NOTE XIV,

Where we give the general resolution of equations in two terms.

1. Although equations in two terms, such as $x^{\mu} - \mathrm{A} = 0$, or more simply, $x^{\mu} - 1 = 0$ (since this form can be reduced to that, by putting $x\sqrt[\mu]{\mathrm{A}}$ for x there), may always be resolved by tables of sines, in a manner as near as could be desired, on using the known formula

$$x = \cos \tfrac{v}{\mu} 360^{\circ} + \sin \tfrac{v}{\mu} 360^{\circ} \times \sqrt{-1},$$

and making successively $v = 1, 2, 3,$ etc., $\mu,$ their algebraic resolution is none the less interesting for analysis ; and Geometers have been greatly occupied with that. They have first reduced the difficulty of resolving these equations of which the exponent has a prime number for the exponent, as we have seen from the beginning of the preceding note. Further they have found that as the equation $x^{\mu} - 1 = 0$ has necessarily 1 for one of its roots, on dividing that by $x - 1$, we have for the others the equation of the degree $\mu - 1$,

$$x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + x^{\mu-3} + \text{etc.} + 1 = 0,$$

which being of the kind of equations which we call *reciprocal*, because they remain the same, on changing x into $\frac{1}{x}$, which can be separated into $\frac{\mu-1}{2}$ equations of the second degree, such that $x^2 - yx + 1 = 0$, in which y depends on an equation of degree $\frac{\mu-1}{2}$ of the form

$$y^{v} + y^{v-1} - (v-1)y^{v-2} + (v-2)y^{v-3} + \tfrac{(v-2)(v-3)}{2} y^{v-4} \\ + \tfrac{(v-3)(v-4)}{2} y^{v-5} - \text{etc.} = 0,$$

where $v = \frac{\mu-1}{2}$, as we have seen in Note X (n° 14).

According to this way, we may have the resolution of the equation $x^7 - 1 = 0$, since it may be reduced to an equation of the third degree; but we were stopped by the equation $x^{11} - 1 = 0$, which can be reduced in this way only to an equation of the fifth degree.

2. It was in his excellent work entitled *Disquisitiones arithmeticae* [*i.e. Arithmetical Inquiries*] in 1801, that *Gauss* gave a method both original and ingenious for reducing the solution of the equation $x^{\mu} - 1 = 0$, when μ is a prime number, to the resolution of just as many particular equations as the number $\mu - 1$ contains prime factors, and the degrees of which shall be expressed by the same factors. Thus the equation $x^{13} - 1 = 0$ requires only

the solution of two equations of the second degree, and of one of the third, since $13-1=2.2.3.$ The equation $x^{17}-1=0$ only requires the resolution of four equations of the second degree, and hence so forth.

But on applying the principles of *Gauss's* theory to the method set out in the preceding Note, I have discovered that we may be able to obtain directly the complete resolution of any equation in two terms of which the degree is expressed by a prime number, without passing through any intermediate equation, nor having to fear the inconvenience which arises from the ambiguity of the signs. This is what I am going to expand on in this Note.

3. The equation to be resolved shall be $x^{\mu}-1=0$, μ being a prime number ; if we separate out the root $=1$, it will be reduced to this one of degree $\mu-1$,

$$x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+\text{etc.}+1=0.$$

Let *r* be some root of this equation, we will be able to represent its $\mu-1$ roots by the terms of the geometric sequence

$$r, r^2, r^3, r^4, \text{etc.}, r^{\mu-1},$$

as we have shown in the preceding Note (n° 5).

Gauss has had the ingenious and happy idea of substituting a geometrical progression in place of the arithmetical progression of the exponents of *r,* by virtue of *Fermat's* famous theorem on prime numbers.

By this theorem , first demonstrated by *Euler* [E449], and then by all those who have occupied themselves with the theory of numbers, we know that if μ is a prime number, and *a* a number less than μ, the number $a^{\mu-1}-1$ necessarily will be divisible by μ, such that the remainder of the division of $a^{\mu-1}-1$ by μ , will be one.

Euler has shown further that if on dividing all the terms of the progression $a, a^2, a^3,$ etc., $a^{\mu-1}$, by μ, there will be found other powers of *a* which also give unity for the remainder, then the exponents of these powers necessarily will be divisors of $\mu-1$. Such that in order to know if among these powers of a less than $a^{\mu-1}-1$, there are those which give also the remainder 1 on being divided by μ, it will suffice to try those of which the exponent will be a divisor of $\mu-1$

4. We call the numbers *a* primitive roots, of which any power less than $a^{\mu-1}-1$ does not give the remainder 1 on being divided by μ ; and these roots have the property that all the terms of the progression $a, a^2, a^3,$ etc., $a^{\mu-1}$, being divided by μ, give different remainders, and consequently give all the numbers less than μ as remainders, since these remainders are of number $\mu-1$. For if two powers a^n, a^p may give the same remainder, *n* and *p* being $<\mu$, and $p<n$, their difference $a^n-a^p=a^p(a^{n-p}-1)$ necessarily will

be divisible by μ, but a not being divisible, and μ being prime, it would be required that $a^{n-p}-1$ were divisible ; thus there would be a power a^{n-p} less than $a^{\mu-1}$ which would give unity as a remainder, consequently a would not be a primitive root, contrary to the hypothesis.

We have not at present, got a direct method for finding the primitive roots of each prime number ; but we can always find these easily be inspection. *Euler* has given in the *Commentaries of St.Petersburg* (Book XVIII) , a table for all the prime numbers as far as 37, that we place here.

μ	a [primitive roots for prime μ]										
3	2										
5	2,	3									
7	3,	5									
11	2,	6,	7,	8							
13	2,	6,	7,	11							
17	3,	5,	6,	7 ,	11 ,	12,	14				
19	2,	3,	10,	13,	14,	15					
23	5,	7,	10,	11,	13,	14,	15,	17,	20,	21		
29	2,	3,	8,	10,	11,	14,	15,	18,	19,	21,	26,	27
31	3,	11,	12,	13,	17,	21,	22,	24				
37	2,	5,	13	15,	17,	18,	19,	20,	22,	24,	32,	35

where we note that the number of primitive roots, for a given prime number μ, is always equal to that of the numbers less than μ, and prime to $\mu-1$. We can look, on this subject, in the third section of the *Disquisitiones arithmeticae.*

For the rest, for our objective, it will suffice to know a single one of the primitive roots for a given prime number, and it will be more advantageous always, for the calculation, to know the smallest of these.

5. Thus a shall be a primitive root for the prime μ, of the kind that the $\mu-1$ terms of the geometric progression a, a^2, a^3, etc., $a^{\mu-1}$, being divided by μ, give for the remainders all the numbers less than μ, of which unity shall be the last ; it is easy to see that the $\mu-1$ roots r, r^2, r^3, r^4, etc., $r^{\mu-1}$, will be able also, on disregarding the order, to be represented by the series

$$r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, \text{ etc., } r^{a^{\mu-2}}.$$

For as we have by the equation $x^\mu-1=0$, of which r is assumed a root, $r^\mu=1$, it is seen that in place of each power of r, such as r^λ, when $\lambda>\mu$, we will be able always to take the power r^ν, where ν will be the remainder of the division of λ by μ. Hence, in the preceding series, we will be able always to reduce the exponents of r to their remainders after the division by μ, remainders that we have seen to include all the numbers 1 , 2, 3, etc., as far as to $\mu-1$, but in a different order from the natural order, which is here indifferent to the natural order of the roots r, r^2, r^3, etc.

The advantage of this new form of the roots consists in that if in the series of roots

$$r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4}, \text{ etc., } r^{a^{\mu-2}}.$$

we put r^a in place of r, it becomes

$$r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4}, r^{a^5}, \text{ etc., } r;$$

and if we put r^{a^2} in place of r, it becomes

$$r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4}, r^{a^5}, r^{a^6}, \text{ etc., } r, r^a,$$

and hence so forth.

Indeed, it is seen that by the substitution of r^a in place of r, r^a becomes $(r^a)^a = r^{a^2}$, r^{a^2} becomes $(r^a)^{a^2} = r^{a^3}$, etc., and the last term becomes becomes $(r^a)^{a^{\mu-2}} = r^{a^{\mu-1}} = r$, because the remainder of $a^{\mu-1}$ after the division by μ is unity.

Likewise, with the substitution of r^{a^2} in place of r, r^a becomes $(r^{a^2})^a = r^{a^3}$, r^{a^2} becomes $(r^{a^2})^{a^2} = r^{a^4}$, etc., the second last term $r^{a^{\mu-3}}$ becomes $(r^{a^2})^{a^{\mu-3}} = r^{a^{\mu-1}} = r$, the last will become …. $(r^{a^2})^{a^{\mu-2}} = r^{a^\mu} = r^a$, since the remainder of the a^μ by μ is a, because $a^\mu = a \times a^{\mu-1}$, and the remainder of the division of $a^{\mu-1}$ is 1.

6 . With that in place, so that to resolve the equation of degree $\mu-1$ (n° 3)

$$x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + x^{\mu-3} + \text{etc.} + 1 = 0,$$

of which the roots are (n° 5)

$$r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, \text{ etc., } r^{a^{\mu-2}},$$

r^μ being $=1$, because of the equation $x^\mu - 1 = 0$, we use the method of the preceding Note, and in taking these roots for x', x'', x''', etc., we may obtain (n° 14, preceding Note),

$$t = r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} + \text{etc.} + \alpha^{\mu-2} r^{a^{\mu-2}},$$

where α is one of the roots of the equation $y^{\mu-1}-1=0$; then we expand the $\mu-1^{\text{th}}$ power of t, on paying attention to lower the powers of α and of r below $\alpha^{\mu-1}$ and r^{μ}, by the conditions $\alpha^{\mu-1}=1$ and $r^{\mu}=1$, according to the manner in which we have ordered this function following the powers of α,

$$\theta=t^{\mu-1}=\xi^{\text{o}}+\alpha\xi'+\alpha^{2}\xi''+\alpha^{3}\xi'''+\text{etc.}+\alpha^{\mu-2}\xi^{(\mu-2)},$$

where the quantities ξ^{o}, ξ', ξ'', etc. will be rational whole functions of r, such that they do not change with the substitution of $r^{a}, r^{a^{2}}, r^{a^{3}}$, etc. in place of r, as we have seen (n° 16, preceding Note) that these quantities regarded as functions of x', x'', x''', etc. are invariables by the simultaneous permutations of x' into x'', x'' into x''', just as by the simultaneous permutations of x' into x''', x'' into x^{iv}, to which correspond the changes of r into r^{a}, into $r^{a^{2}}$, etc. (n° 5).

7. Now it is clear that any rational and whole function of r, in which $r^{\mu}=1$, can always be reduced to the form

$$\text{A}+\text{B}r+\text{C}r^{2}+\text{D}r^{3}+\text{etc.}\ +\text{N}r^{\mu-1},$$

the coefficients A, B, C, etc. being given quantities independent of r. We can even prove that any rational function of r is reducible to this form; for if it has a denominator, we can always make it disappear, on multiplying the top and bottom of the fraction by a convenient polynomial in r, as we have seen in Note IV (n° 3).

Now since, in our case, the powers r, r^{2}, r^{3}, r^{4}, etc., $r^{\mu-1}$, are able to be represented, albeit in another order, by the powers $r, r^{a}, r^{a^{2}}, r^{a^{3}}$, etc., $r^{a^{\mu-1}}$, we will be able equally to reduce any rational function of r to the form

$$\text{A}+\text{B}r+\text{C}r^{a}+\text{D}r^{a^{2}}+\text{E}r^{a^{3}}+\text{etc.}+\text{N}r^{a^{\mu-1}},$$

on taking for A, B, C, etc. some coefficients independent of r.

Since this function is such that it must remain the same, on putting r^{α} in place of r, it will be required that the new form

$$\text{A}+\text{B}r^{a}+\text{C}r^{a^{2}}+\text{D}r^{a^{3}}+\text{E}r^{a^{4}}+\text{etc.}+\text{N}r$$

(the power $r^{a^{\mu-2}}$ becoming $r^{a^{\mu-1}}$, changes into r, since $r^{\mu}=1$ and $a^{\mu-1}$ divided by μ gives the remainder 1) coincides with the preceding, which gives these conditions

$$\mathrm{B}=\mathrm{C},\ \mathrm{C}=\mathrm{D},\ \mathrm{D}=\mathrm{E},\ \text{etc. } \mathrm{N}=\mathrm{B},$$

and reduces the form of the function to this

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^{a}+r^{a^2}+r^{a^3}+\text{etc.}+r^{a^{\mu-2}}).$$

8. Hence if we denote by *s* the sum of the roots $r, r^2, r^3,$ etc., $r^{\mu-2}$, we will have equally

$$s=r+r^{a}+r^{a^2}+r^{a^3}+\text{etc.}+r^{a^{\mu-2}},$$

and the quantities $\xi^{\mathrm{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. of the function θ, will all be of the form $\mathrm{A}+\mathrm{B}s$. The coefficients A and B will themselves be determined by the actual expansion of the function $\theta=t^{\mu-1}$, and the quantity *s* is known by the nature of the equation to be resolved,

$$x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+\text{etc.}+1=0 \ (\mathrm{n}^{\mathrm{o}}6),$$

which give at once $s=-1$. Hence we have the case where the values of the quantities $\xi^{\mathrm{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. are known immediately, without depending on any equation ; such that on designating by $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. the $\mu-1$ roots of the equation $y^{\mu-1}-1=0,$ on designating by $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta'', \theta''',$ etc. the values of θ which correspond to the substitutions of these roots in place of α, we will have at once, by the formulas of the preceding Note (n° 16), on substituting *r* for *x* and $\mu-1$ for *m,*

$$r=\frac{\sqrt[\mu-1]{\theta^{\mathrm{o}}}+\sqrt[\mu-1]{\theta'}+\sqrt[\mu-1]{\theta''}+\text{etc.}+\sqrt[\mu-1]{\theta^{(\mu-1)}}}{\mu-1}.$$

Such is the expression of one of the roots of the equation $x^{\mu}-1=0;$ we will have all the others by the powers $r^2, r^3,$ etc., $r^{\mu-1};$ but we can have these directly also by the same formulas, on taking r^{a} for $x'',\ r^{a^2}$ for $x''',$ etc.
In this way we will have

$$r^2=\frac{\sqrt[\mu-1]{\theta^{\mathrm{o}}}+\alpha^{\mu-2}\sqrt[\mu-1]{\theta'}+\beta^{\mu-2}\sqrt[\mu-1]{\theta''}+\text{etc.}}{\mu-1}$$

$$r^3=\frac{\sqrt[\mu-1]{\theta^{\mathrm{o}}}+\alpha^{\mu-3}\sqrt[\mu-1]{\theta'}+\beta^{\mu-3}\sqrt[\mu-1]{\theta''}+\text{etc.}}{\mu-1},$$

etc.

9. We will be able, if it be wished, to dispense with the calculation of these quantities ξ^{o} and θ^{o}; for, as we have seen in article 17 of the preceding Note, the term $\sqrt[\mu-1]{\theta^{\mathrm{o}}}$ (on

making here $m=\mu-1$) is always equal to the sum of the roots which we are denoting in general by *s*, and the expression of θ can be put into this form

$$\theta = s^{m-1} + (\alpha-1)\xi' + (\alpha^2-1)\xi'' + (\alpha^3-1)\xi''' + \text{etc.},$$

which does not include ξ^{o}; and it will only be required to substitute $\alpha, \beta, \gamma,$ etc., in place of α, to have the values of $\theta', \theta'', \theta'''$, etc.

In this way, the resolution of the equation $x^{\mu}-1=0,$ will depend only on the resolution of the equation $y^{\mu-1}-1=0,$ of which $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., are the roots. Now, this equation is of one degree less than the proposed ; but further, as $\mu-1$ is necessarily a composite number, we will have the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., by just as many of these other equations $y^{\pi}-1=0,$ as there will be prime factors in the number $\mu-1$, as we have seen in the preceding Note (n° 12).

10. For example, let the equation be $x^5-1=0,$ of which we require the roots. This equation being resolvable by known methods, we will be able to compare this solution with that which results from the preceding method.

On removing the root 1 by division, we have an equation of the fourth degree

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

of which the roots will be $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$.

Since we have here $\mu=5$, we find by the table given above (n° 4) that the smallest primitive root is 2; such that we have $a=2$, and the roots in question can be represented by the powers $r,\ r^2,\ r^{2^2},\ r^{2^3},$ which being lowered to these ones, since $r^5=1$: $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,$ on taking in place of the exponent $2^3=8$, the remainder from the division by 5.

Hence we will have

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^3,$$

on taking for α one root of the equation $y^4-1=0$, such that we may have $\alpha^4=1$.

Now, in order to find the function θ, we only have to raise the polynomial *t* to the fourth power, and to expand it following the powers of α, on lowering those above α^4, and those of *r* below r^5, by the conditions $\alpha^4=1$ and $r^5=1$. We find, by a calculation which has no difficulty,

$$\theta = \xi^{\text{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''',$$

where the quantities ξ^{o}, ξ', etc. have the following values, in which I put *s* for the sum of the roots r, r^2, r^4, r^3,

$$\xi^{\text{o}} = 12 + 13s, \quad \xi' = 16 + 12s,$$
$$\xi'' = 24 + 10s, \quad \xi''' = 16s.$$

Hence, since $s = -1$ by the nature of the equation in *x,* we will have

$$\xi^{\text{o}} = -1, \quad \xi' = 4, \quad \xi'' = 14, \quad \xi''' = -16,$$

and the function θ will become

$$\theta = -1 + 4\alpha + 14\alpha^2 - 16\alpha^3.$$

Now the equation $y^4 - 1 = 0$ factorizing into these two $y^2 - 1 = 0$ and $y^2 + 1 = 0,$ gives at once the four roots $1,\ -1,\ \sqrt{-1},\ -\sqrt{-1},$ which it will be required to substitute successively for *α,* to have the values of $\theta^{\text{o}}, \theta', \theta'', \theta'''$.
Hence we will have

$$\theta' = 25,\ \ \theta'' = -15 + 20\sqrt{-1},\ \ \theta''' = -15 - 20\sqrt{-1}.$$

Hence substituting these values into the expression of *r* of n° 8, and putting $s = -1$ in pace of $\sqrt[4]{\theta^{\text{o}}}$ we will have at once

$$r = \tfrac{1}{4}\left[-1 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{(-15 + 20\sqrt{-1})} + \sqrt[4]{(-15 - 20\sqrt{-1})}\right].$$

11. But we can have a simpler expression for the same root *r,* on making use of the method of n° 25 of the preceding Note, which is always applicable to equations of the kind we treat, since the exponent $\mu - 1$ is necessarily a composite number.

Supposing then in general $\mu - 1 = \nu\pi$, and taking for α a root of the equation $y^\nu - 1 = 0$, the function of *t* of n° 6 will become of this form

$$t = \mathrm{X}' + \alpha\mathrm{X}'' + \alpha^2\mathrm{X}''' + \text{etc.} + \alpha^{\nu-1}\mathrm{X}^{(\nu)},$$

in which

$$\mathrm{X}' = r + r^{\alpha^{\nu}} + r^{\alpha^{2\nu}} + r^{\alpha^{3\nu}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{(\pi-1)\nu}},$$
$$\mathrm{X}'' = r^{\alpha} + r^{\alpha^{\nu+1}} + r^{\alpha^{2\nu+1}} + r^{\alpha^{3\nu+1}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{(\pi-1)\nu+1}},$$
$$\mathrm{X}''' = r^{\alpha^{\nu}} + r^{\alpha^{\nu+2}} + r^{\alpha^{2\nu+2}} + r^{\alpha^{3\nu+2}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{(\pi-1)\nu+2}},$$
etc.,
$$\mathrm{X}^{(\nu)} = r^{\alpha^{\nu-1}} + r^{\alpha^{2\nu-1}} + r^{\alpha^{3\nu-1}} + r^{\alpha^{4\nu-1}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{\pi\nu-1}}.$$

Then we will form the function $\theta = t^{v}$, which, since $\alpha^{v} = 1$, will be of the form

$$\xi^{\text{o}} + \alpha\xi' + \alpha^{2}\xi'' + \alpha^{3}\xi''' + \text{etc.} + \alpha^{v-1}\xi^{v-1},$$

and it will have the property that the quantities $\xi^{\text{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. will be functions of $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc., such that they will remain invariables, on exchanging at once X' into X'', X'' into X''', X''' into X^{iv}, etc., $\mathrm{X}^{(v)}$ into X'.

Now we see by the preceding expressions of $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',$ etc., that on substituting r^{α} in place of r, X' becomes X'', X'' becomes X''', etc., and $\mathrm{X}^{(v)}$ becomes X', for $\mathrm{X}^{(v)}$ changes into

$$r^{\alpha^{v}} + r^{\alpha^{2v}} + r^{\alpha^{3v}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{\pi v}};$$

but $\pi v = \mu - 1$, and $r^{\alpha^{\mu-1}} = r$, as we have seen above (n° 5).

Since the quantities $\xi^{\text{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. must be functions r such that they remain invariant in the change of r into r^{n}; consequently, by n° 7, they will only be able to be of the form $\mathrm{A} + \mathrm{B}s$, A, B being coefficients which will be given by the formation of these same quantities, and s denoting the sum of the roots $r + r^{\alpha} + r^{\alpha^{2}} + r^{\alpha^{3}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{\mu-2}}$, which is $= -1$ by the proposed equation ; such that all the quantities $\xi^{\text{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. will be given, as in the preceding case (n° 10), and we will have at once, by the formulas of n° 25 of the preceding Note, on putting v in place of n, and s the sum of the roots in place of $\sqrt[v]{\theta^{\text{o}}}$,

$$\mathrm{X}' = \frac{s + \sqrt[v]{\theta'} + \sqrt[v]{\theta''} + \text{etc.}}{v},$$

$$\mathrm{X}'' = \frac{s + \alpha^{v-1}\sqrt[v]{\theta'} + \beta^{v-1}\sqrt[v]{\theta''} + \text{etc.}}{v},$$

$$\mathrm{X}''' = \frac{s + \alpha^{v-2}\sqrt[v]{\theta'} + \beta^{v-2}\sqrt[v]{\theta''} + \text{etc.}}{v},$$

etc.

In these expressions $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. are, with unity, the roots of the equation $y^{v} - 1 = 0$ and $\xi^{\text{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. are the values of θ which correspond to the substitution of $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. in place of α.

We will not need to calculate the value of ξ^{o}, on using the expression of θ of n° 9, which becomes here

$$\theta = s^{v} + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^{2} - 1)\xi'' + (\alpha^{3} - 1)\xi''' + \text{ etc.}$$

12. The case $v=\frac{\mu-1}{2}$ deserves special attention, because it gives the division of the circumference into μ parts.
Thus there shall be $v=\frac{\mu-1}{2}$, and consequently $\pi=2$, we will have …

$X'=r+r^{a^{\frac{\mu-1}{2}}}$. Now, since $a^{\mu-1}-1$ is divisible by μ, and that a is assumed to be a primitive root, $a^{\frac{\mu-1}{2}}-1$ will not be divisible by μ; but $a^{\mu-1}-1=(a^{\frac{\mu-1}{2}}-1)(a^{\frac{\mu-1}{2}}+1)$. Hence, μ being a prime number, $a^{\frac{\mu-1}{2}}+1$ will be divisible by μ, consequently -1 will be the remainder of the division of $a^{\frac{\mu-1}{2}}$ by μ; hence $r^{a^{\frac{\mu-1}{2}}}$ will be equal to $\frac{1}{r}$.
Hence we will have

$$X'=r+\frac{1}{r},\ X''=r^{a}+\frac{1}{r^{a}},\ X'''=r^{a^2}+\frac{1}{r^{a^2}},\ \text{etc.}$$

Now we have, from the known formulas of *Cotes's* theorem,

$$r=\cos\frac{360^{\circ}}{\mu}+\sin\frac{360^{\circ}}{\mu}\sqrt{-1}\quad (\text{n}^{\circ}1),$$

and, in general,

$$r^{m}=\cos\frac{m}{\mu}360^{\circ}+\sin\frac{m}{\mu}360^{\circ}\sqrt{-1}.$$

Hence,

$$X'=2\cos\frac{360^{\circ}}{\mu},\ X''=2\cos\frac{a}{\mu}360^{\circ},\ X'''=2\cos\frac{a^2}{\mu}360^{\circ},\ \text{etc.}$$

Hence the values of X', X'', X''', etc. are all real in this case, and give at once the cosines of the divisions of the circumference into μ parts.

13. Having found the roots X', X'', X''', etc., by these general formulas of $\text{n}^{\circ}\,11$, it will be required to pursue the calculation in the same way to find from that the root v. Hence we will consider the π roots which compose the function X', as the roots of an equation of the degree π, and we will substitute these for x', x'', x''', etc. $x^{(v)}$ in the general expression of the function t; hence we will have

$$t_1=r+\alpha r^{a^{v}}+\alpha^2 r^{a^{2v}}+\alpha^3 r^{a^{3v}}+\text{etc.}+\alpha^{\pi-1}r^{a^{(\pi-1)v}},$$

where it will be required to take one root of the equation $y^{\pi}-1=0$ for α.

From that we will have, since $a^{\pi}=1$,

$$\theta_1=t_1^{\pi}=\xi_1^{\text{o}}+\alpha\xi_1'+\alpha^2\xi_1''+\text{etc.}+\alpha^{\pi-1}\xi_1^{(\pi-1)}.$$

(I have written here $t_1,\ \theta_1,\ \xi_1$ in order to distinguish these quantities from these which we have designated above by $t,\ \theta,\ \xi$). Since the quantities $\xi_1^{\mathrm{o}},\ \xi_1',\ \xi_1'',$ etc. are in general functions of $x',\ x'',\ x''',$ etc., which do not change by the permutations of x' into $x'',\ x''$ into $x''',$ etc., $x^{(\pi)}$ into x' , (n° 16, preceding Note), they will be here functions of *r* which will not vary , on changing *r* into $r^{a^{\nu}}$*,* since by this change, the roots $r^{a^{\nu}},\ r^{a^{2\nu}},\ r^{a^{3\nu}}$, etc., $r^{a^{(\pi-1)\nu}}$ become respectively $r^{a^{\nu}},\ r^{a^{2\nu}},\ r^{a^{3\nu}}$, etc., r.

Now it is not difficult to prove, by a procedure similar to that of n° 8, that any rational function of *r,* which will have the property of being invariant by changing that from *r* to $r^{a^{\nu}}$*,* will necessarily be of the form

$$\mathrm{A}+\mathrm{BX}'+\mathrm{CX}''+\mathrm{DX}'''+\text{etc.}+\mathrm{HX}^{(\nu)},$$

on conserving the expressions of $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. of n° 1l.
For at first any rational function of *r* can be reduced to the form (n° 7),

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}r+\mathrm{C}r^{a}+\mathrm{D}r^{a^2}+\mathrm{E}r^{a^3}+\text{etc.}+\mathrm{N}r^{a^{\mu-1}};$$

and for this function to remain the same, on changing *r* into $r^{a^{\nu}}$ it is necessary that the coefficients of the terms which contain $r^{a^{\nu}},\ r^{a^{2\nu}},\ r^{a^{3\nu}}$, etc. shall be the same as that of *r*; because the coefficients of the terms which contain $r^{a^{\nu+1}},\ r^{a^{2\nu+1}},\ r^{a^{3\nu+1}}$, etc. shall be the same as those of $r^{a^{\nu}}$; as these of the terms $r^{a^{\nu+2}},\ r^{a^{2\nu+2}},\ r^{a^{3\nu+2}}$, etc. shall be the same as that of $r^{a^{\nu}}$, and hence so forth ; which reduces the function to the form which we have just assigned to it.

Indeed we see that each of the quantities $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. $\mathrm{X}^{(\nu)}$ remains the same on substituting $r^{a^{\nu}}$ in place of *r;* for the last $r^{a^{(\pi-1)\nu}}$ or X' becomes $r^{a^{\pi\nu}}=r^{a^{\mu-1}}=r,$ the last term of $r^{a^{(\pi-1)\nu+1}}$ of X'' becomes $r^{a^{\pi\nu+1}}=r^{a},$ and hence for the others.

14. Hence each of the quantities $\xi_1^{\mathrm{o}},\ \xi_1',\ \xi_1'',$ etc. will become, after the expansion, of the form

$$\mathrm{A}+\mathrm{BX}'+\mathrm{CX}''+\mathrm{DX}'''+\text{etc.},$$

and consequently will have a known value. Hence the function θ will be known, and we will have the values of $\theta^{\mathrm{o}},\theta',\theta'',\theta'''$, on substituting there, au lieu de α, the $\pi-1$ roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., which with unity, resolve the equation $y^{\pi}-1=0$. Hence we will have for

r a similar formula to that of n° 8, on putting π in place of $\mu - 1$, and X′, the sum of the roots, in place of the term $\sqrt[\pi]{\theta^{o}}$. Hence we will have

$$r = \frac{X' + \sqrt[\pi]{\theta'} + \sqrt[\pi]{\theta''} + \sqrt[\pi]{\theta'''} + \text{etc.}}{\pi}.$$

15. We may have also, if it be wished, the expressions of the other roots $r^{a^{v}}, r^{a^{2v}}, r^{a^{3v}}$, etc., which compose the function X′ (n° 11), on multiplying the roots $\sqrt[\pi]{\theta'}, \sqrt[\pi]{\theta''}$, etc. in the expression of *r*, first by $\alpha^{\pi-1}, \beta^{\pi-1}$, etc., and then by $\alpha^{\pi-2}, \beta^{\pi-2}$, etc., $\alpha^{\pi-3}, \beta^{\pi-3}$, etc.

We may even be able, without doing a new calculation, to have equally the roots $r^{a}, r^{a^{v+1}}$, etc., which compose the function X″, by the single consideration that X′ becomes X″, X″ becomes X‴, etc., by changing *r* into r^{a}; such that it will suffice to change in the general expression θ, X′ into X″, X″ into X‴, etc., $X^{(r)}$ into X′.

By the same reasoning, as X′ becomes X‴, X″ becomes X^{iv}, etc. by the substitution of $r^{a^{2}}$ in place of *r,* we will be able to deduce the expressions of the roots which compose the function X′, those of the roots which compose the function X‴, of changing simply in the general expression of θ, X′ into X‴, X″ into X^{iv}, etc., $X^{(v-1)}$ into X′, $X^{(v)}$ into X″, etc., and hence so forth.

16. If the number π is not prime, we will be able, on decomposing into its factors, again decompose the preceding operation into other simpler ones.

Hence if $\pi = v'\pi'$, we will only be able to take for α one root of the equation $y^{v'} - 1 = 0$, such that $\alpha^{v'} = 1$, and the function t_1 (n° 11) will become

$$t_1 = X_1' + \alpha X_2'' + \alpha^2 X_1''' + \text{etc.} + \alpha^{v'-1} X_1^{(v')},$$

on assuming

$$X_1' = r + r^{a^{v'v}} + r^{a^{2v'v}} + r^{a^{3v'v}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-1)v}},$$
$$X_1'' = r^{a^{v'}} + r^{a^{(v'+1)v}} + r^{a^{(2v'+1)v}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-v'+1)v}},$$
$$X_1''' = r^{a^{2v'}} + r^{a^{(v'+2)v}} + r^{a^{(2v'+2)v}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-v'+2)v}},$$
etc.,
$$X_1^{(v')} = r^{a^{(v'-1)v}} + r^{a^{(2v'-1)v}} + r^{a^{(3v'-1)v}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-1)v}}.$$

Then we will make $\theta_1 = t_1^{v'}$, and the expression of θ_1 being expressed in the form :

$$\theta_1 = \xi_1^{\text{o}} + \alpha\xi_1' + \alpha^2\xi_1'' + \text{etc.} + \alpha^{\nu'-1}\xi_1^{(\nu')},$$

since $\alpha^{\nu'} = 1$, the quantities $\xi_1^{\text{o}},\ \xi_1',\ \xi_1''$, etc. will become functions of $X_1',\ X_1'',\ X_1'''$, which do not change by the simultaneous rearrangement
X_1' en X_1'', X_1'' into X_1''', X_1''' into X_1^{iv}, etc., $X_1^{(\nu')}$ into X', (preceding Note, 25). Now we see, by the preceding expressions of $X_1',\ X_1''$, etc., that these changes are made simply by changing r into $r^{a^{\nu}}$. Hence these quantities $\xi_1^{\text{o}},\ \xi_1',\ \xi_1''$, etc., regarded as functions of r must be invariant by changing r into $r^{a^{\nu}}$; as a consequence they will be necessarily of the form

$$\text{A} + \text{B}X' + \text{C}X'' + \text{D}X''' + \text{etc.},$$

as we have shown above (n° 13).

Thus, since the values of $X',\ X'',\ X'''$, etc. are known already by the preceding operation, those of $\xi_1^{\text{o}},\ \xi_1',\ \xi_1''$, etc. will be known also. Hence the function θ_1 will be know also, and from that we will have the values of the ν' roots $X_1',\ X_1'',\ X_1'''$, by formulas similar to those of n° 11, on changing ν into ν', X into X_1, θ into θ_1, and taking the roots of the equation $y^{\nu} - 1 = 0$ for $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, etc. except for unity.

We will observe also that *s* being the sum of the roots … $X_1',\ +X_1'',\ +X_1''',+$ etc. will here be equal to X'.

17. The known value of X_1' only gives the sum of the π' roots
$r,\ r^{a^{\nu'\nu}},\ r^{a^{2\nu'\nu}},\ r^{a^{3\nu'\nu}}$, etc. $r^{a^{(\pi'-1)\nu'\nu}}$; it will be required, to have the value of *r,* again to consider these π' roots as given by an equation of degree π', and again to make

$$t_2 = r + \alpha r^{a^{\nu'\nu}} + \alpha^2 r^{a^{2\nu'\nu}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi'-1)\nu'\nu}},$$

on taking for α one root of the equation $y^{\pi'} - 1 = 0$; then we will make

$$\theta_2 = t_2^{\pi'} = \xi_2^{\text{o}} + \alpha\xi_2' + \alpha^2\xi_2'' + \text{etc.} + \alpha^{\pi'-1}\xi_2^{(\pi'-1)},$$

and we will follow the same procedure that we have set out in n° 13 etc. For if the number π' is composed so that we may have $\pi' = \nu''\pi''$, we may be able, in order to avoid the expansion of a too high power, to take a root of the equation $y^{\nu''} - 1 = 0$ for α, which will give the form to t_2:

$$t_2 = X_2' + \alpha X_2'' + \alpha^2 X_2''' + \text{etc.} + \alpha^{v''-1} X_2^{(v'')},$$

and we will pursue the calculation as above, and hence so forth until we come to the last factor that cannot be composite.

The advantage of these decompositions consists in the lowering of the powers to which would be necessary to raise the polynomials t in order to have the functions θ, which diminished the length of the calculation ; and then in lowering the roots which enter into the expression of the root r, which simplifies this expression.

Such is the general and uniform progression of the calculation; we are going to apply that to some examples in order to make that better understood, and at first we will take that of the equation $x^5 - 1 = 0$, which we have resolved above (n° 10).

18. Here we have $\mu - 1 = 4 = 2 \cdot 2$; hence we will have $v = 2,\ \pi = 2,$ (n° 11). We will take one of the roots of the equation $y^2 - 1 = 0$ for α, of such a kind that because $\alpha^2 = 1$, the expression of the function of n° 10, becomes

$$t = X' + \alpha X'',\ \text{where } X' = r + r^4,\ X'' = r^2 + r^3.$$

From that we find, on taking the square of t, since $\alpha^2 = 1$,

$$\theta = t^2 = \xi^o + \alpha\xi',\ \xi^o = X'^2 + X''^2,\ \xi' = 2X'X''.$$

Substituting the values of $X',\ X''$ in terms of r, and expanding the squares and products, on lowering the powers of r below r^5, since $r^5 = 1$, we find

$$\xi^o = 4 + r + r^2 + r^3 + r^4,$$
$$\xi' = 2(r + r^2 + r^3 + r^4).$$

Hence, as the sum of the roots $r + r^2 + r^3 + r^4$ is $= -1$ by the equation, we have $\xi^o = 3,$ and $\xi' = -2.$ Hence the general expression for θ will become $\theta = 3 - 2\alpha.$ From that, since the values of α are 1 and -1, on making $\alpha = -1$, we will have $\theta = 5$; and since

$$s = x' + x'' + x''' + x^{iv} = -1,$$

the formulas of n° 11 above will give

$$X' = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ X'' = \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hence we will find from the value of X' that of $r+r^{2^2}$, the sum of two of the four roots of the proposed equation. In order to have the root in particular, we will do a similar calculation anew, on considering the two roots r and r^4 as the roots of an equation of the second degree.

Hence we will make $t_1 = r+\alpha r^4$, α being, as above, a root of $y^4-1=0$; and from that, we will have

$$\theta_1 = t_1^2 = \xi_1^{\mathrm{o}} + \alpha\xi_1', \text{where } \xi_1^{\mathrm{o}} = r^2+r^3, \text{ and } \xi_1' = 2r^5.$$

Here, we see at once that the values of ξ_1^{o} and ξ_1' are given by means of the values of X' and X'' known already. Indeed, since $r^5=1$, and consequently, $r^8=r^3$, we have $\xi_1^{\mathrm{o}} = r^2+r^3 = \mathrm{X}''$ and $\xi_1' = 2$. Hence we will have $\theta_1 = \mathrm{X}''+2\alpha$; from that, on making $\alpha=-1$; we will have $\theta_1' = \mathrm{X}''-2$, and the formula of n° 14 will give, π being $=2$,

$$r = \frac{\mathrm{X}'+\sqrt{(\mathrm{X}''-2)}}{2}.$$

Finally, substituting here the values X' and X'' found above, we will have

$$r = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4};$$

and by the observations of n° 15, we will have also

$$r^4 = \frac{\mathrm{X}'-\sqrt{(\mathrm{X}''-2)}}{2},$$

and changing X' into X'', X'' into X',

$$r^2 = \frac{\mathrm{X}''+\sqrt{(\mathrm{X}'-2)}}{2},\quad r^3 = \frac{\mathrm{X}''-\sqrt{(\mathrm{X}'-2)}}{2};$$

from which we will have, by the substitutions of the values of X' and X'',

$$r^4 = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4},$$
$$r^2 = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4},$$
$$r^3 = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

Since 5 is a prime number, these values of r, r^2, r^3, r^4 will be the four roots which, with unity, resolve the equation $x^5-1=0$ (n° 3).

19. The expressions of these roots coincide with these we find on resolving the equation $x^5 - 1 = 0$ by known methods. For we have at first, on dividing by $x - 1,\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$ the equation which, being put into the form $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$ becomes $u^2 + u - 1 = 0$, by the substitution of $x + \frac{1}{x} = u$. We will have hence the equation $x^2 - xu + 1 = 0,$ which gives :

$$x = \frac{u \pm \sqrt{(u^2 - 4)}}{2};$$

then the equation in u gives $u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};$ so that on substituting this value, we have

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5} + \sqrt{(-10 \mp 2\sqrt{5})}}{4},$$

where the upper and lower signs of $\sqrt{5}$ must correspond, but are independent of these of the other root; so that we have the four roots by the ambiguity of the signs of the two roots.

20. Advancing to the equation $x^7 - 1 = 0$, which being freed from the root 1, becomes

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

the roots of which will be $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6.$
The smallest primitive root for the number 7 is 3 , following the table of n° 4; hence we will have the progression $3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,$ namely, 1, 3, 9, 27, 81, 243, of which the terms, being divided by 7, will give the remainders 1, 3, 2, 6, 4, 5, which we take for the exponent of r. Hence we will have, for the roots of the proposed equation, the terms $r,\ r^3,\ r^2,\ r^6,\ r^4,\ r^5,$ which we will take for $x',\ x'',\ x''',$ etc.

21. We note here that in order to have the exponents of r which must form the roots, it is not necessary to raise the primitive root to successive powers, and then to divide these powers by the prime number with which the primitive root is in agreement: it suffices to multiply each remainder by the primitive root, and to retain only the remainder on division by the prime number given. Hence on beginning with 1, we have, in the present case, the first two terms 1, 3; multiplying 3 by the primitive 3, and dividing by 7, we have the third remainder term 2 ; 2 multiplied by 3 gives 6 the fourth term ; 6 multiplied by 3 and divided by 7 gives 4 ; finally 4 multiplied by 3 and divided by 7 gives 5. If we wished to continue on multiplying 5 by 3 and dividing by 7, we would find unity and successively the other terms found already.

22. Now we will make

$$t = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^2 + \alpha^3 r^6 + \alpha^4 r^4 + \alpha^5 r^5,$$

on taking for α one root of the equation $y^6 - 1 = 0$; then we will form the function $\theta = t^6$; but since the exponent $6 = 2\cdot 3$; we will be able to simplify the calculation and the results, by the method of n° 11, on at first taking only one root of the equation $y^2 - 1 = 0$ for α; which, since $\alpha^2 = 1$, will reduce the expression of t to this : $t = \mathrm{X}' + \alpha\mathrm{X}''$, in which

$$\mathrm{X}' = r + r^2 + r^4,\ \ \mathrm{X}'' = r^3 + r^6 + r^5;$$

hence we will have

$$\theta = t^2 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi',\ \text{where}\ \xi^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2,\ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}'',$$

and we will find after the expansion, since $r^7 = 1$,

$$\xi^{\mathrm{o}} = 3(r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5),$$
$$\xi' = 2(3 + r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5).$$

Now $r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5$, the sum of the roots, is $= -1$; hence $\xi^{\mathrm{o}} = -3,\ \xi' = 4,$ and the value of θ will be reduced to $\theta = -3 + 4\alpha$. From that, on making $\alpha = -1$, we will have $\theta' = -7$, and we will find the two roots at once

$$\mathrm{X}' = \tfrac{-1+\sqrt{-7}}{2},\ \mathrm{X}'' = \tfrac{-1-\sqrt{-7}}{2}.$$

23. Now considering the three terms of the expression of X' as the three roots of an equation of the third degree : taking α likewise for the root of the equation $y^3 - 1 = 0$, we will make

$$t_1 = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4;$$

then, on making

$$\theta_1 = t_1^3 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'',$$

we will find, since $\alpha^3 = 1$ and $r^7 = 1$,

$$\xi^{\mathrm{o}} = 6 + r^3 + r^6 + r^5,$$
$$\xi' = 3(r + r^2 + r^4),$$
$$\xi'' = 3(r^3 + r^6 + r^5),$$

namely,

$$\xi^{\mathrm{o}} = 6 + \mathrm{X}'', \ \xi' = 3\mathrm{X}', \ \xi'' = 3\mathrm{X}'',$$

such that we will have

$$\theta = 6 + \mathrm{X}'' + 3\alpha\mathrm{X}' + 3\alpha^2\mathrm{X}'';$$

then on calling α and β the two imaginary roots of $y^3 - 1 = 0$, namely, of $y^2 + y + 1 = 0$, which are

$$\alpha = \tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \ \beta = \tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

and making

$$\theta_1' = 6 + \mathrm{X}'' + 3\alpha\mathrm{X}' + 3\alpha^2\mathrm{X}'',$$
$$\theta_1'' = 6 + \mathrm{X}'' + 3\beta\mathrm{X}' + 3\beta^2\mathrm{X}'',$$

we will have (n° 14), on making $\pi = 3$,

$$r = \frac{\mathrm{X}' + \sqrt[3]{\theta_1'} + \sqrt[3]{\theta_1''}}{3}.$$

24. Coming to the equation $x^{11} - 1 = 0$, which on being divided by $x - 1$, is lowered to the tenth degree and becomes

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

We see by the table of n° 4, that the smallest primitive root for the number 11 is 2 ; hence the series of the remainders that we find easily by the procedure of n° 21, will become here 1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6 , such that the series of roots will become

$$r, \ r^2, \ r^4, \ r^8, \ r^5, \ r^{10}, \ r^9, \ r^7, \ r^3, \ r^6 \ ,$$

the sum of which will be consequently $= -1$, and we will have this general expression for t:

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^5 + \alpha^5 r^{10} + \alpha^6 r^9$$
$$+ \alpha^7 r^7 + \alpha^8 r^3 + \alpha^9 r^6,$$

which, on taking one root of the equation $y^{10} - 1 = 0$ for α, will give since $\alpha^{10} = 1$,

$$\theta_1 = t_1^{10} = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{etc.} + \alpha^9\xi^{ix},$$

where we will express the value of r by the general formula of n° 8, on making $\mu = 11$.

But in order to dispense with raising the polynomial t to the tenth power, we will be able to separate the operation into two others corresponding to the two factors 2 and 5 of the number $11-1=10$, by the method of n° 11.

First taking for α one root of the equation $y^2-1=0$, such that we may have $\alpha^2=1$. By that the expression for t will be reduced to this more simple form,

$$t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}'',$$

on making, for abbreviation,

$$\mathrm{X}' = r + r^4 + r^5 + r^9 + r^3,$$
$$\mathrm{X}'' = r^2 + r^8 + r^{10} + r^7 + r^6,$$

and the value of θ will be

$$\theta = t^2 = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2 + 2\alpha \mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

On expanding the squares of the functions X' and X'', and lowering all the powers of r below r^{12}, since $r^{11}=1$, we find

$$\mathrm{X}'^2 = 2\mathrm{X}' + 3\mathrm{X}'',\ \ \mathrm{X}''^2 = 2\mathrm{X}'' + 3\mathrm{X}',$$

and as a consequence $\mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2 = 5(\mathrm{X}' + \mathrm{X}'') = -5,$ since $\mathrm{X}' + \mathrm{X}''$ is the sum of all the roots.

Likewise we find from the multiplication,

$$\mathrm{X}'\mathrm{X}'' = 5 + 2(\mathrm{X}' + \mathrm{X}'') = 5 - 2 = 3.$$

Hence we will have $\theta = -5 + 6\alpha,$ and making $\alpha = -1$, we will have $\theta = -11$.

Then we will have by the formulas of n° 11, on making $v = 2$,

$$\mathrm{X}' = \tfrac{-1+\sqrt{-11}}{2},\ \ \mathrm{X}'' = \tfrac{-1-\sqrt{-11}}{2}.$$

25. Hence having the values of X' and X'', in order to have that of r, it will be necessary to consider the five terms which constitute the quantity X' as the roots of one equation of the fifth degree, and since 5 is a prime number, we will only have to use the general expression for t,

$$t = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^5 + \alpha^3 r^9 + \alpha^4 r^3,$$

on taking for α one root of the equation $y^5-1=0$. Then it will be necessary to make

$$\theta = t^5 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{iv};$$

and it will only be a matter of finding the values in r of the coefficients ξ^{o}, ξ', etc., by the raising of the expression of t to the fifth power, on needing to lower the powers of α below α^5, and those of r below r^{11}, since $\alpha^5=1$ and $r^{11}=1$. By a calculation which has only the trouble of being a little longer, and on the correctness of which we can count, I have found, on retaining the expressions of X' and X'' in r of the preceding n° ,

$$\begin{aligned}
\xi^{\text{o}} &= 120+31\mathrm{X}'+70\mathrm{X}'',\\
\xi' &= 100+60\mathrm{X}'+45\mathrm{X}'',\\
\xi'' &= 50+85\mathrm{X}'+30\mathrm{X}'',\\
\xi''' &= 60\mathrm{X}'+65\mathrm{X}'',\\
\xi^{iv} &= 50\mathrm{X}'+75\mathrm{X}''.
\end{aligned}$$

As the values of $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$ are known already, by the preceding operation, the expression of the function θ presents no more unknowns, and it will give at once the value of the first root *r,* by the general formula of n° 14, on making $\pi=5$, and taking for $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ the four roots which, with unity, resolve the equation $y^5-1=0$, and for the $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$ values of θ which correspond to the substitutions of $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ in place of α in the expression found for θ.

26. If we substitute these values of X' and X'' into these values of ξ^{o}, ξ', etc., given in n° 24, we have

$$\begin{aligned}
&\xi^{\text{o}}=\tfrac{139-39\sqrt{-11}}{2},\quad \xi'=\tfrac{95+15\sqrt{-11}}{2},\\
&\xi''=\tfrac{-15+55\sqrt{-11}}{2},\quad \xi'''=\tfrac{-125-5\sqrt{-11}}{2},\\
&\xi^{iv}=-\tfrac{125+25\sqrt{-11}}{2}.
\end{aligned}$$

If then, in place of the roots $\beta,\ \gamma,\ \delta$, we substitute the powers $\alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ of the root α, which represent them, since 5 is a prime number, and because we lower the powers of α below α^5, we will have

$$\begin{aligned}
\theta' &= \xi^{\text{o}}+\alpha\ \xi'+\alpha^2\xi''+\alpha^3\xi'''+\alpha^4\xi^{iv},\\
\theta'' &= \xi^{\text{o}}+\alpha^2\xi'+\alpha^4\xi''+\alpha\ \xi'''+\alpha^3\xi^{iv},\\
\theta''' &= \xi^{\text{o}}+\alpha^3\xi'+\alpha\ \xi''+\alpha^4\xi'''+\alpha^2\xi^{iv},\\
\theta^{iv} &= \xi^{\text{o}}+\alpha^4\xi'+\alpha^3\xi''+\alpha^2\xi'''+\alpha\ \xi^{iv},
\end{aligned}$$

and the expression for the root r will be

$$r = \frac{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-11})+\sqrt[5]{\theta'}+\sqrt[5]{\theta''}+\sqrt[5]{\theta'''}+\sqrt[5]{\theta^{iv}}}{5}$$

where it will be no more to put for $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ than the values of r, r^2, r^3, r^4, which we have found above (n° 18).

27. We could find by the same principles the values of the powers of r which form the other roots of the equation $x^{11}-1=0$, with unity excepted. And at first we will have the values of the roots r^4, r^5, r^9, r^3, which are present in the function X', on multiplying, in the expression of *r,* the radicals $\sqrt[5]{\theta'},\ \sqrt[5]{\theta''},\ \sqrt[5]{\theta'''},\ \sqrt[5]{\theta^{iv}}$ respectively by $\alpha^4, \beta^4, \gamma^4, \delta^4,$ for the root r^4*;* by $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3,$ for r^5; by $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2,$ for r^9; and by $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ for r^3*, i.e.* by $\alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha$; by $\alpha^3, \alpha, \alpha^4, \alpha^2$; by $\alpha^2, \alpha^4, \alpha, \alpha^3$; by $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$.

In addition, in order to have the values of the other roots $r^2, r^8, r^{10}, r^7, r^6$, which are present in the function X'', we will only have to change in these from r, r^4, r^5, r^9, r^3, X' into X'', and X'' into X'; which only requires the change of sign of the root $\sqrt{-11}$ in the expressions for $\xi^{\mathrm{o}},\ \xi',$ etc.

28. I give here all the more readily these expressions for the roots of the equation $x^{11}-1=0$, which have never been given, and which would not even have been able to be given by the known methods which require the resolution of an equation of the fifth degree.

This is however an exception to be made to what we have just said ; for we find at the end of the *Vandermonde's* Memoir on the *Resolution of equations,* of which we have spoken in the preceding Note, the expression for the root of an equation of the fifth degree, on which the resolution of the equation $x^{11}-1=0$ depends ; for this equation being divided by $x-1$, becomes

$$x^{10}+x^9+x^8+\text{etc.}+1=0,$$

which being of the nature of reciprocals, can be lowered to the fifth degree, by the substitution of $x+\frac{1}{x}=u,$ and we obtain by these formulas from the Note X (n° 14), this equation in *u,*

$$u^5+u^4-4u^3-3u^2+3u+1=0.$$

On taking *u* negatively, which changes the signs of all the even terms , we have the equation resolved by *Vandermonde* [*i.e.* $u^5-u^4-4u^3+3u^2+3u-1=0.$] This author does not give the expression on which it depends, which as a result of the general method, without indicated in detail the operations by which it has been come upon, and no one after him, as far as I know, has verified this result, which appears still to remain ignored.

29. The value that we have just found for the root r of the equation $x^{11}-1=0$, may be able to serve for this verification ; but we can arrive directly at a result comparable to that of *Vandermonde*, on taking for α, in the general expression of t from n° 24, a root of the equation $x^5-1=0$, in place of the equation $x^2-1=0$ which we have used, which is allowed, since 2 and 5 being factors of 10, we can depart from one to the other, as wished.

30. Hence making $\alpha^5=1$, the general expression of t (n° 24) will become

$$t = \mathrm{X}' + \alpha\mathrm{X}'' + \alpha^2\mathrm{X}''' + \alpha^3\mathrm{X}^{iv} + \alpha^4\mathrm{X}^{v},$$

in which

$$\mathrm{X}' = r + r^{10},\ \mathrm{X}'' = r^2 + r^9,\ \mathrm{X}''' = r^4 + r^7,$$
$$\mathrm{X}^{iv} = r^8 + r^3,\ \mathrm{X}^{v} = r^5 + r^6,$$

and we will now consider the quantities $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$, etc., as the roots of an equation of the fifth degree ; this is the case which we have considered in general in n° 12.

Hence we will have

$$\theta = t^5 = \xi^{o} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{iv},$$

and we will search for the values of ξ^{o}, ξ', ξ'', etc. in a function of r by the expansion of the fifth power of t, that continually lower the powers of α below α^5, and these of r below r^{11}, since, $\alpha^5=1$, and $r^{11}=1$. The calculation has no other difficulty apart from the length. Here are the results that I have found, and , and which I consider able to be the answer.

On making, to shorten the calculation,

$$s = r + r^2 + r^4 + r^8 + r^5 + r^{10} + r^9 + r^7 + r^3 + r^6,$$

we have

$$\xi^{o} = 1640 + 1836s,\quad \xi' = 1700 + 1830s,$$
$$\xi'' = 2050 + 1795s,\quad \xi''' = 1800 + 1820s,$$
$$\xi^{iv} = 1900 + 1810s.$$

Now s is the sum of the roots which, by the nature of the equation of the tenth degree in x, of which the second term is x^9, must be equal to -1.

Hence making $s=-1$, we will have

$$\xi^{o} = -196, \quad \xi' = -130, \quad \xi'' = 255,$$
$$\xi''' = -\ 20, \quad \xi^{iv} = 90.$$

Hence the value of θ will be

$$\theta = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4.$$

On putting successively the four root $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ of the equation $x^5 - 1 = 0$ in place of α, we will have the four quantities $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$, and if we take, as above (n^o 26), for these roots the powers $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, of which the values are the same as these of r, r^2, r^3, r^4, of n^o 18, we will have, since $\alpha^5 = 1$,

$$\theta' = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4,$$
$$\theta'' = -196 - 130\alpha^2 + 255\alpha^4 - 20\alpha + 90\alpha^3,$$
$$\theta''' = -196 - 130\alpha^3 + 255\alpha - 20\alpha^4 + 90\alpha^2,$$
$$\theta^{iv} = -196 - 130\alpha^4 + 255\alpha^3 - 20\alpha^2 + 90\alpha,$$

and the general formula of n^o 11, will give at once, on making $r = 5$ and $s = -1$,

$$X' = \frac{-1 + \sqrt{-11} + \sqrt[5]{\theta'} + \sqrt[5]{\theta''} + \sqrt[5]{\theta'''} + \sqrt[5]{\theta^{iv}}}{5}.$$

This quantity X' is $= r + r^{10} = r + \frac{1}{r}$, since $r^{11} = 1$; that is the value of $2\cos\frac{360^o}{11}$ (n^o 12); it is also that of the root *u* of the equation in *u* of the fifth degree (n^o 28), since *r* is the root of the equation $x^{11} - 1 = 0$. Hence the preceding expression, taken negatively, must agree with that of *Vandermonde.*

31. In order to compare them easily, we substitute the values of $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ into the preceding expressions for $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$, which are the same as these of r, r^2, r^3, r^4 of n^o 18.

On making, in order to abbreviate,

$$m = (-10 - 2\sqrt{5}), \quad n = (-10 + 2\sqrt{5}),$$

we have

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5} + m}{4}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{5} + n}{4},$$
$$\alpha^3 = \frac{-1 - \sqrt{5} - n}{4}, \quad \alpha^4 = \frac{-1 + \sqrt{5} - m}{4},$$

and in order to assure ourselves of the correctness of these expressions, we will only have to square $-1+\sqrt{5}+m$, which is $6-2\sqrt{5}+m^2+2(\sqrt{5}-1)m$; now on moving $\sqrt{5}-1$, the coefficient of m raised to the square under the square root sign, we will find $(\sqrt{5}-1)m=2n$; such that on substituting the value of m^2 , we have

$$(-1+\sqrt{5}+m)^2=4(-1-\sqrt{5}+n).$$

We can verify the other powers of α likewise.

Making these substitutions, we find

$$\theta'=\tfrac{1}{4}(-979-275\sqrt{5}-220m+275n),$$
$$\theta''=\tfrac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}-275m-220n),$$
$$\theta'''=\tfrac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}+275m+220n),$$
$$\theta^{iv}=\tfrac{1}{4}(-979-275\sqrt{5}+220m-275n),$$

where we will observe that the coefficients 979, 275, 220 are all divisible by 11 and give for quotients 89, 25, 20 , such that the quantities $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$ can be expressed more simply thus :

$$\theta'=\tfrac{11}{4}(-89-25\sqrt{5}-20m+25n),$$
$$\theta''=\tfrac{11}{4}(-89+25\sqrt{5}-25m-20n),$$
$$\theta'''=\tfrac{11}{4}(-89+25\sqrt{5}+25m+20n),$$
$$\theta^{iv}=\tfrac{11}{4}(-89-25\sqrt{5}+20m-25n).$$

32. In order that our expressions approach more to those of *Vandermonde,* we will use these transformations :

$$m=p+q,\quad n=p-q\,,$$

on assuming

$$p=\sqrt{(-5-2\sqrt{5})},\quad q=\sqrt{(-5+2\sqrt{5})},$$

which are verified on taking the squares, and on observing that $pq=-\sqrt{5}$, since the product of the two real positive roots $\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$, $\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ is $\sqrt{5}$; then

$$\sqrt{5}=p\sqrt{-1}\times q\sqrt{-1}=-pq.$$

By these substitutions, the quantities $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$ will become

$$\theta' = \tfrac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} + 5p - 45q),$$
$$\theta'' = \tfrac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} - 45p - 5q),$$
$$\theta''' = \tfrac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} + 45p + 5q),$$
$$\theta^{iv} = \tfrac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 5p + 45q).$$

33. *Vandermonde* has given, in the Mémoires de l'Académie [Royale] des Sciences, for the year 1771 (page 416), for the resolution of the equation

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

this expression of the root

$$x = \tfrac{1}{5}(1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{iv}),$$

in which

$$\Delta' = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 + 25\sqrt{5} - 5q + 45p)},$$
$$\Delta'' = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 + 25\sqrt{5} + 5q - 45p)},$$
$$\Delta''' = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} - 5q - 45p)},$$
$$\Delta^{iv} = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} + 5q + 45p)},$$

on retaining the values of p and q assumed above;

We see that the expressions for Δ''' and Δ^{iv} coincide with these of $\sqrt[5]{-\theta'''}$ and $\sqrt[5]{-\theta''}$, and that the expressions of Δ' and Δ'' only differ from these of $\sqrt[5]{-\theta'}$ and $\sqrt[5]{-\theta^{iv}}$ which is by the exchange of the quantities p and q between themselves, which only maintains the sign of the root $2\sqrt{5}$ under the square root. For this small difference, which can arise from a printing mistake in Vandermonde's article, his results agree perfectly with ours, since the root of his equation x corresponds to the root of our equation in u taken negatively, and because every fifth root $\sqrt[5]{-\theta}$ is the same thing as $-\sqrt[5]{\theta}$. We can then say that *Vandermonde* was the first person who had reached the limits in which the resolution of equations restricted to two terms was found.

34. In order not to leave any doubt concerning the correction to be made to *Vandermonde's* formula , we are going to prove that it arises from the same principles of his formula. Indeed, if we designate as he, the four roots of unity by r', r'', r''', r^{iv} which with unity, resolve the equation $x^5 - 1 = 0$, it is easy to see, by the general formula of article VIII of his article, that the quantity Δ can only be of the form

$$\sqrt[5]{(\mathrm{A}+Br'+\mathrm{C}r''+\mathrm{D}r'''+\mathrm{E}r^{iv})}\ ;$$

and that on taking this expression for one of the quantities $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta^{iv},$ the expressions of the three others must result from this, on the substitution of r^2, r^3, r^4 in place of r; the quantities A, B, C, D, E being functions of the roots of the equation to be resolved, independent of the roots r', r'', r''', r^{iv}

Now, by these relations between these last roots given in the same article, we have

$$\begin{aligned}
&r'^2 = r''', r''^2 = r^{iv}, r'''^2 = r'', r^{iv2} = r',\\
&r'^3 = r'r''' = r^{iv}, r''^3 = r''r^{iv} = r''', r'''^3 = r''r''' = r', r^{iv3} = r'r^{iv} = r'',\\
&r'^4 = r'r^{iv} = r'', r''^4 = r''r''' = r', r'''^4 = r'r''' = r^{iv}, r^{iv4} = r''r^{iv} = r'''.
\end{aligned}$$

Hence, the four expressions concerned will become

$$\begin{aligned}
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r'+\mathrm{C}r''+\mathrm{D}r'''+\mathrm{E}r^{iv})},\\
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r'''+\mathrm{C}r^{iv}+\mathrm{D}r''+\mathrm{E}r')},\\
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r^{iv}+\mathrm{C}r'''+\mathrm{D}r'+\mathrm{E}r'')},\\
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r''+\mathrm{C}r'+\mathrm{D}r^{iv}+\mathrm{E}r''')}.
\end{aligned}$$

35. In article XXIII of the same memoir, we find these expressions for the roots of the equation $x^5-1=0$, in which I introduce, for more simplicity, the same letters p and q used above,

$$\frac{1}{4}\left\{-1\left.\begin{array}{c}+\\+\\-\\+\end{array}\right\}\sqrt{5}\left.\begin{array}{c}+\\-\\+\\-\end{array}\right\}q\left.\begin{array}{c}+\\-\\-\\+\end{array}\right\}p\right\}.$$

On taking the first of these roots for r', so that we shall have

$$r' = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}+p+q),$$

it will be required, following the formulas of n° 31, on taking α for r', and substituting $p+q,\ p-q$ for *m, n*, to assume

$$r''' = r'^2 = \tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}+p-q),$$
$$r^{iv} = r'^3 = \tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}-p+q),$$
$$r'' = r'^4 = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}-p-q).$$

Substituting these values into the above expressions, they will be changed into these :

$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{H}p+\mathrm{K}q)},$$
$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{K}p-\mathrm{H}q)},$$
$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}-\mathrm{K}p+\mathrm{H}q)},$$
$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{H}p-\mathrm{K}q)},$$

on making, to abbreviate,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= 4\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}-\mathrm{E},\\
\mathrm{G} &= \mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}-\mathrm{E},\\
\mathrm{H} &= \mathrm{B}-\mathrm{C}+\mathrm{D}-\mathrm{E},\\
\mathrm{K} &= \mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}+\mathrm{E},
\end{aligned}$$

which must agree with these of $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta^{iv}$, reported above (n° 33). But we see at a glance that this agreement cannot have a place, unless at the same time we change p into q and q into p in Δ' and Δ'', or in Δ''' and Δ^{iv}, because in the preceding formulas, the coefficients of p and q are not the same as in the two where the root $\sqrt{5}$ has the same sign attached, in place of which in the expressions of $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta^{iv}$, the quantities p and q have the same coefficients everywhere .

36. On making this change in Δ' and Δ'', as we have indicated (n° 33) in order that the formulas of *Vandermonde* are in accord with ours, we can assume

$$\Delta' = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{H}p+\mathrm{K}q)},$$
$$\Delta'' = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}-\mathrm{H}p-\mathrm{K}q)},$$
$$\Delta''' = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}-\mathrm{K}p+\mathrm{H}q)},$$
$$\Delta^{iv} = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{K}p-\mathrm{H}q)},$$

which will be verified on making

$$\mathrm{F}=11\cdot 89,\ \mathrm{G}=11\cdot 25,\ \mathrm{H}=-5,\ \mathrm{K}=45.$$

From that, we will have, by the formulas of the preceding number,

$$\mathrm{B}=\mathrm{A}-11\cdot 6,\ \mathrm{C}=\mathrm{A}-11\cdot 26,\ \ \mathrm{D}=\mathrm{A}-11\cdot 41,\ \ \mathrm{E}=\mathrm{A}-11\cdot 16,$$

and the quantity A will remain indeterminate, because since ….
$1+r'+r''+r'''+r^{iv}=0,$ it will vanish from the expressions of the quantities Δ of n° 34.
If we make $\mathrm{A}=196$, we find

$$\mathrm{B}=130,\ \mathrm{C}=-90,\ \mathrm{D}=-255,\ \mathrm{E}=20,$$

and the formula

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}r'+\mathrm{C}r''+\mathrm{D}r'''+\mathrm{E}r^{iv})$$

of n° 34, will coincide with that of $\sqrt{-\theta'}$ of n° 30, since on making
$\alpha=r',$ we have $r''=\alpha^4,\ r'''=\alpha^2,\ r^{iv}=\alpha^3$ (n° 35); and the formulas derived from that also will coincide with these of $\sqrt[5]{-\theta''},\ \sqrt[5]{-\theta'''},\ \sqrt[5]{-\theta^{iv}}$.

37. Taking for the last example the equation $x^{13}-1=0$. Since $13-1=12=2\cdot 2\cdot 3$, the operation will be able to be separated into three parts, of the following kind.

It will be necessary at first to have a primitive root for the number 13, and the table of n° 4 provides the number 2, the successive powers of which, as far as the eleventh, divided by 13, give the remainders $2,\ 4,\ 8,\ 3,\ 6,\ 12,\ 11,\ 9,\ 5,\ 10,\ 7$.

Hence on calling r a root of the equation

$$x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+\text{etc.}+1=0,$$

the other eleven roots will be

$$r^2,r^4,r^8,r^3,r^6,r^{12},r^{11},r^9,r^5,r^{10},r^7.$$

We will then make in general

$$t=r+\alpha r^2+\alpha^2r^4+\alpha^3r^8+\alpha^4r^3+\alpha^5r^6$$
$$+\alpha^6r^{12}+\alpha^7r^{11}+\alpha^8r^9+\alpha^9r^5+\alpha^{10}r^{10}+\alpha^{11}r^7.$$

and we will take initially for α a root of the equation $y^2-1=0$, such that $\alpha^2=1$, which will reduce the function t to the form….. $t=\mathrm{X}'+\alpha\mathrm{X}''$, in which

$$\mathrm{X}' = r \quad + r^4 + r^3 + \ r^{12} + r^9 + r^{10},$$
$$\mathrm{X}'' = r^2 + r^8 + r^6 + r^{11} \quad + r^5 + r^7.$$

From that, we will have

$$\theta = t^2 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi,\ \ \xi = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2,\ \ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

We can dispense with the search for the value of ξ^{o}, on using the expression of θ from n° 11, which does not include ξ^{o}, and which gives here, on account of $v = 2$ and from $s = -1$ the sum of the roots of the proposed equation, $\theta = 1 + (\alpha - 1)\xi'$; such that on making $\alpha = -1$, we will have the value of θ', and the two roots $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$ will be (n° cited)

$$\mathrm{X}' = \frac{-1 + \sqrt{(1 - 2\xi')}}{2},\ \mathrm{X}'' = \frac{-1 - \sqrt{(1 - 2\xi')}}{2}.$$

In order to have the value of ξ', it will be required to expand the product $\mathrm{X}'\mathrm{X}''$ in powers of r, having the need to lower the powers above r^{12}, since $r^{13} = 1$, and we find $\mathrm{X}'\mathrm{X}'' = 3s$, on putting s for the sum of the roots $r,\ r^2,\ r^4$, etc., which is $= -1$; such that we will have $\xi' = -6$, and the values of $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$ will become

$$\mathrm{X}' = \frac{-1 + \sqrt{-11}}{2},\ \mathrm{X}'' = \frac{-1 - \sqrt{-11}}{2}.$$

38. Now we will consider the six roots which constitute the quantity X' as these of an equation of the sixth degree, and we will make anew

$$t_1 = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^3 + \alpha^3 r^{12} + \alpha^4 r^9 + \alpha^5 r^{10};$$

but in place of taking in general for α a root of the equation $y^6 - 1 = 0$, which would demand next the expansion of the sixth power of the polynomial t_1, we take anew a root of the equation $y^2 - 1 = 0,$ such that by means of $\alpha^2 = 1$, the function t_1 will return to the form $t_1 = \mathrm{X}_1' + \mathrm{X}_1'',$ in which we will have

$$\mathrm{X}_1' = r + r^3 + r^9,\ \mathrm{X}_1'' = r^4 + r^{12} + r^{10}.$$

Then we will have, as above,

$$\theta_1 = t_1^2 = \xi_1^{\mathrm{o}} + \alpha\xi_1',\ \ \xi_1^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}_1'^2 + \mathrm{X}_1''^2,\ \ \xi_1'^2 = 2\mathrm{X}_1'\mathrm{X}_1'',$$

and since the sum of the roots here is X', we will have at once

$$\mathrm{X}_1' = \frac{\mathrm{X}'+\sqrt{\theta_1'}}{2},\quad \mathrm{X}_1'' = \frac{\mathrm{X}'-\sqrt{\theta_1'}}{2},$$

we will have at the same time $\theta_1 = \mathrm{X}'^2 + (\alpha-1)\xi_1'$, and making $\alpha=-1$, $\theta_1' = \mathrm{X}'^2 - 2\xi_1'$.

In order to have ξ', it will be required to expand the product of X_1' by X_1''; on remembering always that $r^{13}=1$, and we will find

$$\mathrm{X}_1'\mathrm{X}_1'' = 3+\mathrm{X}'',$$

which will give

$$\xi_1' = 6+2\mathrm{X}'',$$

and consequently,

$$\mathrm{X}_1' = \frac{\mathrm{X}'+\sqrt{(\mathrm{X}'^2-12-4\mathrm{X}'')}}{2},$$
$$\mathrm{X}_1'' = \frac{\mathrm{X}'-\sqrt{(\mathrm{X}'^2-12-4\mathrm{X}'')}}{2}.$$

39. We will observe here that since on putting r^2 in place of r, the function X' becomes X'', and the function X'' becomes X'; if we denote by (X'), (X'') what the functions X_1', X_1'' become, on substituting r^2 in place of r in all the powers of r, which gives

$$(\mathrm{X}_1') = r^2+r^6+r^5,\quad (\mathrm{X}_1'') = r^8+r^{11}+r^7,$$

we will have the values of (X_1'), (X_1''), on exchanging in these of X_1', X_1'', the quantities X', X'', between themselves. Hence we will have :

$$(\mathrm{X}_1') = \frac{\mathrm{X}''+\sqrt{(\mathrm{X}'^2-12-4\mathrm{X}')}}{2},$$
$$(\mathrm{X}_1'') = \frac{\mathrm{X}''-\sqrt{(\mathrm{X}'^2-12-4\mathrm{X}')}}{2}.$$

These are the functions corresponding to X_1', X_1'', which we would obtain on preceding to regard the roots which compose the function X_1'', as we have done on those of X_1'. These values are necessary in order to arrive at those of r.

40. For this purpose, it will be necessary again to consider the three roots which compose the function X_1' as those of an equation of the third degree, and as a consequence to make,

$$t_2 = r+\alpha r^3+\alpha^2 r^9,$$

and taking for α a root of the equation $y^3 - 1 = 0$.

From that, we will form the function

$$\theta_2 = t_2^3 = \xi_2^{\text{o}} + \alpha\xi_2' + \alpha^2\xi_2'',$$

and we will find, by the expansion, on making $\alpha^3 = 1$, and $r^{13} = 1$, these expressions

$$\xi_2^{\text{o}} = 6 + \text{X}_1', \quad \xi_2' = (\text{X}_1'), \quad \xi_2'' = 3(\text{X}_1'').$$

Hence, calling α and β the two roots of the equation

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

and making

$$\theta_2' = 6 + \text{X}_1' + 3\alpha(\text{X}_1') + 3\alpha^2(\text{X}_1''),$$
$$\theta_2'' = 6 + \text{X}_1' + 3\beta(\text{X}_1') + 3\beta^2(\text{X}_1''),$$

we will have, as in n° 23,

$$r = \frac{\text{X}_1' + \sqrt[3]{\theta_2'} + \sqrt[3]{\theta_2''}}{3}.$$

Hence the value of r is determined entirely; we have not looked to simplify that, because, in all these cases, it is always more advantageous to use, for the resolution of $x^{13} - 1 = 0$, just as all the equations of this kind are used, the known formulas in the sine and cosine.

41. I may observe, on finishing, that the method set out in this Note, can be regarded as a simplification of that which *Gauss* has indicated in a general manner, in article 360 of the *Disquisitiones arithmeticae*. That also is based on the expansion of a function similar to the function which we have designated by θ ; but it requires further the formation and development of so many other functions of the same order as the equation has of roots, which lengthens the calculation considerably. Our method is independent of these auxiliary functions, and leads directly to the most simple expressions for the roots.

THE END.

Correction (left by M. Lagrange) *for article* 37 *of Note* XIII, *page* 242.

The rule given in this article, in order to know which of the two systems of equations one must choose in each case, is not general enough.

M. Bret, professor of Mathematics at the Lycée of Grenoble, has found an example where it is at fault.

Let the equation be

$$x^4+2x^2-8x+5=0\ ;$$

the transformation into θ is

$$\theta^3+16\theta^2-256\theta-(64)^2=\ 0,$$

of which the roots are $-16,\ -16,\ 16$, which gives

$$\sqrt{\theta'}=4,\ \sqrt{\theta''}=4\sqrt{-1},\ \sqrt{\theta'''}=4\sqrt{-1}.$$

The function $\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}$ is $>\ 0$, because $\mathrm{A}=0,\ \mathrm{C}=8$; hence it will be required to take the first system. At first we will have

$$x'=1+2\sqrt{-1},$$

which is not satisfied. Indeed,

$$(1+2\sqrt{-1})^2=-2+4\sqrt{-1},$$

$$(-3+4\sqrt{-1})^2=-7-24\sqrt{-1};$$

hence the equation will become

$$-7-24\sqrt{-1}-6+8\sqrt{-1}-8-16\sqrt{-1}+5$$
$$=-16-32\sqrt{-1},$$

which is not zero.

The second system will give

$$x'=-1-2\sqrt{-1},$$

hence

$$-7-24\sqrt{-1}-6+8\sqrt{-1}+8+16\sqrt{-1}+5=0.$$

But I observe that the analysis gives simply the condition

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}=\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}\ ;$$

to which it follows that the product of the three roots $\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}$ must be equal, and as a consequence of the same sign as the quantity .... $\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}$. Hence if, on taking the three roots positive, their product is of the same sign as this quantity, this will be the first system which will be used; but if it is of the contrary sign, then it will be required to give the sign − to one of the three roots, which will give the second system.

In the relevant system, we have

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}=4\times4\sqrt{-1}\times4\sqrt{-1}=-64,$$

while

$$\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}=64.$$

Hence it is the second system that has a place.

The error comes arises when we assume that the product of the three roots, taken positively, shall always be positive.

For the remainder, we can remove all ambiguity on taking in the first system

$$\sqrt{\theta'''}=\tfrac{\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}}{\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}}.$$

In the proposed example, for which

$$\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}=64,$$

having made $\sqrt{\theta'}=4,\ \sqrt{\theta''}=4\sqrt{-1},$ we will have $\sqrt{\theta'''}=-4\sqrt{-1}$; then the first system will give

$$x'=1,\ x''=-1+2\sqrt{-1},\ x'''=1,\ x^{iv}=-1-2\sqrt{-1},$$

the true roots.

NOTE From POINSOT, *relating to the preceding correction*.

It appears to me that something should be done regarding this point of the doctrine, in the form of a note simpler and clearer than what we have just read, so that at the same time as it removes this useless enumeration of formulas that has given rise to this error to which it relates, it renders even more clear and precise the rule that we have just read in particular applications.

On representing as Euler does it, by

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

the equation of the 4th degree, and by the letters *a, b, c*, the three roots of that on being *reduced* , I observe that, in Algebra, we need only present, for the general expression of *x*, the simple formula

$$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},$$

and that it would be necessary to delete, as useless, all these which we had extracted by different combinations of signs which are attached to the roots $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. For these signs + or − which we put before these roots, do not make positive or negative quantities for that; and by the same ambiguity which remains attached to the root sign √ , and to these which enter into the expression of *a, b, c*, all these representations, or formulas diverse in appearance, always return to the same, and signify nothing more in Algebra. Thus it suffices to write the simple formula preceding, where the sign + that I have used, signifies uniquely that the expression of *x* is formed by the joining together of the three general expressions $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, without saying anything about the nature of these quantities, which we can neither know nor mark by any sign, as long as we remain in the generality of the analysis.

Actually, I assume that we would want to give a rule for the arithmetical application that we would be able to have, in order to make a particular given equation from that general formula. It suffices to say that, in each particular case, there will be a need to put together the *values* found for the roots, such that the product of these values shall be of the opposite sign to the coefficient *q* of the proposed equation: which will give *precisely, and in all cases*, the four roots of this equation.
(This assumes that, by the analogous rule in the 3rd degree, we have first determined the three particular roots *a, b, c*, which will be appropriate for the reduction.)
We see that everything becomes clear and easy, by this one focus of attention of not confusing with Algebra that which only pertains to Arithmetic. The fault that we take up here comes precisely from the false mixture that we wish to make from out of analysis and synthesis.

We try to distinguish between and to separate, by certain signs, the different roots of a root formula, and this separation is quite illusory : since these roots always exist together in some single arrangement between themselves, so that we leave these roots which give a place to this multiple of the values. Now, by the very nature of Algebra, it is required that these ambivalent signs remain, since this knowledge has no other object than to indicate the operations to make, but without performing them, so that the table of these operations, the one thing that the mind has in view, shall be perfectly retained. It is likewise to prevent any imperfection of this kind, which, in the calculation, instead of numbers, we use letters ; from which it follows that any operation cannot actually be able to be done, and that the sign of the operation required always exists.

When we move on to numerical applications, the operations are performed, the radical signs disappear, and we have no more than particular values, composed of real numbers or simply with the imaginary $\sqrt{-1}$ attached : it is the only ambiguity which remains ; and the choice of these particular values is done easily by this natural rule, which consists in conforming to the very hypothesis of the calculation, so as not to contradict itself.

Thus, in Euler's formula, the hypothesis of the calculation is $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}=-\frac{q}{8}$, which indicates that the product of the three particular values, which we assemble for the root *x* of the proposed equation, must be exactly equal to $-\frac{q}{8}$. Thus it will be required to conform to this supposition, as when we ask for the square of $\sqrt{-1}$, we must write -1, in order not to be contradictory. By this principle alone, we are certain to find in each case the true values which agree with the question which we consider.

NOTE XIV,

Où l'on donne la résolution générale des équations à deux termes.

1. Quoique les équations à deux termes, telles que $x^{\mu}-\mathrm{A}=0$, ou plus simplement, $x^{\mu}-1=0$ (puisque cette forme-là peut se réduire à celle-ci, en y mettant $x\sqrt[\mu]{\mathrm{A}}$ pour x), soient toujours résolubles par les tables des sinus, d'une manière aussi approchée qu'on puisse le désirer, en employant la formule connue

$$x=\cos\tfrac{\nu}{\mu}360^{\mathrm{o}}+\sin\tfrac{\nu}{\mu}360^{\mathrm{o}}\times\sqrt{-1},$$

et faisant successivement $\nu=1,2,3,$ etc., $,\mu,$ leur résolution algébrique n'en est pas moins intéressante pour l'analyse; et les géomètres s'en sont beaucoup occupés. Ils ont d'abord réduit la difficulté à résoudre les équations dont le degré a pour exposant un nombre premier, comme nous l'avons vu au commencement de la Note précédente. Ils ont trouvé de plus que comme l'équation $x^{\mu}-1=0$ a nécessairement 1 pour l'une de ses racines, en la divisant par $x-1$, on a pour les autres l'équation du degré $\mu-1$,

$$x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+\text{etc.}+1=0,$$

laquèlle étant du genre des équations qu'on appelle *réciproques,* parce qu'elles demeurent les mêmes, en y changeant x en $\frac{1}{x}$, est décomposable $\frac{\mu-1}{2}$ équations du second degré, telles que $x^{2}-yx+1=0$, dans lesquelles y dépend d'une équation du degré $\frac{\mu-1}{2}$ de la forme

$$y^{\nu}+y^{\nu-1}-(\nu-1)y^{\nu-2}+(\nu-2)y^{\nu-3}+\tfrac{(\nu-2)(\nu-3)}{2}y^{\nu-4}$$
$$+\tfrac{(\nu-3)(\nu-4)}{2}y^{\nu-5}-\text{etc.}=0,$$

où $\nu=\frac{\mu-1}{2}$, comme nous l'avons vu dans la Note X (n° 14).

De cette manière on avait résoudre l'équation $x^{7}-1=0$, parce qu'elle se réduit à une équation du troisième degré; mais on était arrêté à l'équation $x^{11}-1=0$, qui ne se réduit par ce moyen qu'à une du cinquième.

2. On en était là lorsque M. *Gauss* donna, en 1801, dans son excellent Ouvrage intitulé *Disquisitiones arithmeticae* (*), une méthode aussi originale qu'ingénieuse pour réduire la solution de l'équation $x^{\mu}-1=0$, lorsque μ est un nombre premier, à la résolution d'autant

d'équations particulières que le nombre $\mu-1$ contient de facteurs premiers, et dont les degrés soient exprimés par ces mêmes facteurs. Ainsi l'équation $x^{13}-1=0$ ne demande que la résolution de deux équations du second, et d'une du troisième, parce que $13-1=2.2.3.$ L'équation $x^{17}-1=0$ ne demande que la résolution de quatre équations du second degré, et ainsi de suite.

Mais en appliquant les principes de la théorie de M. *Gauss* à la méthode exposée dans la Note précédente, j'ai reconnu qu'on pouvait obtenir directement la résolution complète de toute équation à deux termes dont le degré est exprimé par un nombre premier, sans passer par aucune équation intermédiare, ni avoir à craindre l'inconvénient qui naît de l'ambiguïté des racines. C'est-ce que je vais développer dans cette Note.

3. Soit l'équation à résoudre $x^{\mu}-1=0$, μ étant un nombre premier; si l'on en sépare la racine $=1$, elle s'abaisse à celle- ci du degré $\mu-1$,

$$x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+\text{etc.}+1=0.$$

Soit *r* une racine quelconque de cette équation, on pourra représenter ses $\mu-1$ racines par les termes de la série géométrique

$$r,\, r^2,\, r^3,\, r^4,\, \text{etc.},\ r^{\mu-1},$$

comme nous l'avons démontré dans la Note précédente (n° 5).

M. *Gauss* a eu l'idée ingénieuse et heureuse de substituer à la progression arithmétique des exposans de *r,* une progression géométrique, en vertu du fameux théorème de *Fermat*, sur les nombres premiers.

Par ce théorème démontré d'abord par *Euler*, et ensuite par tous ceux qui se sont occupés de la théorie des nombres, on sait que si μ est un nombre premier, et *a* un nombre moindre que μ, le nombre $a^{\mu-1}-1$ sera nécessairement divisible par μ, de sorte que le reste de la division de $a^{\mu-1}-1$ par μ , sera l'unité.

Euler a démontré de plus que si en divisant tous les termes de la progression $a, a^2, a^3,$ etc., $a^{\mu-1},$ par μ, il se trouve d'autres puissances de *a* qui donnent aussi l'unité pour reste, les exposans de ces puissances seront nécessairement des diviseurs de $\mu-1$. De sorte que pour savoir si parmi les puissances de *a* moindres que $a^{\mu-1}-1$, il y en a aussi qui , étant divisés par μ, donnent le reste 1 , il suffira d'essayer telles dont l'exposant sera un diviseur de $\mu-1$

4. On nomme *racines primitives* les nombres *a* dont aucune puissance moindre que $a^{\mu-1}-1$ ne donne le reste 1 par la division par μ ; et ces racines ont la propriété que tous les termes de la progression $a, a^2, a^3,$ etc., $a^{\mu-1},$ étant divisés par μ, donnent des restes différens, et donnent par conséquent tous les nombres moindres que μ pour restes,

puisque ces restes sont au nombre de $\mu-1$. Car si deux puissances a^n, a^p donnaient le même reste, *n* et *p* étant $<\mu$, et $p<n$, leur différence $a^n - a^p = a^p(a^{n-p}-1)$ serait nécessairement divisible par μ, mais *a* n'étant pas divisible, et μ étant premier, il faudrait que $a^{n-p}-1$ le fût; donc il y aurait une puissance a^{n-p} moindre que $a^{\mu-1}$ qui donnerait l'unité pour reste, par conséquent *a* ne serait pas racine primitive, contre l'hypothèse.

On n'a pas, jusqu'a présent, de méthode directe pour trouver les racines primitives pour chaque nombre premier ; mais on peut toujours les trouver facilement par le tâtonnement. *Euler* en a donné dans les Commentaires de Pétersbourg (Tome XVIII) , une table pour tous les nombres premiers jusqu'à 37 , que nous placerons ici.

μ	a											
3	2											
5	2,	3										
7	3,	5										
11	2,	6,	7,	8								
13	2,	6,	7,	11								
17	3,	5,	6,	7 ,	11 ,	12,	14					
19	2,	3,	10,	13,	14,	15						
23	5,	7,	10,	11,	13,	14,	15,	17,	20,	21		
29	2,	3,	8,	10,	11,	14,	15,	18,	19,	21,	26,	27
31	3,	11,	12,	13,	17,	21,	22,	24				
37	2,	5,	13	15,	17,	18,	19,	20,	22,	24,	32,	35

où l'on remarque que le nombre de ces racines primitives, pour un nombre premier μ, donné, est toujours égal à celui des nombres moindres que μ, et premiers à $\mu-1$. On peut voir, sur ce sujet, la section troisième des *Disquisitiones arithmeticae.*

Au reste, pour notre objet , il suffira de connaître une seule des racines primitives pour un nombre premier donné , et il sera toujours plus avantageux, pour le calcul, d'en connaître la plus petite.

5. Soit donc *a* une racine primitive pour le nombre premier μ, de manière que les $\mu-1$ termes de la progression géométrique a, a^2, a^3, etc., $a^{\mu-1}$, étant divisés par μ, donnent pour restes tous les nombres moindres que μ, dont l'unité sera le dernier; il est facile de voir que les $\mu-1$ racines r, r^2, r^3, r^4, etc., $r^{\mu-1}$, pourront aussi, en faisant abstraction de l'ordre, être représentées par la série

$$r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, \text{ etc., } r^{a^{\mu-2}}.$$

Car comme on a par l'équation $x^{\mu}-1=0$, dont r est supposé racine, $r^{\mu}=1$, il est visible qu'à la place de chaque puissance de r, comme r^{λ}, lorsque $\lambda>\mu$, on pourra toujours prendre la puissance r^{ν}, où ν sera le reste de la division de λ par μ Ainsi , dans la série précédente, on pourra toujours réduire les exposans de r à leurs restes après la division par μ, restes que nous avons vu comprendre tous les nombres 1 , 2, 3, etc., jusqu'à $\mu-1$, mais dans in ordre différent de l'ordre naturel, ce qui est ici indifférent pour les racines r, r^2, r^3, etc.

L'avantage de cette nouvelle forme des racines consiste en ce que si dans la série des racines

$$r,\, r^{a},\, r^{a^2},\, r^{a^3},\, r^{a^4},\ \text{etc.},\ r^{a^{\mu-2}}.$$

on met r^{a} à la place de r, elle devient

$$r^{a},\, r^{a^2},\, r^{a^3},\, r^{a^4},\, r^{a^5},\ \text{etc.},\ r;$$

et si l'on y met r^{a^2} à la place de r, elle devient

$$r^{a^2},\, r^{a^3},\, r^{a^4},\, r^{a^5},\, r^{a^6},\ \text{etc.},\ r,\ r^{a},$$

et ainsi de suite.

En effet, il est visible que par la substitution de r^{a} à la place de r, r^{a} devient $(r^{a})^{a}=r^{a^2}$, r^{a^2} devient $(r^{a})^{a^2}=r^{a^3}$, etc., et le dernier terme devient devient $(r^{a})^{a^{\mu-2}}=r$, à cause que le reste de $a^{\mu-1}$ après la division par μ est l'unité.

De même, par la substitution de r^{a^2} au lieu de r, r^{a} devient $(r^{a^2})^{a}=r^{a^3}$, r^{a^2} devient $(r^{a^2})^{a^2}=r^{a^4}$, etc., l'avant dernier terme $r^{a^{\mu-3}}$ devient $(r^{a^2})^{a^{\mu-3}}=r^{a^{\mu-1}}=r$, le dernier deviendra .... $(r^{a^2})^{a^{\mu-2}}=r^{a^{\mu}}=r^{a}$, à cause que le reste de la division de a^{μ} par μ est a, puisque $a^{\mu}=a\times a^{\mu-1}$, et que le reste de la division de $a^{\mu-1}$ est 1.

6 . Cela posé, si pour résoudre l'équation du degré $\mu-1$ (n° 3)

$$x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+\text{etc.}+1=0,$$

dont les racines sont (n° 5)

$$r,\, r^{a},\, r^{a^2},\, r^{a^3},\ \text{etc.},\ r^{a^{\mu-2}},$$

r^{μ} étant $=1$, en vertu de l'équation $x^{\mu}-1=0$, on emploie la méthode de la Note précédente, et qu'en prenant ces racines pour x', x'', x''', etc., on fasse (n° 14, Note précédente),

$$t=r+\alpha r^{a}+\alpha^{2} r^{a^{2}}+\alpha^{3} r^{a^{3}}+\text{etc.}+\alpha^{\mu-2} r^{a^{\mu-2}},$$

où α est une des racines de l'équation $y^{\mu-1}-1=0$; qu'ensuite on développe la puissance $\mu-1^{\text{éme}}$ de *t,* en faisant attention de rabaisser les puissances de α et de *r* au-dessous de $\alpha^{\mu-1}$ et de r^{μ}, par les conditions $\alpha^{\mu-1}=1$ et $r^{\mu}=1$, de manière qu'on ait cette fonction ordonnée suivant les puissances de α,

$$\theta=t^{\mu-1}=\xi^{\mathrm{o}}+\alpha \xi'+\alpha^{2} \xi''+\alpha^{3} \xi'''+\text{etc.}+\alpha^{\mu-2} \xi^{(\mu-2)},$$

les quantités $\xi^{\mathrm{o}}, \xi', \xi''$, etc. seront des fonctions rationnelles et entières de *r,* telles qu'elles ne changeront pas par la substitution de $r^{a}, r^{a^{2}}, r^{a^{3}}$, etc. à la place de *r,* puisque nous avons vu (n° 16, Note précédente) que ces quantités regardées comme des fonctions de x', x'', x''', etc. sont invariables par les permutations simultanées de x' en x'', x'' en x''', ainsi que par les permutations simultanées de x' en x''', x'' en x^{iv}, auxquelles répondent les changemens de r en r^{a}, en $r^{a^{2}}$, etc. (n° 5).

7. Maintenant il est clair que toute fonction rationnelle et entière de *r,* dans laquelle $r^{\mu}=1$, peut toujours se réduire à la forme

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} r+\mathrm{C} r^{2}+\mathrm{D} r^{3}+\text{etc. }+\mathrm{N} r^{\mu-1},$$

les coefficiens A, B, C, etc. étant des quantités données indépendantes de *r.* On peut même prouver que toute fonction rationnelle de *r* est réductible à cette forme; car si elle a un dénominateur, on pourra toujours le faire disparaître, en multipliant le haut et le bas de la fraction par un polynome convenable en *r,* comme nous l'avons vu dans la Note IV (n° 3).

Or puisque, dans notre cas, les puissances r, r^{2}, r^{3}, r^{4}, etc., $r^{\mu-1}$, peuvent être représentées, quoique dans un autre ordre, par les puissances $r, r^{a}, r^{a^{2}}, r^{a^{3}}$, etc., $r^{a^{\mu-1}}$, on pourra également réduire toute fonction rationnelle de *r* à la forme

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} r+\mathrm{C} r^{a}+\mathrm{D} r^{a^{2}}+\mathrm{E} r^{a^{3}}+\text{etc.}+\mathrm{N} r^{a^{\mu-1}},$$

en prenant pour A, B, C, etc. des coefficiens quelconques indépendans de *r.*

Donc si cette fonction est telle qu'elle doive demeurer la même, en y mettant r^{α} à la place de *r*, il faudra que la nouvelle forme

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}r^{a}+\mathrm{C}r^{a^2}+\mathrm{D}r^{a^3}+\mathrm{E}r^{a^4}+\text{etc.}+\mathrm{N}r$$

(la puissance $r^{a^{\mu-2}}$ devenant $r^{a^{\mu-1}}$, se change en *r*, puisque $r^{\mu}=1$ et $a^{\mu-1}$ divisé par μ donne le reste 1) coïncide avec la précédente, ce qui donne ces conditions

$$\mathrm{B}=\mathrm{C},\ \mathrm{C}=\mathrm{D},\ \mathrm{D}=\mathrm{E},\ \text{etc. } \mathrm{N}=\mathrm{B},$$

et réduit la forme de la fonction à celle-ci

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^{a}+r^{a^2}+r^{a^3}+\text{etc.}+r^{a^{\mu-2}}).$$

8. Donc si l'on dénote par *s* la somme des racines $r, r^2, r^3,$ etc., $r^{\mu-2}$, on aura également

$$s=r+r^{a}+r^{a^2}+r^{a^3}+\text{etc.}+r^{a^{\mu-2}},$$

et les quantités $\xi^{\mathrm{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. de la fonction θ, seront toutes de la forme $\mathrm{A}+\mathrm{B}s$. Les coefficiens A et B se determineront par le développement actuel de la fonction $\theta=t^{\mu-1}$, et la quantité *s* est connue par la nature de l'équation à resoudre,

$$x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+\text{etc.}+1=0\ \ (\text{n}^{\text{o}}\,6),$$

laquelle donne sur-le-champ $s=-1$. Ainsi on a le cas où les valeurs des quantités $\xi^{\mathrm{o}},\ \xi',\ \xi'',$ etc. sont connues immédiatement, sans dépendre d'aucune équation ; de sorte qu'en désignant par 1, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. les $\mu-1$ racines de l'équation $y^{\mu-1}-1=0,$ et par $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta'', \theta''',$ etc. les valeurs de θ qui répondent aux substitutions de ces racines à la place de α, on aura sur-le-champ, par les formules de la Note précédente (n° 16), en substituant *r* pour *x* et $\mu-1$ pour *m,*

$$r=\frac{\sqrt[\mu-1]{\theta^{\mathrm{o}}}+\sqrt[\mu-1]{\theta'}+\sqrt[\mu-1]{\theta''}+\text{etc.}+\sqrt[\mu-1]{\theta^{(\mu-1)}}}{\mu-1}.$$

Telle est l'expression d'une des racines de l'équation $x^{\mu}-1=0;$ on aura toutes les autres par les puissances $r^2, r^3,$ etc., $r^{\mu-1};$ mais on peut aussi les avoir directement par les mêmes formules, en prenant r^{a} pour x'', r^{a^2} pour x''', etc.
On aura de cette manière

$$r^2 = \frac{\sqrt[\mu-1]{\theta^{\circ}} + \alpha^{\mu-2}\sqrt[\mu-1]{\theta'} + \beta^{\mu-2}\sqrt[\mu-1]{\theta''} + \text{etc.}}{\mu-1}$$

$$r^3 = \frac{\sqrt[\mu-1]{\theta^{\circ}} + \alpha^{\mu-3}\sqrt[\mu-1]{\theta'} + \beta^{\mu-3}\sqrt[\mu-1]{\theta''} + \text{etc.}}{\mu-1},$$

etc.

9. On pourra aussi, si l'on veut, se dispenser de calculer ces quantités ξ° et θ°; car, par ce que nous avons vu dans l'article 17 de la Note précédente , le terme $\sqrt[\mu-1]{\theta^{\circ}}$ (en faisant ici $m = \mu - 1$) est toujours égal à la somme des racines que nous dénotons en général par s, et l'expression de θ peut se mettre sous la forme

$$\theta = s^{m-1} + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^2 - 1)\xi'' + (\alpha^3 - 1)\xi''' + \text{etc.},$$

qui ne renferme pas ξ°; et il n'y a plus qu'à substituer $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., au lieu de ce, pour avoir les valeurs de $\theta', \theta'', \theta'''$, etc.

De cette manière, la résolution de l'équation $x^{\mu} - 1 = 0,$ ne dépendra que de la résolution de l'équation $y^{\mu-1} - 1 = 0,$ dont $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., sont les racines. Or, celle-ci est d'un degré moindre que la proposée; mais de plus, comme $\mu - 1$ est nécessairement un nombre composé, on aura les racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc., par celles d'autant d'équations $y^{\pi} - 1 = 0,$ qu'il y aura de facteurs premiers dans le nombre $\mu - 1$, comme on l'a vu dans la Note précédente (n° 12).

10. Soit, par exemple, l'équation $x^5 - 1 = 0,$ dont on demande les racines. Cette équation étant résoluble par les méthodes connues, on pourra comparer cette solution avec celle qui résulte de la méthode précédente.

En ôtant par la division la racine 1, on a l'équation du quatrième degré

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

dont les racines seront $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$.

Puisqu'on a ici $\mu = 5$, on trouve par la table donnée ci-dessus (n° 4) que la plus petite racine primitive est 2; de sorte qu'on a $a = 2$, et que les racines dont il s'agit peuvent être représentées par les puissances $r,\ r^2,\ r^{2^2},\ r^{2^3},$ lesquelles se rabaissent, à cause de $r^5 = 1$ à celles-ci $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,$ en prenant au lieu de l'exposant $2^3 = 8$, le reste de la division par 5.

On fera donc

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^3,$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^4 - 1 = 0$, de manière que l'on ait $\alpha^4 = 1$.

Maintenant, pour trouver la fonction θ, il n'y a qu'à élever à la quatrième puissance le polynome *t,* et le développer suivant les puissances de α, en rabaissant celles-ci au-dessous de α^4, et celles de *r* au-dessous de r^5, par les conditions $\alpha^4 = 1$ et $r^5 = 1$. On trouve, par un calcul qui n'a aucune difficulté,

$$\theta = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''',$$

où les quantités ξ^{o}, ξ', etc. ont les valeurs suivantes, dans lesquelles je mets *a* pour la somme des racines $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$,

$$\xi^{\mathrm{o}} = 12 + 13s, \quad \xi' = 16 + 12s,$$
$$\xi'' = 24 + 10s, \quad \xi''' = 16s.$$

Ainsi, comme $s = -1$ par la nature de l'équation en *x,* on aura

$$\xi^{\mathrm{o}} = -1, \quad \xi' = 4, \quad \xi'' = 14, \quad \xi''' = -16,$$

et la fonction θ deviendra

$$\theta = -1 + 4\alpha + 14\alpha^2 - 16\alpha^3.$$

Or l'équation $y^4 - 1 = 0$ se décomposant en ces deux-ci $y^2 - 1 = 0$ et $y^2 + 1 = 0$, donne tout de suite les quatre racines $1,\ -1,\ \sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$, qu'il faudra substituer successivement pour α, pour avoir les valeurs de $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta'', \theta'''$.
On aura ainsi

$$\theta' = 25, \ \ \theta'' = -15 + 20\sqrt{-1}, \ \ \theta''' = -15 - 20\sqrt{-1}.$$

Donc substituant ces valeurs dans l'expression de *r* du n° 8, et mettant $s = -1$ au lieu de $\sqrt[4]{\theta^{\mathrm{o}}}$ on aura sur-le-champ

$$r = \tfrac{1}{4}\left[-1 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{(-15 + 20\sqrt{-1})} + \sqrt[4]{(-15 - 20\sqrt{-1})}\right].$$

11. Mais on peut avoir une expression plus simple de la même racine *r,* en faisant usage de la méthode du n° 25 de la Note précédente, laquelle est toujours applicable aux équations du genre que nous traitons, parce que l'exposant $\mu - 1$ est nécessairement un nombre composé.

Supposant donc en général $\mu - 1 = \nu\pi$, et prenant pour α une racine de l'équation $y^\nu - 1 = 0$, la fonction *t* du n° 6 deviendra de la forme

$$t = X' + \alpha X'' + \alpha^2 X''' + \text{etc.} + \alpha^{\nu-1} X^{(\nu)},$$

dans laquelle

$$X' = r + r^{\alpha^{\nu}} + r^{\alpha^{2\nu}} + r^{\alpha^{3\nu}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{(\pi-1)\nu}},$$
$$X'' = r^{\alpha} + r^{\alpha^{\nu+1}} + r^{\alpha^{2\nu+1}} + r^{\alpha^{3\nu+1}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{(\pi-1)\nu+1}},$$
$$X''' = r^{\alpha^{\nu}} + r^{\alpha^{\nu+2}} + r^{\alpha^{2\nu+2}} + r^{\alpha^{3\nu+2}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{(\pi-1)\nu+2}},$$
etc.,
$$X^{(\nu)} = r^{\alpha^{\nu-1}} + r^{\alpha^{2\nu-1}} + r^{\alpha^{3\nu-1}} + r^{\alpha^{4\nu-1}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{\pi\nu-1}}.$$

On formera ensuite la fonction $\theta = t^{\nu}$, laquelle, à cause de $\alpha^{\nu} = 1$, sera de la forme

$$\xi^{0} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{etc.} + \alpha^{\nu-1}\xi^{\nu-1},$$

et aura la propriété que les quantités ξ^{0}, ξ', ξ'', etc. seront des fonctions de X', X'', X''', etc., telles qu'elles demeureront invariables, en échangeant à la fois X' en X'', X'' en X''', X''' en X^{iv}, etc., $X^{(\nu)}$ en X'.
Or on voit par les expressions précédentes de X', X'', etc., qu'en y substituant r^{α} à la place de r, X' devient X'', X'' devient X''', etc., et $X^{(\nu)}$ devient X', car $X^{(\nu)}$ se change en

$$r^{\alpha^{\nu}} + r^{\alpha^{2\nu}} + r^{\alpha^{3\nu}} + \text{etc.} + r^{\alpha^{\pi\nu}};$$

mais $\pi\nu = \mu - 1$, et $r^{\alpha^{\mu-1}} = r$, comme on l'a vu ci – dessus (n° 5).

Donc les quantités ξ^{0}, ξ', ξ'', etc. devront être des fonctions de r telles qu'elles demeurent invariables par le changement de r en r^{n} par conséquent, par le n° 7 , elles ne pourront être que de la forme $A + Bs$, A, B étant des coefficiens qui seront donnés par la formation de ces mêmes quantités, et s dénotant la somme des racines $r + r^{\alpha} + r^{\alpha^2} + r^{\alpha^3} + \text{etc.} + r^{\alpha^{\mu-2}}$, laquelle est $= -1$ par l'équation proposée; de sorte que les quantités ξ^{0}, ξ', ξ'', etc. seront toutes données, comme dans le cas précédent (n° 10), et l'on aura sur-le-champ, par les formules du n° 25 de la Note précédente, en y mettant à la place de ν, et s somme des racines à la place du terme $\sqrt[\nu]{\theta^{0}}$,

$$X' = \frac{s + \sqrt[\nu]{\theta'} + \sqrt[\nu]{\theta''} + \text{etc.}}{\nu},$$
$$X'' = \frac{s + \alpha^{\nu-1}\sqrt[\nu]{\theta'} + \beta^{\nu-1}\sqrt[\nu]{\theta''} + \text{etc.}}{\nu},$$
$$X''' = \frac{s + \alpha^{\nu-2}\sqrt[\nu]{\theta'} + \beta^{\nu-2}\sqrt[\nu]{\theta''} + \text{etc.}}{\nu},$$
etc.

Dans ces expressions $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. sont, avec l'unité, les racines de l'équation $y^{\nu}-1=0$ et $\xi^{\circ},\ \xi',\ \xi'',$ etc. sont les valeurs de θ qui répondent à la substitution de $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ etc. au lieu de α.

On n'aura pas besoin de calculer la valeur de ξ°, en employant l'expression de θ du n° 9, laquelle devient ici

$$\theta=s^{\nu}+(\alpha-1)\xi'+(\alpha^2-1)\xi''+(\alpha^3-1)\xi'''+\text{ etc.}$$

12. Le cas de $\nu=\frac{\mu-1}{2}$ mérite une attention particulière, parce qu'il donne la division de la circonférence en μ parties.
Soit donc $\nu=\frac{\mu-1}{2}$, et par consequent $\pi=2$, on aura…

$\mathrm{X}'=r+r^{a^{\frac{\mu-1}{2}}}$. Or, puisque $a^{\mu-1}-1$ est divisible par μ, et que a est supposé une racine primitive , $a^{\frac{\mu-1}{2}}-1$ ne sera pas divisible par μ; mais $a^{\mu-1}-1=(a^{\frac{\mu-1}{2}}-1)(a^{\frac{\mu-1}{2}}+1)$. Donc, μ étant un nombre premier, $a^{\frac{\mu-1}{2}}+1$ sera divisible par μ, par conséquent -1 sera le reste de la division de $a^{\frac{\mu-1}{2}}$ par μ ; donc $r^{a^{\frac{\mu-1}{2}}}$ sera égale à $\frac{1}{r}$.
Ainsi l'on aura

$$\mathrm{X}'=r+\tfrac{1}{r},\ \mathrm{X}''=r^{a}+\tfrac{1}{r^{a}},\ \mathrm{X}'''=r^{a^2}+\tfrac{1}{r^{a^2}},\text{ etc.}$$

Or on a, par les formules connues du théorème de *Cotes,*

$$r=\cos\tfrac{360^{\circ}}{\mu}+\sin\tfrac{360^{\circ}}{\mu}\sqrt{-1}\quad(\text{n}^{\circ}1),$$

et, en général,

$$r^{m}=\cos\tfrac{m}{\mu}360^{\circ}+\sin\tfrac{m}{\mu}360^{\circ}\sqrt{-1}.$$

Donc

$$\mathrm{X}'=2\cos\tfrac{360^{\circ}}{\mu},\ \mathrm{X}''=2\cos\tfrac{a}{\mu}360^{\circ},\ \mathrm{X}'''=2\cos\tfrac{a^2}{\mu}360^{\circ},\text{ etc.}$$

Ainsi les valeurs de $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. sont toutes réelles dans ce cas, et donnent immédiatement les cosinus des divisions de la circonférence en μ parties.

13. Ayant trouvé, par les formules générales du n° 11 , les racines $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc., il faudra poursuivre le calcul de la même manière pour arriver à la racine ν. On regardera donc les π racines qui composent la fonction X', comme les racines d'une équation du

degré π, et on les substituera pour $x', x'', x''',$ etc. $x^{(\nu)}$ dans l'expression générale de la fonction t ; on aura ainsi

$$t_1 = r + \alpha r^{a^{\nu}} + \alpha^2 r^{a^{2\nu}} + \alpha^3 r^{a^{3\nu}} + \text{etc.} + \alpha^{\pi-1} r^{a^{(\pi-1)\nu}},$$

où il faudra prendre pour α une racine de l'équation $y^{\pi} - 1 = 0$.

De là on aura, à cause de $a^{\pi} = 1$,

$$\theta_1 = t_1^{\pi} = \xi_1^{0} + \alpha\xi_1' + \alpha^2\xi_1'' + \text{etc.} + \alpha^{\pi-1}\xi_1^{(\pi-1)}.$$

(J'écris ici $t_1,\ \theta_1,\ \xi_1$ pour distinguer ces quantités de celles que nous avons désignées plus haut par $t,\ \theta,\ \xi$). Comme les quantités $\xi_1^{0},\ \xi_1',\ \xi_1'',$ etc. sont en général des fonctions de $x', x'', x''',$ etc., qui ne varient pas par les permutations
de x' en x'', x'' en x''', etc., $x^{(\pi)}$ en x' en x' (n° 16, Note précédente), elles seront ici des fonctions de r qui ne varieront pas , en y changeant r en $r^{a^{\nu}}$, puisque par ce changement, les racines $r^{a^{\nu}},\ r^{a^{2\nu}},\ r^{a^{3\nu}}$, etc., $r^{a^{(\pi-1)\nu}}$ deviennent respectivement $r^{a^{\nu}},\ r^{a^{2\nu}},\ r^{a^{3\nu}}$, etc., r.

Or il n'est pas difficile de prouver, par un procédé semblable à celui du n° 8, que toute fonction rationnelle de r, qui aura la propriété d'être invariable per le changement de r en $r^{a^{\nu}}$, sera nécessairement de la forme

$$\mathrm{A} + \mathrm{BX}' + \mathrm{CX}'' + \mathrm{DX}''' + \text{etc.} + \mathrm{HX}^{(\nu)},$$

en conservant les exprëssions de $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. du n° 1l.
Car d'abord toute fonction rationnelle de r peut se réduire à la forme (n° 7),

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}r + \mathrm{C}r^{a} + \mathrm{D}r^{a^2} + \mathrm{E}r^{a^3} + \text{etc.} + \mathrm{N}r^{a^{\mu-1}};$$

et pour que cette fonction demeure la même, en y changeant r en $r^{a^{\nu}}$ il faut que les coefficiens des termes qui renferment $r^{a^{\nu}},\ r^{a^{2\nu}},\ r^{a^{3\nu}}$, etc. soient les mêmes que celui de r; que les coefficiens des termes qui renferment $r^{a^{\nu+1}},\ r^{a^{2\nu+1}},\ r^{a^{3\nu+1}}$, etc. soient les mêmes que celui de $r^{a^{\nu}}$; que ceux des termes $r^{a^{\nu+2}},\ r^{a^{2\nu+2}},\ r^{a^{3\nu+2}}$, etc. soient les mêmes que celui de $r^{a^{\nu}}$, et ainsi de suite ; ce qui réduit la fonction à la forme que nous venons de lui assigner.

En effet on voit que chacune des quantités $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \mathrm{X}''',$ etc. $\mathrm{X}^{(\nu)}$

demeure la mème, en y substituant $r^{a^{\nu}}$ à la place de *r;* car le dernier $r^{a^{(\pi-1)\nu}}$ de X' devient $r^{a^{\pi\nu}} = r^{a^{\mu-1}} = r$, le dernier terme $r^{a^{(\pi-1)\nu+1}}$ de X'' devient $r^{a^{\pi\nu+1}} = r^{a}$, et ainsi des autres.

14. Donc chacune des quantités ξ_1^{o}, ξ_1', ξ_1'', etc. deviendra, après le développèment, de la forme

$$\mathrm{A} + \mathrm{BX}' + \mathrm{CX}'' + \mathrm{DX}''' + \text{etc.},$$

et aura par conséquent une valeur connue. Ainsi la fonction θ sera connue, et l'on aura les valeurs de $\theta^{\mathrm{o}}, \theta', \theta'', \theta'''.$, en y substituant, au Lieu de α, les $\pi-1$ racines α, β, γ, etc., qui, avec l'unité, résolvent l'équation $y^{\pi}-1=0$. On aura ensuite pour *r* une formule semblable à celle du n° 8, en y mettant π à la place de $\mu-1$, et X', somme des racines, au lieu du terme $\sqrt[\pi]{\theta^{\mathrm{o}}}$. On aura ainsi

$$r = \frac{\mathrm{X}' + \sqrt[\pi]{\theta'} + \sqrt[\pi]{\theta''} + \sqrt[\pi]{\theta'''} + \text{etc.}}{\pi}.$$

15. On aurait aussi, si on le désirait, les expressions des autres racines $r^{a^{\nu}}, r^{a^{2\nu}}, r^{a^{3\nu}}$, etc., qui composent la fonction X' (n° 11), en multipliant dans l'expression de *r* les radicaux $\sqrt[\pi]{\theta'}$, $\sqrt[\pi]{\theta''}$, etc., d'abord par $\alpha^{\pi-1}$, $\beta^{\pi-1}$, etc., et ensuite par $\alpha^{\pi-2}$, $\beta^{\pi-2}$, etc., $\alpha^{\pi-3}$, $\beta^{\pi-3}$, etc.

On pourrait même, sans faire un nouveau calcul , avoir également les racines $r^{a}, r^{a^{\nu+1}}$, etc., qui composent la fonction X'', par la seule considération que X' devient X'', X'' devient X''', etc., en y changeant *r* en r^{a}; de sorte qu'il suffira de changer dans l'expression générale de θ, X' en X'', X'' en X''', etc., $\mathrm{X}^{(r)}$ en X'.

Par la même raison, comme X' devient X''', X'' devient X^{iv}, etc. par la substitution de r^{a^2} à la place de *r,* on pourra déduire des expressions des racines qui composent la fonction X', celles des racines qui composent la fonction X''', en changent simplement dans l'expression genérale de θ, X' en X''', X'' en X^{iv}, etc., $\mathrm{X}^{(\nu-1)}$ en X', $\mathrm{X}^{(\nu)}$ en X'',etc., et ainsi de suite.

16. Si le nombre π n'est pas premier, on pourra , en le décomposant en ses facteurs, décomposer encore l'opération précédente en d'autres plus simples.

Ainsi si $\pi = \nu'\pi'$, on pourra ne prendre pour α qu'une racine de l'équation $y^{\nu'}-1=0$, en sorte que $\alpha^{\nu'}=1$, et la fonction t_1 (n° 11) deviendra

$$t_1 = X_1' + \alpha X_2'' + \alpha^2 X_1''' + \text{etc.} + \alpha^{\nu'-1} X_1^{(\nu')},$$

en supposant

$$\begin{aligned}
X_1' &= r + r^{a^{\nu'\nu}} + r^{a^{2\nu'\nu}} + r^{a^{3\nu'\nu}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-1)\nu}},\\
X_1'' &= r^{a^{\nu'}} + r^{a^{(\nu'+1)\nu}} + r^{a^{(2\nu'+1)\nu}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-\nu'+1)\nu}},\\
X_1''' &= r^{a^{2\nu'}} + r^{a^{(\nu'+2)\nu}} + r^{a^{(2\nu'+2)\nu}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-\nu'+2)\nu}},\\
&\text{etc.},\\
X_1^{(\nu')} &= r^{a^{(\nu'-1)\nu}} + r^{a^{(2\nu'-1)\nu}} + r^{a^{(3\nu'-1)\nu}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi-1)\nu}}.
\end{aligned}$$

On fera ensuite $\theta_1 = t_1^{\nu'}$, et l'expression de θ_1 étant développée sous la forme

$$\theta_1 = \xi_1^{o} + \alpha\xi_1' + \alpha^2\xi_1'' + \text{etc.} + \alpha^{\nu'-1}\xi_1^{(\nu')},$$

à cause de $\alpha^{\nu'} = 1$, les quantités ξ_1^{o}, ξ_1', ξ_1'', etc. seront des fonctions de X_1', X_1'', X_1''', qui ne changeront pas par le changement simultané
X_1' en X_1'', X_1'' en X_1''', X_1''' en X_1^{iv}, etc., $X_1^{(\nu')}$ en X', (Note précédente, 25). Or on voit, par les expressions précédentes de X_1', X_1'', etc., que ces changcmens ont lieu en changeant simplement r en $r^{a^{\nu}}$. Donc les quantités ξ_1^{o}, ξ_1', ξ_1'', etc., regardées comme des fonctions de *r* devront être invariables par le changement de *r* en r en $r^{a^{\nu}}$; par consequent elles seront néccssairement de la forme

$$A + BX' + CX'' + DX''' + \text{etc.},$$

par ce qu'on a démontré ci-dessus (n° 13).

Donc, puisque les valeurs de X', X'', X''', etc. sont déjà connues par l'opération précédente, celles de ξ_1^{o}, ξ_1', ξ_1'', etc. seront connues aussi. Ainsi la fonction θ_1 sera connue aussi , et de là on aura les valeurs des ν' racines X_1', X_1'', X_1''', par des formules semblables à celles du n° 11 , en y changeant ν en ν', X en X_1, θ en θ_1, et prenant pour α, β, γ, etc. les racines de l'équation $y^{\nu} - 1 = 0$, excepté l'unité.

On remarquera aussi que *s* étant la somme des racines……
$X_1', +X_1'', +X_1''', +$ etc. sera ici égale à X'.

17. La valeur connue de X_1' ne donne que la somme des π' racines
$r, r^{a^{\nu'\nu}}, r^{a^{2\nu'\nu}}, r^{a^{3\nu'\nu}}$, etc. $r^{a^{(\pi'-1)\nu'\nu}}$; il faudra, pour avoir la valeur de *r,* regarder encore ces π' racines comme données par une équation du degré π', et faire de nouveau

$$\mathrm{t}_2 = r + \alpha r^{a^{v'v}} + \alpha^2 r^{a^{2v'v}} + \text{etc.} + r^{a^{(\pi'-1)v'v}},$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^{\pi'} - 1 = 0$; on fera ensuite

$$\theta_2 = t_2^{\pi'} = \xi_2^{\mathrm{o}} + \alpha \xi_2' + \alpha^2 \xi_2'' + \text{etc.} + \alpha^{\pi'-1} \xi_2^{(\pi'-1)},$$

et l'on suivra le même procédé que nous avons exposé dans le n° 13 et suiv. Que si le nombre π' est composé de manière que l'on ait $\pi' = v''\pi''$, on pourra, pour éviter le développement d'une puissance trop haute, prendre pour α une racine de l'équation $y^{v''} - 1 = 0;$, ce qui donnera à t_2 la forme

$$t_2 = \mathrm{X}_2' + \alpha \mathrm{X}_2'' + \alpha^2 \mathrm{X}_2''' + \text{etc.} + \alpha^{v''-1} \mathrm{X}_2^{(v'')},$$

et l'on poursuivra le calcul comme ci-dessus, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un dernier facteur indécomposable.

L'avantage de ces décompositions consiste dans l'abaissement des puissances auxquelles il faut élever les polynomes *t* pour avoir les fonctions θ, ce qui diminue la longueur du calcul; et ensuite dans l'abaissement des radicaux qui entrent dans l'expression de la racine *r,* ce qui simplifie cette expression.

Telle est la marche générale et uniforme du calcul; nous allons l'appliquer à quelques exemples pour la faire mieux concevoir, et nous reprendrons d'abord celui de l'équation $x^5 - 1 = 0$, que nous avons résolu ci-dessus (n° 10).

18. On a ici $\mu - 1 = 4 = 2 \cdot 2$; ainsi on fera $v = 2,\ \pi = 2,$ (n° 11). On prendra pour α une des racines de l'équation $y^2 - 1 = 0$; de sorte qu'à cause de $\alpha^2 = 1,$ l'expression de la fonction du n° 10, devient

$$t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}'',\ \text{où } \mathrm{X}' = r + r^4,\ \mathrm{X}'' = r^2 + r^3.$$

De là on trouve, en faisant le carré de *t*, à cause de $\alpha^2 = 1,$

$$\theta = t^2 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha \xi',\ \xi^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2,\ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

Substituant les valeurs de $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$ en *r,* et développant les carrés et les produits, en rabaissant les puissances de *r* au-dessous de r^5, à cause de $r^5 = 1$ on trouve

$$\xi^{\mathrm{o}} = 4 + r + r^2 + r^3 + r^4,$$
$$\xi' = 2(r + r^2 + r^3 + r^4).$$

Donc, comme $r+r^2+r^3+r^4$ somme des racines est $=-1$
par l' équation, on a $\xi^{o}=3$, et $\xi'=-2.$ Ainsi l'expression générale de θ deviendra $\theta=3-2\alpha.$
De là, à cause que les valeurs de α sont 1 et -1, en faisant $\alpha=-1$, on aura $\theta=5$; et comme

$$s=x'+x''+x'''+x^{iv}=-1,$$

les formules du n° 11 ci-dessus donneront

$$\mathrm{X}'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \mathrm{X}''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

On aura ainsi par la valeur de X' celle de $r+r^{2^2}$, somme de deux des quatre racines de la proposée. Pour avoir la racine en particulier, on fera de nouveau un calcul semblable, èn considérant les deux racines r et r^4 comme racines d'une équation du second degré.
On fera donc $t_1=r+\alpha r^4$, α étant, comme ci-dessus, racine de $y^4-1=0$; et de là , on aura

$$\theta_1=t_1^2=\xi_1^{o}+\alpha\xi_1',\text{où}\quad \xi_1^{o}=r^2+r^3,\text{ et }\xi_1'=2r^5.$$

Ici, l'on voit tout de suite que les valeurs de ξ_1^{o} et ξ_1' sont données au moyen des valeurs déjà connues de X' et X''. En effet, à cause de $r^5=1$, et par conséquent, $r^8=r^3$, on a $\xi_1^{o}=r^2+r^3=\mathrm{X}''$ et $\xi_1'=2.$ Donc on aura $\theta_1=\mathrm{X}''+2\alpha$; de là, en faisant $\alpha=-1$; on aura $\theta_1'=\mathrm{X}''-2$, et la formule du n° 14 donnera, π étant $=2$, $r=\frac{\mathrm{X}'+\sqrt{(\mathrm{X}''-2)}}{2}$.
Enfin , substituant ici les valeurs X' et X'' trouvées ci-dessus, on aura

$$r=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4};$$

et par les remarques du n° 15, on aura aussi

$$r^4=\frac{\mathrm{X}'-\sqrt{(\mathrm{X}''-2)}}{2},$$

et changeant X' en X'', X'' en X',

$$r^2=\frac{\mathrm{X}''+\sqrt{(\mathrm{X}'-2)}}{2},\ r^3=\frac{\mathrm{X}''-\sqrt{(\mathrm{X}'-2)}}{2}\ ;$$

d'où l'on aura, par les substitutions des valeurs de X' et X'',

$$r^4=\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4},$$
$$r^2=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4},$$
$$r^3=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

Comme 5 est un nombre premier, ces valeurs de $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$ seront les quatre racines qui, avec l'unité , résolvent l'équation $x^5-1=0$ (n° 3).

19. Les expressions de ces racines coïncident avec celles qu'on trouve en résolvant l'équation $x^5-1=0$ par les méthodes connues. Car on a d'abord, en divisant par $x-1$, $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, équation qui, étant mise sous la former $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$, devient $u^2+u-1=0$, par la substitution de $x+\frac{1}{x}=u$. On ainsi l'équation $x^2-xu+1=0$, laquelle donne

$$x=\frac{u\pm\sqrt{(u^2-4)}}{2};$$

ensuite l'équation en u donne $u=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; de sorte qu ' en substituant cette valeur, on a

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}+\sqrt{(-10\mp2\sqrt{5})}}{4},$$

où les signes supérieurs et inférieurs de $\sqrt{5}$ doivent se répondre, mais sont indépendans de ceux de l'autre radical; de sorte qu'on a les quatre racines par l'ambiguité des signes des deux radicaux.

20. Passons à l'équation $x^7-1=0$, laquelle étant dégagée de la racine 1, devient

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

dont les racines seront $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6$.
La plus petite racine primitive pour le nombre 7 est 3 , d'après la table du n° 4; ainsi l'on aura la progression $3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5$, savoir, 1, 3, 9, 27, 81, 243, dont les termes, étant divisés par 7, donneront les restes 1, 3, 2, 6, 4, 5, qu'on prendra pour exposans de r. On aura ainsi, pour les racines de l'équation proposée, les termes $r,\ r^3,\ r^2,\ r^6,\ r^4,\ r^5$, qu'on prendra pour $x',\ x'',\ x'''$, etc.

21. Nous remarquerons ici que pour avoir les exposans de r qui doivent former toutes les racines, il n'est pas nécessaire d'élever la racine primitive aux puissances successives, et de diviser ensuite ces puissances par le nombre premier auquel la racine primitive se rapporte : il suffit de multiplier chaque reste par la racine primitive, et de ne retenir que le reste de la division par le nombre premier donné. Ainsi en commençant par 1, on a, dans le cas présent, les deux premiers termes 1, 3; multipliant 3 par la racine primitive 3, et divisant par 7, on a le reste 2 troisième terme ; 2 multiplié par 3 donne 6 quatrième terme ; 6 multiplié par 3 et divisé par 7 donne 4 ; enfin 4 multiplié par 3 et divisé par 7 donne 5. Si l'on voulait continuer en multipliant 5 par 3 et divisant par 7, on retrouverait l'unité et successivement les autres termes déjà trouvés.

22. Maintenant on fera

$$t = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^2 + \alpha^3 r^6 + \alpha^4 r^4 + \alpha^5 r^5,$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^6 - 1 = 0$; ensuite on formera la fonction $\theta = t^6$; mais comme l'exposant $6 = 2 \cdot 3$; on pourra simplifier le calcul et les résultats, par la méthode du n° 11 , en ne prenant d'abord pour α qu'une racine de l'équation $y^2 - 1 = 0$; ce qui, à cause de $\alpha^2 = 1$, réduira l'expression de t à celle-ci : $t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}''$, dans laquelle

$$\mathrm{X}' = r + r^2 + r^4, \quad \mathrm{X}'' = r^3 + r^6 + r^5;$$

on aura ensuite

$$\theta = t^2 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha \xi', \text{ où } \xi^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2, \ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}'',$$

et l'on trouvera après le développement, à cause de $r^7 = 1$,

$$\xi^{\mathrm{o}} = 3(r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5),$$
$$\xi' = 2(3 + r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5).$$

Or $r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5$, somme des racines, est $= -1$; donc $\xi^{\mathrm{o}} = -3, \ \xi' = 4$, et la valeur de θ se réduira à $\theta = -3 + 4\alpha$. De là, en faisant $\alpha = -1$, on aura $\theta' = -7$, et l'on trouvera sur-le-champ les deux racines

$$\mathrm{X}' = \tfrac{-1+\sqrt{-7}}{2}, \ \mathrm{X}'' = \tfrac{-1-\sqrt{-7}}{2}.$$

23. Considérons maintenant les trois termes de l'expression de X' comme les racines d'une équation du troisième degré : prenant α pour même de l'équation $y^3 - 1 = 0$, on fera

$$t_1 = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4;$$

ensuite , en faisant

$$\theta_1 = t_1^3 = \xi^{\text{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'',$$

on trouvera, à cause de $\alpha^3 = 1$ et $r^7 = 1$,

$$\xi^{\text{o}} = 6 + r^3 + r^6 + r^5,$$
$$\xi' = 3(r + r^2 + r^4),$$
$$\xi'' = 3(r^3 + r^6 + r^5),$$

savoir,

$$\xi^{\text{o}} = 6 + \text{X}'',\ \xi' = 3\text{X}',\ \xi'' = 3\text{X}'',$$

de sorte qu'on aura

$$\theta = 6 + \text{X}'' + 3\alpha\text{X}' + 3\alpha^2\text{X}'';$$

donc en nommant α et β les deux racines imaginaires de $y^3 - 1 = 0$, savoir, de $y^2 + y + 1 = 0,$ lesquelles sont

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \beta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

et faisant

$$\theta_1' = 6 + \text{X}'' + 3\alpha\text{X}' + 3\alpha^2\text{X}'',$$
$$\theta_1'' = 6 + \text{X}'' + 3\beta\text{X}' + 3\beta^2\text{X}'',$$

on aura (n° 14), en faisant $\pi = 3$,

$$r = \frac{\text{X}' + \sqrt[3]{\theta_1'} + \sqrt[3]{\theta_1''}}{3}.$$

24. Venons à l'équation $x^{11} - 1 = 0$, laquelle étant divisée par $x - 1$, s'abaisse au dixième degré et devient

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

On voit par la table du n° 4, que la plus petite racine primitive pour le nombre 11 est 2 ; ainsi la suite des restes qu'on trouvera facilement par le procédé du n° 21 , sera ici $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 5,\ 10,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6$, de sorte que la séries des racines sera

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^5,\ r^{10},\ r^9,\ r^7,\ r^3,\ r^6\ ,$$

dont la somme sera par conséquent $= -1$, et l'on aura pour t cette expression générale

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^5 + \alpha^5 r^{10} + \alpha^6 r^9$$
$$+ \alpha^7 r^7 + \alpha^8 r^3 + \alpha^9 r^6,$$

laquelle, en prenant pour α une racine de l'équation $y^{10}-1=0$, donnera, à cause de $\alpha^{10}=1$,

$$\theta_1=t_1^{10}=\xi^{\mathrm{o}}+\alpha\xi'+\alpha^2\xi''+\alpha^3\xi'''+\text{etc.}+\alpha^9\xi^{ix},$$

d'où l'on tirera la valeur de *r* par la formule générale du n° 8, en y faisant $\mu=11$.

Mais pour se dispenser d'élever le polynome *t* à la dixième puissance, on pourra décomposer l'opération en deux autres correspondantes aux deux facteurs 2 et *5* du nombre $11-1=10$, par là méthode du n° 11.

Prenons d'abord pour α ùne racine de l'équation $y^2-1=0$, de sorte que l'on ait $\alpha^2=1$. Par là l'expression de *t* se réduira à cette forme plus simple ,

$$t=\mathrm{X}'+\alpha\mathrm{X}'',$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{X}'=r+r^4+r^5+r^9+r^3,$$
$$\mathrm{X}''=r^2+r^8+r^{10}+r^7+r^6,$$

et la valeur de θ sera

$$\theta=t^2=\mathrm{X}'^2+\mathrm{X}''^2+2\alpha\mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

En développant les carrés des fonctions X' et X'', et rabaissant toutes les puissances de *r* au-dessous de r^{12}, à cause de $r^{11}=1$, on trouve

$$\mathrm{X}'^2=2\mathrm{X}'+3\mathrm{X}'',\ \ \mathrm{X}''^2=2\mathrm{X}''+3\mathrm{X}',$$

et par conséquent $\mathrm{X}'^2+\mathrm{X}''^2=5(\mathrm{X}'+\mathrm{X}'')=-5,$ à cause que $\mathrm{X}'+\mathrm{X}''$ est la somme de toutes les racines.

On trouve de même, par la multiplication,

$$\mathrm{X}'\mathrm{X}''=5+2(\mathrm{X}'+\mathrm{X}'')=5-2=3.$$

On aura ainsi $\theta=-5+6\alpha,$ et faisant $\alpha=-1$, on aura $\theta=-11$.

Donc, on aura par les formules du n° 11 , en y faisant $v=2$,

$$\mathrm{X}'=\tfrac{-1+\sqrt{-11}}{2},\ \ \mathrm{X}''=\tfrac{-1-\sqrt{-11}}{2}.$$

25. Ayant ainsi les valeurs de X' et X'' , pour avoir celle de *r*, il faudra considérer les cinq termes qui composent la quantité X' comme les racines d'une équation du cinquième degré, et puisque 5 est un nombre premier, on ne pourra employer que l'expression

générale de *t,*

$$t = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^5 + \alpha^3 r^9 + \alpha^4 r^3,$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^5 - 1 = 0$. Ensuite il faudra faire

$$\theta = t^5 = \xi^{\text{o}} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{iv};$$

et il né s'agira que de trouver les valeurs en *r* des coefficiens ξ^{o}, ξ', etc., par l'élévation de l'expression de *t* à là cinquième puissance, en ayant soin de rabaisser les puissances de α au-dessous de α^5, et celle de *r* au-dessous de r^{11}, à cause de $\alpha^5 = 1$ et $r^{11} = 1$.
Par un calcul qui n'a de difficulté qu'un peu de longueur, et sur l'exactitude duquel on peut compter, j'ai trouvé, en retenant les expressions de X' et X'' en *r* du n° précédent ,

$$\begin{aligned}
\xi^{\text{o}} &= 120 + 31\mathrm{X}' + 70\mathrm{X}'',\\
\xi' &= 100 + 60\mathrm{X}' + 45\mathrm{X}'',\\
\xi'' &= 50 + 85\mathrm{X}' + 30\mathrm{X}'',\\
\xi''' &= 60\mathrm{X}' + 65\mathrm{X}'',\\
\xi^{iv} &= 50\mathrm{X}' + 75\mathrm{X}''.
\end{aligned}$$

Comme les valeurs de X', X'' sont déjà connues, par l'opération précédente, l'expression de la fonction de θ ne présente plus rien d'indéterminé, et elle donnera sur-le-champ la valeur de la première racine *r,* par la formule générale du n° 14, en y faisant $\pi = 5$, et prenant pour $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ les quatre racines qui, avec l'unité, résolvent l'équation $y^5 - 1 = 0$, et pour $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$ les valeurs de θ qui répondent aux substitutions de $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ à là place de α dans l'expression trouvée pour θ.

26. Si dans les valeurs de ξ^{o}, ξ', etc., on substitue celles de X' et X'', données dans le n° 24, on a

$$\begin{aligned}
&\xi^{\text{o}} = \tfrac{139-39\sqrt{-11}}{2}, \quad \xi' = \tfrac{95+15\sqrt{-11}}{2},\\
&\xi'' = \tfrac{-15+55\sqrt{-11}}{2}, \quad \xi''' = \tfrac{-125-5\sqrt{-11}}{2},\\
&\xi^{iv} = -\tfrac{125+25\sqrt{-11}}{2}.
\end{aligned}$$

Si ensuite, au lieu des racines $\beta,\ \gamma,\ \delta$, on substitue les puissances $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ de la racine α, qui les représentent, à cause que *5* est un nombre premier, et qu'on rabaisse les puissances de α au-dessous de α^5, on aura

$$\theta' = \xi^{o} + \alpha\ \xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{iv},$$
$$\theta'' = \xi^{o} + \alpha^2\xi' + \alpha^4\xi'' + \alpha\ \xi''' + \alpha^3\xi^{iv},$$
$$\theta''' = \xi^{o} + \alpha^3\xi' + \alpha\ \xi'' + \alpha^4\xi''' + \alpha^2\xi^{iv},$$
$$\theta^{iv} = \xi^{o} + \alpha^4\xi' + \alpha^3\xi'' + \alpha^2\xi''' + \alpha\ \xi^{iv},$$

et l'expression de la racine *r* sera

$$r = \frac{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-11})+\sqrt[5]{\theta'}+\sqrt[5]{\theta''}+\sqrt[5]{\theta'''}+\sqrt[5]{\theta^{iv}}}{5}$$

où il n'y aura plus qu'à mettre pour $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ les valeurs de $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$, que nous avons données plus haut (n° 18).

27. On trouverait par les mêmes principes les valeurs des puissances de *r* qui forment les autres racines de l'équation $x^{11}-1=0$, excepté l'unité.
Et d'abord on aura les valeurs des racines $r^4,\ r^5,\ r^9,\ r^3,$ qui entrent dans la fonction X', en multipliant, dans l'expression de *r,* les radicaux $\sqrt[5]{\theta'},\ \sqrt[5]{\theta''},\ \sqrt[5]{\theta'''},\ \sqrt[5]{\theta^{iv}}$ respectivement par $\alpha^4,\ \beta^4,\ \gamma^4,\ \delta^4,$ pour la racine r^4*;* par $\alpha^3,\ \beta^3,\ \gamma^3,\ \delta^3,$ pour r^5 ; par $\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ \delta^2,$ pour r^9 ; et par $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$ pour r^3*,* c'est-à-dire par $\alpha^4,\ \alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha;$ par $\alpha^3,\ \alpha,\ \alpha^4,\ \alpha^2;$ par $\alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha,\ \alpha^3;$ par $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4.$

Ensuite, pour avoir les valeurs des autres racines $r^2,\ r^8,\ r^{10},\ r^7,\ r^6$, qui entrent dans la fonction X'', il n'y aura qu'à changer dans celles de $r,\ r^4,\ r^5,\ r^9,\ r^3,$ X' en X'', et X'' en X' ; ce qui ne demande que de changer le signe du radical $\sqrt{-11}$ dans les expressions de $\xi^{o},\ \xi',$ etc.

28. Je donne ici d'autant plus volontiers ces expressions des racines de l'équation $x^{11}-1=0$, qu'elles n'ont jamais été données, et qu'elles n'auraient pas même pu l'être par les méthodes connues qui demandent la résolution d'une équation du cinquième degré.
Il y a cependant une exception à faire à ce que nous venons de dire ; car on trouve à la fin du Mémoire de *Vandermonde,* sur la *Résolution des équations,* dont nous avons parlé dans la Note précédente, l'expression de la racine d'une équation du cinquième degré, d'où dépend la résolution de l'équation $x^{11}-1=0$; car cette équation étant divisée par $x-1$, devient

$$x^{10}+x^9+x^8+\text{etc.}+1=0,$$

laquelle étant du genre des réciproques, peut s'abaisser au cinquième degré, par la substitution de $x+\frac{1}{x}=u,$ et l'on obtient par les formules de la Note X (n° 14), cette équation en *u,*

$$u^5+u^4-4u^3-3u^2+3u+1=0.$$

En prenant *u* négativement, ce qui change les signes de tous les termes pairs, on a l'équation résolue par *Vandermonde.* Cet auteur ne donne l'expression dont il s'agit, que comme un résultat de méthode générale, sans, indiquer en détail les opérations par lesquelles il y est parvenu, et personne, après lui, ne s'est occupé, que je sache, à vérifier ce résultat, qui paraît même être resté ignoré.

29. La valeur que nous venons de trouver pour la racine *r* de l'équation $x^{11}-1=0$, pourrait servir à cette vérification; mais on peut parvenir directement à un résultat comparable à celui de *Vandermonde*, en prenant pour α, dans l'expression générale de *t* du n° 24, une racine de l'équation $x^5-1=0$, au lieu de l'équation $x^2-1=0$ que nous avons employée, ce qui est permis, puisque 2 et 5 étant les facteurs de 10, on peut partir de l'un ou de l'autre, à volonté.

30. Faisant donc $\alpha^5=1$, l'expression générale de *t* (n° 24) deviendra

$$t=\mathrm{X}'+\alpha\mathrm{X}''+\alpha^2\mathrm{X}'''+\alpha^3\mathrm{X}^{iv}+\alpha^4\mathrm{X}^{v},$$

dans laquelle

$$\mathrm{X}'=r+r^{10},\ \mathrm{X}''=r^2+r^9,\ \mathrm{X}'''=r^4+r^7,$$
$$\mathrm{X}^{iv}=r^8+r^3,\ \mathrm{X}^{v}=r^5+r^6,$$

et l'on regardera maintenant les quantité $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}''$, etc. ; comme les racines d'une équation du cinquième degré; c'est le cas que nous avons considéré en général dans le n° 12.

On fera donc

$$\theta=t^5=\xi^{\mathrm{o}}+\alpha\xi'+\alpha^2\xi''+\alpha^3\xi'''+\alpha^4\xi^{iv},$$

et l'on cherchera les valeurs de $\xi^{\mathrm{o}},\ \xi',\ \xi''$, etc. en fonction de *r* par le développement de la puissance cinquième de *t* , ea y rabaissant continuellement les puissances de α au-dessous de α^5, et celles de *r* au-dessous de r^{11}, à cause de, $\alpha^5=1$, et $r^{11}=1$. Le calcul n'a d'autre difficulté que la longueur: Voici les résultats que j'ai trouvés, et dont je crois pouvoir répondre.

En faisant , pour abréger,

$$s=r+r^2+r^4+r^8+r^5+r^{10}+r^9+r^7+r^3+r^6,$$

on a

$$\xi^{\text{o}} = 1640 + 1836s, \quad \xi' = 1700 + 1830s,$$
$$\xi'' = 2050 + 1795s, \quad \xi''' = 1800 + 1820s,$$
$$\xi^{iv} = 1900 + 1810s.$$

Or s est la somme des racines qui, par la nature de l'équation du dixième degré en *x,* dont le second terme est x^9, doit être égale à -1.

Faisant donc $s = -1$, on aura

$$\xi^{\text{o}} = -196, \quad \xi' = -130, \quad \xi'' = 255,$$
$$\xi''' = -\ 20, \quad \xi^{iv} = 90.$$

Ainsi la valeur de θ sera

$$\theta = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4.$$

En mettant successivement à la place de α les quatre racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation $x^5 - 1 = 0$, on aura les quantités $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$, et si l'on prend, comme ci-dessus (n° 26), pour ces racines les puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, dont les valeurs sont les mêmes que celles de r, r^2, r^3, r^4, du n° 18, on aura, à cause de $\alpha^5 = 1$,

$$\theta' = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4,$$
$$\theta'' = -196 - 130\alpha^2 + 255\alpha^4 - 20\alpha + 90\alpha^3,$$
$$\theta''' = -196 - 130\alpha^3 + 255\alpha - 20\alpha^4 + 90\alpha^2,$$
$$\theta^{iv} = -196 - 130\alpha^4 + 255\alpha^3 - 20\alpha^2 + 90\alpha,$$

et la formule générale du n° 11, donnera tout de suite, en faisant $r = 5$ et $s = -1$,

$$\text{X}' = \frac{-1 + \sqrt{-11} + \sqrt[5]{\theta'} + \sqrt[5]{\theta''} + \sqrt[5]{\theta'''} + \sqrt[5]{\theta^{iv}}}{5}.$$

Cette quantité X' est $= r + r^{10} = r + \frac{1}{r}$, à cause de $r^{11} = 1$; c'est la valeur de $2\cos\frac{360^{\text{o}}}{11}$ (n° 12); c'est aussi celle de la racine *u* de l'équation en *u* du cinquième degré (n° 28), puisque *r* est la racine de l'équation $x^{11} - 1 = 0$. Ainsi l'expression précédente, prise négativement, doit s'accorder avec celle de *Vandermonde.*

31. Pour pouvoir les comparer facilement, nous substituerons dans les expressions précédentes de $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$, les valeurs de $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, qui sont les mêmes que celles de r, r^2, r^3, r^4 du n° 18.

En faisant, pour abréger,

$$m=(-10-2\sqrt{5}),\quad n=(-10+2\sqrt{5}),$$

on a

$$\alpha=\tfrac{-1+\sqrt{5}+m}{4},\ \alpha^2=\tfrac{-1-\sqrt{5}+n}{4},$$
$$\alpha^3=\tfrac{-1-\sqrt{5}-n}{4},\ \alpha^4=\tfrac{-1+\sqrt{5}-m}{4},$$

et pour s'assurer de la justesse de ces expressions, il n'y a qu'à faire le carré de $-1+\sqrt{5}+m$, qui est $6-2\sqrt{5}+m^2+2(\sqrt{5}-1)m$; or en faisant passer sous le signe radical de m le coefficient $\sqrt{5}-1$ élevé au carré, on trouvera $(\sqrt{5}-1)m=2n$; de sorte qu'en substituant la valeur de m^2, on a

$$(-1+\sqrt{5}+m)^2=4(-1-\sqrt{5}+n).$$

On peut vérifier de même les autres puissances de α.

Faisant ces substitutions, on trouve

$$\theta'=\tfrac{1}{4}(-979-275\sqrt{5}-220m+275n),$$
$$\theta''=\tfrac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}-275m-220n),$$
$$\theta'''=\tfrac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}+275m+220n),$$
$$\theta^{iv}=\tfrac{1}{4}(-979-275\sqrt{5}+220m-275n),$$

où l'on remarquera que les coefficiens 979, 275, 220 sont tous divisibles par 11 et donnent pour quotiens 89, 25, 20 , de sorte que les quantités $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$ peuvent être exprimées plus simplement ainsi :

$$\theta'=\tfrac{11}{4}(-89-25\sqrt{5}-20m+25n),$$
$$\theta''=\tfrac{11}{4}(-89+25\sqrt{5}-25m-20n),$$
$$\theta'''=\tfrac{11}{4}(-89+25\sqrt{5}+25m+20n),$$
$$\theta^{iv}=\tfrac{11}{4}(-89-25\sqrt{5}+20m-25n).$$

32. Pour rapprocher davantage nos expressions de celles de *Vandermonde,* nous emploierons ces transformations :

$$m=p+q,\quad n=p-q,$$

en supposant

$$p=\sqrt{(-5-2\sqrt{5})},\quad q=\sqrt{(-5+2\sqrt{5})},$$

lesquelles se vérifient en faisant les carrés , et en observant que $pq=-\sqrt{5}$, parce que le produit des deux radicaux réels et positifs $\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$, $\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ est $\sqrt{5}$; donc

$$\sqrt{5}=p\sqrt{-1}\times q\sqrt{-1}=-pq.$$

Par ces substitutions, les quantités $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}$ deviendront

$$\theta'=\tfrac{11}{4}(-89-25\sqrt{5}+5p-45q),$$
$$\theta''=\tfrac{11}{4}(-89+25\sqrt{5}-45p-5q),$$
$$\theta'''=\tfrac{11}{4}(-89+25\sqrt{5}+45p+5q),$$
$$\theta^{iv}=\tfrac{11}{4}(-89-25\sqrt{5}-5p+45q).$$

33. *Vandermonde* a donné, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, de l'année 1771 (page 416), pour la résolution de l'équation

$$x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1=0$$

cette expression de la racine

$$x=\tfrac{1}{5}(1+\Delta'+\Delta''+\Delta'''+\Delta^{iv}),$$

dans laquelle

$$\Delta'=\sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89+25\sqrt{5}-5q+45p)},$$
$$\Delta''=\sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89+25\sqrt{5}+5q-45p)},$$
$$\Delta'''=\sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89-25\sqrt{5}-5q-45p)},$$
$$\Delta^{iv}=\sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89-25\sqrt{5}+5q+45p)},$$

en conservant les valeurs de p et q supposées ci-dessus;

On voit que les expressions de Δ''' et Δ^{iv} coïncident avec celles de $\sqrt[5]{-\theta'''}$ et $\sqrt[5]{-\theta''}$, et que les expressions de Δ' et Δ'' ne diffèrent de celles de $\sqrt[5]{-\theta'}$ et $\sqrt[5]{-\theta^{iv}}$ que par l'échange des quantités p et q entre elles, ce qui ne tient qu'au signe du radical $2\sqrt{5}$ sous le radical carré. A cette différence près; qui peut venir d'une faute d'impression dans le Mémoire de Vandermonde, ses résultats s'accordent parfaitement avec les nôtres, puisque la racine de son équation en x répond à la racine de notre équation en *u* prise négativement , et que tout radical cinquième $\sqrt[5]{-\theta}$ est la même chose que $-\sqrt[5]{\theta}$. On peut donc dire que *Vandermonde* est le premier qui ait franchi les limites dans lesquelles la résolution des équations à deux termes se trouvait resserrée.

34. Pour ne laisser aucun doute sur la correction à faire à la formule de *Vandermonde*, nous allons prouver qu'elle résulte des principes mêmes de sa théorie. En effet, si l'on désigne, comme lui, par r', r'', r''', r^{iv} les quatre racines qui, avec l'unité, résolvent l'équation $x^5-1=0$, il est facile de voir, par la formule générale de l'article VIII de son Mémoire, que la quantité Δ ne peut être que de la forme

$$\sqrt[5]{(\mathrm{A}+Br'+\mathrm{C}r''+\mathrm{D}r'''+\mathrm{E}r^{iv})}\ ;$$

et qu'en prenant cette expression pour l'une des quantités $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta^{iv},$ les expressions des trois autres doivent résulter de celle-ci, par la substitution de r^2, r^3, r^4 à la place de r ; les quantités A, B, C, D, E étant des fonctions des racines de l'équation à résoudre, indépendantes des racines r', r'', r''', r^{iv}

Or, par les relations données dans le même article entre ces dernieres racines, on a

$$\begin{aligned}
&r'^2=r''', r''^2=r^{iv}, r'''^2=r'', r^{iv2}=r',\\
&r'^3=r'r'''=r^{iv}, r''^3=r''r^{iv}=r''', r'''^3=r''r'''=r', r^{iv3}=r'r^{iv}=r'',\\
&r'^4=r'r^{iv}=r'', r''^4=r''r'''=r', r'''^4=r'r'''=r^{iv}, r^{iv4}=r''r^{iv}=r'''.
\end{aligned}$$

Donc, les quatre expressions dont il s'agit deviendront

$$\begin{aligned}
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r'+\mathrm{C}r''+\mathrm{D}r'''+\mathrm{E}r^{iv})},\\
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r'''+\mathrm{C}r^{iv}+\mathrm{D}r''+\mathrm{E}r')},\\
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r^{iv}+\mathrm{C}r'''+\mathrm{D}r'+\mathrm{E}r'')},\\
&\sqrt[5]{(\mathrm{A}+\mathrm{B}r''+\mathrm{C}r'+\mathrm{D}r^{iv}+\mathrm{E}r''')}.
\end{aligned}$$

35. Dans l'article XXIII du même Mémoire, on trouve pour les racines de l'équation $x^5-1=0$, ces expressions, dans lesquelles j'introduis, pour plus de simplicité, les mêmes lettres *p* et *q* employées ci~dessus,

$$\frac{1}{4}\left\{-1\left.\begin{matrix}+\\+\\-\\+\end{matrix}\right\}\sqrt{5}\left.\begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix}\right\}q\left.\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\right\}p\right\}.$$

En prenant la première de ces racines pour r', de sorte que l'on ait

$$r' = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}+p+q),$$

il faudra, d'après les formules du n° 31 , en prenant α pour r', et substituant $p+q,\ p-q$ pour *m, n*, supposer

$$r''' = r'^2 = \tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}+p-q),$$
$$r^{iv} = r'^3 = \tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}-p+q),$$
$$r'' = r'^4 = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}-p-q).$$

Substituant ces valeurs dans les expressions ci-dessus , elles se changeront en celles-ci :

$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{H}p+\mathrm{K}q)},$$
$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{K}p-\mathrm{H}q)},$$
$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}-\mathrm{K}p+\mathrm{H}q)},$$
$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{H}p-\mathrm{K}q)},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{F} = 4\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}-\mathrm{E},$$
$$\mathrm{G} = \mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}-\mathrm{E},$$
$$\mathrm{H} = \mathrm{B}-\mathrm{C}+\mathrm{D}-\mathrm{E},$$
$$\mathrm{K} = \mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}+\mathrm{E},$$

lesquelles doivent coïncider avec celles de $\Delta',\ \Delta'',\ \Delta''',\ \Delta^{iv}$, rapportées ci-dessus (n° 33). Mais on voit au premier coup d'oeil que cette coïncidence ne peut avoir lieu, à moins qu'on ne change à la fois p en q et q en p dans Δ' et Δ'', ou dans Δ''' et Δ^{iv}, parce que dans les formules précédentes, les coefficiens de p et q ne sont les mêmes que dans les deux où la racine $\sqrt{5}$ est affectée du même signe, au lieu que dans les expressions de $\Delta',\ \Delta'',\ \Delta''',\ \Delta^{iv}$, les quantités p et q ont partout les mêmes coefficiens.

36. En faisant ce changement dans Δ' et Δ'', comme nous l'avons indiqué (n° 33) pour accorder les formules de *Vandermonde* avec les nôtres, on pourra supposer

$$\Delta' = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{H}p+\mathrm{K}q)},$$
$$\Delta'' = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}-\mathrm{H}p-\mathrm{K}q)},$$
$$\Delta''' = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}-\mathrm{K}p+\mathrm{H}q)},$$
$$\Delta^{iv} = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(\mathrm{F}-\mathrm{G}\sqrt{5}+\mathrm{K}p-\mathrm{H}q)},$$

ce qui se vérifiera en faisant

$$\mathrm{F}=11\cdot 89,\ \mathrm{G}=11\cdot 25,\ \mathrm{H}=-5,\ \mathrm{K}=45.$$

De là, on aura, par les formules du numéro précédent,

$$\mathrm{B}=\mathrm{A}-11\cdot 6,\ \mathrm{C}=\mathrm{A}-11\cdot 26,\ \mathrm{D}=\mathrm{A}-11\cdot 41,\ \mathrm{E}=\mathrm{A}-11\cdot 16,$$

et la quantité A restera indéterminée, parce qu'à cause de ….
$1+r'+r''+r'''+r^{iv}=0$, elle disparaîtra des expressions des quantités Δ du n° 34.
Si l'on fait $\mathrm{A}=196$, on trouve

$$\mathrm{B}=130,\ \mathrm{C}=-90,\ \mathrm{D}=-255,\ \mathrm{E}=20,$$

et la formule

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}r'+\mathrm{C}r''+\mathrm{D}r'''+\mathrm{E}r^{iv})$$

du n° 34, coïncidera avec celle de $\sqrt{-\theta'}$ du n° 30, parce qu'en faisant $\alpha=r'$, on a $r''=\alpha^4$, $r'''=\alpha^2$, $r^{iv}=\alpha^3$ (n° 35); et les formules dérivées de celle - là coïncideront aussi avec celles de $\sqrt[5]{-\theta''}$, $\sqrt[5]{-\theta'''}$, $\sqrt[5]{-\theta^{iv}}$.

37. Prenons pour dernier exemple l'équation $x^{13}-1=0$. Comme $13-1=12=2\cdot 2\cdot 3$, l'opération pourra se décomposer en trois, de la manière suivante.

Il faut d'abord avoir une racine primitive pour le nombre 13, et la table du n° 4 foùrnit le nombre 2, dont les puissances successives, jusqu'à la onzième, divisées par 13 , donnent les restes 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7.

Ainsi en nommant *r* une racine de l'équation

$$r^2, r^4, r^8, r^3, r^6, r^{12}, r^{11}, r^9, r^5, r^{10}, r^7.$$

les autres onze racines seront

$$r^2, r^4, r^3, r^8, r^6, r^{12}, r^{11}, r^9, r^5, r^{10}, r^7.$$

On fera donc en général

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^3 + \alpha^5 r^6$$
$$+ \alpha^6 r^{12} + \alpha^7 r^{11} + \alpha^8 r^9 + \alpha^9 r^5 + \alpha^{10} r^{10} + \alpha^{11} r^7.$$

et l'on prendra d'abord pour α une racine de l'équation $y^2 - 1 = 0$, en sorte que $\alpha^2 = 1$, ce qui réduira la fonction t à la forme….. $t = \mathrm{X}' + \alpha \mathrm{X}''$, dans laquelle

$$\mathrm{X}' = r \quad + r^4 + r^3 + \ r^{12} + r^9 + r^{10},$$
$$\mathrm{X}'' = r^2 + r^8 + r^6 + r^{11} \ + r^5 + r^7.$$

De là , on aura

$$\theta = t^2 = \xi^{\mathrm{o}} + \alpha\xi, \ \ \xi = \mathrm{X}'^2 + \mathrm{X}''^2, \ \ \xi' = 2\mathrm{X}'\mathrm{X}''.$$

On peut se dispenser de chercher la valeur de ξ^{o}, en se servant de l'expression de θ du n$^{\mathrm{o}}$ 11, qui ne renferme pas ξ^{o}, et qui donne ici, à cause de $v = 2$ et de $s = -1$ somme des racines de l'équation proposée, $\theta = 1 + (\alpha - 1)\xi'$; de sorte qu'en faisant $\alpha = -1$, on aura la valeur de θ', et les deux racines $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$ seront (n$^{\mathrm{o}}$ cité)

$$\mathrm{X}' = \tfrac{-1+\sqrt{(1-2\xi')}}{2}, \ \mathrm{X}'' = \tfrac{-1-\sqrt{(1-2\xi')}}{2}.$$

Pour avoir la valeur de ξ', il faut développer le produit $\mathrm{X}'\mathrm{X}''$ en puissance de r, ayant soin de rabaisser les puissances supérieures à r^{12}, à cause de $r^{13} = 1$, et l'on trouve $\mathrm{X}'\mathrm{X}'' = 3s$, en mettant s pour la somme des racines $r, \ r^2, \ r^4,$ etc., laquelle est $= -1$; de sorte qu'on aura $\xi' = -6$, et les valeurs de $\mathrm{X}', \mathrm{X}''$ seront

$$\mathrm{X}' = \tfrac{-1+\sqrt{-11}}{2}, \ \mathrm{X}'' = \tfrac{-1-\sqrt{-11}}{2}.$$

38. On regardera maintenant les six racines qui composent la quantité X' comme celles d'une équation du sixième degré, et l'on fera de nouveau

$$t_1 = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^3 + \alpha^3 r^{12} + \alpha^4 r^9 + \alpha^5 r^{10};$$

mais au lieu de prendre en général pour α une racine de l'équation $y^6-1=0$, ce qui demanderait ensuite le développement de la sixième puissance du polynome t_1, nous prendrons de nouveau une racine de l'équation $y^2-1=0,$ de sorte qu'au moyen de $\alpha^2=1$, la fonction t_1 redeviendra de la forme $t_1 = \mathrm{X}'_1 + \mathrm{X}''_1,$ dans laquelle on aura

$$\mathrm{X}'_1 = r + r^3 + r^9,\ \mathrm{X}''_1 = r^4 + r^{12} + r^{10}.$$

On aura ensuite, comme ci-dessus,

$$\theta_1 = t_1^2 = \xi_1^{\mathrm{o}} + \alpha\xi'_1,\ \xi_1^{\mathrm{o}} = \mathrm{X}_1'^2 + \mathrm{X}''_1,\ \xi_1'^2 = 2\mathrm{X}'_1\mathrm{X}''_1,$$

et à cause que la somme des racines est ici X', on aura sur-le-champ

$$\mathrm{X}'_1 = \frac{\mathrm{X}'+\sqrt{\theta'_1}}{2},\quad \mathrm{X}''_1 = \frac{\mathrm{X}'-\sqrt{\theta'_1}}{2},$$

on aura en même temps $\theta_1 = \mathrm{X}'^2 + (\alpha-1)\xi'_1,$ et faisant $\alpha=-1,$ $\theta'_1 = \mathrm{X}'^2 - 2\xi'_1.$

Pour avoir ξ', il faudra développer le produit de X'_1 par X''_1 ; en se souvenant toujours que $r^{13}=1$, et l'on trouvera

$$\mathrm{X}'_1\mathrm{X}''_1 = 3 + \mathrm{X}'',$$

ce qui donnera

$$\xi'_1 = 6 + 2\mathrm{X}'',$$

et par conséquent

$$\mathrm{X}'_1 = \frac{\mathrm{X}'+\sqrt{(\mathrm{X}'^2-12-4\mathrm{X}'')}}{2},$$
$$\mathrm{X}''_1 = \frac{\mathrm{X}'-\sqrt{(\mathrm{X}'^2-12-4\mathrm{X}'')}}{2}.$$

39. Nous remarquerons ici que comme en mettant r^2 au lieu de *r*, la fonction X' devient X'', et la fonction X'' devient X'; si l'on dénote par (X'), (X'') ce que deviennent les fonctions X'_1, X''_1, en y substituant r^2 au lieu de *r* dans toutes les puissances de *r*, ce qui donne

$$(\mathrm{X}'_1) = r^2 + r^6 + r^5,\quad (\mathrm{X}''_1) = r^8 + r^{11} + r^7,$$

on aura les valeurs de $(\mathrm{X}'_1),$ $(\mathrm{X}''_1),$ en échangeant dans celles de $\mathrm{X}'_1,$ X''_1, les quantités $\mathrm{X}',$ X'' , entre elles. On trouvera ainsi

$$(X_1') = \frac{X'' + \sqrt{(X'^2 - 12 - 4X')}}{2},$$
$$(X_1'') = \frac{X'' - \sqrt{(X'^2 - 12 - 4X')}}{2}.$$

Ce sont les fonctions correspondantes à X_1', X_1'', qu'on obtiendrait en procédant à l'égard des racines qui composent la fonction X_1'', comme on a fait sur celles de X_1'. Ces valeurs sont nécessaires pour parvenir à celles de r.

40. Pour cet effet, il faut encore regarder les trois racines qui composent la fonction X_1' comme celle d'une équation du troisième degré, et faire, en conséquence,

$$t_2 = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^9,$$

et prenant pour α une racine de l'équation $y^3 - 1 = 0$.
De là, on formera la fonction

$$\theta_2 = t_2^3 = \xi_2^{\text{o}} + \alpha \xi_2' + \alpha^2 \xi_2'',$$

et l'on trouvera, par le développement, en faisant $\alpha^3 = 1$, et $r^{13} = 1$, ces expressions

$$\xi_2^{\text{o}} = 6 + X_1', \quad \xi_2' = (X_1'), \quad \xi_2'' = 3(X_1'').$$

Donc , nommant α et β les deux racines de l'équation

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

et faisant

$$\theta_2' = 6 + X_1' + 3\alpha(X_1') + 3\alpha^2(X_1''),$$
$$\theta_2'' = 6 + X_1' + 3\beta(X_1') + 3\beta^2(X_1''),$$

on aura, comme dans le n° 23,

$$r = \frac{X_1' + \sqrt[3]{\theta_2'} + \sqrt[3]{\theta_2''}}{3}.$$

Ainsi la valeur de r est entièrement déterminée; nous ne chercherons pas à la simplifier, parce que, dans tous les cas, il est toujours plus avantageux d'employer, pour la résolution de l'équation $x^{13} - 1 = 0$, ainsi que de toutes les équations de ce genre, les formules connues en sinus et cosinus.

41. Je remarquerai, en finissant, que la méthode exposée dans cette Note, peut être regardée comme une simplification de celle que M. Gauss a indiquée d'une manière

générale, dans l'article 360 des *Disquisitiones arithmeticae*. Celle-ci est fondée aussi sur le développement d'un fonction semblable à la fonction que nous avons désignée par θ ; mais elle demande de plus la formation et le développement d'autant d'autres fonctions du même ordre que l'équation a de racines, ce qui alonge considérablement le calcul. Notre méthode est indépendante de ces fonctions auxiliaires, et conduit directement aux expressions les plus simples des racines.

FIN.

Correction (laissée par M. Lagrange) *pour l'article* 37 *de la Note* XIII, *page* 242.

La règle donnée dans cet article, pour savoir lequel des deux systèmes d'équations on doit choisir dans chaque cas, n'est pas assez générale.

M. Bret, professeur de Mathématiques au Lycée de Grenoble, a trouvé un exemple où elle est en défaut.

Soit l'équation

$$x^4+2x^2-8x+5=0 \;;$$

la transformée en θ est

$$\theta^3+16\theta^2-256\theta-(64)^2 = 0,$$

dont les racines sont $-16,\ -16,\ 16$, ce qui donne

$$\sqrt{\theta'}=4,\ \sqrt{\theta''}=4\sqrt{-1},\ \sqrt{\theta'''}=4\sqrt{-1}.$$

La fonction $\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}$ est >0, parceque $\mathrm{A}=0,\ \mathrm{C}=8$; ainsi il faudrait prendre le premier système. On aurait d'abord

$$x'=1+2\sqrt{-1},$$

qui ne satisfait pas. En effet,

$$(1+2\sqrt{-1})^2=-2+4\sqrt{-1},$$
$$(-3+4\sqrt{-1})^2=-7-24\sqrt{-1};$$

ainsi l'équation serait

$$-7-24\sqrt{-1}-6+8\sqrt{-1}-8-16\sqrt{-1}+5$$
$$=-16-32\sqrt{-1},$$

ce qui n'est pas zéro.

Le deuxième système donnerait

$$x'=-1-2\sqrt{-1},$$

donc

$$-7-24\sqrt{-1}-6+8\sqrt{-1}+8+16\sqrt{-1}+5=0.$$

Mais je remarque que l'analyse donne simplement la condition

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}=\mathrm{A}^3-4\mathrm{AB}+8\mathrm{C}\;;$$

d'où il suit que le produit des trois radicaux $\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}$ doit être égal , et par conséquent de même signe que la quantité….. $A^3-4AB+8C$. Donc si, en prenant les trois radicaux positivement, leur produit est de même signe que cette quantité , ce sera le premier système qui aura lieu; mais s'il est de signe contraire, alors il faudra donner le signe $-$ à l'un des trois radicaux, ce qui donnera le deuxième système.

Dans l'exemple dont il s'agit, on a

$$\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}\times\sqrt{\theta'''}=4\times4\sqrt{-1}\times4\sqrt{-1}=-64,$$

tandis que

$$A^3-4AB+8C=64.$$

Ainsi c'est le second système qui a lieu.

La méprise vient de ce qu'on a supposé que le produit des trois radicaux, pris positivement, serait toujours positif.

Au reste, on peut ôter toute ambiguïté en prenant dans le premier système

$$\sqrt{\theta'''}=\frac{A^3-4AB+8C}{\sqrt{\theta'}\times\sqrt{\theta''}}.$$

Dans l'exemple proposé, pour lequel

$$A^3-4AB+8C=64,$$

ayant fait $\sqrt{\theta'}=4,\ \sqrt{\theta''}=4\sqrt{-1},$ on aura $\sqrt{\theta'''}=-4\sqrt{-1}$;
alors le premier système donnera

$$x'=1,\ x''=-1+2\sqrt{-1},\ x'''=1,\ x^{iv}=-1-2\sqrt{-1},$$

véritables racines.

NOTE DE M. POINSOT, *relative à la correction précédente*.

Il me semble qu'il y avait à faire; sur ce point de doctrine, une remarque plus simple et plus lumineuse que celle qu'on vient de lire, parce qu'en même temps qu'elle efface, de l'Algèbre, cette inutile énumération de formules qui a donné lieu à la méprise dont il s'agit, elle rend encore plus claire et plus précise la règle qu'on doit suivre dans les applications particulières.

En représentantz comme le fait Euler, par

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

l'équation du 4e degré , et par les lettres *a, b, c*, les trois racines de la *réduite*, j'observe que, dans l'Algèbre, on ne devrait présenter, pour l'expression générale de *x*, que la simple formule

$$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},$$

et qu'il faudrait supprimet, comme inutiles, toutes celles qu'on en tire par ces différentes combinaisons de signes dont on affecte les radicaux $\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}.$ Car ces signes + ou − qu'on met devant ces radicaux, n'en font pas pour cela des quantités positives ou négatives; et, par l'équivoque même qui reste attachée au signe radical √ , et à ceux qui entrent dans l'expression de *a, b, c*, toutes ces représentations , ou formules diverses en apparence, reviennent toujours à la même, et ne signifient rien de plus en Algèbre. Il suffit donc d'écrire la simple formule précédente , où le signe + que j'emploie, signifie uniquement que l'expression de *x* est formée par la réunion des trois expressions générales $\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}$, sans rien dire de la nature de ces quantités, qu'on ne peut ni connaître, ni marquer par aucun signe, tant qu'on reste dans la généralité de l'analyse.

Actuellement , je suppose qu'on veuille donner une règle pour l'application arithmétique qu'on pourrait avoir à faire de cette formule générale à une équation particulière donnée. Il suffit de dire que, dans chaque cas particulier, on aura soin d'assembler les valeurs trouvées pour ces radicaux, de manière que le produit de ces valeurs soit de signe contraire au coefficient *q* de la proposée : ce qui donnera précisément, et dans tous les cas, les quatre racines de cette équation.

(Ceci suppose que, pàr la règle analogue dans le 3e degré, on a d'abord déterminé les trois racines particulières *a, b, c*, qui conviennent à la réduite.)

On voit que tout devient clair et facile , par cette seule attention de ne pas confondre avec l'Algèbre ce qui n'appartient qu'à l'Arithmétique. Le défaut qu'on relève ici vient uniquement de ce faux mélange qu'on veut faire de l'analyse et de la synthèse. On essaye de distinguer et d'isoler, par certains signes, les différentes racines d'une formule radicale, et cette séparation est tout-à-fait illusoire: car ces racines coexistent toujours dans une seule quelconque d'entre elles, tant qu'on y laisse ces radicaux qui donnent lieu à cette multiplicité de valeurs. Or, par la nature même de l'Algèbre, il faut que ces signes équivoques demeurent, puisque cette science n'a d'autre objet que d'indiquer les opérations à faire, mais sans les exécuter, afin que le tableau de ces opérations, la seule chose que l'esprit ait en vue, soit parfaitement conservé. C'est même pour prévenir toute imperfection de ce genre , que, dans le calcul, au lieu de nombres, on emploie des lettres; d'où il résulte qu'aucune opération ne peut se faire actuellement, et que le signe de l'opération demandée subsiste toujours.

Lorsqu'on passe aux applications numériques, les opérations s'effectuent, les signes radicaux disparaissent, et l'on n'a plus que des valeurs particulières, composées de nombres réels ou simplement affectés de l'imaginaire $\sqrt{-1}$: c'est la seule ambiguïté qui reste; et le choix de ces valeurs particulières se fait aisément par cette règle naturelle, qui consiste à se conformer à l'hypothèse même du calcul, afin de ne pas se contredire soi-même.

Ainsi, dans la formule d'Euler, l'hypothèse du calcul est $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}=-\frac{q}{8}$, qui signifie que le produit des trois valeurs particulières, qu'on réunit pour former la racine x de la proposée , doit être précisément égal à $-\frac{q}{8}$. Il faut donc se conformer à cette supposition, comme lorsqu'on demande le carré de $\sqrt{-1}$, on doit écrire -1, pour ne pas se contredire. Par ce seul principe, on est sûr de trouver dans chaque cas les vraies valeurs qui conviennent à la question que l'on considère.