi^{\text{o}} + \alpha \xi' + \alpha^2 \xi'' + \alpha^3 \xi''' + \text{etc.} + \alpha^{m-1} \xi^{(m-1)},$$

in which the quantities $\xi^{\text{o}},\ \xi',\ \xi'',\text{ etc.}$ will be determined functions of $x',\ x'',\ x'',\text{ etc.}$, which will have in general the property of being invariant, by the simultaneous permutations of

x' into x'' into x''', etc. $x^{(m)}$ into x', of x' en x''', x'' into x^{iv}, etc.
$x^{(m-1)}$ into x', $x^{(m)}$ into x'',

and hence so forth; from which it follows that θ is equally $=t^m=(\alpha t)^m=(\alpha^n t)^m$, etc.

When the quantities $\xi^{\text{o}}, \xi', \xi''$, etc. will be known, we will have at once the values of all the roots x', x'', x'', etc. of the proposed equation. For since $\theta = t^m$, we will have $t=\sqrt[m]{\theta}$; and if we denote by 1, α, β, γ, etc. the roots of the equation $y^m-1=0$, and we may denote also by $\theta^{\text{o}}, \theta', \theta''$, etc. the values of θ which correspond to the successive substitution of 1, α, β, γ, etc. in place of α in the expression of θ, we will have, since

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{ etc.} + \alpha^{m-1}x^{(m)},$$

the following equations :

$$\begin{aligned}
&x' + x'' + x''' + \text{ etc.} + x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta^{\text{o}}},\\
&x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{ etc.} + \alpha^{m-1}x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta'},\\
&x' + \beta x'' + \beta^2 x''' + \text{ etc.} + \beta^{m-1}x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta''},\\
&x' + \gamma x'' + \gamma^2 x''' + \text{ etc.} + \gamma^{m-1}x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta'''},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

These equations being added together, will give at first by the properties of the roots of unity $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. (n° 13),

$$x' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}}+\sqrt[m]{\theta'}+\sqrt[m]{\theta''}+\text{etc.}+\sqrt[m]{\theta^{(m-1)}}}{m}.$$

Then, if we multiply these respectively by $1, \alpha^{m-1}, \beta^{m-1}, \gamma^{m-1}$, etc., and we add these together again, we will have, by the same properties,

$$x'' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}}+\alpha^{m-1}\sqrt[m]{\theta'}+\beta^{m-1}\sqrt[m]{\theta''}+\gamma^{m-1}\sqrt[m]{\theta'''}+\text{etc.}}{m}.$$

We may find in the same manner

$$x''' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}}+\alpha^{m-2}\sqrt[m]{\theta'}+\beta^{m-2}\sqrt[m]{\theta''}+\gamma^{m-2}\sqrt[m]{\theta'''}+\text{etc.}}{m},$$

and thus so forth.

17. We will note according to these formulas that the term $\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}}$ being equal to the sum $x' + x'' + x''' +$ etc. of the roots, is given immediately by the equation ; such that we have $\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}} = \text{A}$ (n° 2), necessarily an identical equation, and which may be used, if there may be a need to be assured of the validity of the calculation.

It follows from there also that as $\theta^{o} = \xi^{o} + \xi' + \xi'' + \text{etc.} + \xi^{(m-1)} + \text{etc.}$, on making $\alpha = 1$, we will have

$$\xi^{o} + \xi' + \xi'' + \text{etc.} + \xi^{(m-1)} = \theta^{o} = \mathrm{A}^{m},$$

and consequently,

$$\xi^{o} = \mathrm{A}^{m} - \xi' - \xi'' - \xi''' - \text{etc.},$$

the value which, on being substituted into the general expression for θ, that will be reduced to this simpler form

$$\theta = \mathrm{A}^{m} + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^{2} - 1)\xi'' + (\alpha^{3} - 1)\xi''', \text{ etc.},$$

and we will have the values of $\theta', \theta'', \theta'''$, etc., on putting the roots α, β, γ, etc. of the equation $y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \text{etc.} + 1 = 0$, in place of α (n° 23).

18. The difficulty thence is reduced to finding the values of the quantities ξ^{o}, ξ', ξ'', etc. which enter into the expression for θ, when they are not given at once. In this investigation, it is convenient to distinguish between the case where the exponent *m* is a prime number from those where *m* is a composite number.

Assuming at first that *m* shall be a prime number ; we have shown above (n° 6), that then on taking some root of the equation $y^{m} - 1 = 0$ other than unity for α, if in the series of powers $\alpha, \alpha^{2}, \alpha^{3}$, etc., α^{m-1}, we substitute in place of α some one of these same powers, we will recover always the same series of powers, only in a different order. Now it is seen that in the function *t,* the change of α into α^{2} corresponds to the simultaneous permutations of x'' into x''', x''' into x^{iv}, etc.; that the change of α into α^{3} will correspond to the simultaneous permutations of x'' into x^{iv}, x''' into x^{vii}, etc., and hence so forth. Hence, the successive changes of α into α^{2}, α^{3}, etc. α^{m-1}, will correspond to so many permutations where x'' will take the place of x''', x^{iv}, etc. $x^{(m)}$; which makes $m-1$ permutations of which each one then will be able to be combined with all the possible permutations between the other $m-2$ roots x''', x^{iv}, etc. $x^{(m)}$.

Hence it will be likewise for the function θ ; and since in this function the changes of α into α^{2}, α^{3}, etc. correspond to the permutations of ξ' into ξ'', into ξ''', etc. corresponding to these of x''', x^{iv}, etc., in the function *t;* it is simple from that to conclude that the quantities ξ', ξ'', ξ''', etc. will be the $m-1$ roots of an equation in ξ of degree $m-1$, of which the coefficients will be some functions of x', x'', x''', etc., which will be capable only of just as many different values as it will have permutations between the $m-2$ roots x''', x^{iv}, etc. $x^{(m)}$, that's to say of $1.2.3 \ldots (m-2)$ values, and will depend consequently on equations of degree.... $1.2.3 \ldots (m-2)$.

19. We can even show that all the coefficients only depend on a single equation of this same degree ; for if we represent that by

$$\xi^{m-1} - \mathrm{M}\xi^{m-2} + \mathrm{N}\xi^{m-3} - \text{etc.} = 0,$$

the equation in ξ, of which ξ', ξ'', ξ''', etc. are the roots ; on making in the functions M , N , etc. the $1.2.3 \ldots (m-2)$ permutations between the roots x''', x^{iv}, etc., we will have just so many similar equations which, being multiplied together, will give a final equation in ξ of degree $1.2.3 \ldots m-1$ in which the coefficients will be invariable functions of the roots x', x'', x''', and consequently determinable by the coefficients A, B, C, etc. of the proposed equation.

The equation $\xi^{m-1} - \mathrm{M}\xi^{m-2} + \mathrm{N}\xi^{m-3} - \text{etc.} = 0$, hence will be a divisor of this equation; making the division in the usual manner, and equating to zero the $m-1$ terms of the remainder, we will have just as many equations of which the first $m-2$ will give the values of N, P, etc. in terms of rational functions of M. Hence it will suffice to find the equation in M of degree $1.2.3 \ldots m-2$.

Hence if this equation may be able to be resolved, and it may suffice to know a single root therein, we shall know the values of the coefficients of the equation in ξ, which is of a degree less than one than that proposed, and the $m-1$ roots of which shall have the values of the quantities ξ', ξ'', ξ''', which enter into the expression of θ.

20. But in place of searching for the roots ξ', ξ'', ξ''', etc., it will be simpler to look for $\theta', \theta'', \theta'''$, etc. directly. It is clear that these quantities will be the roots of an equation in θ of degree $m-1$, which we will find in eliminating α from the expression of θ, by means of the equation $\alpha^m - 1 = 0$, after having removed the root 1 from that, *i.e.* from the equation:

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \text{etc.} + 1 = 0.$$

Hence this equation in θ will be freed from the root α, and its coefficients expressed by the quantities $\xi^{\mathrm{o}}, \xi', \xi''$, etc. being considered as functions of the roots x', x'', x''', etc., will be capable of only $1.2.3 \ldots (m-2)$ variations, by all the permutations possible between these roots ; for since the changes of place of x'' correspond to the substitutions of α^2, α^3, etc., in place of α, and that the quantity α has vanished from the equation in θ, it follows that in the expression of these coefficients, we will be able to consider x'' as fixed, in the same was as x'.

Without using the way of elimination, we will be able to arrive directly at this equation in θ, by means of the roots $\theta', \theta'', \theta'''$, etc., the expression of which is known ; for in representing this equation by

$$\theta^{m-1} - \mathrm{T}\theta^{m-2} + \mathrm{U}\theta^{m-3} - \text{etc.} = 0,$$

we will have, by known formulas,

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}=\theta' + \theta'' + \theta''' + \text{etc.},\\ &\mathrm{U}=\theta'\theta''+\theta'\theta'''+\theta''\theta'''+\text{etc.},\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

21. We will be able to determine these coefficients much more easily, by deducing them from the sums of powers of the successive roots θ', θ'', etc. as far as to the m^{th} power. Indeed, if we raise the polynomial successively

$$\xi^{\mathrm{o}}+\alpha\xi'+\alpha^2\xi''+\alpha^3\xi'''+\text{etc.}+\alpha^{m-1}\xi^{(m-1)}$$

to the $2^{\text{nd}}, 3^{\text{rd}}$, etc. powers, and which we denote by $\xi 2, \xi 3, \xi 4$, etc. the terms of these powers, which will not be affected at all by the quantity α, after having substituted everywhere 1 for α^m, α for α^{m+1}, and hence with the others; which further, we may make for uniformity

$$\theta^{\mathrm{o}}=\xi^{\mathrm{o}}+\xi'+\xi''+\xi'''+\text{etc.}+\xi^{(m-1)};$$

such that the quantities $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta''$, etc. correspond to the roots $1, \alpha, \beta$, etc.; it is easy to see that we will have, by the properties of these roots set out further above, $m\xi^{\mathrm{o}}, m\xi 2, m\xi 3$, etc. for the sums of the $1^{\text{st}}, 2^{\text{nd}}, 3^{\text{rd}}$, etc., powers of the quantities $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta''$, etc.

Now $\theta^{\mathrm{o}}=\mathrm{A}^m$ (n° 17); hence, if we subtract the respective powers of A^m from the quantities $m\xi^{\mathrm{o}}, m\xi 2, m\xi 3$, etc., the remainders $m\xi^{\mathrm{o}}-\mathrm{A}^m$, $m\xi 2-\mathrm{A}^{2m}$, $m\xi 3-\mathrm{A}^{3m}$, etc. will be the sums of the $m-1$ roots $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta''$, etc. of their squares, of their cubes, etc.; where we draw the sums of their products in pairs, in threes, etc., by the formulas given in the 1^{st} chapter (n° 8), so that there follows :

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}=m\xi^{\mathrm{o}}-\mathrm{A}^m,\\ &\mathrm{U}=\frac{\mathrm{T}(m\xi^{\mathrm{o}}-\mathrm{A}^m)}{2}-\frac{m\xi 2-\mathrm{A}^{2m}}{2},\\ &\mathrm{V}=\frac{\mathrm{U}(m\xi^{\mathrm{o}}-\mathrm{A}^m)}{3}-\frac{\mathrm{T}(m\xi 2-\mathrm{A}^{2m})}{3}+\frac{m\xi 3-\mathrm{A}^{3m}}{3},\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

22. Now, if we make in these expressions of the coefficients T, U, V, etc. in x', x'', x''', etc. all the permutations possible between these roots x', x'', etc. we will find for each of these coefficients only the $1.2.3 \ldots m-2$ permutations arising uniquely from the permutations between the $m-2$ roots x'', x''', etc.

Hence we will have for the determination of T an equation of this same degree, which we would be able to form by means of their roots, then we will find the values of the other coefficients U, V, etc. in terms of rational functions of T, by the method given above, relative to the coefficients of the equation ξ (n° 19).

The problem thence becomes reduced to the resolution of the equation in T of degree $1.2.3 \ldots m-2$, which will be of a degree higher than that proposed, as long as *m* shall be greater than 3. It is possible that this equation may be able to be lowered to a smaller degree, but that is what appears to me very difficult, if not impossible, to judge *à priori.*

23. With regard to the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., since they are with unity the roots of the equation $y^m-1=0$, if we divide this equation by $y-1$, in order to eliminate the root 1 , we will have an equation of degree $m-1$,

$$y^{m-1}+y^{m-2}+y^{m-3}+\text{etc.}=0,$$

of which $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. will be the $m-1$ roots.

This equation is at first, as we see, of a degree less by one than the original equation; but being of a changeable form, it can always be lowered to a degree less than half ; further, by the grand discovery of *Gauss,* we are able to resolve that with the aid of just as many equations as there are prime factors in $m-1$, and which can rise only to degrees indicated by these factors. We can even resolve that directly without passing through any intermediate equation, as we will see in the following Note.

24. We have assumed (n° 18) that the exponent *m* of the degree of equation is a prime number ; now considering the case where this exponent is a composite number. In this case, we have seen that the roots of the equation $y^m-1=0$ are of two kinds ; some are common to the equation $y^n-1=0$, *n* being a divisor of *m*, and their powers are unable to represent all the roots of the primitive equation, because they only have different values for the powers of *n;* after which, the same values will be returned always in the same order ; the others will only pertain to the equation $y^m-1=0$, and enjoy the same properties as the roots of this equation, when *m* is a prime number. Hence, it will be necessary at first to restrict the reasoning of n° 18 to these roots alone, which pertain to the equation $y^m-1=0$, and as a consequence, to modify the conclusions which we have deduced there, relative to the equation in ξ. Further, in using only these same roots for α, we cannot say that the substitution of some power of α in place of α in the series $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. $\alpha^{m-1},$ always returns the same terms, because if $m=np$, the substitution of α^n for α, never will give only the powers $\alpha^n,\ \alpha^{2n},$ etc. α^{np}, because $\alpha^{np}=1$. It arises from there that the quantities $\xi',\ \xi'',\ \xi''',$ etc. will no longer be able to be the roots of the same equation, but must depend on different equations which must be looked for separately, which will extend the calculation.

But in using the common roots of the equation $y^n - 1 = 0$, the general method itself is simplified, and the resolution of the degree *m* is itself reduced to so many equations of degrees *n* less than the exponent *m* from the prime factors; this is what we are now going to develop.

25. Thus assuming that the number *m* may have a single divisor *n,* we have seen (n° 7) that all the roots of the equation $y^n - 1 = 0$ are common to the equation $y^m - 1 = 0$; hence in the function

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{ etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

we can take one of the roots of the equation $y^n - 1 = 0$ for α.
Then we will have

$$\alpha^n = 1,\ \alpha^{n+1} = \alpha,\ \alpha^{n+2} = \alpha^2,\ \text{etc.},\ \alpha^{2n} = 1,\ \alpha^{2n+1} = \alpha,\ \alpha^{2n+2} = \alpha^2,\ \text{etc.},$$

until $\alpha^m = 1$; and the expression for *t* will be reduced to this simpler form,

$$t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}'' + \alpha^2 \mathrm{X}''' + \text{ etc.} + \alpha^{n-1} \mathrm{X}^{(n)},$$

on making, in order to abbreviate,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}' = x' + x^{(n+1)} + x^{(2n+1)} + \text{ etc.} + x^{(m-n+1)},\\
&\mathrm{X}'' = x'' + x^{(n+2)} + x^{(2n+2)} + \text{ etc.} + x^{(m-n+2)},\\
&\mathrm{X}''' = x''' + x^{(n+3)} + x^{(2n+3)} + \text{ etc.} + x^{(m-n+3)},\\
&\text{etc.},\\
&\mathrm{X}^{(n)} = x^{(n)} + x^{(2n)} + x^{(3n)} + \text{ etc.} + x^{(m)}.
\end{aligned}$$

Now considering the quantities $\mathrm{X}', \mathrm{X}'', \mathrm{X}''',$ etc. $\mathrm{X}^{(n)}$ as the roots of an equation of degree *n,* it is clear that we will be able to apply the same reasoning to the function *t* as we have done in n° 15 and n° 16, and that we will arrive at similar conclusions.

Hence, on making $t^n = \theta$, we will have, since $\alpha^n = 1$, an expression for θ of the form

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha \xi' + \alpha^2 \xi'' + \alpha^3 \xi''' + \text{etc.} + \alpha^{n-1} \xi^{(n-1)},$$

in which the quantities $\xi', \xi'', \xi''',$ etc. will be known functions of $\mathrm{X}', \mathrm{X}'', \mathrm{X}''',$ etc. which will have the property of being invariant in the simultaneous interchanges of X' into X'' into $\mathrm{X}''',$ etc., $\mathrm{X}^{(n)}$ into X'.

Knowing these quantities, we will have at once the values of the roots $X', X'', X''',$ etc., by these formulas similar to these of n° 16.

Hence, on taking $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. for the roots of the equation .... $y^n - 1 = 0$; and assuming that $\theta^o, \theta', \theta'',$ etc. shall be the values of θ which correspond to $\alpha = 1, \alpha, \beta, \gamma,$ etc., we will have

$$X' = \frac{\sqrt[n]{\theta^o} + \sqrt[n]{\theta'} + \sqrt[n]{\theta''} + \text{etc.}}{n},$$

$$X'' = \frac{\sqrt[n]{\theta^o} + \alpha^{n-1}\sqrt[n]{\theta'} + \beta^{n-1}\sqrt[n]{\theta''} + \text{etc.}}{n},$$

$$X''' = \frac{\sqrt[n]{\theta^o} + \alpha^{n-2}\sqrt[n]{\theta'} + \beta^{n-2}\sqrt[n]{\theta''} + \text{etc.}}{n},$$

etc.

where we will observe that the term $\sqrt[n]{\theta^o}$ is always equal to the sum of the roots, which is here

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = x' + x'' + x''' + \text{etc.} = A.$$

Again from that we will have there only the roots $X', X'', X''',$ etc.; in order to have the primitive roots $x', x'', x''',$ etc., we will only have to consider separately these roots which compose each of the quantities $X', X'', X''',$ etc. as the roots of an equation of degree equal to the number of these roots, and to apply there the same method.

26. When *n* is a prime number, which we can assume always on taking for *n* one of the prime factors of the number *m,* the quantities $\xi', \xi'', \xi''',$ etc. will be, as in n° 18, the roots of an equation of degree $n-1$, of which the coefficients will depend on an equation of degree $1.2.3...n-2$. This last equation will have for coefficients rational functions from these of the equation in X, of which $X', X'', X''',$ etc. are the roots. Now these are not known ; there is only these of the given equation, of which $x', x'', x''',$ etc. are the roots, which shall be known; hence it remains to be seen how these ones will depend on these others.

It is clear that on substituting for $X', X'', X''',$ etc. their values in terms of $x', x'', x''',$ etc., the coefficients in question will become known functions of the roots $x', x', x''',$ etc. ; and in order to find the equations on which these functions will depend, the difficulty will be reduced to looking for how many different values these functions will be able to adopt by all the possible permutations between the roots $x', x'', x''',$etc., $x^{(m)}$.

27. The total number of permutations among these *m* roots, is in general $1.2.3...n$; but there are some permutations which do not produce any change in the function in question, it will be necessary to divide the total number by the number of these permutations, because each permutation combining with all the others, is not to be added to the others, but multiplies them.

Now these roots $x', x^{(n+1)}$, etc., $x^{(m-n+1)}$ which enter into the expression of X', and which are of number *p,* since $m = np$, are capable of $1.2.3...p$ permutations ; but as they enter into X' under an invariable form, their permutations do not produce any change in the value of X'; consequently we will have at first the divisor $1.2.3...p$.

The expression of X'' being in the same case, will give at once the divisor $1.2.3...p$; such that we will have the divisor $(1.2.3...p)^2$, because of the two functions X' and X''; by the same reasoning , the three functions X', X'', X''', etc., will give the divisor $(1.2.3...p)^3$ and the *n* functions X', X'', X''', etc. $X^{(n)}$ will give consequently the divisor $(1.2.3...p)^n$.

Finally the n quantities X', X'', X''', etc. are capable themselves of $1.2.3\ ...n$ permutations; and since the coefficients of the equation in X, are invariable functions of these quantities, that will give again the new divisor $1.2.3\ ...n$.

From which we can conclude that the coefficients of this equation, considered as functions of the *m* roots x', x'', x''', etc., will only be capable of $\frac{1.2.3............m}{1.2.3......n\times(1.2.3...p)^n}$ different values, and as a consequence will depend only on an equation of this degree.

Hence, the coefficients of the equation of degree $1.2.3\ ...n-2$, which are rational functions of these of the equation in X, will depend on an equation of this degree.

Hence, on giving all the values to these coefficients which correspond to the roots of this last equation, and multiplying together all these resulting equations, we will have at last an equation of degree

$$\frac{1.2.3............m}{1.2.3......n\times(1.2.3...p)^n}\times 1.2.3\ ...(n-2),$$

namely,

$$\frac{1.2.3............m}{1.2.3......(n-1)n(1.2.3...p)^n};$$

this will be the equation on which the coefficients of the equation in ξ of degree $n-1$ will depend, the roots of which will have the values ξ', ξ'', ξ''', etc. Hence we can say that it is an equation of this degree which will lead to the resolution of the proposed equation in the last analysis.

28. In order to achieve the resolution of the proposed equation in *x,* it will be necessary again to express the values of its roots x', x'', x''', etc., $x^{(m)}$ from these of the roots X', X'', X''', etc. (n° 25). For that, we will consider the *p* roots $x', x^{(n+1)}$, etc., which compose the value of X', as being the roots of an equation of the p^{th} degree, and which will be of this form:

$$x^p - X'x^{p-1} + \lambda x^{p-2} - \mu x^{p-3} + \nu x^{p-4} - \text{etc.} = 0,$$

in which the coefficients $\lambda, \mu, v,$ etc. will be unknowns; but as this equation is considered to contain p of the m of the proposed equation:

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

where $m = np$, it must be a divisor of this; consequently we will only have to do an ordinary division, on assuming no affected terms $x^{p-1}, x^{p-2},$ etc. in the remainder. We will have, by this means, p equations in $\mathrm{X}', \lambda, \mu,$ etc. of which the first $p-1$ will give the values of $\lambda, \mu,$ etc. in terms of X', by linear equations. Hence X' being known, we will have also $\lambda, \mu,$ etc., and it will no longer be a question of resolving this equation of degree p. Likewise, on substituting the value of X'' in place of that for X', we will have the equation which will give the roots $x'', x^{(n+2)}, x^{(2n+2)},$ etc., and hence so forth.

29. We see there that this last method returns to decompose the equation of degree $m = np$ into n equations of degree p; but if, for this decomposition, we may follow the ordinarily method, it would be necessary to resolve an equation of degree

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p},$$

as we have seen in Note X; in place of which we ask only for the resolution of degree

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}{(n-1)n(1.2.3\ldots\ldots\ldots p)^2},$$

which is always less than the preceding one.

Let $m = 4, n = 2, p = 2$, there degrees will become

$$\frac{4.3}{1.2} = 6, \text{ et } \frac{1.2.3.4}{2(2)^2} = 3,$$

Let $m = 6, n = 2, p = 3$, we will have

$$\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20, \quad \frac{1.2.3.4.5.6}{2(1.2.3)^2} = 10;$$

and if we may make $n = 3, p = 2$, we will have

$$\frac{6.5}{1.2} = 15, \quad \frac{1.2.3.4.5.6}{2.3(1.2.3)^2} = 15,$$

and hence so forth.

30. Applying the preceding theory to the equations of the second, third, and fourth degrees.

At first there shall be the equation of the second degree

$$x^2 - \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

of which the roots will be x' and x''.

We have here $m = 2$, which we can regard as a prime number; taking for α a root of the equation $y^2 - 1 = 0$, we will have

$$t = x' + \alpha x''$$

from which we deduce

$$\theta = t^2 = x'^2 + x''^2 + 2\alpha x'x'' \left[= \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi'\right],$$

since $\alpha^2 = 1$; then [$\xi^{\mathrm{o}} = x'^2 + x''^2$, and] $\xi' = 2x'x''$, an invariant function of the roots x' and x''.

Indeed, we have $\mathrm{B} = x'x''$, and as a consequence $\xi' = 2\mathrm{B}$. Now the equation $y^2 - 1 = 0$ gives $y = 1,\ -1$; hence $\alpha = -1$, and (n° 17) $\theta' = \mathrm{A}^2 - 2\xi' = \mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B}$. Hence the expressions of the two roots will be (n^os^ 16, 17)

$$x' = \frac{\mathrm{A} + \sqrt{(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B})}}{2},$$
$$x'' = \frac{\mathrm{A} - \sqrt{(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B})}}{2},$$

as known from ancient times.

31. Now let the general equation of the third degree be :

$$x^3 - Ax^2 + \mathrm{B}x - \mathrm{C} = 0,$$

the roots of which shall be $x',\ x'',\ x'''$.

We have here $m = 3$ a prime number ; the function *t* hence will be, on taking for α a root of $y^3 - 1 = 0$,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$$

and the function $\theta = t^3$ will be, since $\alpha^3 = 1$,

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'',$$

where we have [for the coefficients of $\alpha^3,\ \alpha,\ \alpha^2$] :

$$\xi^{o} = x'^3 + x''^3 + x'''^3 + 6x'x''x''',$$
$$\xi' = 3(x'^2x'' + x''^2x''' + x'''^2x'),$$
$$\xi'' = (x'^2x''' + x''^2x' + x'''^2x'').$$

The quantities ξ', ξ'' hence will be the roots of an equation of the second degree, the coefficients of which will depend on an equation of degree $1.2...m-2$, *i.e.* of the first degree, and which as a consequence will be rational functions of these roots of the equation proposed.

Indeed, we see that by all the permutations possible between the three roots x', x'', x''' the two functions ξ', ξ'' remain the same, or change into one another; such that assuming these to be the roots of the equation

$$\xi^2 - \mathrm{M}\xi + \mathrm{N} = 0,$$

we will have $\mathrm{M} = \xi' + \xi''$, $\mathrm{N} = \xi'\xi''$; invariant functions of x', x'', x''' and consequently determinable by the coefficients A, B, C of the proposed equation.

Indeed, we find easily, by the formulas of Note X (no 4*),*

$$\mathrm{M} = \xi' + \xi'' = 3\mathrm{AB} - 9\mathrm{C},$$
$$\mathrm{N} = \xi'\xi'' = 9\mathrm{B}^3 + 9(\mathrm{A}^3 - 6\mathrm{AB})\mathrm{C} + 81\mathrm{C}^2.$$

Hence we will have only to resolve an equation of the second degree

$$\xi^2 - (3\mathrm{AB} - 9\mathrm{C})\xi + 9\mathrm{B}^3 + 9(\mathrm{A}^3 - 6\mathrm{AB})\mathrm{C} + 81\mathrm{C}^2 = 0,$$

for which we will take the two roots for the values of ξ' and ξ''.
Then making (n° 17)

$$\theta' = \mathrm{A}^3 + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^2 - 1)\xi'',$$
$$\theta'' = \mathrm{A}^3 + (\beta - 1)\xi' + (\beta^2 - 1)\xi'',$$

and substituting, into the formulas of n° 16, 3 in place of *m,* and A in place of $\sqrt[3]{\theta^{o}}$ (n° 17), we will have

$$\left.\begin{aligned} x' &= \tfrac{\mathrm{A}+\sqrt[3]{\theta'}+\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x'' &= \tfrac{\mathrm{A}+\alpha^2\sqrt[3]{\theta'}+\beta^2\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x''' &= \tfrac{\mathrm{A}+\alpha\sqrt[3]{\theta'}+\beta\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \end{aligned}\right\} \text{ or rather } \left\{\begin{aligned} x' &= \tfrac{\mathrm{A}+\sqrt[3]{\theta'}+\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x'' &= \tfrac{\mathrm{A}+\beta\sqrt[3]{\theta'}+\alpha\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x''' &= \tfrac{\mathrm{A}+\alpha\sqrt[3]{\theta'}+\beta\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \end{aligned}\right\}$$

since $\beta=\alpha^2$, and consequently $\beta^2=\alpha$.

And the two quantities $\alpha,\ \beta$ will be (no 23) the roots of the equation $y^2+y+1=0$, which gives

$$\alpha=\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \beta=\tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

32. But we will be able to have the expressions more simply, by means of the equation in θ, which hence will be of the second degree.

On representing this equation by

$$\theta^2-\mathrm{T}\theta+\mathrm{U}=0,$$

we will find the values of T and U by the formulas given above (n° 21).

Hence we will have

$$\mathrm{T}=3\xi^{\mathrm{o}}-\mathrm{A}^3,$$
$$\mathrm{U}=\tfrac{\mathrm{T}(3\xi^{\mathrm{o}}-\mathrm{A}^3)}{2}-\tfrac{3\xi2-\mathrm{A}^6}{2},$$

where ξ2 is the first term removed from α in the expansion of $(\xi^{\mathrm{o}}+\alpha\xi'+\alpha^2\xi'')^3$; and we find, since $\alpha^3=1$,

$$\xi2=(\xi^{\mathrm{o}})^2+2\xi'\xi''.$$

Now we have (n° 17) $\xi^{\mathrm{o}}=\mathrm{A}^3-\xi'-\xi''=\mathrm{A}^3-\mathrm{M}$; then since $\xi'\xi''=\mathrm{N}$, we will have

$$\mathrm{T}=2\mathrm{A}^3-3\mathrm{M},$$
$$\mathrm{U}=\tfrac{\mathrm{T}^2}{2}-\tfrac{3(\mathrm{A}^3-\mathrm{M})+6\mathrm{N}-\mathrm{A}^6}{2};$$

and substituting the values of M and N found above, we will have

$$\mathrm{T}=2\mathrm{A}^3-9\mathrm{AB}+27\mathrm{C},$$
$$\mathrm{U}=\mathrm{A}^6-9\mathrm{A}^4\mathrm{B}+27\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2-27\mathrm{B}=(\mathrm{A}^2-3\mathrm{B})^3.$$

Hence the equation in θ will be

$$\theta^2-(2\mathrm{A}^3-9\mathrm{AB}+27\mathrm{C})\theta+(\mathrm{A}^2-3\mathrm{B})^3=0,$$

the two roots of which being taken for θ′ and θ″, and substituted into the preceding expressions for $x',\ x'',\ x'''$, etc., we will have a simper resolution of the equation of the third degree.

33. We come to the equation of the fourth degree represented by the formula

$$x^4 - \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 - \mathrm{C}x + \mathrm{D} = 0.$$

Since we have here $4 = 2.2$, it is simpler to follow the method of n° 25; on making $n = 2$, we will take for α one root of the equation $y^2 - 1 = 0$, such that $\alpha^2 = 1$. Hence we will have

$$t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}' = x' + x'',\ \mathrm{X}'' = x'' + x^{iv}.$$

From that, we will have

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' \ \text{ and } \ \xi^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2,\ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

Hence the equation in ξ, of which ξ' is a root, will be of degree $n - 1$ only, that is, of the first degree, and its coefficients will depend only on an equation of degree $\frac{1.2.3.4}{2(2)^2} = 3$ (n° 27) ; such that we will have an equation of the third degree in ξ', such that

$$\xi'^3 - \mathrm{M}\xi'^2 + \mathrm{N}\xi' - \mathrm{P} = 0.$$

The roots of this equation will be the values of

$$\xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}'' = 2(x' + x''')(x'' + x^{iv}),$$

which will arise from the permutations between the three roots ; and indeed it is easy to see that the values will only be the three following:

$$2(x' + x''')(x'' + x^{iv}),$$
$$2(x' + x'')(x''' + x^{iv}),$$
$$2(x' + x^{iv})(x'' + x''').$$

After these roots, we will be able to form the coefficients M, N, which will be found expressed by the invariant functions of x', x'', x''', x^{iv}, and will be determinable in A, B, C, D.

34. To facilitate this investigation, we will note that we have, by the proposed equation,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= x'x'' + x'x''' + x'x^{iv} + x''x''' + x''x^{iv} + x'''x^{iv} \\
&= (x' + x''')(x'' + x^{iv}) + x'x''' + x''x^{iv} \\
&= \left(x' + x''\right)(x''' + x^{iv}) + x'x'' + x'''x^{iv} \\
&= (x' + x^{iv})(x'' + x''') + x'x^{iv} + x''x''';
\end{aligned}$$

from which it follows that if we make $\xi' = 2\mathrm{B} - 2u$, the equation in ξ' will be transformed into an equation in *u,* of which the roots will be

$$x'x''' + x''x^{iv},\ x'x'' + x'''x^{iv},\ x'x^{iv} + x''x'''.$$

Let

$$u^3 - \mathrm{R}u^2 + \mathrm{S}u - \mathrm{T} = 0$$

be this equation in *u,* we will have

$$\mathrm{R} = x'x''' + x''x^{iv} + x'x'' + x'''x^{iv} + x'x^{iv} + x''x''' = \mathrm{B},$$

and we will find in the same manner, on using the formulas given in Note X, the following values :

$$\mathrm{S} = \mathrm{AC} - 4\mathrm{D},\ \mathrm{T} = (\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B})\mathrm{D} + \mathrm{C}^2.$$

Designating any one of the roots of the equation in *u* by u' ,

$$u^3 - \mathrm{B}u^2 + (\mathrm{AC} - 4\mathrm{D})u - (\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B})\mathrm{D} - \mathrm{C}^2 = 0,$$

we will have $\xi' = 2\mathrm{B} - 2u'$; and from that, on making $\alpha = -1$ and $n = 2,$ we will have

$$\theta' = \mathrm{A}^2 - 2\xi' = \mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B} + 4u',$$

and finally,

$$\mathrm{X}' = \tfrac{\mathrm{A} + \sqrt{\theta'}}{2},\ \mathrm{X}'' = \tfrac{\mathrm{A} - \sqrt{\theta'}}{2}.$$

35. Now, as $\mathrm{X}' = x' + x'''$, we can consider x' and x''' as the two roots of the equation of the second degree (n° 28),

$$x^2 - \mathrm{X}'x + \lambda = 0 \ ;$$

and in order to have λ, it will only have to divide the proposed equation of the fourth degree by this ; the first term of the remainder equated to zero will give

$$\lambda=\frac{X'^3-AX'^2+BX'-C}{2X'-A};$$

hence, on resolving the equation of the second degree, we will have

$$x'=\frac{X'+\sqrt{(X'^2-4\lambda)}}{2},\ x'''=\frac{X'-\sqrt{(X'^2-4\lambda)}}{2};$$

and since $X''=x''+x^{iv}$, we will have the roots x'', x^{iv}, on changing X' into X'' in these expressions, which demands only that the sign of the root $\sqrt{\theta'}$ be changed.

This solution returns to that of *Descartes,* in which we resolve the equation of the fourth degree into two of the second, by means of one of the third.

36. We can simplify these formulas by substituting at first ….
$\frac{\theta-A^2+4B}{4}$ in place of *u,* which will give this equation in θ,

$$\theta^3-(3A^2-8B)\theta^2+(3A^4-16A^2B+16B^2+16AC-64D)\theta-(A^3-4AB+8C)^2=0,$$

of which θ' will be any one of the roots required; but on using these three roots, we can have all the four roots x', x'', x''', x^{iv} at once.
For on making $\alpha=-1$, we have

$$t=x'+x'''-x''-x^{iv},$$

and consequently,

$$\theta=t^2=(x'+x'''-x''-x^{iv})^2.$$

This expression of θ is capable of these three different values only:

$$(x'+x'''-x''-x^{iv})^2,\ (x'+x''-x'''-x^{iv})^2,\ (x'+x^{iv}-x''-x''')^2,$$

which consequently will be the three values of the equation in θ.

Calling the three values of this equation $\theta', \theta'', \theta'''$; hence we will have the three equations :

$$x'+x'''-x''-x^{iv}=\sqrt{\theta'},$$
$$x'+x''-x'''-x^{iv}=\sqrt{\theta''}$$
$$x'+x^{iv}-x''-x'''=\sqrt{\theta'''}.$$

which, being combined with the equation

$$x' + x'' + x''' + x^{iv} = \mathrm{A},$$

which corresponds to $\alpha = 1$, will serve to determine each of the four roots x', x'', x''', x^{iv}, and we will find:

$$x' = \frac{\mathrm{A}+\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x'' = \frac{\mathrm{A}-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x''' = \frac{\mathrm{A}+\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x^{iv} = \frac{\mathrm{A}-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4}.$$

37. This solution, the simplest of all, is due to *Euler*, but is shows a kind of ambiguity, since each of the square roots can be taken plus or minus. Indeed, we see that on changing the sign of any of these roots, or the signs of three roots at once, we have another system of roots, represented by the formulas :

$$x' = \frac{\mathrm{A}-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x'' = \frac{\mathrm{A}+\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x''' = \frac{\mathrm{A}-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x^{iv} = \frac{\mathrm{A}+\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4}.$$

Otherwise, on simultaneously changing only the signs of two roots, we have always the same system of roots. Hence, in order to know which of these two systems of roots ought to be used, we will only have to determine the sign which the product $\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}$ must have.

Now the equation in θ gives

$$\theta'\times\theta''\times\theta''' = (\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{AB} + 8\mathrm{C})^2;$$

hence, extracting the square root

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''} = \pm(\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{AB} + 8\mathrm{C}),$$

and replacing for $\sqrt{\theta'}$, $\sqrt{\theta''}$, $\sqrt{\theta'''}$ their values in x', x'', etc.,

$$(x' + x''' - x'' - x^{iv})(x' + x'' - x''' - x^{iv})(x' + x^{iv} - x'' - x''')$$
$$= \pm(\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{AB} + 8\mathrm{C}).$$

In order to determine the ambiguous sign, we only have to consider a particular case, for example, that where the three roots x'', x''', x^{iv} are zero. In this case, we will have $\mathrm{A} = x',\ \mathrm{B} = 0,\ \mathrm{C} = 0,\ \mathrm{D} = 0,$ and the preceding equation will become $x'^3 = \pm \mathrm{A}^3$, from which we see that it is necessary to take the upper sign to render that identical. Hence we will have necessarily

$$\sqrt{\theta'} \times \sqrt{\theta''} \times \sqrt{\theta'''} = \mathrm{A}^3 - 4\mathrm{AB} + 8\mathrm{C},$$

From which it must be concluded that when the quantity

$$\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{AB} + 8\mathrm{C},$$

will have a positive value, it will be required to use the first system of roots ; and that when this quantity will have a negative value, it will be necessary to use the second system, in giving always a positive value to the roots $\sqrt{\theta'},\ \sqrt{\theta''},\ \sqrt{\theta'''}$. (See the correction Note left by Lagrange for this article).

38. After the fourth degree, the method, though applicable in general, leads only to the resolution of equations of degrees higher than to that of the proposed equation.

For the fifth degree, the general formula shall be

$$x^5 - \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 - \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x - \mathrm{E} = 0,$$

the roots of which shall be $x',\ x'',\ x''',\ x^{iv},\ x^{v}$.

We will have here the prime number $m = 5$, and we will make

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \alpha^4 x^{v},$$

where α is one of the roots of the equation $y^5 - 1 = 0$, other than unity.

Then we will make $\theta = t^5$, and we will arrive at an equation in θ of degree 1.2.3.4, but which will be decomposable into 2.3 equations each of the fourth degree; in such a way that in representing each of the equations by the formula

$$\theta^4 - \mathrm{T}\theta^3 + \mathrm{U}\theta^2 - \mathrm{X}\theta + \mathrm{Y} = 0,$$

the coefficients T, U , etc. each will be capable of six different values only, among all the permutations possible among the five roots $x',\ x'',\ x''',\ x^{iv},\ x^{v},$ of which these coefficients are functions; and these six values as a consequence will depend only on an equation of the sixth degree ; such that in the final analysis, the resolution of the equation of the fifth degree will be reduced to that of an equation of the sixth degree. It is hence useless to undertake this calculation of which one can, for the remainder, see the beginning in the Memoirs of the Berlin Academy (for the year 1771, p. 130 and the following).

39. We have considered only so far resolving functions of the form $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{etc.}$; but the principles which we have used to find directly the equation of which these functions shall be the roots, can be applied to any other function of the roots x', x'', x''', etc. of the proposed equation. It is only a matter of finding all the different forms for which the proposed function is capable by all the permutations of the roots x', x'', x''', etc. amongst themselves, and form an equation which may have these different forms for roots. The coefficients of this equation being invariant functions of these roots, will be also invariant functions of the roots of the proposed equations, and will be able consequently to be determined by rational functions of these coefficients, which we will always be able to find by the formulas given in Note X.

We might be able to think that each different function of the roots of the same equation, would be able to depend also on a different equation ; that indeed is the case for all the functions which are not alike ; but for those which I call similar, and of which the property consists in that, by the same permutations, they change together, or remain the same, we can make them all depend on the same equation, because we can always express them by some rational functions amongst themselves.

I have given, in the Berlin Memoirs for the year 1771 (p. 203 etc.), a general method for the determination of these similar functions of the roots of some given equation ; I will not refer to this here, in order not to lengthen this Note.

40. I do not know how to finish that, without saying a word about the beautiful work which the late *Vandermonde* has given in the *Mémoires de l' Académie des Sciences de Paris* (for the year 1771), on the general resolution of equations. His work and mine have been composed and read about the same time, the one at the French Academy of Sciences of Paris, and the other at that of Berlin. *Vandermonde,* on starting from a general principle, has arrived at results similar to these which have led me to the examination of the different methods known just then. As this comparison is interesting for analysis, we will be pleased to find these here.

The principle in question is that the analytic expression of the roots must be a function of these roots, such that it can be equally indifferent to each of the roots, and which can only be a function of their sum, to the sum of their products in pairs, to these of their products in triples, and hence so forth ; finally that this function likewise may be able to be determined by the single coefficients of the equation given.

41. On examining, conforming to this principle, the known resolution of the equation of the second degree, *Vandermonde* observed that the function which gives this resolution is of the form

$$\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2},$$

a and *b* being the two roots of the equation. Indeed , because of the ambiguity of the square root, this expression becomes indifferently either *a* or *b,* and at the same time the two quantities $a+b$ and $(a-b)^2$ are expressible by the coefficients of the equation $x^2 - Ax + \mathrm{B} = 0$; since we have :

$$a+b=\mathrm{A},\ (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab\ = \left(a+b\right)^2 - 4ab = \mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B}\,;$$

which gives the known resolution $\frac{\mathrm{A}\pm\sqrt{(\mathrm{A}^2-4\mathrm{B})}}{2}$.

The author then applies the same principle to equations of the third degree, and he finds that the function which gives their resolution, can be reduced to the form :

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3}+\sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3}}{3},$$

where *a, b, c* are the three roots of the equation, and $r',\ r''$ the values which satisfy with unity, the equation $r^3-1=0$. [*i.e.* the roots are 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.] Indeed, this expression becomes at first equal to *a,* on account of $1+r'+r''=0$; then, as each cube root can be multiplied by r' or r'', the same expression will become *b,* or *c,* on multiplying the two roots by r' and r'', or by r'' and r', since $r''=r'^2$ (n° 5). From that *Vandermonde* concludes that for any number of roots *m* , the function which will become indifferently *a,* or *b,* or *c,* etc., will be of the form

$$\frac{1}{m}\Big[(a+b+c+\text{etc.})+\sqrt[m]{(a+r'b+r''c+\text{etc.})^m}$$
$$+\sqrt[m]{(a+r'^2b+r''^2c+\text{etc.})^m}+\sqrt[m]{(a+r'^3b+r''^3c+\text{etc.})^m}+\text{etc.}\Big],$$

$r',\ r'',\ r''',$ etc. being with unity the roots of the equation $r^m-1=0$.

If we compare this expression with that of the root x' in n° 16, we will see their agreement easily, on considering that θ is in general $=(x'+\alpha x''+\alpha^2 x'''+\text{etc.})$ (no 15), and that $\theta',\ \theta''$, etc. are the values of θ which correspond to the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. of the equation $y^m-1=0$, which are designated by $r',\ r'',\ r''',$ etc. in *Vandermonde's* analyses, and that when *m* is a prime number, all the roots are represented equally by $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3$, etc., by $1,\ \beta,\ \beta^2,\ \beta^3$, etc. (n° 5).

In order to determine the values of $(a+r'b+r''c+\text{etc.})^m$ in terms of functions of the coefficients of the given equation, which consists of all the difficulty of the problem, the author uses an ingenious algorithm, based on a particular notation; he does not search *à priori* , as we have done, for the degree of the equation on which this determination must depend ; but he has given for the equations of the third and of the fourth degree their complete resolution ; and for these of the fifth and sixth degrees, the general formulas which he calls *types,* and which make apparent that the resolution of the equation of the fifth degree depends in the final analysis on an equation of the sixth degree, and that the resolution of this depends on the resolution of an equation of the fifteenth or of the tenth degree, as we have now found.

42. *Vandermonde* has noted as well the simplifications of which the general formula of the roots is capable in the degrees for which the exponent is a composite number ; for example, he finds that, for equations of the fourth degree, the roots *a, b, c, d* can be represented by the function

$$\frac{1}{4}[(a+b+c+d+\sqrt{(a+b-c-d)^2} +\sqrt{(a+c-b-d)^2}+\sqrt{(a+d-b-c)^2}\,],$$

on taking the plus and minus square roots, and from that he has deduced the resolution given above (n^o 36).

As the method of *Vandermonde* arises from a principle based on the nature of the equations, and which in this regard is more direct than that which we have presented in this Note, we can consider the common results of these methods on the general resolution of equations which exceed the fourth degree, as the necessary consequences of the general theory of equations.

NOTE XII.

Sur la manière de transformer toute équation, en sorte que les termes qui contiennent l'inconnue, aient le même signe, et que le terme tout connu ait un signe différent.

J'ai observé dans l'Introduction, que les méthodes de *Viete* et de *Harriot,* pour la résolution des équations numériques, ne peuvent s'appliquer d'une manière certaine qu'aux équations dont tous les termes qui contiennent l'inconnue, ont le même signe, et le terme tout connu a un signe différent, et j'ai dit qu'on peut toujours ramener à cette forme toute équation, pourvu qu'on ait deux limites d'une de ces racines, lesquelles soient assez rapprochées pour que toutes les autres racines réelles, ainsi que les parties réelles des racines imaginaires, s'il y en a, tombent hors de ces limites. Comme j'ignore si cette transformation est connue, je crois devoir l'exposer ici, afin que ceux qui désireraient se servir des anciennes méthodes puissent toujours les employer avec succès.

1. Soient *a, b* les deux limites données, ou connues d'une manière quelconque , *a* la limite en moins , *b* la limite en plus. En supposant que *x* soit l'inconnue de l'équation proposée, on fera $x=\frac{a+by}{1+y}$, et après les substitutions et les réductions, on aura une équation transformée en *y,* du même degré que l'équation en *x,* qui aura la forme demandée , si la limite *a* est assez près de la valeur de la racine.
Car soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. les racines de l'équation proposée en *x,* et α la racine dont *a* et *b* sont les limites. Puisque $x=\frac{a+by}{1+y}$, on aura $y=\frac{x-a}{b-x}$; donc les racines de l'équation en *y* seront $\frac{\alpha-a}{b-\alpha},\ \frac{\beta-a}{b-\beta},\ \frac{\gamma-a}{b-\gamma},$ etc. Or on a par l'hypothèse $\alpha>a<b$*;* donc, $\alpha-a>0,\ b-\alpha>0;$ donc la racine $\frac{\alpha-a}{b-\alpha}$ sera positive et d'autant plus petite, que la différence entre la limite *a* et la racine α sera moindre. Ensuite, comme les autres racines $\beta,\ \gamma,$ etc. sont supposées tomber hors des limites *a* et *b*, si $\beta<a$, on aura aussi nécessairement $\beta<b$*;* donc $\beta-a<0,$ et $b-\beta>0;$ donc la racine $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ sera nécessairement négative. Si, au contraire, $\beta>b$*,* on aura aussi $\beta>a$; donc $\beta-a>0$, et $b-\beta<0$; donc $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ sera encore une quantité negative. Donc la racine $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ sera, dans tous les cas, négative. Il en sera de même de toute autre racine, comme $\frac{\gamma-a}{b-\gamma}$, qui correspond à une racine réelle γ de l'équation en *x.*

Mais supposons que β et γ soient imaginaires, elles seront nécessairement de la forme $\rho+\sigma\sqrt{-1},\ \rho-\sigma\sqrt{-1},\ \rho$ et σ étant des quantités réelles (Note IX) ; donc faisant $\beta=\rho+\sigma\sqrt{-1},$ la racine $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ deviendra $\frac{\rho-a+\sigma\sqrt{-1}}{b-\rho-\sigma\sqrt{-1}}$; multiplions le haut et le bas par $\rho-a+\sigma\sqrt{-1},$ on aura $\frac{(\rho-a)(b-\rho)-\sigma^2+(b-a)\sigma\sqrt{-1}}{(b-\rho)^2+\sigma^2}.$

Mais on suppose que la partie réelle p tombe aussi hors des limites a et b; donc si $\rho<a$, on aura aussi $\rho<b$; par conséquent $\rho-a<0,\ b-\rho>0$; donc la quantité $(\rho-a)(b-\rho)<0;$ sera, dans tous les cas, négative.

Donc, puisque σ^2 et $(b-\rho)^2$ sont essentiellement des quantités positives, la racine $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ deviendra, dans ce cas, de la forme $-\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles, et P étant essentiellement positive. De même, en faisant $\gamma=\rho-\sigma\sqrt{-1}$, la racine $\frac{\gamma-a}{b-\gamma}$ deviendra $-\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1}$, et ainsi des autres racines imaginaires.

Donc, en prenant des quantités positives $p, q, r,$ etc., P, Q, R, etc., les racines réelles de l'équation en x donneront dans la transformée en y les racines réelles $p,\ -q,\ -r,$ etc., et les racines imaginaires de la même équation donneront dans la transformée les racines $-\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},\ -\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1},\ -\mathrm{R}+\mathrm{S}\sqrt{-1},\ -\mathrm{R}-\mathrm{S}\sqrt{-1},$ etc. Donc la transformée en y sera formée des facteurs

$$y-p,\quad y+q,\quad y+r,\quad \text{etc.}\qquad y+\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$
$$y+\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},\ y+\mathrm{R}-\mathrm{S}\sqrt{-1},\ y+\mathrm{R}+\mathrm{S}\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Or, les deux facteurs imaginaires $y+\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1}$ et $y+\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$, donnent le facteur double réel $y^2+2\mathrm{P}y+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2$, et ainsi des autres.
Donc l'équation en y sera

$$(y-p)(y+q)(y+r)(y^2+2\mathrm{P}y+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)(y^2+2\mathrm{R}y+\mathrm{R}^2+\mathrm{S}^2)=0,$$

2. Considérons le produit de tous ces facteurs, excepté le premier, $y-p$; comme tous les termes de ces facteurs sont positifs, il est visible que leur produit, ordonné par rapport à y, ne pourra contenir que des termes positifs. Le produit sera donc de la forme

$$y^{n-1}+\mathrm{A}y^{n-2}+\mathrm{B}y^{n-3}+\ \text{etc.}+\mathrm{K},$$

où les coefficiens A, B, C, etc. K seront tous positifs, sans qu'aucun puisse être nul. Multiplions maintenant ce polynome par le facteur $y-p$, on aura

$$y^n+(\mathrm{A}-p)y^{n-1}+(\mathrm{B}-p)y^{n-2}+(\mathrm{C}-p)y^{n-3}+\text{ etc.}-\mathrm{K}p=0,$$

pour l'équation en *y.*

On voit ici que le dernier terme $-\mathrm{K}p$ est essentiellement négatif, et que les termes précédens seront tous positifs, si l'on a $\mathrm{A}>p,\ \mathrm{B}>\mathrm{A}p,\ \mathrm{C}>Bp,$ etc. Comme en rapprochant la limite a de la racine α, la valeur de p, qui est $\frac{\alpha-a}{b-\alpha}$, peut devenir aussi petite qu'on voudra, il est clair qu'on pourra toujours prendre a telle que l'on ait $\mathrm{P}<\mathrm{A},<\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},<\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},$etc., ce qui rendra tous les termes positifs, excepté le dernier.

On ne doit pas craindre qu'en diminuant ainsi la valeur de p, les valeurs de $q, r,$ etc. , P, Q, etc. diminuent en même temps, de manière à devenir nulles avec P. Car en fàisant $a=\alpha$, ce qui donne $p=0$, 1a va1eur de q, que est $\frac{\beta-a}{b-\beta}$ deviendra $-\frac{\beta-a}{b-\beta}$; et les valeurs de P et Q, qui sont $-\frac{(\rho-a)(b-\rho)-\sigma^2}{(b-\rho)^2+\sigma^2}$ et $\frac{(b-a)\sigma}{(b-\rho)^2+\sigma^2}$ deviendront $\frac{(\rho-a)(b-\rho)-\sigma^2}{(b-\rho)^2+\sigma^2}$ et $\frac{(b-a)\sigma}{(b-\rho)^2+\sigma^2}$, et ainsi des autres.

Donc, on est assuré que la substitution de $\frac{a+by}{1+y}$ au lieu de x, donnera une transformée en y qui aura la condition demandée, pourvu que la limite a en moins soit assez près de la racine dont elle est limite; ce qu'on pourra toujours obtenir en essayant sucessivement pour a des valeurs grandes.

3. On a trouvé dans le chap. IV (n° 27), que l'équation $x^3-7x+7=0$ a trois racines, deux positives et une négative ; et que les deux racines positives sont exprimées par des fractions continues, dont les termes sont 1 , 1 , 2, 4, etc. et 1 , 2, 1 , 4, etc. ; de là on peut former ces fractions convergentes vers les deux racines

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{22}{13},\ \text{etc.},$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{19}{14},\ \text{etc.}$$

On voit d'abord que 1 et 2 sont deux limites de la première racine; mais, comme la seconde racine est renfermée entre les nombres 1 et $\frac{3}{2}$, elle se trouve aussi nécessairement renfermée entre les mêmes limites ; on prendra donc les limites suivantes 2 et $\frac{5}{3}$,

et l'on fera $a=\frac{5}{3},\ b=2$, et par conséquent $x=\frac{\frac{5}{3}+2y}{1+y}=\frac{5+6y}{3(1+y)}$.

Mais, puisque les multiples de y ne changent pas les signes de l'équation en $y,$ on pourra faire simplement $x=\frac{5+2y}{3+y}$, en mettant y pour $3y$. On trouvera ainsi la transformée

$$y^3+4y^2+3y-1=0,$$

qui est, comme l'on voit, à l'état demandé.

De même, si l'on prend pour l'autre racine les limites $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$, en faisant $a=\frac{4}{3}$ et $b=\frac{3}{2}$, on aura la substitution $x=\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}y}{1+y}=\frac{8+9y}{6(1+y)}$, ou bien, en mettant simplement y au lieu de $3y$, $x=\frac{8+3y}{6+2y}$, et l'on trouvera la transformée

$$y^3+8y^2+4y-8=0,$$

qui a aussi la forme demandée.

Les limites que nous avons employées ont conduit directement aux transformées que l'on cherchait, mais si l'on avait pris, par exemple, pour la première racine les limites 2 et $\frac{3}{2}$ qui ont également la propriété qu'aucune autre racine s'y trouve comprise, puisque l'autre racine réelle est moindre que $\frac{3}{2}$, on aurait eu $a=\frac{3}{2}$, $b=2$; ce qui aurait donné la substitution $x=\frac{\frac{3}{2}+2y}{1+y}=\frac{3+4y}{2(1+y)}$, ou bien, en mettant y pour $2y$, $x=\frac{3+2y}{2+y}$, et l'on aurait trouvé la transformée

$$y^3+y^2-2y-1=0,$$

qui n'a pas encore la forme demandée, parce que la racine positive se trouve trop grande. Mais, sans recourir à une nouvelle substitution en augmentant la valeur de *a,* il suffira de diminuer toutes les racines d'une même quantité *i,* en faisant $y=z+i$, et chercher ensuite par des essais une valeur de *i* qui satisfasse aux conditions qu'on demande. On aura ainsi cette transformée

$$z^3+(3i+1)z^2+(3i^2+2i-2)z+i^3+i^2-2i-1=0,$$

et il s'agira de prendre *i* positif, et tel que $3i^2+2i>2$ et $i^3+i^2<2i+1$. On voit tout de suite que $i=1$ satisfait , et l'on a la transformée

$$z^3+4z^2+3z-1=0,$$

qui est la même que la transformée en *y* trouvée d'abord.

4, Nous avons vu dans l'article III du chapitre V (n° 72), que si $\frac{\pi}{\pi'}$ et $\frac{\rho}{\rho'}$ sont deux fractions convergentes vers une des racines de l'équation en *x,* la transformée en *t* qui doit servir à trouver la fraction suivante, résulte directement de la substitution de $\frac{\rho t+\pi}{\rho' t+\pi'}$, au lieu de *x* dans l'équation proposée. Faisons $t=\frac{\pi' y}{\rho'}$, on aura

$$x=\frac{\frac{\rho\pi' y}{\rho'}+\pi}{\pi'(y+1)}=\frac{\frac{\rho}{\rho'}y+\frac{\pi}{\pi'}}{y+1}.$$

Cette substitution est, comme l'on voit, analogue à celle que nous avons employée ci-dessus, en prenant $\frac{\pi}{\pi'}$ et $\frac{\rho}{\rho'}$ pour les deux limites que nous avons nommées *a* et *b.*

Or, comme deux fractions consécutives sont elles-mêmes des limites alternativement plus grandes et plus petites que la racine cherchée, et qui se resserrent continuellement, il s'ensuit que les transformées qui répondent aux fractions plus petites que la racine, approcheront de plus en plus d'avoir les conditions nécessaires pour pouvoir être de la forme proposée; et les transformées intermédiaires auront la même propriété, en y substituant $\frac{1}{y}$ au lieu de *y;* car si $\frac{\pi}{\pi'} > \frac{\rho}{\rho'}$, l'expression de *x* devient, par cette substitution, $\frac{\frac{\rho}{\rho'}y+\frac{\pi}{\pi'}}{y+1}$.

La différence entre les deux fractions $\frac{\pi}{\pi'}$ et $\frac{\rho}{\rho'}$ étant $\frac{1}{\pi'\rho'}$, lorsque cette différence sera devenue moindre que la plus petite différence entre les racines de l'équation proposée, c'est-à-dire moindre que la limite $\frac{1}{\mathrm{L}}$ (Note IV), on sera assuré qu'il ne pourra tomber entre ces fractions qu'une seule racine; mais, à l'égard des parties réelles des racines imaginaires, il ne sera pas facile de s'assurer *à priori* qu'elles tombent hors de ces fractions, à moins de former l'équation dont les racines seraient $\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}$, et de chercher ensuite une limite plus petite que chacune de ces racines, pour la comparer avec la même différence $\frac{1}{\pi'\rho'}$.

Au reste, quoique les fractions consécutives fournissent des limites qui se resserrent de plus en plus autour de la même racine, il est possible que les transformées n'acquièrent jamais la forme dont il s'agit, par la raison que les deux limites se resserrant à la fois, la racine positive peut aller en augmentant au lieu de diminuer. Mais, lorsqu'on sera parvenu à des fractions entre lesquelles il n'y aura qu'une seule racine réelle et aucune des parties réelles des racines imaginaires, il suffira de diminuer toutes les racines de la transformée correspondante , d'une même quantité qu'on pourra trouver par quelques essais, comme on l'a vu plus haut.

Lorsqu'une équation est réduite à la forme dont nous parlons, c'est-à-dire que tous ses termes ont le même signe, à l'exception du dernier terme tout connu, on fera passer ce dernier terme dans le second membre, et l'on pourra en extraire la racine à peu près comme dans les équations à deux termes où il n'y a qu'une seule puissance de l'inconnue ; seulement on aura besoin de plus d'essais et d'épreuves, à raison des différentes puissances de l'inconnue qu'elle contiendra.

Ainsi, par exemple, si l'on a l'équation du troisième degré

$$y^3+\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}y-\mathrm{N}=0,$$

dans laquelle A, B, N sont supposés des nombres positifs, en la mettant sous la forme

$$y^3+\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}y=\mathrm{N},$$

on voit qu'au lieu d'extraire simplement du nombre N la racine de la puissance y^3, il s'agit d'en extraire celle de la somme des puissances $y^3+\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}y$; et si α est la partie de cette racine déjà trouvée, et p le reste, on aura

$$(3a^2+2\mathrm{A}a+\mathrm{B})p+(3a+\mathrm{A})p^2+p^3=\mathrm{N}-a^3-\mathrm{A}a^2-\mathrm{B}a;$$

et par conséquent,

$$p<\tfrac{\mathrm{N}-a(a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B})}{3a^2+2\mathrm{A}a+\mathrm{B}},$$

formule qui répond a' celle-ci $p<\tfrac{\mathrm{N}-a^3}{3a^2}$, sur laquelle est fondé le procédé de l'extraction de la racine cubique.

Prenons l'équation trouvée plus haut

$$y^3+4y^2+3y-1=0,$$

la formule sera ici

$$p<\tfrac{1-a(a^2+4a+3)}{3a^2+8a+3}$$

Il est d'abord facile de voir que le premier chiffre de la valeur de a ne peut être que 0,2 ; faisant donc $a=0,2$, on trouvera $p<\tfrac{0,232}{4,72}>0,05$. En prenant $p=0,04$, la nouvelle valeur de a sera 0,24, et l' on trouvera $p<\tfrac{0,0368...}{5,093...}<0,008$, etc.

NOTE XIII.

Sur la résolution des équations algébriques.

LA résolution des équations du second degré se trouve dans *Diophante*, et peut aussi se déduire de quelques propositions des *Data d'Euclide;* mais il paraît que les premiers algébristes italiens l'avaient apprise des Arabes. Ils ont résolu ensuite les équations du troisième et du quatrième degré; mais toutes les tentatives qu'on a faites depuis pour pousser plus loin la résolution des équations, n'ont abouti qu'à faire trouver de nouvelles méthodes pour le troisième et le quatrième degré, sans qu'on ait pu entamer les degrés supérieurs, si ce n'est pour des classes particulières d'équations, telles que les équations réciproques qui peuvent toujours s'abaisser à un degré moindre de la moitié, celles dont les racines sont semblables aux racines des équations du troisième degré, et que *Moivre* a données le premier, et quelques autres du même genre.

1. Dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (années 1770 et 1771), j'ai examiné et comparé les principales méthodes connues pour la résolution des équations algébriques, et j'ai trouvé que ces méthodes se réduisent toutes, en dernière analyse, à employer une équation secondaire qu'on appelle *résolvante,* dont la racine est de la forme

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \text{etc.}$$

en désignant par $x', x'', x''',$ etc. les racines de l'équation proposée, et par α une des racines de l'unité, du même degré que celui de l'équation.

Je suis ensuite parti de cette forme générale des racines , et j'ai cherché *à priori,* le degré de l'équation résolvante et les diviseurs qu'elle peut avoir, et j'ai rendu raison pourquoi cette équation, qui est toujours d'un degré plus haut que l'équation donnée, est susceptible d'abaissement pour les équations du troisième et du quatrième degré, et peut servir à les résoudre.

J'ai cru qu'un précis de cette théorie ne serâit pas déplacé dans le présent Traité, non-seulement parce qu'il en résulte une méthode uniforme pour la résolution des équations des quatre premiers degrés, mais encore parce que cette méthode s'applique avec succès aux équations à deux termes, de quelque degré qu'elles soient.

2. Représentons l'équation proposée par la formule générale

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

et désignons ses m racines par $x', x'', x''',$ etc. $x^{(m)}$; on aura, par les propriétés connues des équations,

$$\mathrm{A} = x' + x'' + x''' + \text{etc.} + x^{(m)},$$
$$\mathrm{B} = x'x'' + x'x''' + \text{etc.} + x''x''' + \text{etc.},$$
$$\mathrm{C} = x'x''x''' + \text{etc.}$$

Soit t l'inconnue de l'équation résolvante; nous ferons, d'après ce que nous venons de dire,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \text{etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

la quantité α étant une des racines $m^{i\grave{e}mes}$ de l'unité, c'est-à-dire, une des racines de l'équation à deux termes $y^m - 1 = 0$.

Pour avoir l'équation en t, il faudra éliminer les m inconnues $x', x'', x''',$ etc, au moyen des équations précédentes qui sont aussi au nombre de m; mais ce procédé exigerait de longs calculs, et aurait, de plus, l'inconvénient de conduire à une équation finale d'un degré plus haut qu'elle ne devrait être.

3. On peut parvenir directement et de la manière la plus simple à l'équation dont il s'agit, en employant la méthode dont nous avons fait un fréquent usage jusqu'ici, laquelle consiste à trouver d'abord la forme de toutes les racines de l'équation cherchée, et à composer ensuite cette équation par le moyen de ses racines.

Il est d'abord clair que dans l'expression de t, on peut échanger entre elles, à volonté, les racines $x', x'',$ etc., puisque rien ne les distingue jusqu'ici l'une de l'autre. D'où il suit qu'on aura toutes les différentes valeurs de t, en faisant toutes les permutations possibles entre les racines $x', x'', x''',$ etc ; et ces valeurs seront nécessairement les racines de la réduite en t, qu'il s'agit de construire.

Or, l'on sait, par la théorie des combinaisons, que le nombre des permutations qui peuvent avoir lieu entre m choses, est exprimé en général par le produit $1.2.3....m$; donc l'équation en t aura en général autant de racines qu'il y a d'unités dans ce nombre, et sera par conséquent d'un degré exprimé par le nombre $1.2.3....m$; mais nous allons voir que cette équation est susceptible d'abaissement par la forme même de ses racines.

Comme cette forme dépend de la quantité α qu'on suppose être une racine de l'équation $y^m - 1 = 0$, nous commencerons par quelques remarques sur les propriétés des racines de cette équation ; et pour cela, nous considérerons séparément les cas où l'exposant m est un nombre premier, et celui où cet exposant est un nombre composé.

4. Supposons d'abord que le nombre m soit premier; dans ce cas, toutes les puissances de α jusqu'à α^m auront des valeurs différentes, à moins que l'on n'ait $\alpha = 1$. Car si deux puissances α^n et α^ν étaient égales, on aurait $\alpha^n = \alpha^\nu$, et de là $\alpha^{n-\nu} = 1$; or aucune

puissance de α moindre que *m* ne peut être $=1$ tant que α n'est pas $=1$. En effet, puisque $\alpha^m-1=0$, si l'on avait en même temps $\alpha^n-1=0$, *n* étant < *m,* il faudrait que ces deux équations eussent une racine commune; et en cherchant, par les règles ordinaires, le plus grand commun diviseur des deux quantités $\alpha^m-1=0$ et $\alpha^n-1=0$, on trouve nécessairement $\alpha-1$ pour ce diviseur, à cause que *m* est un nombre premier ; de sorte que la racine commune aux deux équations $\alpha^m-1=0$ et $\alpha^n-1=0$ ne peut être que l'unité.

5. Il suit de là, 1° que les puissances $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m représentent toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$, en prenant pour α une quelconque des racines de cette équation , autre que l'unité. Car puisque $\alpha^m=1$, on aura aussi $\alpha^{2m}=1,\ \alpha^{3m}=1$, etc.; de sorte que les puissances $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m seront aussi des racines de la même équation; et comme elles sont au nombre de *m,* et ont toutes des valeurs différentes, elles donneront nécessairement toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$.

6. Il s'ensuit aussi, 2°. que si, dans la série des puissances $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m, l'on substitue pour α une quelconque de ces puissances, comme α^n, *n* étant < *m;* la nouvelle série $\alpha^n,\ \alpha^{2n},\ \alpha^{3n},$ etc., en rabaissant toutes les puissances au-dessous de α^m , à cause de $\alpha^m=1$, contiendra encore les mêmes puissances, mais dans un ordre différent ; car il est visible que tous les exposans $n,\ 2n,\ 3n,$ etc. sont différens, et que leurs restes de la division par *m* le sont aussi, parcé que *m* est un nombre premier; de sorte que ces restes étant au nombre de *m,* et tous différens entre eux, ne peuvent être que les nombres $1,\ 2,\ 3,$ etc. *m.*

7. Considérons maintenant le cas où *m* est un nombre composé. Dans ce cas , si *n* est un diviseur de *m* , toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$ seront commune à l'équation $y^n-1=0$, parce qu'en supposant le nombre *r* racine de l'équation $y^n-1=0$, on aura $r^n=1$, et par conséquent aussi $r^m=1$; de sorte que *r* sera aussi racine de l'équation $y^m-1=0$. En faisant donc $\alpha=r$, on aura $\alpha^m=1$; et si $m=np$, il est visible que dans la série des puissances $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,$ etc. α^m, chacune se trouvera répétée *p* fois; par conséquent ces puissances ne pourront plus représenter toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$, parce que cette équation ne peut avoir de racines égales.

8. Soit $m=pq$, *p* et *q* étant deux nombres premiers, et soit β une des racines de l'équation $y^p-1=0$, et γ une des racines de l'équation $y^q-1=0$, il est clair que β et γ seront aussi racines de l'équation $y^m-1=0$ parce que β^p and γ^q , étant $=1$ on aura

aussi $\beta^{pq}=1$ et $\gamma^{pq}=1$; mais toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$ ne pourront pas être représentées par les puissances successives de ces racines β et γ.

On voit aussi que le produit $\beta\gamma$ sera racine de la même équation $y^m-1=0$; mais aucune pussisance de cette racine, dont l'exposant serait inférieur à *m,* ne pourra être égale à l'unité, à moins que β ou γ ne soit $=1$; car il faudrait que l'exposant de cette puissance fùt un diviseur de *m*, et par conséquent égal à *p* ou à *q;* on aurait donc $(\beta\gamma)^p=1$, ou $(\beta\gamma)^q=1$. Dans le premier cas, on aurait $\gamma^p=1$, à cause de $(\beta)^p=1$(hyp.) ; et comme on a déjà $\gamma^q-1=0$ (hyp.), il en résulterait $\gamma-1=0$, à cause que *p* et *q* sont premiers entre eux ; dans le second cas, on aurait $\beta-1=0$.

9. Ainsi, tant que β et γ sont différens de l'unité, la racine $\beta\gamma$ de l'équation $y^m-1=0$, a, lorsque $m=pq$, la même propriété que la racine α lorsque *m* est un nombre premier, savoir, que toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par les puissances successives de $\beta\gamma$.

10. Comme les valeurs de β sont au nombre de *p*, et celles de γ au nombre de *q,* les valeurs de $\beta\gamma$ seront au nombre de *pq,* c'est-à-dire de *m;* et il est fàcile de prouver que ces valeurs seront toutes différentes entre elles, parce qu'elles peuvent être représentées par $\beta^r\gamma^s$, en faisant successivement $r=1,\ 2,\ 3...p$ et ... $s=1,\ 2,\ 3...q$, à cause que les nombres *p* et *q* sont supposés premiers. D'où il suit que toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$, *m* étant $=pq$, peuvent être représentées par les produits $\beta\gamma$ des racines des équations $y^p-1=0,\ y^q-1=0$, *p* et *q* étant des nombres premiers.

On prouvera de même que si $m=pqr$, en supposant *p, q, r* des nombres premiers, et que $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ soient respectivement des racines quelconques des trois équations $y^p-1=0,\ y^q-1=0,\ y^r-1=0$ le produit $\beta\gamma\delta$, en donnant successivement à $\beta,\ \gamma,\ \delta$ toutes leurs valeurs , pourra représenter toutes les racines de l'équation $y^m-1=0$; et que celles de ces racines qui seront exprimées par $\beta\gamma\delta$, en excluant l'unité des valeurs de $\beta,\ \gamma,\ \delta$ auront les mêmes propriétés que les racines de l'équation $y^m-1=0$, lorsque *m* est un nombre premier.

Et ainsi de suite.

11. Mais si l'on avait $m=p^2$, *p* étant un nombre premier, en prenant β pour une quelconque des racines de l'équation $y^p-1=0$, il est clair que β serait aussi racine de l'équation $y^m-1=0$, et que $\sqrt[p]{\beta}$ le serait aussi. On prendrait donc, dans ce cas , pour γ

une quelconque des valeurs de $\sqrt[p]{\beta}$, et l'on aurait également $\beta\gamma$ pour l'expression de toutes les racines $y^m - 1 = 0$.

De même, si $m = p^3$, en conservant les valeurs de β et γ, on serait, de plus, $\delta = \sqrt[r]{\beta}$ et l'on aurait $\beta\gamma\delta$ pour l'expression de toutes les racines de $y^m - 1 = 0$, en donnant successivement à β, γ, δ toutes leurs valeurs. Et ainsi de suite.

12. Donc, en général, si $m = p^\mu q^\nu r^\pi ...,$ et que β, γ, δ etc. soient respectivement des racines quelconques des équations....
$y^p - 1 = 0,\ y^q - 1 = 0,\ y^r - 1 = 0,$ etc., $p, q, r,$ etc., étant des nombres premiers, si l'on fait, de plus,

$$\beta' = \sqrt[p]{\beta},\ \beta'' = \sqrt[p]{\beta'},\ \text{etc.},\ \gamma' = \sqrt[q]{\gamma},\ \gamma'' = \sqrt[q]{\gamma'},\ \text{etc.},\ \delta' = \sqrt[r]{\delta},\ \delta'' = \sqrt[r]{\delta'},\ \text{etc.},$$

on aura ...

$$\beta\beta'\beta''....\times\gamma\gamma'\gamma''....\times\delta\delta'\delta''...$$

pour l'expression générale des racines de l'équation $y^m - 1 = 0$ en donnant successivement à $\beta,\ \beta'$, etc. $\gamma,\ \gamma'$, etc. $\delta\ \delta'$ etc. toutes les valeurs dont ces quantités sont susceptibles chacune en particulier.

On voit par là que pour avoir les racines de l'équation à deux termes $y^m - 1 = 0$, lorsque *m* n'est pas un nombre premier, il suffit de résoudre des équations semblables des degrés dont les exposans soient les nombres premiers qui composent le nombre *m.*

13. Enfin nous remarquerons que comme l'équation $y^m - 1 = 0$ manquè de tous les termes intermédiaires, si l'on nomme $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. ses racines, on aura par les formules générales données au commencement de la Note VI,

$$\begin{aligned}
&1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} = 0,\\
&1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.} = 0,\\
&1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{etc.} = 0,\\
&\text{etc.},\\
&1 + \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \text{etc.} = 0,
\end{aligned}$$

ensuite, à cause de $\alpha^m = 1,\ \beta^m = 1,$ etc., on aura

$$1 + \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \text{etc.} = m,$$
$$1 + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \gamma^{m+1} + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^{m+2} + \beta^{m+2} + \gamma^{m+2} + \text{etc.} = 0,$$

et ainsi de suite.

Ces différentes remarques nous seront fort utiles dans la suite.

14. Ces préliminaires posés, considérons la fonction

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \alpha^4 x^v + \text{ etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

dans laquelle x', x'', x''', etc. $x^{(m)}$ sont les racines de l'équation proposée du degré *m,* èt α est une racine quelconque de l'équation .... $y^m - 1 = 0$, de manière que l'on ait $\alpha^m = 1$.

On voit d'abord que cette expression est une fonction invariable des quantités $\alpha^0 x', \alpha x'', \alpha^2 x'''$, etc.,, et qu'ainsi le résultat des permutations des racines x', x'', x''', etc. entre elles, sera le même que celui des puissances de α entre elles.

15. Il suit de là que αt sera le résultat des permutations simultanées de x' en x'', x'' en x''', etc., $x^{(m)}$ en x', à cause de $\alpha^m = 1$.
De même $a^2 t$ sera le résultat des permutations simultanées de

$$x' \text{ en } x''', x'' \text{ en } x^{iv}, \text{etc.}, x^{(m-1)} \text{ en } x', \text{ et } x^{(m)} \text{ en } x'',$$

à cause de $\alpha^m = 1$, $\alpha^{m+1} = \alpha$, et ainsi de suite.
Donc, *t* étant une des racines de l'équation résolvante en t, αt, $\alpha^2 t$, $\alpha^3 t$, etc., $\alpha^{m-1} t$ seront aussi des racines de la même équation ; par conséquent l'équation en *t* devra être telle, qu'elle ne change pas en y changeant t en αt, en $a^2 t$, en $a^3 t$, etc., en $a^{m-1} t$; d'où il est facile de conclure d'abord que cette équation ne pourra contenir que des puissances de *t* dont les exposans soient multiples de *m.*

Si donc on fait $t^m = \theta$, on aura une équation en θ qui ne sera que du degré $1.2.3...m-1$, et dont les racines seront les différentes valeurs de θ résultantes des permutations des $m-1$ racines x'', x''', etc. $x^{(m)}$ entre elles.

16. L'expression de θ sera, à cause de $\alpha^m = 1$, $\alpha^{2m} = 1$, etc., de la forme

$$\theta = \xi^{\text{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2 \xi'' + \alpha^3 \xi''' + \text{etc.} + \alpha^{m-1} \xi^{(m-1)},$$

dans laquelle les quantités $\xi^{\text{o}}, \xi', \xi''$, etc. seront des fonctions déterminées de x', x'', x'', etc., lesquelles auront en général la propriété d'être invariables , par les permutations simultanées de

x' en x'' en x''', etc. $x^{(m)}$ en x', de x' en x''', x'' en x^{iv}, etc.
$x^{(m-1)}$ en x', $x^{(m)}$ en x'',

et ainsi de suite; ce qui suit de ce que θ est également $= t^m = (\alpha t)^m = (\alpha^n t)^m$, etc.

Lorsque les quantités ξ^{o}, ξ', ξ'', etc. seront connues, on aura tout de suite les valeùrs de toutes les racines x', x'', x'', etc. de la proposée. Car puisque $\theta = t^m$, on aura $t = \sqrt[m]{\theta}$; et si l'on dénote par 1, α, β, γ, etc. les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, et qu'on dénote aussi par θ^{o}, θ', θ'', etc. les valeurs de θ qui répondent à la substitution successive de 1, α, β, γ, etc. à la place de α dans l'expression de θ, on aura, à cause de

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{ etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&x' + x'' + x''' + \text{etc.} + x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta^{\text{o}}},\\
&x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta'},\\
&x' + \beta x'' + \beta^2 x''' + \text{etc.} + \beta^{m-1} x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta''},\\
&x' + \gamma x'' + \gamma^2 x''' + \text{etc.} + \gamma^{m-1} x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta'''},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ces équations étant ajoutées ensemble, donneront d'abord par les propriétés des racines 1, α, β, γ, etc. (n° 13),

$$x' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}} + \sqrt[m]{\theta'} + \sqrt[m]{\theta''} + \text{etc.} + \sqrt[m]{\theta^{(m-1)}}}{m}.$$

Ensuite, si on les multiplie respectivement par 1, α^{m-1}, β^{m-1}, γ^{m-1}, etc., et qu'on les ajoute de nouveau ensemble , on aura, par les mémes propriétés,

$$x'' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}} + \alpha^{m-1}\sqrt[m]{\theta'} + \beta^{m-1}\sqrt[m]{\theta''} + \gamma^{m-1}\sqrt[m]{\theta'''} + \text{etc.}}{m}.$$

On trouverait de la même manière

$$x''' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\text{o}}} + \alpha^{m-2}\sqrt[m]{\theta'} + \beta^{m-2}\sqrt[m]{\theta''} + \gamma^{m-2}\sqrt[m]{\theta'''} + \text{etc.}}{m},$$

et ainsi de suite.

17. Nous remarquerons sur ces formules que le terme $\sqrt[m]{\theta^{o}}$ étant égal à la somme $x' + x'' + x''' +$ etc. des racines, est donné immédiatement par l'équation; de sorte qu'on a $\sqrt[m]{\theta^{o}} = \mathrm{A}$ (n° 2), équation nécessairement identique, et qui pourrait servir, s'il en était besoin' â s'assurer de la bonté du calcul.

Il suit de là aussi que comme $\theta^{o} = \xi^{o} + \xi' + \xi'' + \text{etc.} + \xi^{(m-1)} + \text{etc.},$ en faisant $\alpha = 1$, on aura

$$\xi^{o} + \xi' + \xi'' + \text{etc.} + \xi^{(m-1)} = \theta^{o} = \mathrm{A}^{m},$$

et par conséquent,

$$\xi^{o} = \mathrm{A}^{m} - \xi' - \xi'' - \xi''' - \text{etc.},$$

valeur qui, étant substituée dans 1'expression générale de θ, la réduira à cette forme plus simple

$$\theta = \mathrm{A}^{m} + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^{2} - 1)\xi'' + +(\alpha^{3} - 1)\xi''', \text{ etc.},$$

et l'on aura les valeurs de $\theta', \theta'', \theta''',$ etc., en mettant $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. racines de l'équation $y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \text{etc.} + 1 = 0,$ à la place de α (n° 23).

18. La difficulté se réduit donc à trouver les valeurs des quantités $\xi^{o},\ \xi',\ \xi''$, etc. qui entrent dans l'expression de θ, lorsqu'elles ne sont pas données immédiatement. Dans cette recherche, il convient de distinguer le cas où l'exposant *m* est un nombre premier de ceux où *m* est un nombre composé.

Supposons d'abord que *m* soit un nombre premier ; nous avons démontré ci-dessus (n° 6), qu'alors en prenant pour α une racine quelconque de l'équatio $y^{m} - 1 = 0,$ autre que l'unité, si, dans la série des puissances $\alpha,\ \alpha,\ \alpha^{2},\ \alpha^{3},$ etc., α^{m-1}, on substitue à la place de α une quelconque de ces mêmes puissances, on retrouvera toujours la même série de puissances, seulement dans un ordre différent. Or il est visible que dans la fonction *t,* le changement de α en α^{2} répond aux permutations simultanéés de x'' en x''', x''' en x^{iv}, etc.; que le changement de α en α^{3} répondra àux permutations simultanées de x'' en x^{iv}, x''' en x^{vii}, etc., et ainsi de suite. Donc, les changemens successifs de α en $\alpha^{2},\ \alpha^{3}$, etc. α^{m-1}, répondront à autant de permutations où x'' prendra la place de $x''',\ x^{iv}$, etc. $x^{(m)}$; ce qui fait $m-1$ permutations dont chacune pourra ensuite êtrè combinée avec toutes les permutations possibles entre les autres $m-2$ racines $x''',\ x^{iv}$, etc. $x^{(m)}$.

Il en sera donc de même de la fonction θ ; et comme dans cette fonction les changemens de α en $\alpha^{2},\ \alpha^{3}$, etc. répondent à des permutations de ξ' en ξ'', en ξ''', etc. correspondantes à celles de $x''',\ x^{iv}$, etc., dans la fonction *t;* il est facile d'en conclure que les quantités ξ', ξ'', ξ''', etc. seront les $m-1$ racines d'une équation en ξ du degré $m-1$, dont les coefficiens seront des fonctions de x', x'', x''', etc.,, qui ne seront susceptibles que d'autant de valeurs différentes qu'il y aura de permutations entre les $m-2$ racines x''', x^{iv}, etc. $x^{(m)}$, c'est-à-dire de $1.2.3\ \ldots(m-2)$ valeurs, et dépendront par conséquent d'équations du degré.... $1.2.3\ \ldots(m-2)$.

19. On peut même démontrer que tous ces coefficiens ne dépendront que d'une seule équation de ce même degré; car si l'on représente par

$$\xi^{m-1} - \mathrm{M}\xi^{m-2} + \mathrm{N}\xi^{m-3} - \text{etc.} = 0,$$

l'équation en ξ, dont ξ', ξ'', ξ''', etc. sont les racines; en faisant dans les fonctions M , N , etc. les $1.2.3\ \ldots\ (m-2)$ permutations entre les racines x''', x^{iv}, etc., on aura autant de pareilles équations qui , étant multipliées ensemble, donneront une équation finale en ξ du degré $1.2.3\ \ldots\ m-1$ dans laquelle les coefficiens seront des fonctions invariables des racines x', x'', x''', et par conséquent déterminables par les coefficiens A, B, C, etc. de l'équation proposée.

L'équation $\xi^{m-1} - \mathrm{M}\xi^{m-2} + \mathrm{N}\xi^{m-3} - \text{etc.} = 0,$ sera donc un diviseur de celle-ci ; faisant la division à la manière ordinaire, et égalant à zéro les $m-1$ termes du reste, on aura autant d'équations dont les premières $m-2$ donneront les valeurs de N, P, etc. en fonctions rationnelles de M. Ainsi il suffira de trouver l'équation en M du degré $1.2.3\ \ldots\ m-2$.

Si donc cette équation pouvait se résoudre, et il suffirait d'en connaître une seule racine, on aurait les valeurs des coefficiens de l'équation en ξ, qui est d'un degré moindre d'une unité que la proposée, et dont les $m-1$ racines seraient les valeurs des quantités ξ', ξ'', ξ''', qui entrent dans l'expression de θ.

20. Mais au lieu de chercher les racines ξ', ξ'', ξ''', etc., il pourrait être plus simple de chercher directement $\theta', \theta'', \theta'''$, etc.. Il est clair que ces quantités seront les racines d'une équation en θ du $m-1$ degré, qu'on trouvera en éliminant α de l'expression de θ, au moyen de l'équation $\alpha^m - 1 = 0,$ après en avoir ôté la racine 1, c'est-à-dire de l'équation

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \text{etc.} + 1 = 0.$$

Cette équation en θ sera ainsi débarrassée de la racine α, et ses coefficiens exprimés par les quantités ξ^{o}, ξ', ξ'', etc. étant considérés comme fonctions des racines x', x'', x''', etc., ne seront susceptibles que de $1.2.3\ldots(m-2)$ variations, par toutes les permutations possibles entre ces racines ; car comme les changemens de place de x'' répondent aux substitutions de α^2, α^3, etc., au lieu de α, et que la quantité α a disparu de l'équation en θ, il s'ensuit que dans l'expression de ses coefficiens, on pourra regarder x'' comme fixe , ainsi que x'.

Sans employer la voie de l'élimination , on pourra parvenir directement à cette équation en θ, au moyen de ses racines $\theta', \theta'', \theta''',$ etc., dont l'expression est connue; car en représentant cette équation par

$$\theta^{m-1} - \mathrm{T}\theta^{m-2} + \mathrm{U}\theta^{m-3} - \text{etc.} = 0,$$

on aura, par les formules connues ,

$$\begin{aligned} &\mathrm{T} = \theta' + \theta'' + \theta''' + \text{etc.},\\ &\mathrm{U} = \theta'\theta'' + \theta'\theta''' + \theta''\theta''' + \text{etc.},\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

21. On pourra faciliter beaucoup la détermination de ces coefficiens, en les déduisant des sommes des puissances successives des racines $\theta', \theta'',$ etc. jusqu'à la $m^{téme}$ puissance. En effet, si l'on élève successivement le polynome

$$\xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{etc.} + \alpha^{m-1}\xi^{(m-1)}$$

aux puissances $2^{éme}$, $3^{éme}$, etc., et qu'on dénote par $\xi 2,\ \xi 3,\ \xi 4,$ etc. les termes de ces puissances, qui ne seront point affectés de la quantité $\alpha,$ après avoir substitué partout 1 pour α^m , α pour $\alpha^{m+1},$ et ainsi des autres; que, de plus, on fasse pour l'uniformité

$$\theta^{\mathrm{o}} = \xi^{\mathrm{o}} + \xi' + \xi'' + \xi''' + \text{etc.} + \xi^{(m-1)};$$

en sorte que les quantités $\theta^{\mathrm{o}},\ \theta',\ \theta'',$ etc. répondent aux racines $1,\ \alpha,\ \beta,$ etc.; il est facile de voir qu'on aura, par les propriétés de ces racines exposées plus haut, $m\xi^{\mathrm{o}},\ m\xi 2,\ m\xi 3,$ etc. pour les sommes des puissances $1^{ére}$, $2^{éme}$, $3^{éme}$, etc., des quantities $\theta^{\mathrm{o}},\ \theta',\ \theta'',$ etc.

Or $\theta^{o} = \mathrm{A}^m$ (n° 17); donc, si l'on retranche respectivement des quantités $m\xi^{\mathrm{o}},\ m\xi 2,\ m\xi 3,$ etc. les puissances de A^m , les restes $m\xi^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}^m,\ m\xi 2 - \mathrm{A}^{2m},\ m\xi 3 - \mathrm{A}^{3m},$ etc. sont les sommes des m-1 racines $\theta^{\mathrm{o}},\ \theta',\ \theta'',$ etc. de leurs carrés, de leurs cubes, etc.; d'où l'on tirera les sommes de leurs produits deux à deux , trois à trois, .etc. par les formules données dans le chapitre I[er] (n° 8), ainsi qu'il suit

$\mathrm{T} = m\xi^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}^{m}$,

$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{T}(m\xi^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}^{m})}{2} - \frac{m\xi 2 - \mathrm{A}^{2m}}{2}$,

$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{U}(m\xi^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}^{m})}{3} - \frac{\mathrm{T}(m\xi 2 - \mathrm{A}^{2m})}{3} + \frac{m\xi 3 - \mathrm{A}^{3m}}{3}$,

etc.

22. Maintenant, si l'on fait dans les expressions des coefficiens T, U, V, etc. en x', x'', x''', etc. toutes les permutations possible entre ces racines x', x'', etc. on ne trouvera pour chacun de ces coefficiens que $1.2.3 \ldots m-2$ permutations provenant uniquement des permutations entre les $m-2$ racines x'', x''', etc.

Ainsi on aura pour la détermination de T une équation de ce même degré, qu'ou pourra former par le moyen de ses racines, ensuite on trouvera les valeurs des autres coefficiens U, V, etc. en fonctions rationnelles de T, par la méthode donnée plus haut, relativement aux coefficiens de l'équation ξ (n° 19).

Le problème se trouvera donc réduit à la résolution de l'équation en T du degré $1.2.3 \ldots m-2$, laquelle sera toujours d'un degré plus haut que la proposée, lonque *m* sera au-dessus de 3. Il est possible que cette équation puisse être abaissée à un degré moindre, mais c'est de quoi il me paraît très difficile, sinon impossible, de juger *à priori.*

23. A l'égard des racines α, β, γ, etc., comme elles sont avec l'unité les racines de l'équation $y^{m} - 1 = 0$, si l'on divise cette équation par $y-1$, pour en éliminer la racine 1 , on aura l'équation du degré $m-1$,

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

dont α, β, γ, etc. seront les $m-1$ racines.

Cette équation est d'abord, comme l'on voit, d'un degré moindre d'une unité que l'équation proposée; mais étant d'une forme convertible, elle peut toujours s'abaisser à un degré moindre de la moitié ; de plus, par la belle découverte de M. *Gauss,* on peut la résoudre à l'aide d'autant d'équations qu'il y a de facteurs premiers dans $m-1$, et qui ne montent qu'aux degrés marqués par ces facteurs. On peut même la résoudre directement sans passer par aucune équation intermédiaire, comme on le verra dans la Note suivante.

24. Nous avons supposé (n° 18) que l'exposant *m* du degré de l'équation est un nombre premier; considérons maintenant le cas où cet exposant est un nombre composé. Dans ce cas, nous avons vu que les racines de l'équation $y^{m} - 1 = 0$ sont de deux espèces; les unes sont communes à l'équation $y^{n} - 1 = 0$, *n* étant un diviseur de *m*, et leurs puissances ne peuvent pas représenter toutes les racines de l'équation primitive, parce qu'elles n'ont de valeurs différentes que jusqu'aux puissances *n;* après quoi, les mêmes valeurs reviennent toujours dans le même ordre ; les autres n'appartiennent qu'à l'équation $y^{m} - 1 = 0$, et jouissent des mêmes propriétés que les racines de cette équation , lorsque *m* est un

nombre premier. Ainsi, il faudrait d'abord borner le raisonnement du n° 18 aux seules racines ct, qui sont propres à l'équation $y^m - 1 = 0$, et modifier, en conséquence, les conclusions que nous en avons déduites, relativement à l'équation en ξ. De plus, en n'employant même que ces racines pour α, on ne peut pas dire que la substitution d'une puissance quelconque de α à la place de α dans la série $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3$, etc. α^{m-1}, redonne toujours les mêmes termes, parce que si $m = np$, la substitution de α^n pour α, ne donnera jamais que les puissances $\alpha^n,\ \alpha^{2n}$, etc. α^{np}, à cause de $\alpha^{np} = 1$. Il résulte de là que les quantités $\xi',\ \xi'',\ \xi'''$, etc. ne pourront plus être les racines d'une même équation , mais devront dépendre d'équations différentes qu'il faudrait chercher séparément, ce qui alongerait le calcul.

Mais en employant les racines communes à l'éqation $y^n - 1 = 0$, la méthode générale se simplifie, et la résolution du degré *m* se réduit à celle d'autant d'équations des degrés inférieurs *n* que l'exposant *m* a de facteurs premiers; c'est ce que nous allons développer.

25. Supposons donc que le nombre *m* ait un diviseur *n,* nous avons vu (n° 7) que toutes les racines de l'équation $y^n - 1 = 0$ sont communes à l'équation $y^m - 1 = 0$; ainsi dans la fonction

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{ etc.} + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

nous pourrons prendre pour α une des racines de l'équation $y^n - 1 = 0$.
On aura alors

$$\alpha^n = 1,\ \alpha^{n+1} = \alpha,\ \alpha^{n+2} = \alpha^2,\ \text{etc.},\ \alpha^{2n} = 1,\ \alpha^{2n+1} = \alpha,\ \alpha^{2n+2} = \alpha^2,\ \text{etc.},$$

jusqu'à $\alpha^m = 1$; et l'expression de *t* se réduira à cette forme plus simple,

$$t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}'' + \alpha^2 \mathrm{X}''' + \text{ etc.} + \alpha^{n-1} \mathrm{X}^{(n)},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{X}' = x' + x^{(n+1)} + x^{(2n+1)} + \text{ etc.} + x^{(m-n+1)},$$
$$\mathrm{X}'' = x'' + x^{(n+2)} + x^{(2n+2)} + \text{ etc.} + x^{(m-n+2)},$$
$$\mathrm{X}''' = x''' + x^{(n+3)} + x^{(2n+3)} + \text{ etc.} + x^{(m-n+3)},$$
etc.,
$$\mathrm{X}^{(n)} = x^{(n)} + x^{(2n)} + x^{(3n)} + \text{ etc.} + x^{(m)}.$$

Regardant maintenant les quantités $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}'''$, etc. $\mathrm{X}^{(n)}$ comme les racines d'une équation du degré *n,* il est clair qu'on pourra appliquer à la fonction *t* les mêmes raisonnemens qu'on a faits dans les n° 15 et 16, et qu'on parviendra à des conclusions semblables.

Ainsi, en faisant $t^n = \theta$, on aura, à cause de $\alpha^n = 1$, une expression de θ de la forme

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{etc.} + \alpha^{n-1}\xi^{(n-1)},$$

dans laquelle les quantités $\xi',\ \xi'',\ \xi''',$ etc. seront des fonctions connues de $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. lesquelles auront la propriété d'être invariables par les échanges simultanées de X' en X'' en X''', etc., $\mathrm{X}^{(n)}$ en X'.

Connaissant ces quantités, on aura immédiatement les valeurs des racines $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc., par des formules semblables à celles du n° 16.

Ainsi, en prenant $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. pour les racines de l'équation .... $y^n - 1 = 0$; et supposant que $\theta^{\mathrm{o}},\ \theta',\ \theta'',$ etc. soient les valeurs de θ qui répondent à $\alpha = 1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., on aura

$$\mathrm{X}' = \frac{\sqrt[n]{\theta^{\mathrm{o}}} + \sqrt[n]{\theta'} + \sqrt[n]{\theta''} + \text{etc.}}{n},$$

$$\mathrm{X}'' = \frac{\sqrt[n]{\theta^{\mathrm{o}}} + \alpha^{n-1}\sqrt[n]{\theta'} + \beta^{n-1}\sqrt[n]{\theta''} + \text{etc.}}{n},$$

$$\mathrm{X}''' = \frac{\sqrt[n]{\theta^{\mathrm{o}}} + \alpha^{n-2}\sqrt[n]{\theta'} + \beta^{n-2}\sqrt[n]{\theta''} + \text{etc.}}{n},$$

etc.

où l'on remarquera que le terme $\sqrt[n]{\theta^{\mathrm{o}}}$ est toujours égal à la somme des racines, qui est ici

$$\mathrm{X}' + \mathrm{X}'' + \mathrm{X}''' + \text{etc.} = x' + x'' + x''' + \text{etc.} = \mathrm{A}.$$

On n'aura encore par là que les racines $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc.; pour avoir les racines primitives $x',\ x'',\ x''',$ etc., il n'y aura qu'à regarder séparément celles qui composent chacune des quantités $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. comme les racines d'une équation du degré égal au nombre de ces racines, et y appliquer la même méthode.

26. Lorsque *n* est un nombre premier, ce qu'on peut toujours supposer en prenant pour *n* un des facteurs premiers du nombre *m,* les quantités $\xi',\ \xi'',\ \xi''',$ etc. seront, comme dans le n° 18, les racines d'une équation du degré $n-1$, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré $1.2.3...n-2$. Cette dernière équation aura pour coefficiens des fonctions rationnelles de ceux de l'équation en X, dont $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. sont les racines. Or ceux-ci ne sont pas connus il n'y a que ceux de l'équation donnée, dont $x',\ x'',\ x''',$ etc. sont les racines, qui le soient; il s'agit donc de voir comment ceux-là pourront dépendre de ceux-ci.

Il est clair qu'en substituant pour X', X'', X''', etc. leurs valeurs en x', x'', x''', etc. , les coefficiens dont il s'agit deviendront des fonctions connues des racines x', x', x''', etc. ; et pour trouver les équations d'où ces fonctions dépendront, la difficulté se réduira à chercher de combien de valeurs différentes ces fonctions seront susceptibles par toutes les permutations possibles entre les racines x', x'', x''',etc., $x^{(m)}$.

27. Le nombre total des permutations entre ces m racines, est en général $1.2.3...n$; mais s'il y a des permutations qui ne produisent aucun changement dans les fonctions dont il s'agit, il faudra diviser par le nombre de ces permutations le nombre total des permutations, parce que chaque permutation se combinant avec toutes les autres, ne s'ajoute pas aux autres, mais les multiplie.

Or les racines $x', x^{(n+1)}$, etc., $x^{(m-n+1)}$ qui entrent dans l'expression de X', et qui sont au nombre de p, à cause de $m = np$, sont susceptibles de $1.2.3...p$ permutations ; mais comme elles entrent dans X' sous une forme invariable, leurs permutations ne produisent aucun changement dans la valeur de X'; par conséquent on aura d'abord le diviseur $1.2.3...p$.

L'expression de X'' étant dans le même cas, donnera de nouveau le diviseur $1.2.3...p$; de sorte qu'on aura le diviseur $(1.2.3...p)^2$, à raison des deux fonctions X' et X'' ; par la même raison, les trois fonctions X', X'', X''', etc., donneront le diviseur $(1.2.3...p)^3$ et les n fonctions X', X'', X''', etc. $X^{(n)}$ donneront par conséquènt le diviseur $(1.2.3...p)^n$.

Enfin les n quantités X', X'', X''', etc. sont susceptibles en ellesmêmes de $1.2.3 ...n$ permutations; et comme les coefficiens de l'équation en X, sont des fonctions invariables de ces quantités, il en résultera encore le nouveau diviseur $1.2.3 ...n$.

D'où l'on peut conclure que les coefficiens de cette équation, regardés comme des fonctions des m racines x', x'', x''',etc., ne seront susceptibles que de $\frac{1.2.3............m}{1.2.3......n\times(1.2.3...p)^n}$ valeurs différentes, et ne dépendront par conséquent que d'une équation de ce degré.

Ainsi , les coefficiens de l'équation du degré $1.2.3 ...n-2$, qui sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation en X, dépendront d'une équation de ce degré.

Donc, en donnant à ces coefficiens toutes les valeurs qui répondent aux racines de cette dernière équation , et multipliant ensemble toutes les équations résultantes, on aura enfin une équation du degré

$$\frac{1.2.3............m}{1.2.3......n\times(1.2.3...p)^n}\times 1.2.3\ ...(n-2),$$

savoir,

$$\frac{1.2.3............m}{1.2.3......(n-1)n(1.2.3...p)^n};$$

ce sera l'équation d'où dépendront les coefficiens de l'équation en ξ du degré $n-1$ dont les racines seront les valeurs de ξ', ξ'', ξ''',etc. Ainsi on peut dire que c'est à une équation de ce degré que la résolution de l'équation proposée se réduira en dernière analyse.

28. Pour achever la résolution de l'équation proposée en *x,* il faudra encore tirer les valeurs de ses racines $x', x'', x''', \text{etc.}, x^{(m)}$ de celles des racines $\mathrm{X}', \mathrm{X}'', \mathrm{X}''', \text{etc.}$ (n° 25). Pour cela, on regardera les *p* racines $x', x^{(n+1)}, \text{etc.},$, qui composent la valeur de X', comme étant les racines d'une équation du $p^{iéme}$ degré, et qui sera de cette forme

$$x^p - \mathrm{X}'x^{p-1} + \lambda x^{p-2} - \mu x^{p-3} + \nu x^{p-4} - \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens $\lambda, \mu, \nu, \text{etc.}$ seront inconnus; mais comme cette équation est censée renfermer *p* des *m* racines de l'équation proposée

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

où $m = np$, elle devra être un diviseur de celle-ci; par conséquent il n'y aura qu'à faire la division ordinaire, en supposant nuls les termes affectés de $x^{p-1}, x^{p-2}, \text{etc.}$ dans le reste. On aura; par ce moyen, *p* équations en $\mathrm{X}', \lambda, \mu, \text{etc.}$ dont les $p-1$ premières donneront les valeurs de $\lambda, \mu, \text{etc.}$ en X', par des équations linéaires. Ainsi X' étant connu, on aura aussi $\lambda, \mu, \text{etc.}$, et il ne s'agira plus que de résoudre cette équation du degré *p.* De même, en substituant la valeur de X'' à la place de celle de X', on aura l'équation qui donnera les racines $x'', x^{(n+2)}, x^{(2n+2)}, \text{etc.}$, et ainsi de suite.

29. On voit par là que cette dernière méthode revient à décomposer l'équation du degré $m = np$ en *n* équations du degré *p;* mais si, pour cette décomposition, l'on suivait la méthode ordinaire, il faudrait résoudre une équation du degré

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\,(m-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\, p},$$

comme nous l'avons vu dans la Note X; au lieu que celle-ci ne demande que la résolution du degré

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\, m}{(n-1)n(1.2.3\ldots\ldots\ldots\, p)^2},$$

qui est toujours moindre que le précédent.

Soit $m = 4,\ n = 2,\ p = 2$, ces degrés seront

$$\tfrac{4.3}{1.2} = 6,\ \text{et}\ \tfrac{1.2.3.4}{2(2)^2} = 3,$$

Soit $m = 6,\ n = 2,\ p = 3$, on aura

$$\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20, \quad \frac{1.2.3.4.5.6}{2(1.2.3)^2} = 10;$$

et si l'on fait $n = 3,\ p = 2$, on aura

$$\frac{6.5}{1.2} = 15, \quad \frac{1.2.3.4.5.6}{2.3(1.2.3)^2} = 15,$$

et ainsi de suite.

30. Appliquons la théorie précédente aux équations du second, du troisième et du quatrième degré.

Soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2 - \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

dont les racines soient x' et x''.

On a ici $m = 2$, qu'on peut regarder comme un nombre premier; prenant pour α une racine de l'équation $y^2 - 1 = 0$, on fera

$$t = x' + \alpha x''$$

d'où l'on déduit

$$\theta = t^2 = x'^2 + x''^2 + 2\alpha x'x'',$$

à cause de $\alpha^2 = 1$; donc $\xi' = 2x'x''$, fonction invariable des racines x' et x''.

En effet, on a $\mathrm{B} = x'x''$, et par conséquent $\xi' = 2\mathrm{B}$. Or l'équation $y^2 - 1 = 0$ donne $y = 1,\ -1$; donc $\alpha = -1$, et (no 17) $\theta' = \mathrm{A}^2 - 2\xi' = \mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B}$. Ainsi les expressions des deux racines seront (nos 16, 17)

$$x' = \frac{\mathrm{A} + \sqrt{(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B})}}{2},$$

$$x'' = \frac{\mathrm{A} - \sqrt{(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{B})}}{2},$$

comme on le sait depuis long-temps.

31. Soit maintenant l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + \mathrm{B}x - \mathrm{C} = 0,$$

dont les racines soient $x',\ x'',\ x'''$.

On a ici $m = 3$ nombre premier; la fonction t sera donc, en prenant pour α une racine de $y^3 - 1 = 0$,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$$

et la fonction $\theta = t^3$ sera, à cause de $\alpha^3 = 1$,

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'',$$

où l'on aura

$$\xi^{o} = x'^3 + x''^3 + x'''^3 + 6x'x''x''',$$
$$\xi' = 3(x'^2x'' + x''^2x''' + x'''^2x'),$$
$$\xi'' = 3(x'^2x''' + x''^2x' + x'''^2x'').$$

Les quantité ξ', ξ'' seront donc les racines d'une équation du second degré, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré $1.2...m-2$, c'est-à-dire du premier degré, et qui seront par conséquent des fonctions rationnelles de ceux de l'équation proposée. En effet, on voit que par toutes les permutations possibles entre les trois racines x', x'', x''' les deux fonctions ξ', ξ'' restent les mêmes, ou se changent l'une dans l'autre; de sorte qu'en les supposant racines de l'équation

$$\xi^2 - \mathrm{M}\xi + \mathrm{N} = 0,$$

on aura $\mathrm{M} = \xi' + \xi''$, $\mathrm{N} = \xi'\xi''$ fonctions invariables de x', x'', x''' et par conséquent déterminables par les coefficiens A, B, C de la proposée.

En effet, on trouve facilement, par les formules de la Note X (no 4*),*

$$\mathrm{M} = \xi' + \xi'' = 3\mathrm{AB} - 9\mathrm{C},$$
$$\mathrm{N} = \xi'\xi'' = 9\mathrm{B}^3 + 9(\mathrm{A}^3 - 6\mathrm{AB})\mathrm{C} + 81\mathrm{C}^2.$$

Ainsi l'on n'aura à résoudre que l'équation du second degré

$$\xi^2 - (3\mathrm{AB} - 9\mathrm{C})\xi + 9\mathrm{B}^3 + 9(\mathrm{A}^3 - 6\mathrm{AB})\mathrm{C} + 81\mathrm{C}^2 = 0,$$

dont on prendra les deux racines pour les valeurs de ξ' et ξ''.
Faisant ensuite (n° 17)

$$\theta' = \mathrm{A}^3 + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^2 - 1)\xi'',$$
$$\theta'' = \mathrm{A}^3 + (\beta - 1)\xi' + (\beta^2 - 1)\xi'',$$

et subtituant, dans les formules du n° 16, 3 au lieu de *m,* et A au lieu de $\sqrt[3]{\theta^{o}}$ (n° 17), on aura

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{\mathrm{A} + \sqrt[3]{\theta'} + \sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x'' = \frac{\mathrm{A} + \alpha^2\sqrt[3]{\theta'} + \beta^2\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x''' = \frac{\mathrm{A} + \alpha\sqrt[3]{\theta'} + \beta\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \end{array}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{\mathrm{A} + \sqrt[3]{\theta'} + \sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x'' = \frac{\mathrm{A} + \beta\sqrt[3]{\theta'} + \alpha\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \\ x''' = \frac{\mathrm{A} + \alpha\sqrt[3]{\theta'} + \beta\sqrt[3]{\theta''}}{3}, \end{array}\right\}$$

à cause de $\beta = \alpha^2$, et par conséquent $\beta^2 = \alpha$.

Et les deux quantités α, β seront (no 23) les racines de l'équation $y^2 + y + 1 = 0$, laquelle donne

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \beta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

32. Mais on peut avoir des expressions plus simples, par le moyen de l'équation en θ, qui sera ainsi du second degré.

En représentant cette équation par

$$\theta^2 - \mathrm{T}\theta + \mathrm{U} = 0,$$

on trouvera les valeurs de T et U par les formules données plus haut (n° 21).

On aura ainsi

$$\mathrm{T} = 3\xi^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}^3,$$
$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{T}(3\xi^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}^3)}{2} - \frac{3\xi 2 - \mathrm{A}^6}{2},$$

où ξ2 est le premier terme dégagé de α dans le développement de $(\xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'')^3$; et l'on trouve, à cause de $\alpha^3 = 1$,

$$\xi 2 = (\xi^{\mathrm{o}})^2 + 2\xi'\xi''.$$

Or on a (n° 17) $\xi^{\mathrm{o}} = \mathrm{A}^3 - \xi' - \xi'' = \mathrm{A}^3 - \mathrm{M}$; donc puisque $\xi'\xi'' = \mathrm{N}$, on aura

$$\mathrm{T} = 2\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{M},$$
$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{T}^2}{2} - \frac{3(\mathrm{A}^3 - \mathrm{M}) + 6\mathrm{N} - \mathrm{A}^6}{2};$$

et substituant les valeurs de M et N trouvées ci-dessus, on aura

$$\mathrm{T} = 2\mathrm{A}^3 - 9\mathrm{AB} + 27\mathrm{C},$$
$$\mathrm{U} = \mathrm{A}^6 - 9\mathrm{A}^4\mathrm{B} + 27\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 - 27\mathrm{B} = (\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{B})^3.$$

L'équation en θ sera donc

$$\theta^2 - (2\mathrm{A}^3 - 9\mathrm{AB} + 27\mathrm{C})\theta + (\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{B})^3 = 0,$$

dont les deux racines étant prises pour θ' et θ'', et substituées dans les expressions précédentes de x', x'', x''', etc., on aura la resolution la plus simple de l'équation du troisième degré.

33. Venons à l'équation du quatrième degré représentée par la formule

$$x^4 - \mathrm{A}x^3 + Bx^2 - Cx + \mathrm{D} = 0.$$

Comme on a ici $4 = 2.2$, il est plus simple de suivre la méthode du n° 25; en faisant $n = 2$, on prendra pour α une racine de l'équation $y^2 - 1 = 0$, en sorte que $\alpha^2 = 1$. On fera ainsi

$$t = \mathrm{X}' + \alpha\mathrm{X}'',\ \mathrm{X}' = x' + x'',\ \mathrm{X}'' = x'' + x^{iv}.$$

De là , on aura

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' \ \text{ et } \ \xi^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2,\ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

Ainsi l'équation en ξ, dont ξ' est racine, ne sera que du degré $n-1$, c'est-à-dire du premier degré, et ses coefficiens ne dépendront que d'une équation du degré $\frac{1.2.3.4}{2(2)^2} = 3$ (n° 27) ; de sorte que l'on aura en ξ' une équation du troisième degré, telle que

$$\xi'^3 - \mathrm{M}\xi'^2 + \mathrm{N}\xi' - \mathrm{P} = 0.$$

Les racines de cette équation seront des valeurs de

$$\xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}'' = 2(x' + x''')(x'' + x^{iv}),$$

qui proviendront des permutations entre les trois racines; et il est facile de voir en effet que ces valeurs ne seront que les trois suivantes:

$$2(x' + x''')(x'' + x^{iv}),$$
$$2(x' + x'')(x''' + x^{iv}),$$
$$2(x' + x^{iv})(x'' + x''').$$

D'après ces racines, on pourrâ former les coefficiens M, N, qui se trouveront exprimés par des fonctions invariables de x', x'', x''', x^{iv}, et seront déterminables en A, B, C, D.

34. Pour faciliter cette recherche, nous remarquerons que l'on a, par l'équation proposée,

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= x'x'' + x'x''' + x'x^{iv} + x''x''' + x''x^{iv} + x'''x^{iv}\\ &= (x' + x''')(x'' + x^{iv}) \ + x'x''' + x''x^{iv}\\ &= \left(x' + x''\right)(x''' + x^{iv}) \ + x'x'' + x'''x^{iv}\\ &= (x' + x^{iv})(x'' + x''') + x'x^{iv} + x''x''';\end{aligned}$$

d'où il suit que si l'on fait $\xi' = 2\text{B} - 2u$, l'équation en ξ' se transformera en une équation en *u*, dont les racines seront

$$x'x''' + x''x^{iv},\ x'x'' + x'''x^{iv},\ x'x^{iv} + x''x'''.$$

Soit

$$u^3 - \text{R}u^2 + \text{S}u - \text{T} = 0$$

cette équation en *u*, on aura

$$\text{R} = x'x''' + x''x^{iv} + x'x'' + x'''x^{iv} + x'x^{iv} + x''x''' = \text{B},$$

et l'on trouvera de la même manière, en employant les formules données dans la Note X, les valeurs suivantes :

$$\text{S} = \text{AC} - 4\text{D},\ \text{T} = (\text{A}^2 - 4\text{B})\text{D} + \text{C}^2.$$

Désignons par u' une quelconque des racines de l'équation en *u*,

$$u^3 - \text{B}u^2 + (\text{AC} - 4\text{D})u - (\text{A}^2 - 4\text{B})\text{D} - \text{C}^2 = 0,$$

on aura $\xi' = 2\text{B} - 2u'$; et de là, en faisant $\alpha = -1$ et $n = 2$, on aura

$$\theta' = \text{A}^2 - 2\xi' = \text{A}^2 - 4\text{B} + 4u',$$

et enfin

$$\text{X}' = \tfrac{\text{A}+\sqrt{\theta'}}{2},\ \text{X}'' = \tfrac{\text{A}-\sqrt{\theta'}}{2}.$$

35. Maintenant, comme $\text{X}' = x' + x'''$, on peut regarder x' et x''' comme les deux racines de l'équation du second degré (n° 28),

$$x^2 - \text{X}'x + \lambda = 0\ ;$$

et pour avoir λ, il n'y aura qu'à diviser l'équation proposée du quatrième degré par celle-ci; le premier terme du reste égalé à zéro donnera

$$\lambda = \tfrac{\text{X}'^3 - \text{AX}'^2 + \text{BX}' - \text{C}}{2\text{X}' - \text{A}}\ ;$$

ainsi, en résolvant l'équation du second degré, on aura

$$x' = \tfrac{\text{X}' + \sqrt{(\text{X}'^2 - 4\lambda)}}{2},\ x''' = \tfrac{\text{X}' - \sqrt{(\text{X}'^2 - 4\lambda)}}{2}\ ;$$

et comme $\text{X}'' = x'' + x^{iv}$, on aura les racines x'', x^{iv}, en changeant dans ces expressions X' en X'', ce qui ne demande que de changer le signe du radical $\sqrt{\theta'}$.

Cette solution revient à celle de *Descartes,* dans laquelle on résout l'équation du quatrième degré en deux du deuxième, moyennant une du troisième.

36. On peut simplifier ces formules en substituant d'abord ....
$\frac{\theta-A^2+4B}{4}$ a la place de *u,* ce qui donnera cette équation en θ,

$$\theta^3-(3A^2-8B)\theta^2+(3A^4-16A^2B+16B^2+16AC-64D)\theta-(A^3-4AB\ +8C)^2=0,$$

dont θ' sera une quelconque des racines à volonté; mais en employant les trois racines, on peut avoir tout d'un coup les quatre racines x', x'', x''', x^{iv}.
Car en faisant $\alpha=-1$, on a

$$t=x'+x'''-x''-x^{iv},$$

et par conséquent,

$$\theta=t^2=(x'+x'''-x''-x^{iv})^2.$$

Cette expression de θ n'est en effet susceptible que de ces trois valeurs différentes

$$(x'+x'''-x''-x^{iv})^2,\ (x'+x''-x'''-x^{iv})^2,\ (x'+x^{iv}-x''-x''')^2,$$

qui seront par conséquent les trois racines de l'équation en θ.

Nommons $\theta', \theta'', \theta'''$ les trois racines de cette équation; on aura done ces trois équations

$$x'+x'''-x''-x^{iv}=\sqrt{\theta'},$$
$$x'+x''-x'''-x^{iv}=\sqrt{\theta''}$$
$$x'+x^{iv}-x''-x'''=\sqrt{\theta'''}.$$

qui , étant jointes à l'équation

$$x'+x''+x'''+x^{iv}=A,$$

laquelle répond à $\alpha=1$, serviront à déterminer chacune des quatre racines x',x'',x''',x^{iv}, et l'on trouvera

$$x'=\frac{A+\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x''=\frac{A-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x'''=\frac{A+\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x^{iv}=\frac{A-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4}.$$

37. Cette solution, la plus simple de toutes, est due à *Euler*, mais elle présente une espèce d'ambiguité, à cause des radicaux carrés qui peuvent être pris chacun en plus et en moins. En effet, on voit qu'en changeant le signe d'un quelconquê de ces radicaux, ou les signes des trois radicaux à la fois, on a un autre système de racines, représenté par les formules

$$x' = \frac{\mathrm{A}-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x'' = \frac{\mathrm{A}+\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x''' = \frac{\mathrm{A}-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x^{iv} = \frac{\mathrm{A}+\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}}{4}.$$

Au contraire, en ne changeant à la fois que les signes des deux radicaux, on a toujours le même système de racines. Ainsi, pour savoir lequel des deux systèmes il faut employer, il n'y a qu'à déterminer le signe que doit avoir le produit $\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}$.
Or l'équation en θ donne

$$\theta'\times\theta''\times\theta''' = (\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C})^2;$$

donc, extrayant la racine carrée

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''} = \pm(\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}),$$

et remettant pour $\sqrt{\theta'}$, $\sqrt{\theta''}$, $\sqrt{\theta'''}$ leurs valeurs en x', x'', etc.,

$$(x'+x'''-x''-x^{iv})(x'+x''-x'''-x^{iv})(x'+x^{iv}-x''-x''')$$
$$=\pm(\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}).$$

Pour déterminer le signe ambigu, il n'y a qu'à considérer un cas particulier, par exemple, celui où les trois racines x'', x''', x^{iv} sont nulles. Dans ce cas, on aura $\mathrm{A}=x'$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, $\mathrm{D}=0$, et l'équation précédente deviendra $x'^3=\pm\mathrm{A}^3$, par où l'on voit qu'il faut prendre le signe supérieur pour la rendre identique. Ainsi on aura nécessairement

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''} = \mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C},$$

D'où l'on doit conclure que lorsque la quantité

$$\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C},$$

aura une valeur positive, il faudra employer le premier système des racines; et que lorsque cette quantité aura une valeur négative, il faudra émployer le second système, en donnant toujours aux radicaux $\sqrt{\theta'}$, $\sqrt{\theta''}$, $\sqrt{\theta'''}$ une valeur positive (Voyez Note la correction laissee par M. Lagrange pour cet article).

38. Passé le quatrième degré, la méthode, quoiqu'applicable en général, ne conduit plus qu'à des équations résolvantes de degrés supérieurs à celui de la proposée.
Pour le cinquième degré, soit la formule générale

$$x^5 - \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 - Cx^2 + \mathrm{D}x - \mathrm{E} = 0,$$

dont les racines soient $x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}$.
On aura ici $m = 5$ nombre premier, et l'on fera

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \alpha^4 x^{v},$$

où α est une des racines de l'équation $y^5 - 1 = 0$, autre que l'unité.

On fera ensuite $\theta = t^5$, et l'on parviendra à une équation en θ du degré 1.2.3.4, mais qui sera décomposable en 2.3 équations chacune du quatrième degré; de manière qu'en représentant chacune de ces équations par la formule

$$\theta^4 - \mathrm{T}\theta^3 + \mathrm{U}\theta^2 - \mathrm{X}\theta + \mathrm{Y} = 0,$$

les coefficiens T, U , etc. ne seront susceptibles chacun que de six valeurs différentes, par toutes les permutations possibles entre les cinq racines $x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}$, dont ces coefficiens sont fonctions; et ces six valeurs ne dépendront par conséquent que d'une équation du sixième degré; de sorte qu'en dernière analyse, la résolution de l'équation du cinquième degré serait réduite à celle d'une équation du sixième. Il est donc inutile d'entreprendre ce calcul dont on peut, au reste, voir le commencement dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (année 1771, p. 130 et suiv.).

39. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des fonctions résolvantes de la forme $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \text{etc.}$; mais les principes que nous avons employés pour trouver directement l'équation dont ces fonctions seraient les racines, peuvent s'appliquer à toute autre fonction des racines x', x'', x''', etc. de l'équation proposée. Il ne s'agit que de chercher toutes les différentes formes dont la fonction proposée est susceptible par toutes les permutations des racines x', x'', x''', etc. entre elles, et former une équation qui ait toutes ces différentes formes pour racines. Les coefficiens de cette équation étant des fonctions invariables de ces racines, seront aussi des fonctions invariables des racines de la proposée, et pourront par conséquent se déterminer par des fonctions rationnelles des coefficiens de celles-ci, qu'on trouvera toujours par les formules données dans la Note X.

On pourrait croire que chaque fonction différente des racines d'une même équation, dépendrait aussi d'une équation différente; cela a lieu en effet pour toutes les fonctions qui ne sont pas semblables ; mais pour celles que j'appelle semblables, et dont la propriété consiste en ce que, par les mêmes permutations, elles varient ensemble, ou demeurent les mêmes, on peut les faire dépendre toutes d'une même équation , parce qu'on peut toujours les exprimer par des fonctions rationnelles d'une quelconque d'entre elles.

J'ai donné, dans les Mémoires de Berlin de l'année 1771 (p. 203et suiv.), une méthode générale pour la détermination des fonctions semblables des racines d'une équation quelconque donnée; je ne la rapporterai point ici , pour ne pas trop alonger cette Note.

40. Mais je ne saurais la terminer, sans dire un mot du beau travail que feu *Vandermonde* a donné dans les Mémoires de l' Académie des Sciences de Paris (année 1771), sur la résolution générale des équations. Son ouvrage et le mien ont été composés et lus à peu près en même temps, l'un à l'Académie des Sciences de Paris, et l'autre à celle de Berlin. *Vandermonde,* en partant d'un principe général, est arrivé à des résultats semblables à ceux auxquels m'avait conduit l'examen des différentes méthodes connues jusqu'alors. Comme ce rapprochement est intéressant pour l'Analyse, on sera bien aise de les trouver ici.

Le principe dont il s'agit est que l'expression analytique des racines d'une équation doit être une fonction de ces racines, telle qu'elle puisse égaler indifféremment chacune des racines, et qui ne soit qu'une fonction de leur somme, de la somme de leurs produits deux à deux, de celles de leurs produits trois à trois, et ainsi de suite; afin que cette fonction puisse en même temps se déterminer par les seuls coefficiens de l'équation donnée.

41. En examinant, conformément à ce principe, la résolution connue de l'équation du second degré, *Vandermonde* observe que la fonction qui donne cette résolution est de la forme

$$\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2},$$

a et b étant les deux racines de l'équation. En effet, à cause de l'ambiguité du radical carré, cette expression devient indifféremment a, ou b, et en même temps les deux quantités $a+b$ et $(a-b)^2$ sont exprimables par les coefficiens de l'équation $x^2-Ax+\mathrm{B}=0$; car on a

$$a+b=\mathrm{A},\ (a-b)^2=a^2+b^2-2ab\ =\left(a+b\right)^2-4ab=\mathrm{A}^2-4\mathrm{B}\,;$$

ce qui donne la résolution connue $\frac{\mathrm{A}\pm\sqrt{(\mathrm{A}^2-4\mathrm{B})}}{2}$.

L'auteur applique ensuite le même principe aux équations du troisième degré, et il trouve que la fonction qui donne leur résolution, peut se réduire à la forme

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3}+\sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3}}{3},$$

où *a, b, c* sont les trois racines de l'équation, et r', r'' les valeurs qui satisfont avec l'unité, à l'équation $r^3-1=0$. En effet, cette expression devient d'abord égale à *a,* à cause de $1+r'+r''=0$; ensuite, comme chaque radical cube peut être multiplié par r' ou r'', la même expression deviendra *b,* ou *c,* en multipliant les deux radicaux par r' et r'', ou par r'' et r' , à cause de $r''=r'^2$ (n° 5). De là *Vandermonde* conclut que pour un nombre quelconque *m* de racines, la fonction qui deviendra indifféremment *a,* ou *b,* ou *c,* etc., sera de la forme

$$\frac{1}{m}(a+b+c+\text{etc.})+\sqrt[m]{(a+r'b+r''c+\text{etc.})^m}$$
$$+\sqrt[m]{(a+r'^2b+r''^2c+\text{etc.})^m}+\sqrt[m]{(a+r'^3b+r''^3c+\text{etc.})^m}+\text{etc.},$$

$r', r'', r''', \text{etc.}$ étant avec l'unité les racines de l'équation $r^m-1=0$.

Si l'on compare cette expression à celle de la racine x' du n° 16, on verra facilement leur accord , en considérant que θ est en général $=(x'+\alpha x''+\alpha^2 x'''+\text{etc.})$ (no 15), et que θ', θ'', etc. sont les valeurs de θ qui répondent aux racines α, β, γ, etc. de l'équation $y^m-1=0$, lesquelles sont désignées par $r', r'', r''', \text{etc.}$ dans l'Analyse de *Vandermonde,* et que lorsque *m* est un nombre premier, toutes les racines sont représentées également par 1, $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$, etc., par 1, β, β^2, β^3, etc. (n° 5).

Pour déterminer les valeurs de $(a+r'b+r''c+\text{etc.})^m$ en fonctions des coefficiens de l'équation donnée, en quoi consiste toute la difficulté du problème, l'auteur emploie un algorithme ingénieux, fondé sur une notation particulière; il ne cherche pas *à priori* , comme nous l'avons fait, le degré de l'équation d'où cette détermination doit dépendre; mais il donne pour les équations du troisième et du quatrième degré, leur résolution complète; et pour celles du cinquième et du sixième degré , des formules générales qu'il appelle *types,* et qui font voir que la résolution de l'équation du cinquième degré dépend en dernière analyse d'une équation du sixième, et que la résolution de celle-ci dépend de celle d'une équation du quinzième ou du dixième degré, comme nous l'avons trouvé.

42. *Vandermonde* a aussi remarqué les simplifications dont la formule générale des racines est susceptible dans les degrés dont l'exposant est un nombre composé; par exemple , il trouve que , pour les équations du quatrième degré , les racines *a, b, c, d* peuvent être représentées par la fonction

$$\frac{1}{4}[(a+b+c+d+\sqrt{(a+b-c-d)^2}$$
$$+\sqrt{(a+c-b-d)^2}+\sqrt{(a+d-b-c)^2}],$$

en prenant les radicaux carrés en plus et en moins, et il en déduit la résolution donnée plus haut (n^o 36).

Comme la méthode de *Vandermonde* découle d'un principe fondé sur la nature des équations, et qu'à cet égard elle est plus directe que celle que nous avons exposée dans cette Note, on peut regarder les résultats communs de ces méthodes sur la résolution générale des équations qui passent le quatrième degré, comme des conséquences nécessaires de la théorie générale des équations.