NOTES ON THE THEORY OF ALGEBRAIC EQUATIONS.

NOTE I.

ON THE DEMONSTRATION OF THEOREM I.

The two theorems of Chapter I are the basis of the whole theory of equations, and must be shown in a rigorous manner, and with nothing assumed from this same theory. The demonstration which I have given of the first theorem (§1) is drawn from the consideration of the factors of the equation, and could leave some doubts about imaginary factors. It is true that in assuming the theorem known in the form of imaginary roots, we are certain that the product of two corresponding imaginary factors is always essentially a positive quantity, which value we give to x, from which it follows that the difference of the signs in the results of the substitutions of p and q in place of x can only give real roots. But we must observe that the rigorous demonstration of this theorem itself depends on the theorem which it is about to show, so that it cannot be used in the demonstration of this. In order to avoid every difficulty, I have looked for a demonstration of the theorem from the very nature of the equation, independent of any of its properties. Representing, in general, the proposed equation by

$$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=0,$$

P being the sum of all the terms which have the positive sign +, and − Q the sum of all those which have the sign − . Assuming at first that the two numbers p and q shall be positive and that q shall be greater than p; if , in making $x=p$, we have $\mathrm{P}-\mathrm{Q}<0$, and, on making $x=q$, we have $\mathrm{P}-\mathrm{Q}>0$, it is clear that in the first case P will be < Q, and in the second case P will be > Q. Now, by the form of the quantities P and Q, which contain only positive terms and whole number positive powers, it is evident that these quantities necessarily increase as x increases and that, on making x larger through all the imperceptible steps from p as far as q, they will increase also by these imperceptible steps, but in such a way that P will increase more than Q, since it will go from being the smallest to the largest. Thus necessarily there will be a term between the two values p and q, where P will equal Q, just as two moving bodies we assume to travel along the one straight line in the same sense, and which, leaving at the same time from two different points, arrive in the same time at two other points, but concerning the manner in which the one which was at first behind finally finds itself before the other, must necessarily be found along their way. This value of x, which will render P equal to Q, thus will be one of the roots of the equation, and will fall between the values p et q. Likewise, if, on making $x=p$, we may have $\mathrm{P}-\mathrm{Q}>0$, and, on making $x=q$, we may have $\mathrm{P}-\mathrm{Q}<0$, we will have in the first case $\mathrm{Q} < \mathrm{P}$, and in the second $\mathrm{Q} > \mathrm{P}$; and, on making x to increase from p to q, the quantity Q will be increased more than the quantity P and will equal that at a point between p and q.

If the two numbers p and q were negative, or only one of the two, then, taking a positive number r such that $r+p$ and $r+q$ shall be some positive numbers, we will only have to transform the equation by the substitution of $y-r$ in place of x; we will have hence a transformation in y, in which the substitutions or $r+p$ and of $r+q$ in place of the unknown y will give by the hypothesis the results of the opposite signs, since these results are the same as those which would arise from the substitutions of p and of q in place of x in the proposed equation. Now, these numbers $r+p$ and $r+q$ being assumed positive, we will be able to resume the preceding reasoning, and we will prove that the equation in y necessarily will have one root included between the numbers $r+p$ and $r+q$; as a consequence, since $x = y-r$, the equation in x also will have a root between p and q.

NOTE II.

ON THE DEMONSTRATION OF THEOREM II.

The demonstration of this theorem (§5) assumes these two propositions, that any equation can itself be decomposed into just as many simple real factors as it has real roots, and that the factor remaining, if the number of these roots is less than the degree of the equation, is such that it can never become negative, whatever value we give to the unknown. The first proposition has been accepted for a long time by analysts as a result of the formation of the equations, and d'Alembert is, I believe, the first who has felt the need to demonstrate that rigorously. Regarding the second, we could consider that as a consequence of the first; but, in order to leave nothing to be desired with regard to the rigor, it is worthwhile to demonstrate that also in particular.

Representing in general, by $(x^m ...)$ any polygon in x of degree m, such as

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ ... \pm \mathrm{V}\,.$$

If we change x into a, it will become $(a^m ...)$, and it is easy to see that the difference $(x^m ...) - (a^m ...)$ of these two similar polynomials will be divisible by $x-a$, for each term of the polynomial $(x^m ...)$, such as $\mathrm{N}x^n$, will give in the difference the terms $\mathrm{N}(x^n - a^n)$; now we have in general, since n is a positive whole number ,

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-1});$$

thus, reuniting all the quotients and the orders following the powers of x, we will have

$$(x^m...)-(a^m...)=(x-a)(x^{m-1}...),$$

$(x^{m-1}...)$ being a polynomial in x of lesser degree $m-1$. Hence we will have, whatever the quantity a shall be,

$$(x^m...)=(x-a)(x^{m-1}...)+(a^m...).$$

In the same manner, in taking some other quantity b, we will be able to reduce the polynomial $(x^{m-1}...)$ to this form,

$$(x^{m-1}...)=(x-b)(x^{m-2}...)+(b^{m-1}...).$$

$(x^{m-2}...)$ being another polynomial of the lower degree $m-2$, and thus for the following.

Meanwhile I note that, if we have the equation $(x^m...)=0,$ and that a must be one of the roots of this equation, that is, so that if one value of x may be satisfied there, we will have also $(a^m...)=0$; thus the polynomial $(x^m...)$ then will be reducible always to the form

$$(x-a)(x^{m-1}\ ...),$$

as a consequence exactly divisible by $x-a$.

If, in addition to the quantity a, shall be another quantity b which may satisfy that same equation $(x^m...)=0,$ it will be necessary that this quantity, being taken for x, shall be able to remove another factor $(x^{m-1}...)$ and become, as a consequence, such that we may have $(b^{m-1}...)=0.$ Thus the polynomial $(x^{m-1}...)$ will be reducible to the form $(x-b)(x^{m-2}...),$ and, as a consequence, we will have

$$(x^m...)=\ (x-a)(x-b)(x^{m-2}...);$$

so that the first polynomial $(x^m...)=0,$ will be exactly divisible by $x-a$ and by $x-b$, and thus so on.

Thus if the equation $(x^m...)=0,$ has only a number n of real roots $a,\ b,\ c,...$, less than m we will have at first

$$(x^m...) = (x-a)(x-b)(x-c)...(x^{m-n}...),$$

and the polynomial $(x^{m-n}...)$ will no more be resolvable into simple real factors. Thus, whatever value we give to *x,* this polynomial will never be able to have a negative value ; for, if it should have a value of *x* which was able to render it negative, since on the other side we can always take x large enough so that the first term is greater than the sum of all the others, it would follow that it would have two values which, being substituted for *x,* would give results with a sign difference, and which, as a consequence, by theorem I, there would have to be in intermediate value *h* which would render $(x^{m-n}...) = 0$, and which hence would be a real root of this equation ; thus we would have then

$$(x^{m-n}...) = (x-h)(x^{m-n-1}...),$$

and the polynomial $(x^m...)$ would still have the real factor $x-h$, which is contrary to the hypothesis. This polynomial $(x^{m-n}...)$ thus necessarily will be of an even degree, and its last term will be positive always (§3); and the polynomial $(x^m...)$ will have, as a consequence, will have its last term positive or negative, following which the number of roots $a, b,...$ will be even or odd.

Not only will the polynomial $(x^{m-n}...)$ always have a positive value when the equation $(x^{m-n}...) = 0$ has not a single real root, but again also when it will have double or quadruple real roots, and in general multiples, following an even number; for then the polynomial will have factors of the form $(x-g)^{2r}$, $2r$ being an even number, and it is seen that this quantity is always positive, whatever real value we give to *x.* From which it follows that theorem II still accommodates equal, triple, quintuple, etc. roots. But, as we have some particular methods for equal roots, it suffices to consider unequal roots, and to have a method for finding them.

For the remainder, the spirit of the algebraic calculation, which is independent of the particular values which we can give to the quantities, enables us to consider any polynomial $(x^m...)$ as formed from the product of just as many simple factors $x-a,\ x-b,\ x-c,\ ...$ as there are units in the exponent *m* of the degree of the polynomial, whatever the degree of this polynomial, whatever besides the quantities $a, b, c,...$ can be, which give this equation identically :

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - ... \pm \mathrm{V} = (x-a)(x-b)(x-c)...,,$$

which must always occur independently of the value of *x.*

The theory of equations consists entirely in this transformation of polynomials. We have found different relations between the quantities *a, b, c,* ... of the factors and the coefficients A, B, C, ... of the polynomial, and it is these relations which constitute the general properties of equations *(see* Note X).

The factors which we assume of polynomials which are never able to acquire a negative value are called *imaginary,* and the quantities *a, b, c,* ... of these factors are the imaginary roots of the equations formed in equating these polynomials to zero ; where we see that the number of these roots is always necessarily even, and that their product, which is itself found equal to the last term of the polynomial, is always positive.

NOTE III.

ON THE EQUATION WHICH GIVES THE DIFFERENCES BETWEEN THE ROOTS OF A GIVEN EQUATION, TAKEN IN PAIRS.

The search for this equation, which is the object of the problem of § 8, may become very tedious if we may use the approach of elimination, which presents itself naturally ; but, by the formulas I give there, there is no difficulty apart from the length of the calculation. Everything is reduced to the calculation of a certain number of terms of three series of which the law is simple enough.

1. The first series, that of the quantities $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3,...,$ is none other than the series known to have the sums of the powers of the roots given by the coefficients of the given equation, and we will see the demonstration regarding that in Note VI. The third series, that of the quantities *a, b, c,* ... which form the coefficients of the equation sought, is the inverse of the preceding: it gives these coefficients by means of the sums of powers of the roots which we have by the second series $a_1, a_2, a_3,...$ I have only found the law of the terms of that series by induction ; but we can demonstrate that in a general manner. For that, we have only to consider the quantity

$$(x-\alpha)^s+(x-\beta)^s+\left(x-\gamma\right)^s+\ldots ,$$

which, being expanded following the powers of *x,* becomes

$$mx^s-s\mathrm{A}_1x^{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2x^{s-2}-\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3x^{s-3}+\ldots.$$

Since these two expressions are identical, there we can make x to be anything we wish. Thus we can assume successively that $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,...,$ and that adding together the results of these substitutions, we will have

$$(\alpha-\beta)^s+(\alpha-\gamma)^s+\ldots\ (\beta-\alpha)^s+(\beta-\gamma)^s+\ldots\ (\gamma-\alpha)^s+(\gamma-\beta)^s+\ldots$$

$$=m\mathrm{A}_s-s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2}-\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_{s-3}+\ldots,$$

that which is evident, since, by the notation that we have used, we have, in general,

$$\mathrm{A}_s=\alpha^s+\beta^s+\gamma^s+\ldots$$

When s is an odd number, it is easy to see that the first term of this equation becomes zero by the mutual cancellation of all the terms, and the second term must also become zero itself in noting that we must have $\mathrm{A}_0=\alpha^0+\beta^0+\gamma^0+\ldots=m$, the number of roots.

But, when s is some even number $=2\mu$, the first term must become equal to $2a_\mu$, following the notation of the terms of the second series; hence we will have

$$2a_\mu=m\mathrm{A}_{2\mu}-2\mu\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2\mu-1}+\tfrac{2\mu(2\mu-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{2\mu-2}-\tfrac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{2.3}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_{2\mu-3}+\ldots.$$

Since the terms of this series are found to be the same on both sided from the term in the middle, which contains $\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}_\mu$, in reuniting these equal terms and dividing by 2, we will have the general formula for the value of a_μ, which I have given in the place indicated.

2. We shall be able, in the same manner, to find formulas for the sums of the roots taken in pairs; for, by considering the quantity

$$(x+\alpha)^s+(x+\beta)^s+(x+\gamma)^s+\ldots,$$

we will have, by the expansion, this identical expression :

$$mx^s+s\mathrm{A}_1x^{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2x^{s-2}+\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3x^{s-3}+\ldots.$$

Thus, making successfully $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$, and adding together the results, we will have :

$$2^s(\alpha^s+\beta^s+\gamma^s+\ldots)+2(\alpha+\beta)^s+2(\alpha+\gamma)^s+2(\beta+\gamma)^s+\ldots$$

$$=m\mathrm{A}_s+s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2}+\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_{s-3}+\ldots$$

Thus, if we denote in general by a_s, the sum of the s[th] powers of roots added in pairs, we will have, since $\alpha^s+\beta^s+\gamma^s+\ ...=\mathrm{A}_s$, this expression for $2a_s$,

$$2a_s=(m-2^s)\mathrm{A}_s+s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2}+\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_{s-3}+...$$

Since *s* is assumed to be a whole number, it is evident that the terms equally distant from the two extremes will be equal ; now the last term will be $\mathrm{A}_s\mathrm{A}_0$, but $\mathrm{A}_0=m$;thus, combining the last term with the first, the second to last with the second, and hence in this manner, and dividing by 2, we will have, when *s* is an odd number,

$$\begin{aligned}a_s&=(m-2^{s-1})\mathrm{A}_s+s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2}+...\\&+\frac{s(s-1)(s-2)...(\frac{s+3}{2})}{1.2.3...\frac{s-1}{2}.}\mathrm{A}_{\frac{s-1}{2}}\mathrm{A}_{\frac{s+2}{2}},\end{aligned}$$

and, when *s* is an even number,

$$\begin{aligned}a_s&=(m-2^{s-1})\mathrm{A}_s+s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2}+...\\&+\frac{s(s-1)(s-2)...(\frac{s}{2}+1)}{1.2.3...\frac{s}{2}.}\frac{\mathrm{A}^2_{\frac{s}{2}}}{2}.\end{aligned}$$

If we determine the terms of the series $a_1,\ a_2,\ a_3,...$ by this formula, and that we use these values in the expressions of the quantities $a,\ b,\ c,...$ of the third series, we will have the coefficients of the equation, of which the roots will be the *n* sums $\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\gamma,...$, the roots of the given equation, taken in pairs. This equation can be useful in several occasions.

3. I must, for the rest, consider here what Waring had already noted in his *Miscellanea analytica,* published in 1762, the use of the equation of which the roots will be

$$\tfrac{1}{\alpha-\beta},\ \tfrac{1}{\alpha-\gamma},\ \tfrac{1}{\beta-\gamma},...$$

in order to find the bounds of the real roots of the equation of which the roots are $\alpha,\ \beta,\ \gamma,....$ But I was not aware of this work when I was composing my first memoir on the resolution of numerical equations ; besides, this note, being present in Waring's Work only in an isolated manner, would perhaps have remained fruitless without the investigations with which it has been accompanied in this Work.

I must add also that the same author has noted before me the characters that we must add to the signs of the equation of which the roots are the squares of the differences between the roots of a given equation, in order to judge the imaginary roots of this equation. He has said simply in the work mentioned, if this equation of the differences has only alternative signs, the original equation has necessarily all its roots real ; otherwise it contains imaginary roots ; but then he gave without demonstration, in the *Philosophical Transactions* of the year 1763, the conditions which result from the equations of the differences of the fourth and of the fifth degrees, in order that these equations of these degrees may have either all their roots are real, or have either two or four imaginary roots, which no one had yet done for the fifth degree.

In the second Memoir, I have been satisfied to give the equations of the differences for the second, third, and fourth degree ; the length of the calculation has prevented me from giving that of the fifth degree ; but, as perhaps it can be useful on some occasions, I am going to give it here, following Waring.

4. Thus the equation of the fifth degree shall be

$$x^5 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - \mathrm{E} = 0;$$

the equation of the differences will be

$$v^{10} - av^9 + bv^8 - cv^7 + dv^6 - ev^5 + fv^4 - gv^3 + hv^2 - iv + k = 0,$$

in which

$$a = -10\mathrm{B},$$
$$b = 39\mathrm{B}^2 + 10\mathrm{D},$$
$$c = -80\mathrm{B}^3 - 50\,\mathrm{BD} - 25\mathrm{C}^2,$$
$$d = 95\mathrm{B}^4 + 124\mathrm{B}^2\mathrm{D} - 95\mathrm{D}^2 + 92\mathrm{BC}^2 + 200\mathrm{CE},$$
$$e = -66\mathrm{B}^3 + 360\mathrm{BD}^2 - 196\mathrm{B}^3\mathrm{D} - 118\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 - 260\mathrm{C}^2\mathrm{D} - 625\mathrm{E}^2 - 400\mathrm{BCE},$$
$$f = 25\mathrm{B}^6 + 40\mathrm{D}^3 - 53\mathrm{C}^4 + 52\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2 - 522\mathrm{B}^2\mathrm{D}^2 + 194\mathrm{B}^4\mathrm{D} + 708\mathrm{BC}^2\mathrm{D} + 240\mathrm{B}^2\mathrm{CE} + 1750\mathrm{BE}^2 - 950\mathrm{CDE},$$
$$g = -4\mathrm{B}^7 - 106\mathrm{B}^5\mathrm{D} + 80\mathrm{BD}^3 + 308\mathrm{B}^3\mathrm{D}^2 + 102\mathrm{BC}^4 + 7\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2 - 570\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2 - 612\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{D} - 700\mathrm{C}^3\mathrm{E} + 3570\mathrm{DE}^2 - 2500\mathrm{B}^2\mathrm{E}^2 - 80\mathrm{B}^3\mathrm{CE} + 2150\mathrm{BCDE},$$
$$h = 400\mathrm{D}^4 - 360\mathrm{B}^2\mathrm{D}^3 - 15\mathrm{B}^4\mathrm{D}^2 + 24\mathrm{B}^6\mathrm{D} - 8\mathrm{B}^5\mathrm{C}^2 - 45\mathrm{B}^2\mathrm{C}^4 - 270\mathrm{C}^4\mathrm{D} + 140\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2\mathrm{D} + 960\mathrm{BC}^2\mathrm{D}^2 + 1875\mathrm{C}^2\mathrm{E}^2 + 1000\mathrm{CD}^2\mathrm{E} - 5000\mathrm{BDE}^2 - 1750\mathrm{B}^3\mathrm{E}^2 + 40\mathrm{B}^4\mathrm{CE} + 600\mathrm{BC}^3\mathrm{E} - 1650\mathrm{B}^2\mathrm{CDE},$$
$$i = -36\mathrm{B}^5\mathrm{D}^2 + 224\mathrm{B}^3\mathrm{D}^3 - 320\mathrm{BD}^4 - 4\mathrm{B}^3\mathrm{C}^4 - 27\mathrm{C}^6 + 40\mathrm{C}^2\mathrm{D}^3 - 434\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2 + 24\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2\mathrm{D} + 198\mathrm{BC}^4\mathrm{D} - 5000\mathrm{D}^2\mathrm{E}^2 + 450\mathrm{C}^2\mathrm{DE} + 6250\mathrm{CE}^3 - 675\mathrm{B}^4\mathrm{E}^2 + 3750\mathrm{B}^2\mathrm{DE}^2 - 3000\mathrm{BC}^2\mathrm{E}^2 - 60\mathrm{B}^2\mathrm{C}^3\mathrm{E} - 200\mathrm{BCD}^2\mathrm{E} + 330\mathrm{B}^3\mathrm{CDE},$$
$$k = 3125\mathrm{E}^4 - 3750\mathrm{BCE}^3 + (2000\mathrm{BD}^2 + 2250\mathrm{C}^2\mathrm{D} - 900\mathrm{B}^3\mathrm{D} + 825\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 + 108\mathrm{B}^5)\,\mathrm{E}^2 + (-1600\mathrm{CD}^3 - 560\mathrm{B}^2\mathrm{CD}^2 - 16\mathrm{B}^3\mathrm{C}^3 + 630\mathrm{BC}^3\mathrm{D} + 72\mathrm{B}^4\mathrm{CD} - 108\mathrm{C}^5)\mathrm{E} + 256\mathrm{D}^5 - 128\mathrm{B}^2\mathrm{D}^4 + 144\mathrm{BC}^2\mathrm{D}^3 + 16\mathrm{B}^4\mathrm{D}^3 - 27\mathrm{C}^4\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2.$$

[See, e.g. Ch. 1, § 8. *Problem.*]

The reality of all the roots of the equation of the fifth degree thus required that the value of each of the quantities $a,\ b,\ c,...$ shall be positive, which gives, as we see, ten conditions ; but it is possible that some of these conditions are found within the framework of others, which may diminish the number, as we have seen for the fourth degree. If all these conditions cannot be applied at the same time, then the equation necessarily will have two or four imaginary roots, following which the quantity *k* will have a positive or negative value. But, if this quantity were zero, the equation shall have two equal roots ; it would have three equal roots if the quantity *i* were zero at the same time, and thus for the rest.

NOTE IV.

ON THE MANNER OF FINDING A LIMIT SMALLER THAN THE SMALLEST DIFFERENCE BETWEEN THE ROOTS OF A GIVE EQUATION.

The determination of this limit is necessary in order to form a sequence of numbers the substitution of which successively may be able to make known in a certain manner all the real roots of a proposed equation (§ 6). The most direct means of arriving at this is to calculate, as we have proposed, the same equation of which the roots will be the differences between these of the given equation, and then to determine by the known methods, the limit of the smallest root of that equation. But, however much the degree of the equation may be raised, if the height of the equation of the differences rises, so that we are afraid of the length of the calculation necessary to find the value of all the terms of that equation, since, the degree of the proposed equation being *m,* we have $\frac{m(m-1)}{2}$ coefficients to calculate, and so that, using the series of § 8, it would be required in total to calculate $2m(m-1)$ terms.

As this inconvenience may be able to render the general method almost impracticable for these somewhat raised degrees, I have spent a long time in searching for the means of freeing the equation from differences, and I have found in effect that, without calculating this equation in its entirety, nevertheless we may be able to find a limit less than the smallest of the roots, which is the principal aim of this same equation.

1. Indeed, let the equation be proposed in x :

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots = 0 ,$$

which I shall represent, for the greatest simplicity, by

$$\mathrm{X} = 0 ;$$

so that we may deduce this equation in u of degree $m-1$ (§.8)

$$Y + Zu + Vu^2 + \ldots + u^{m-1} = 0,$$

in which

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m\text{-}2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - \ \ldots \ ,$$
$$\mathrm{Z} = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{A}x^{m-3} + \ldots.,$$
$$\mathrm{V} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3} + \ldots.,$$

knowing,

$$\mathrm{Y}=\mathrm{X}', \quad \mathrm{Z}=\frac{\mathrm{X}''}{2}, \quad \mathrm{V}=\frac{\mathrm{X}'''}{2.3}, \quad ......,$$

$\mathrm{X}', \mathrm{X}'', \mathrm{X}''',.....$ being the derived functions of X, or the differential coefficients

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx}, \ \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}, \ \frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3}, \ ....$$

We have seen in the problem of §.8 that if we substitute into this equation in *u,* in place of *x,* any one of the roots of the equation $\mathrm{X}=0$, then it will have for roots the differences between this root and all the other roots of the same equation. Thus, if we have substituted there successively the *m* roots of the equation $\mathrm{X}=0$, we will have *m* equations in *u* of which the roots will be all the possible differences between the roots of the equation proposed ; consequently, it will be required to find only a quantity smaller than the smallest root of each of these *m* equations.

Thus, if we make $u=\frac{1}{i}$ this will change the equation in *u* into this :

$$\mathrm{Y}+\frac{\mathrm{Z}}{i}+\frac{\mathrm{V}}{i^2}+... \ +\frac{1}{i^{m-1}}=0,$$

or equally, on multiplying by i^{m-1} and dividing by Y,

$$i^{m-1}+\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}}i^{m-2}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Y}}i^{m-3}+... \ +\frac{1}{\mathrm{Y}}=0,$$

everything will be reduced to finding a limit greater than the largest of the roots of this last equation, on assuming that we substitute there successively for *x* each of the *m* roots of the proposed equation; for, this limit being found, if we call that L, it is seen that $\frac{1}{\mathrm{L}}$ will be the limit sought smaller that each of the *m* roots.

2. Now we know (§ 12) that the largest coefficient of the negative terms of an equation, taken positively and increased by one, is larger than the largest of the positive roots. Hence, to have L for the limit, it will be necessary only to find the largest negative value which may result from the substitution of the roots of the equation $\mathrm{X}=0$ in place of *x* in the coefficients $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}}, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Y}}, ...$ of the equation in *i*, or an amount greater than this value.

If these coefficients only contain powers of *x* without denominator, we may be able to resolve the question by substituting in place of *x,* in the positive terms, a limit much smaller than the smallest positive values of *x,* and, in the negative terms, a limit much greater than the largest of these values ; for it is seen that we may have, in this way, negative quantities greater than the negative values which each coefficient may be able to receive by the substitution of each or the positive roots from that proposed in *x*; and, in order to have regard to the negative roots of the same equation, it would only be necessary to change the expressions of the same coefficients *x* into $-x,$ and then to substitute into the positive terms a value of x smaller than the smallest negative root of this equation, taken positively, and in the negative terms a value of x greater than the greatest value of these roots.

The largest of the negative quantities found of this kind, taken positively and increased by one, without doubt will be able to be used for the limit sought L.
All the difficulty comes thus from the denominator Y, which contains also the unknown x. I have proposed before to take for Y a value smaller than each of these which may be able to result from substitution of the roots of the equation $\mathrm{X}=0$ in place of x; but the difficulty was to have this limit, and it did not appear possible to find that otherwise than by the very equation of which the different values of Y would be the roots. In order to have this equation, we would make $\mathrm{Y}=y$, and we would eliminate x by means of the equation $\mathrm{X}=0$ and of this one, $y-\mathrm{Y}=0$; the resulting equation in y would be of the m^{th} degree, and the limit smaller than the smallest of its roots would be the quantity that we would have to take for Y; but this equation in y would still be far too long to calculate, should we deduce that by elimination, or should we wish to find that directly by the very nature of its roots.

3. Since then I have considered that we could always eliminate the unknown x of the polynomial Y by multiplying that by a convenient polynomial of the same degree $m-1$, and in making all the powers of x of greater height than x^{m-1} disappear by means of the equation $\mathrm{X}=0$.

Indeed, if we take a polynomial such as

$$x^{m-1}-ax^{m-2}+bx^{m-3}-cx^{m-4}+\ldots,$$

which for brevity we will call ξ, and in which the coefficients $a,\ b,\ c,\ldots$ shall be arbitrary, and as we can multiply the polynomial Y by this, we will have a polynomial of degree $2m-2$. Now, the equation $\mathrm{X}=0$ gives at first the value of x^m, and with this value we will be able to form, by multiplying successively by x and substituting as the value of x^m, all the powers of x superior to x^{m-1} as far as x^{2m-2}. Thus we will substitute these values into the polynomial $\mathrm{Y}\xi$, and it will be lowered to the power $m-1$; then we will make all the terms containing x vanish, on making in turn each of their coefficients equal to zero, this will give $m-1$ linear equations in $a,\ b,\ c,\ldots$, which will serve to determine these unknowns of which the number is also $m-1$; calling K the term or terms remaining and all known, we will have $\mathrm{Y}\xi=\mathrm{K}$, and as a consequence $\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{K}}{\xi}$.
The equation in i will become, by this substitution,

$$i^{m-1}+\frac{\mathrm{Z}\xi}{\mathrm{K}}i^{m-2}+\frac{\mathrm{V}\xi}{\mathrm{K}}i^{m-3}+\ldots+\frac{\xi}{\mathrm{K}}=0;$$

and, as the coefficients $\frac{Z\xi}{K}, \frac{V\xi}{K}$,.... contain only powers of x without denominators, we will be able to apply there the method proposed above, and to find a limit L greater than the largest of the values of *i*.

We will be able also to reduce the polynomials $Z\xi, V\xi$,.... to contain only powers of x less than x^{m-1} by the same substitutions of the values of x^m and of powers superior to x^m. This reduction is not absolutely necessary, and without inconvenience we can use the polynomials which result from the multiplication of Z, V, ... by ξ; but it is useful to simplify the calculation and to have a closer limit L.

4. It is again worthwhile to note that, as the values of u which represent the differences between the roots of the proposed equation are able to be equally positive and negative, the values of *i* will also be able to be likewise, since we have made $u=\frac{1}{i}$*;* from which it follows that the limit of the positive values of *i* will also be of the negative values taken positively, and reciprocally that of the greatest negative values taken positively will become that of the greatest positive values.

Thus we will be able, in the equation of *i,* equally take *i* positive or negative, and as a consequence take the second, fourth, sixth, etc. terms of the equation in *i* with the opposite signs, if of that kind, it will result in a smaller limit for L.

5. Thus having found the limit L, we will have $\frac{1}{L}$ for the limit smaller than the smallest difference between the roots of the proposed equation, and we will be able to make $\Delta=\frac{1}{L}$ (§ 6) in order to have the sequence $\Delta, 2\Delta, 3\Delta,...$ of numbers of which the successive substitution certainly will make known all the real roots of the same equation and will give their first limits.

If the quantity K were null, we would have an infinite quantity for L, and the limit $\frac{1}{L}$ would become zero, which would indicate the equality of two or more roots in the proposed equation. Indeed, if there were two equal roots, it is clear that one of the values of u which will be zero ; thus the last term Y of the equation in u will become zero on substituting one of the roots of the equation $X=0$ for x ; thus this equation will have a place at the same time as the equation $Y=0$, that is $X'=0$ or $\frac{dX}{dx}=0$, which returns to that which has been known for a long time. Thus the equation resulting from this, by the elimination of x, will also have a place. Now, it is easy to see that this equation is nothing other than the equation $K=0$; for, since the product $Y\xi$ becomes $=K$ by means of the equation $X=0$, we will have $Y=\frac{K}{\xi}$ and, as a consequence, the equation $Y=0$ will give $K=0$.

When we will have been assured there, that the equation in x has equal roots, we will find them by looking for the common divisor of the equations $X=0$ and $Y=0$ (§15);

then the equation in *i* given above, being multiplied by K and divided by $\mathrm{Z}\xi$, will become, in the case $\mathrm{K}=0$,

$$i^{m-2}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}}i^{m-3}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{Z}}=0,$$

to which we will be able to apply the same method in order to find a limit greater than the values of i, and thus so on. For the rest, since, before undertaking the resolution of an equation by some method, whatever that may be, it is always necessary to assure oneself if it has equal roots, because these roots can themselves be determined in a rigorous manner, we see that the calculation of the quantity K is indispensable when we do not calculate the equation of the differences, for the equation $\mathrm{K}=0$ is that which we find properly by the ordinary methods, when we search for the conditions of the equality of the roots. Hence, in this regard, the method we propose does not extend the calculation necessary for the resolution of these equations.

6. The quantity K being known, everything is reduced to looking for a quantity equal to or greater than the greatest negative value of the quantities $\frac{\mathrm{Z}\xi}{\mathrm{K}}$, $\frac{\mathrm{V}\xi}{\mathrm{K}}$,....,$\frac{\xi}{\mathrm{K}}$, the coefficients of the equation in *i*; for that, we will substitute in place of x a quantity smaller than the smallest of the positive roots of the equation $\mathrm{X}=0$ into the positive terms of these coefficients, and a quantity greater than the greatest of these roots in the negative terms; then, having changed x into $-x$ in these same coefficients, we will substitute likewise into the positive terms a quantity smaller than the smallest of the negative roots, and into the negative terms a quantity greater than the largest of the negative roots of the same equation ; on taking these roots positively. The greatest negative result that we will have of this kind, being taken positively and increased by one, will give the value of the limit L that we seek.

In order to have these quantities greater or less than the roots of the equation $\mathrm{X}=0$, we will have to take at once the greatest coefficient of the negative terms of this equation, increased by one, for a quantity greater than its positive roots; then, after having changed x into $\frac{1}{x}$ in the same equation ; and made the negative powers of x to disappear by multiplication, we may take likewise the largest coefficient of these terms which shall be of opposite sign from the first, and with one divided by this coefficient increased by one, the quantity will be smaller than the same roots. Concerning the negative roots, we may change x into $-x$ in the equation in order to render these positive, and we may find in the same manner the quantities greater and smaller than these roots.

But, although the limits that we will find by this method shall always be exact, nevertheless they can be too far apart amongst themselves, which may have the inconvenience of giving too large an amount for the limit L, and as a consequence too small an amount for the difference Δ of the terms of the series : from which too great a number of successive substitutions to be made in the proposed equation in order to discover all the roots (§ 6).

7. It is thus useful to have the limits more constricted, and we will be able to find these by means of the method set out in §12. Following the spirit of this method, it will be required only to find at first a value of x which renders the values of the functions $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{X}'', \ldots$ positive, which is not difficult on beginning with the last, where x is only of the first dimension, and rising successively to these which precede. This value will be a limit greater than all the positive roots of the equation $\mathrm{X}=0$. In order to have then a limit smaller than these roots, we will transform the function X by substituting into that $\frac{1}{x}$ in place of x, and multiplying that by x^m in order to make the negative powers vanish ; and, if there a term is found where x^m is itself found negative, we will change all the signs in order to make that positive. We will take this new function for X, and, on having deduced the functions $\mathrm{X}', \mathrm{X}'', \ldots,$ we will look for a new value of x which will render all these functions positive. One divided by this value will give a limit smaller than all the positive roots of the same equation $\mathrm{X}=0$. Finally we will change the functions x into $-x$ in these two series, while changing all the signs at the same time, if the highest power of x has a $-$ sign ; and the values of x which will render these all positive will be the limits greater or smaller than the negative roots of the same equation taken positively.

8. In order to give an example of the method we have just exposed, we will apply it to the equation

$$x^3-7x+7=0,$$

that we have resolved in § 27.

Thus, here we will have

$$\mathrm{X}=x^3-7x+7$$

and the derived functions will be

$$\mathrm{X}'=3x^2-7,\ \mathrm{X}''=6x,\ \mathrm{X}'''=6,\ \mathrm{X}^{\mathrm{IV}}=0;$$

thus,

$$\mathrm{Y}=\mathrm{X}'=3x^2-7,\ \mathrm{Z}=\tfrac{\mathrm{X}''}{2}=3x,\ \mathrm{V}=\tfrac{\mathrm{X}'''}{2\cdot 3}=1,$$

and the equation in u will be of the second degree.

We will take for ξ the indeterminate polynomial of the second degree

$$x^2+ax+b,$$

and, on multiplying it by the polygon Y, we will have

$$\mathrm{Y}\xi=3x^4+3ax^3+(3b-7)x^2-7ax-7b.$$

But the equation $\mathrm{X}=0$ gives

$$x^3=7x-7;$$

thus,

$$x^4=7x^2-7x.$$

Making these substitutions, we will have

$$\mathrm{Y}\xi=(3b+14)x^2+(14a-21)x-21a-7b.$$

Thus we will have

$$3b+14=0,\ 14a-21=0,\ \ -21a-7b=\mathrm{K},$$

from which we extract

$$a=\tfrac{3}{2},\ b=-\tfrac{14}{3}\ \text{and}\ \ \mathrm{K}=\tfrac{7}{6}.$$

Hence, since the quantity K is not zero, we can conclude at first that the equation has not equal roots.

Now we will have

$$\xi=x^2+\tfrac{3x}{2}-\tfrac{14}{3},$$

and from that, on multiplying by $\mathrm{Z}=3x$ and substituting its value for x^3,

$$\mathrm{Z}\xi=\tfrac{9x^2}{2}+7x-21;$$

such that the two coefficients of the equation in *i* will become :

$$\tfrac{27x^2+42x-126}{7},\ \ \tfrac{6x^2+9x-28}{7};$$

and it will be no more effort to find a quantity equal to or greater than the largest negative value which these coefficients may be able to have, without knowing the values of *x;* now this is what we can come upon by means of the limits of these values.

9. For that, we will begin by searching for the largest and smallest limits both positive and negative which these correspond to these values of *x*. I note initially that, the greatest coefficient of negative terms in the equation in *x* being 7, we would be able to take 8 for the greatest limit for the positive roots ; but we can find a lesser limit by the consideration of the functions $\mathrm{X},\ \mathrm{X}',\ \mathrm{X}''$, namely,

$$x^3 - 7x + 7,\ 3x^2 - 7,\ 6x,$$

on looking for a value of x which renders them all positive ; we find that $x = 2$ satisfies these conditions, such that 2 will be a greater limit than the positive roots.

If we now change these same functions x into $-x$, on changing the signs at the same time, if it is necessary, for the first term to be positive always, we have these

$$x^3 - 7x + 7,\ 3x^2 - 7,\ 6x;$$

and we see that, in order to render these all positive, it will be required to make $x = 4$ in whole numbers ; but, in fractional numbers, it will suffice for $x = 3 + \frac{1}{10}$: hence $\frac{31}{10}$ will be a greater limit than taking the negative roots positively.

We will now transform the function x by the substitution of $\frac{1}{x}$ in place of x, and, having multiplied by x^3 to make the negative powers vanish, we will have, after having divided by 7, the coefficient of the first term, this function transformed

$$x^3 - x^2 + \tfrac{1}{7},$$

of which the two derived functions will be

$$3x^2 - 2x,\ 6x - 2,$$

that it will be required to render positive for a supposed value of x. Now, we find that 1 may satisfy these conditions; but we can satisfy that by a smaller number, such as $\frac{3}{4}$. Hence $\frac{4}{3}$ will be as smaller limit than the positive roots.

Finally, in changing these same functions x into $-x$ and changing at the same time both the signs of the first and third to render these first terms positive, we have these

$$x^3 + x^2 - \tfrac{1}{7},\ 3x^2 + 2x,\ 6x + 2,$$

and we will find easily that they will all become positive on making $x = \frac{1}{3}$; from which it follows that 3 will be a smaller limit than the negative roots taken positively.

Thus we have, for the limits of the positive roots, the numbers $\frac{1}{3}$ and 2 and, for these negative roots taken positively, the numbers 3 and $\frac{31}{10}$

Thus initially we will substitute, in place of x, $\frac{4}{3}$ into the positive terms and 2 into the negative terms of the two quantities

$$\frac{27x^2+42x-126}{7},\ \frac{6x^2+9x-28}{7},$$

and we will find the results $-\frac{22}{7}$ and $-\frac{16}{21}$; as the first of these two results is the biggest, it is worthwhile to see if, in changing all the signs of the first quantity, this one which reduces that to

$$\frac{-27x^2-42x+126}{7},$$

and substituting likewise $\frac{4}{3}$ into the positive terms and 2 into the negative terms, in place of *x,* we may have a lesser result; but we find for that one $-\frac{174}{7}$, which on the contrary is greater, and as a consequence useless.

Now we will change in the same quantities x into $-x$, which will change into these

$$\frac{27x^2-42x-126}{7},\ \frac{6x^2-9x-28}{7},$$

and we will substitute 3 there, in place of *x,* in the positive terms, and $\frac{31}{10}$ in the negative terms ; these results will arise $-\frac{66}{35}$ and $-\frac{19}{70}$; and, as the result of the first quantity is less than one of those we have found already, it is worthless to look for another in changing the signs of this quantity.

Since $-\frac{22}{7}$ is the greatest negative result, we will have $\mathrm{L}=\frac{22}{7}+1$, and consequently $\Delta=\frac{1}{\mathrm{L}}=\frac{7}{29}$ for the limit sought, less than the smallest difference between the roots of the equation proposed.

We have found the differences $\Delta=\frac{1}{3}$ (§ 27) for the same equation; from which we see that the preceding method gives a little smaller limit than the true one, but the difference is not large. For the rest, since for an equation of the third degree there is hardly anything to be gained by this longer method of calculation, it will not be the same for equations of higher degrees, because the number of operations that this method requires increases only as the degree of the equation, instead of that of the operations necessary to calculate the equation of the differences, and to deduce the limit sought, increases as the square of this same degree.

NOTE V.

ON THE METHOD OF APPROXIMATION GIVEN BY NEWTON.

Since the method of approximation given by Newton for the approximate resolution of numerical equations is the best known and the most used, it is important to appreciate the degree of precision to which it is susceptible; here is how we may be able to arrive at this.

1. Let the general equation of degree *m* be

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - ... = 0,$$

of which we search for a root. The method in question demands that we know in advance an approximate value of the root sought; on designating this value by *a,* we will make $x = a + p$, and we will have by this substitution an equation transformed into p which, by beginning by its last terms, will be of this form

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}p + \mathrm{Z}p^2 + \mathrm{V}p^3 + \ ... \ + p^m,$$

where the quantities X, Y, Z, ... will be some functions of *a,* which we will find at once by the formulas of § 8, on changing *x* into *a;*
thus we will have

$$\mathrm{X} = a^m - \mathrm{A}a^{m-1} + \mathrm{B}a^{m-2} - \mathrm{C}a^{m-3} + \ ... \ ,$$
$$\mathrm{Y} = ma^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}a^{m-3} - ....,$$
$$...$$

Since *p* must be, by hypothesis, a rather small quantity, being the difference between the true root and the assumed value of this root, the powers $p^2, p^3,...$ will be of very small quantities besides *p*; as a consequence, the terms associated with these powers will be themselves necessarily very small with regard to the first terms $\mathrm{X} + \mathrm{Y}p$, since the coefficients Z, V, ... are never able to become very large, being some functions without denominator ; hence, on reducing the whole equation to these two terms, we will derive from that an approximate value of p which will be $= -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$. Calling *b* this approximate value of *p,* by the same reasoning we will be able to make, in the equation involving *p,* the substitution of $b + q$ in place of *p,* and then to neglect in the transformation in q all the terms which will contain the square and higher powers of *q;* this transformation, hence being reduced to the two first terms of the form $(\mathrm{X}) + (\mathrm{Y})q$, will give at once $q=-\frac{(\mathrm{X})}{(\mathrm{Y})}$. This quantity being called *c,* we will substitute $c+r$ in place of *q* in the last transformation, and we will have a new quantity in *r,* from which we will extract likewise the value of *r,* and hence so on.

In this manner, we will have the approximations $a,\ a+b,\ a+b+c,...$ towards the true value of the root sought.

2. There is the method that Newton has given in the *Méthode des fluxiom;* but it is worthwhile to note that we can dispense with having to make new transforms continually, for, since the transform in p is the result of the substitution of $a+p$ in place of *x* into the equation in *x,* and that the transform in *q* is the result of the substitution of $b+q$ in place of p into the transform in $p,$ it follows that this transform in q will be the result of the immediate substitution of $a+b+q$ in place of x in the same equation in *x*; as a consequence, it will be nothing other than the first transformation in $p,$ on changing p into *q,* and *a* into $a+b$; from which it follows that having found the general expression of p in *a,* we will have that of q on substituting $a+b$ in place of *a*; and by the same account we will have the value of *r* on substituting $a+b+c$ in place of *a,* and so on for the following.

Thus, in general, if in the expression of *p* into the approximation *a* ,we may substitute for *a* some term of the series converging towards the root sought, we will have the quantity that it will be required to be added to this term to have the following term.

The method which results from this consideration is, as we see, more simple than that of Newton; it is that which Raphson has given in the work entitled *Analysis aequationum universalis,* [The Solution of General Equations] printed in London in 1690 and reprinted in 1697. As Newton's method had appeared already in the English edition of Wallis's *Algebra* in 1685, and which had been explained next in detail in the Latin edition of 1793, one might be surprised that Raphson had made no mention of that in his work, which would lead one to believe that he regarded that as entirely different and of his own; that is why I have thought is useful to note that the two methods are basically the same but presented differently.

3. Now it is clear that the usefulness of the method is a question of depending on this condition that, if *a* is an approximate value of one of the roots of the proposed equation, $a+p$ will be a closer approximation of the same root; thus this is what it is required to examine.

Let $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ ...$ be the *m* roots of the equation

$$x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}-...=0\,;$$

this equation, as we have seen in Note II, can always be put into the form :

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)....=0.$$

Putting $a+p$ in place of *x,* and developing the terms following the powers of $p;$ we will find, for the two first terms $\mathrm{X}+\mathrm{Y}p$, these values of X and Y

$$\mathrm{X}=(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\ \ldots\ ,$$
$$\mathrm{Y}=(a-\beta)(a-\gamma)\ \ldots.\ +(a-\alpha)(a-\gamma)\ \ldots\ +(a-\alpha)(a-\beta)\ldots+\ldots,$$

from which we find

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\frac{1}{a-\alpha}+\frac{1}{a-\beta}+\frac{1}{a-\gamma}+\ldots\ ,$$

and consequently,

$$p=-\frac{1}{\frac{1}{a-\alpha}+\frac{1}{a-\beta}+\frac{1}{a-\gamma}+\ldots}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha-a}+\frac{1}{\beta-a}+\frac{1}{\beta-a}+\ldots}\ .$$

Assuming that α shall be the root for which we search , and that *a* shall be an approximate value either more or less, $\alpha-a$ will be the deficiency or excess of the value *a* to the true value α, and $\alpha-a-p$ will be the deficiency or excess of the value *a* to the value $a+p$*;* and it will be required, for the usefulness of the method, that the quantity $\alpha-a-p$ shall always be smaller than the quantity $\alpha-a$*,* with the signs of these quantities removed, and, as a consequence, that the quantity $\frac{1}{\alpha-a-p}$ shall be always greater than $\frac{1}{\alpha-a}$, with the signs removed.

4. Making, for brevity,

$$\mathrm{R}=\frac{1}{\beta-a}+\frac{1}{\gamma-a}+\ldots\ ;$$

we will have, from the formula found above, for the value of $p,$

$$\alpha-a-p=\alpha-a-\frac{1}{\frac{1}{\alpha-a}+\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{R}(\alpha-a)}{\frac{1}{\alpha-a}+\mathrm{R}};$$

thus,

$$\frac{1}{\alpha-a-p}=\frac{\frac{1}{\alpha-a}+\mathrm{R}}{\mathrm{R}(\alpha-a)}=\frac{1}{(\alpha-a)}+\frac{1}{(\alpha-a)^2\,\mathrm{R}}.$$

From which I conclude that, if the value of R is of the same sign as that of $\alpha-a$, the value of $\alpha-a-p$ will still be of the same sign, and the condition concerned will necessarily have a place.

But, if the quantities $\alpha-a$ and R are of opposite signs, then, so that the condition may have a place, it will be required that we may have :

$$\frac{1}{(\alpha-a-p)^2} > \frac{1}{(\alpha-a)^2};$$

now, from the preceding equation we find :

$$\frac{1}{(\alpha-a-p)^2} = \frac{1}{(\alpha-a)^2} + \frac{2}{(\alpha-a)^3\mathrm{R}} + \frac{1}{(\alpha-a)^4\mathrm{R}^2};$$

thus it will be required that

$$\frac{2}{(\alpha-a)^3\mathrm{R}} + \frac{1}{(\alpha-a)^4\mathrm{R}^2}$$

shall be a positive quantity and, as a consequence, that we may have the condition

$$2(\alpha-a)\mathrm{R}+1>0.$$

Since the value of R depends on the other roots $\beta,\ \gamma,....$ which are unknown, it is difficult, perhaps even impossible, to find initially a characteristic to judge whether or not the condition concerned is fulfilled or not.

It is easy besides finally concerning these equations of the form where this condition will not be found, in taking the roots $\beta,\ \gamma,....$ of a kind such that some of the differences $\beta-a,\ \gamma-a,....$ shall be very small and of opposite signs ; and, if β and γ, for example, are imaginary roots of the form $\varpi+\rho\sqrt{-1}$ and $\varpi-\rho\sqrt{-1}$, we will only have to take ϖ barely different from a and ρ very small. Then the corrected value $a+p$, rather than being in place closer to the true value of the root α than the value of a, will move away from it more in the opposite direction.

5. Thus there is only the first case, where we may be able to establish a certain characteristic for the success of the method ; for it is seen that, if the quantity a is at once smaller than each of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,....$ of the proposed equation, or greater than each of the roots, in considering, as we must, the negative quantities as smaller than the positive ones, and the more negative quantities as smaller than the less negative ones, then the quantity R necessarily will be of the same sign as the quantity $\alpha-a$; and if, among these roots, it has imaginary roots of the form $\varpi+\rho\sqrt{-1}$, $\varpi-\rho\sqrt{-1}$, there will result in R the terms

$$\frac{1}{\varpi-a+\rho\sqrt{-1}} + \frac{1}{\varpi-a-\rho\sqrt{-1}},$$

which themselves reduce to

$$\frac{2(\varpi-a)}{(\varpi-a)^2+\rho^2},$$

a quantity which will also be of the same sign as $\alpha - a$, if at the same time a is smaller or larger than ϖ.

From which we can conclude, in general, that the use of the method is only sure when we can conclude the approximate value a is at once greater or less than each of the real roots of the equation, and each of the real parts of the imaginary equations, and that, as a consequence, this method cannot be used without a care only to find the largest or the smallest root of an equation which has only real roots, or which contains imaginary roots, but of which the real parts are smaller than the greatest real root, or greater than the smallest of these roots.

In order that the corrected values all approximate successively closer and closer to the true value of the root, it will be required to take for the first approximate value a quantity greater than the largest of the roots, if that is the one sought, or smaller than the smallest of the roots if it is the smallest we seek ; then all the values corrected successively will also be greater than the greatest root, or smaller than the smallest of the roots, and the condition necessary for the convergence will always be found for all these values, since R and $\alpha - a$ will always be of the same sign, in taking for a each of these same values.

6. When all the degrees of the equation are real, it is easy to recognise if the first value approximation a is greater or less than each of the roots ; for, on putting the equation into the form

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)....=0,$$

and substituting $a+p$ for x, it will become

$$(a+p-\alpha)(a+p-\beta)(a+p-\gamma)....=0,$$

where $a-\alpha,\ a-\beta,\ a-\gamma,\ ....$ will be, in the first case, positive quantities, and, in the second, all negative; thus, in the first case, we will have a transformation in p of which all the terms will be positive, and in the second case, this transformation will have its terms alternatively positive and negative.

Reciprocally, if the terms of the transformation in p are all positive, it is evident that it will have then a single value of p which may be able to satisfy the equation; as a consequence, the real values of p necessarily will be negative ; thus, the roots of the equation in p being $\alpha-a,\ \beta-a,\ \gamma-a,\ ....$, it will be required that these quantities shall all be negative or imaginary; thus the quantity a will be necessarily greater than each of the real roots of the equation, even when it may have some imaginary roots.

We will prove in the same manner that, if the terms of the transformation in p are alternatively positive and negative, the quantity a will be necessarily smaller than each of the real roots, whether or not it may have some imaginary roots.

7. But, in the case where the equation has some imaginary roots, we cannot be assured in the same way that the quantity a likewise will be greater or less than each of the real parts of these roots; I do not even see that we can be assured otherwise by means of the equation of which these real parts would be the roots. Now, if

$$\beta = \varpi + \rho\sqrt{-1} \text{ and } \gamma = \varpi - \rho\sqrt{-1},$$

we have

$$\varpi = \frac{\beta+\gamma}{2};$$

hence the equation, of which ϖ will be one of the roots, can only be that equation which will have for roots the half sums of the roots of the proposed equation, taken in pairs, and which, by the theory of combinations, will rise to the degree $\frac{m(m-1)}{2}$.

Having formed this equation by the formulas which we have indicated previously (Note III), we will substitute $a+z$ in place of the unknown; and, if the transformed equation has all its terms positive or alternatively positive and negative, we will be assured that the number a will be greater or less than each of the values of ϖ, and consequently also than each of the real parts of the imaginary roots.

8. Newton has only applied his method to the equation

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

which we have resolved (§ 25). He assumes at first, in Ch. IV, $a = 2$, and substituting $2 + p$ in place of x, he has the transformed equation

$$0 = -1 + 10p + 6p^2 + p^3,$$

from which he expresses $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$; he makes then $p = 0{,}1 + q$, and he has the new transformation :

$$0 = 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3,$$

from which he takes $q = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054...$; he continues by making $q = -0{,}0054 + r$, he arrives at the transformed equation

$$0 = 0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2 + r^3,$$

from which he deduces $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853\ ...$, and hence so on.
Hence the converging values of x are :

$$2,\quad 2,1,\quad 2,0946,\quad 2,09455147,$$

of which the last is exact to the last decimal place (in § 25).

In this case, the series is, as we see, very convergent. We can, indeed, be assured *a priori,* by what we have shown, that this must be so.

For we have seen (in § 25) that the two other roots of this equation are imaginary, and that by representing them by $\varpi \pm \rho\sqrt{-1}$, we have almost

$$\rho^2 = \frac{160}{4.31} = \frac{40}{31} \text{ and } \varpi = -\frac{15}{8\rho^2+4} = -\frac{15.31}{4.111} = -\frac{465}{444};$$

thus, since besides the root α that we have found, it has only these two imaginary roots, we will have in this case

$$\mathrm{R} = \frac{2(\varpi - a)}{(\varpi - a)^2 + \rho^2}.$$

Now, a being $=2$, we have

$$\varpi - a = -\frac{1353}{444};$$

but, α being very near to $2,0945\ ...,$ we will have

$$\alpha - a = 0,0945\ ...;$$

from which we see at first that R and $\alpha - a$ are of opposite signs, and that hence, in order that the first correction of a shall be in order, it is necessary that the condition

$$2(\alpha - a)\mathrm{R} + 1 > 0$$

may be in place. Now we find

$$\mathrm{R} = -0,66575 \text{ and from that } 2(\alpha - a)\mathrm{R} = -0,1244;$$

such that the condition in point is fully satisfied. Hence we are assured that the first corrected value 2,1 will approach more to the true value of the root. On taking this value for $a,$ we have

$$\alpha - a = -0,0055\ ...\ ;$$

thus, $\alpha - a$ and R keeping the same sign, the following corrections will all approach more and more to the true value of the root sought.

NOTE I.

SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

Les deux théorèmes du Chapitre I sont la base de toute la théorie des équations et doivent étre démontrés d'une manière rigoureuse, et sans rien emprunter de cette méme théorie. La démonstration que j'ai donnée du premier théorème (§1) est tirée de la considération des facteurs de l'équation, et pourrait laisser des doutes relativement aux facteurs imaginaires. Il est vrai qu'en supposant connu le théorème sur la forme des racines imaginaires, on est sûr que le produit de deux facteurs imaginaires correspondants est toujours une quantité essentiellement positive, quelque valeur qu'on donne à *x,* d'où il suit que la différence des signes dans les résultats des substitutions de *p* et *q* à la place de *x* ne peut venir que des racines réelles. Mais on doit observer que la démonstration rigoureuse de ce théorème dépend elle-méme du théorème qu'il s'agit de démontrer, de sorte qu'on ne peut l'employer dans la démonstration de celui-ci. Pour éviter toute difficulté, j'ai cherché à démontrer ce théorème par la nature même de l'équation, indépendamment d'aucune de ses propriétés. Représentons, en général, l'équation proposée par

$$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=0\,,$$

P étant la somme de tous les termes qui ont le signe +, et − Q la somme de tous ceux qui ont le signe − . Supposons d'abord que les deux nombres *p* et *q* soient positifs et que *q* soit plus grand que *p;* si, en faisant $x=p$, on a $\mathrm{P}-\mathrm{Q}<0$, et, en faisant $x=q$, on a $\mathrm{P}-\mathrm{Q}>0$, il est clair que dans le premier cas P sera < Q, et que dans le second P sera > Q. Or, par la forme des quantités P et Q, qui ne contiennent que des termes positifs et des puissances entières et positives, il est évident que ces quantités augmentent nécessairement à mesure que *x* augmente et que, en faisant augmenter *x* par tous les degrés insensibles depuis *p* jusqu'à *q,* elles augmenteront aussi par des degrés insensibles, mais de manière que P augmentera plus que Q, puisque de plus petite qu'elle était elle devient la plus grande. Donc il y aura nécessairement un terme entre les deux valeurs *pet q,* où P égalera Q, comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même ligne dans le même sens, et qui, partant à la fois de deux points différents, arrivent en même temps à deux autres points, mais de manière que celui qui était d'abord en arrière se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin. Cette valeur de *x,* qui rendra P égal à Q, sera donc une des racines de l'équation et tombera entre les valeurs *p* et *q.* De mème, si, en faisant $x=p$, on avait $\mathrm{P}-\mathrm{Q}>0$, et, en faisant $x=q$, on avait $\mathrm{P}-\mathrm{Q}<0$, on aurait dans le premier cas $\mathrm{Q}<\mathrm{P}$, et dans le second ; et, en faisant augmenter *x* depuis *p* jusqu'à *q,* la quantité Q augmentera plus que la quantité P et l'égalera dans un point entre *p* et *q.* Si les deux nombres *p* et *q* étaient négatifs ou un des deux seulement, alors, prenant un nombre positif *r* tel que $r+p$ et $r+q$ soient des nombres positifs, il n'y aurait qu'à transformer, l'équation pàr la substitution de $y-r$ à la place de *x;* on aurait ainsi une transformée en *y,* dans laquelle les substitutions de $r+p$ et de $r+q$ à la place de l'inconnue *y* donneraient par l'hypothèse des résultats de signes contraires, puisque ces résultats sont les mêmes que ceux qui viendraient des substitutions de *p* et de *q* à la place de *x* dans la proposée. Or, les nombres $r+p$ et $r+q$ étant supposés positifs, on pourra reprendre le raisonnement précédent, et l'on prouvera que l'équation en *y* aura nécessairement une racine comprise entre les nombres $r+p$ et $r+q$ *;* par conséquent, à cause de $x=y-r$, l'équation en *x* aura aussi une racine entre *p* et *q*.

NOTE II.

SUR LA DEMONSTRATION DU THEORÈME II.

La démonstration de ce théorème (§5) suppose ces deux propositions, que toute équation peut se décomposer en autant de facteurs simples réels qu'elle a de racines réelles, et que le facteur restant, si le nombre de ces racines est moindre que l'exposant du degré de l'équation, est tel qu'il ne peut jamais devenir négatif, quelque valeur qu'on donne à l'inconnue. La première proposition a été longtemps admise par les analystes comme un résultat de la formation des équations, et d'Alembert est, je crois, le premier qui ait fait sentir la nécessité de la démontrer rigoureusement. A l'égard de la seconde, on pourrait la regarder comme une conséquence de la première; mais, pour ne rien laisser à désirer sur la rigueur, il est bon de la démontrer aussi en particulier.

Représentons, en général, par $(x^m...)$ un polynôme quelconque en *x* du degré *m,* tel que

$$x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\ ...\pm\mathrm{V}.$$

Si l'on change *x* en *a,* il deviendra $(a^m...)$, et il est facile de voir que la différence $(x^m...)-(a^m...)$ de ces deux polynômes semblables sera divisible par $x-a$, car chaque terme du polynôme $(x^m...)$, comme $\mathrm{N}x^n$, donnera dans la différence les termes $\mathrm{N}(x^n-a^n)$; or on a, en général, tant que *n* est un nombre entier positif,

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+...+a^{n-1});$$

donc, réunissant tous les quotients ct les ordonnant suivant les puissances de *x,* on aura

$$(x^m...)-(a^m...)=\left(x-a\right)(x^{m-1}...),$$

$(x^{m-1}...)$ étant un polynôme en *x* du degré inférieur $m-1$. Ainsi on aura, quelle que soit la quantité *a,*

$$(x^m...)=(x-a)(x^{m-1}...)+(a^m...).$$

De la même manière, en prenant une autre quantité quelconque *b,* on pourra réduire le polynôme $(x^{m-1}...)$ à cette forme,

$$(x^{m-1}...)=(x-b)(x^{m-2}...)+(b^{m-1}...).$$

$(x^{m-2}...)$ étant un autre polynôme du degré inférieur $m-2$, et ainsi de suite.

Maintenant je remarque que, si l'on a l'équation $(x^m...)=0,$, et que *a* soit une des racines de cette équation, c'est-à-dire une valeur de *x* qui y satisfasse, on aura aussi $(a^m...)=0$; donc le polynôme $(x^m...)$ sera alors réductible à la forme

$$(x-a)(x^{m-1}\ ...),$$

et par conséquent divisible exactement par $x-a$.

Si, outre la quantité *a,* il y a une autre quantité *b* qui satisfasse il la même équation $(x^m...)=0,$ il faudra que cette quantité, étant prise pour *x,* fasse évanouir l'autre facteur $(x^{m-1}...)$ et soit, par conséquent, telle que l'on ait $(b^{m-1}...)=0.$. Donc le polynôme $(x^{m-1}...)$ sera réductible à la forme $(x-b)(x^{m-2}...),$ et, par consêquent, on aura

$$(x^m...)=\ (x-a)(x-b)(x^{m-2}...);$$

de sorte que le premier polynôme $(x^m...)=0,$ sera exactement divisible par $x-a$ et par $x-b$, et ainsi de suite.

Si donc l'équation $(x^m...)=0,$ n'a qu'un nombre *n* moindre que *m* de racines réelles $a,\ b,\ c,...$, on aura d'abord

$$(x^m...)=(x-a)(x-b)(x-c)...(x^{m-n}...),$$

et le polynôme $(x^{m-n}...)$ ne sera plus résoluble en facteurs simples réels. Donc, quelque valeur qu'on donne à *x,* ce polynôme ne pourra jamais avoir une valeur négative; car, s'il y avait une valeur de *x* qui pût le rendre négatif, comme d'un autre côté on peut toujours prendre *x* assez grand pour que le premier terme surpasse la somme de tous les autres, il s'ensuivrait qu'il y aurait deux valeurs qui, étant substituées pour *x,* donneraient des résultats de signe différent, et que, par conséquent, par le théorème I, il y aurait une valeur intermédiaire h qui pourrait rendre $(x^{m-n}...)=0$, et qui serait ainsi une racine réelle de cette équation; donc on aurait alors

$$(x^{m-n}...)=(x-h)(x^{m-n-1}...),$$

et le polynôme $(x^m...)$ aurait encore le facteur réel $x-h$, ce qui est contre l'hypothèse. Ce polynôme $(x^{m-n}...)$ sera donc nécessairement d'un degré pair, et son dernier terme sera toujours positif (§ 3); et le polynôme $(x^m...)$ aura, par conséquent, son dernier terme positif ou négatif, suivant que le nombre des racines positives $a,\ b,...$ sera pair ou impair.

Non-seulement le polynôme $(x^{m-n}...)$ aura toujours une valeur positive lorsque l'équation $(x^{m-n}...)=0$ n'a aucune racine réelle, mais encore quand elle aura des racines réelles doubles ou quadruples, et en général multiples, suivant un nombre pair; car alors le polynôme aura des facteurs de la forme $(x-g)^{2r}$, $2r$ étant un nombre pair, et il est visible que cette quantité est toujours positive, quelque valeur réelle qu'on donne à x. D'où il s'ensuit que le théorème II a encore lieu pour les racines égales, triples, quintuples, etc. Mais, comme on a des méthodes particulières pour les racines égales, il suffit de considérer les racines inégales et d'avoir une méthode pour les trouver.

Au reste, l'esprit du calcul algébrique, qui est indépendant des valeurs particulières qu'on peut donner aux quantités, fait qu'on peut regarder tout polynôme $(x^m...)$ comme formé du produit d'autant de facteurs simples $x-a,\ x-b,\ x-c,\ ...$ qu'il y a d'unités dans l'exposant m du degré de ce polynôme, quelles que puissent être d'ailleurs les quantités $a,\ b,\ c,...$, ce qui donne cette équation identique

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - ...\ \pm \mathrm{V} = (x-a)(x-b)(x-c)...,,$$

laquelle doit toujours avoir lieu indépendamment de la valeur de x.

C'est uniquement dans cette transformation des polynômes que consiste la théorie des équations. On a trouvé différentes relations entre les quantités *a, b, c,* ... des facteurs et les coefficients A, B, C, ... du polynôme, et ce sont ces relations qui constituent les propriétés générales des équations *(voir* la Note X).

Les facteurs qu'on suppose aux polynômes qui ne peuvent jamais acquérir une valeur négative sont appelés *imaginaires,* et les quantités *a, b, c, ...* de ces facteurs sont les racines imaginaires des équations formées en égalant ces polynômes à zéro; d'où l'on voit que le nombre de ces racines est toujours nécessairement pair, et que leur produit, qui se trouve égal au dernier terme du polynôme, est toujours positif.

NOTE III.

SUR L'ÉQUATION QUE DONNENT LES DIFFÉRENCES ENTRE LES RACINES D'UNE ÉQUATION DONNÉE, PRISES DEUX A DEUX.

La recherche de cette équation, qui est l'objet du problème du § 8, deviendrâit très-pénible si l'on y employait la voie de l'élimination, qui se présente naturellement; mais, par les formules que j'y donne, elle n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul. Tout se réduit à calculer un certain nombre de termes de trois séries dont la loi est assez simple.

1. La première série, celle des quantités $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,...,$ n'est autre chose que la série connue pour avoir les sommes des puissances des racines par les coefficients de l'équation donnée, et on en verra la démonstration dans la Note VI. La troisième série, celle des quantités *a, b, c,* ... qui forment les coefficients de l'équation cherchée, est l'inverse de la précédente: elle donne ces coefficients par le moyen des sommes des puissances des racines qu'on a par la seconde série $a_1,\ a_2,\ a_3,...$ Je n'avais trouvé que par induction la loi des termes de celle-ci; mais on peut la démontrer d'une manière générale. Pour cela, il n'y a qu'à considérer la quantité

$$(x-\alpha)^s+(x-\beta)^s+(x-\gamma)^s+\ldots ,$$

qui, étant développée suivant les puissances de *x,* devient

$$mx^s-s\mathrm{A}_1x^{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2x^{s-2}-\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3x^{s-3}+\ldots .$$

Comme ces deux expressions sont identiques, on y peut faire *x* tout ce qu'on voudra. Qu'on suppose donc successivement $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,...,$ et qu'on ajoute ensemble les résultats de ces substitutions, on aura

$$(\alpha-\beta)^s+(\alpha-\gamma)^s+\ldots\ (\beta-\alpha)^s+(\beta-\gamma)^s+\ldots\ (\gamma-\alpha)^s+(\gamma-\beta)^s+\ldots$$

$$=m\mathrm{A}_s-s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1}+\tfrac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2}-\tfrac{s(s-1)(s-2)}{2.3}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_{s-3}+\ldots,$$

ce qui est évident, puisque, par la notation qu'on a employée, on a, en général,

$$\mathrm{A}_s=\alpha^s+\beta^s+\gamma^s+\ldots$$

Lorsque *s* est un nombre impair, il est facile de voir que le premier membre de cette équation devient nul par la destruction mutuelle de tous les termes, et le second membre

devient nul aussi de lui-même en remarquant que l'on doit avoir
$A_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + ... = m$, nombre des racines.

Mais, lorsque s est un nombre quelconque pair $= 2\mu$, le premier membre devient égal à $2a_\mu$, suivant la notation des termes de la seconde série; ainsi on aura

$$2a_\mu = mA_{2\mu} - 2\mu A_1 A_{2\mu-1} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2} A_2 A_{2\mu-2} - \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{2.3} A_3 A_{2\mu-3} + ...$$

Comme les termes de cette série se trouvent les mêmes de part et d'autre du terme du milieu, qui contient $A_\mu A_\mu$ en réunissant les termes égaux et divisant par 2, on aura la formule générale de la valeur de a_μ que j'ai donnée dans l'endroit cité.

2. On pourrait, de la même manière, trouver des formules pour les sommes des racines prises deux à deux; car, en considérant la quantité

$$(x+\alpha)^s + (x+\beta)^s + (x+\gamma)^s + ... ,$$

on aura, par le développement, cette expression identique

$$mx^s + sA_1 x^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} A_2 x^{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} A_3 x^{s-3} + ...$$

Donc, faisant successivement $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ ...$, et ajoutant ensemble les résultàts, on aura

$$2^s(\alpha^s + \beta^s + \gamma^s + ...) + 2(\alpha+\beta)^s + 2(\alpha+\gamma)^s + 2(\beta+\gamma)^s + ...$$

$$= mA_s + sA_1 A_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} A_2 A_{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} A_3 A_{s-3} + ...$$

Donc, si l'on dénote en général par α, la somme des puissances $s^{\text{ièmes}}$ des racines ajoutées deux à deux, on aura, à cause de $\alpha^s + \beta^s + \gamma^s + \ ... = A_s$,
cette expression de $2a_s$,

$$2a_s = (m - 2^s)A_s + sA_1 A_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} A_2 A_{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} A_3 A_{s-3} + ...$$

Comme s est supposé un nombre entier, il est clair que les termes également éloignés des deux extrêmes seront égaux; or le dernier terme sera $A_s A_0$, mais $A_0 = m$; donc, réunissant le dernier au premier, l'avant-dernier au second, et ainsi de suite, et divisant par 2, on aura, lorsque s est un nombre impair,

$$a_s = (m-2^{s-1})\mathrm{A}_s + s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2} + \dots$$
$$+\frac{s(s-1)(s-2)\dots(\frac{s+3}{2})}{1.2.3\dots\frac{s-1}{2}.}\mathrm{A}_{\frac{s-1}{2}}\mathrm{A}_{\frac{s+2}{2}},$$

et, lorsque s est un nombre pair,

$$a_s = (m-2^{s-1})\mathrm{A}_s + s\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{s-2} + \dots$$
$$+\frac{s(s-1)(s-2)\dots(\frac{s}{2}+1)}{1.2.3\dots\frac{s}{2}.}\frac{\mathrm{A}_{\frac{s}{2}}^2}{2}.$$

Si l'on détermine par cette formule les termes de la série $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$, et qu'on emploie ces valeurs dans les expressions des quantités $a,\ b,\ c,\dots$ de la troisième série, on aura les coefficients de l'équation, dont les racines seront les n sommes $\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\gamma,\dots$, des racines de l'équation donnée, prises deux à deux. Cette équation peut être utile dans plusieurs occasions.

3. Je dois, au reste, observer ici que Waring avait déjà remarqué dans ses *Miscellanea analytica,* imprimés en 1762, l'usage de l'équation dont les racines seraient

$$\frac{1}{\alpha-\beta},\ \frac{1}{\alpha-\gamma},\ \frac{1}{\beta-\gamma},\dots$$

pour trouver les limites des racines réelles de l'équation dont les racines sont $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\dots$. Mais je ne connaissais pas cet Ouvrage lorsque je composai mon premier Mémoire sur la résolution des équations numériques; d'ailleurs, cette remarque, n'étant présentée dans l'Ouvrage de Waring que d'une manière isolée, serait peut-être restée longtemps stérile sans les recherches dont elle était accompagnée dans ce Mémoire.

Je dois ajouter que le même auteur a aussi remarqué avant moi les caractères qu'on peut tirer des signes de l'équation dont les racines sont les carrés des différences entre les racines d'une équation donnée, pour juger des racines imaginaires de cette équation. Il avait dit simplement dans l'Ouvrage cité que, si cette équation des différences n'a que des signes alternatifs, l'équation primitive a nécessairement toutes ses racines réelles; autrement elle en a d'imaginaires; mais il a donné ensuite sans démonstration, dans les *Transactions philosophiques* de l'année 1763, les conditions qui résultent des équations des différences du quatrième et du cinquième degré pour que les équations de ces degrés aient ou toutes leurs racines réelles, ou deux ou quatrè racines imaginaires, ce que personne n'avait encore fait pour le cinquième degré.

Dans le second Mémoire, je m'étais contenté de donner les équations des différences pour le deuxième, le troisième et le quatrième degré ; la longueur du calcul m'avait empêché de donner celle du cinquième degré ; mais, comme elle peut être utile dans quelques occasions, je vais la rapporter ici, d'après Waring.

4. Soit donc l'équation du cinquième degré

$$x^5 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - \mathrm{E} = 0\,;$$

l'équation des différences sera

$$v^{10} - av^9 + bv^8 - cv^7 + dv^6 - ev^5 + fv^4 - gv^3 + hv^2 - iv + k = 0\,,$$

dans laquelle

$a = -10\mathrm{B},$

$b = 39\mathrm{B}^2 + 10\mathrm{D},$

$c = -80\mathrm{B}^3 - 50\,\mathrm{BD} - 25\mathrm{C}^2,$

$d = 95\mathrm{B}^4 + 124\mathrm{B}^2\mathrm{D} - 95\mathrm{D}^2 + 92\mathrm{BC}^2 + 200\mathrm{CE},$

$e = -66\mathrm{B}^3 + 360\mathrm{BD}^2 - 196\mathrm{B}^3\mathrm{D} - 118\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 - 260\mathrm{C}^2\mathrm{D} - 625\mathrm{E}^2 - 400\mathrm{BCE},$

$f = 25\mathrm{B}^6 + 40\mathrm{D}^3 - 53\mathrm{C}^4 + 52\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2 - 522\mathrm{B}^2\mathrm{D}^2 + 194\mathrm{B}^4\mathrm{D} + 708\mathrm{BC}^2\mathrm{D}$
$\quad + 240\mathrm{B}^2\mathrm{CE} + 1750\mathrm{BE}^2 - 950\mathrm{CDE},$

$g = -4\mathrm{B}^7 - 106\mathrm{B}^5\mathrm{D} + 80\mathrm{BD}^3 + 308\mathrm{B}^3\mathrm{D}^2 + 102\mathrm{BC}^4 + 7\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2 - 570\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2$
$- 612\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{D} - 700\mathrm{C}^3\mathrm{E} + 3570\mathrm{DE}^2 - 2500\mathrm{B}^2\mathrm{E}^2 - 80\mathrm{B}^3\mathrm{CE} + 2150\mathrm{BCDE},$

$h = 400\mathrm{D}^4 - 360\mathrm{B}^2\mathrm{D}^3 - 15\mathrm{B}^4\mathrm{D}^2 + 24\mathrm{B}^6\mathrm{D} - 8\mathrm{B}^5\mathrm{C}^2 - 45\mathrm{B}^2\mathrm{C}^4 - 270\mathrm{C}^4\mathrm{D}$
$\quad + 140\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2\mathrm{D} + 960\mathrm{BC}^2\mathrm{D}^2 + 1875\mathrm{C}^2\mathrm{E}^2 + 1000\mathrm{CD}^2\mathrm{E} - 5000\mathrm{BDE}^2$
$\quad - 1750\mathrm{B}^3\mathrm{E}^2 + 40\mathrm{B}^4\mathrm{CE} + 600\mathrm{BC}^3\mathrm{E} - 1650\mathrm{B}^2\mathrm{CDE},$

$i = -36\mathrm{B}^5\mathrm{D}^2 + 224\mathrm{B}^3\mathrm{D}^3 - 320\mathrm{BD}^4 - 4\mathrm{B}^3\mathrm{C}^4 - 27\mathrm{C}^6 + 40\mathrm{C}^2\mathrm{D}^3 - 434\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2$
$\quad + 24\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2\mathrm{D} + 198\mathrm{BC}^4\mathrm{D} - 5000\mathrm{D}^2\mathrm{E}^2 + 450\mathrm{C}^2\mathrm{DE} + 6250\mathrm{CE}^3 - 675\mathrm{B}^4\mathrm{E}^2$
$\quad + 3750\mathrm{B}^2\mathrm{DE}^2 - 3000\mathrm{BC}^2\mathrm{E}^2 - 60\mathrm{B}^2\mathrm{C}^3\mathrm{E} - 200\mathrm{BCD}^2\mathrm{E} + 330\mathrm{B}^3\mathrm{CDE},$

$k = 3125\mathrm{E}^4 - 3750\mathrm{BCE}^3$,
$\quad + (2000\mathrm{BD}^2 + 2250\mathrm{C}^2\mathrm{D} - 900\mathrm{B}^3\mathrm{D} + 825\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 + 108\mathrm{B}^5)\,\mathrm{E}^2$
$\quad + (-1600\mathrm{CD}^3 - 560\mathrm{B}^2\mathrm{CD}^2 - 16\mathrm{B}^3\mathrm{C}^3 + 630\mathrm{BC}^3\mathrm{D} + 72\mathrm{B}^4\mathrm{CD} - 108\mathrm{C}^5)\mathrm{E}$
$\quad + 256\mathrm{D}^5 - 128\mathrm{B}^2\mathrm{D}^4 + 144\mathrm{BC}^2\mathrm{D}^3 + 16\mathrm{B}^4\mathrm{D}^3 - 27\mathrm{C}^4\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2.$

La réalité de toutes les racines de l'équation du cinquième degré exige donc que la valeur de chacune des quantités a, b, c,... soit positive, ce qui donne, comme l'on voit, dix conditions; mais il est possible que quelques-unes de ces conditions se trouvent renfermées dans le système des autres, ce qui en diminuerait le nombre, comme nous l'avons vu pour le quatrième degré. Si toutes ces conditions n'ont pas lieu à la fois, alors l'équation aura nécessairement deux ou quatre racines imaginaires, suivant que la quantité k aura une valeur négative ou positive. Mais, si cette quantité était nulle, l'équation aurait deux racines égales; elle en aurait trois égales si la quantité i était nulle en même temps, et ainsi du reste.

NOTE IV.

SUR LA MANIÈRE DE TROUVER UNE LIMITE PLUS PETITE QUE LA PLUS PETITE DIFFÉRENCE ENTRE LES RACINES D'UNE ÉQUATION DONNÉE.

La détermination de cette limite est nécessaire pour pouvoir former une suite de nombres dont la substitution successive fasse connaître d'une manière certaine toutes les racines réelles de l'équation proposée (§ 6). Le moyen le plus direct d'y parvenir est de calculer, comme nous l'avons proposé, l'équation même dont les racines seraient les différences entre celles de l'équation donnée, et de déterminer ensuite, par les méthodes connues, la limite de la plus petite racine de cette équation. Mais, pour peu que le degré de l'équation proposée soit élevé, celui de l'équation des différences monte si haut, qu'on est effrayé de la longueur du calcul nécessaire pour trouver la valeur de tous les termes de cette équation, puisque, le degré de la proposée étant m, on a $\frac{m(m-1)}{2}$ coefficients à calculer, et que, pour employer les séries du n° 8, il faudrait en tout calculer $2m(m-1)$ termes.

Comme cet inconvenient pourrait rendre la méthode générale presque impraticable dans les degrés un peu élevés, je me suis longtemps occupé des moyens de l'affranchir de la recherche de l'équation des differences, et j'ai reconnu en effet que, sans calculer en entier cette équation, on pouvait néanmoins trouver une limite moindre que la plus petite de ses racines, ce que est le but principal du calcul du cette même équation.

1. En effet, soit l'équation proposée en x

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots = 0\,,$$

que je représenterai, pour plus de simplicité, par

$$X=0;$$

qu'on en déduise cette équation en u du degré $m-1$ (§.8)

$$Y + Zu + Vu^2 + \ldots + u^{m-1} = 0,$$

dans laquelle

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - \ \ldots\ ,$$
$$\mathrm{Z} = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{A}x^{m-3} + \ldots.,$$
$$\mathrm{V} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3} + \ldots.,$$

savoir,

$$\mathrm{Y}{=}\mathrm{X}', \quad \mathrm{Z}{=}\frac{\mathrm{X}''}{2}, \quad \mathrm{V} = \frac{\mathrm{X}'''}{2.3}, \quad \ldots\ldots,$$

$\mathrm{X}', \mathrm{X}'', \mathrm{X}''',\ldots..$ étant les fonctions dérivées de X ou les coefficients différentiels

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx},\ \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2},\ \frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3},\ \ldots.$$

On a vu dans le problème du §.8 que, si l'on substitue dans cette équation en *u,* à la place de *x,* une quelconque des racines de l'équation $\mathrm{X} = 0$, elle aura alors pour racines les différences entre cette racine et toutes les autres racines de la même équation. Donc, si l'on y substitue successivement les *m* racines de l'équation $\mathrm{X} = 0$, on aura *m* équations en *u* dont les racines seront toutes les différences possibles entre les racines de l'équation proposée; par conséquent, il ne s'agira que de trouver une quantité plus petite que la plus petite racine de chacune de ces *m* équations.

Donc, si l'on fait $u = \frac{1}{i}$ ce qui changera l'équation en *u* en celle-ci

$$\mathrm{Y} + \frac{\mathrm{Z}}{i} + \frac{\mathrm{V}}{i^2} + \ldots\ + \frac{1}{i^{m-1}} = 0,$$

ou bien, en multipliant pari i^{m-1} et divisant par Y,

$$i^{m-1} + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}}i^{m-2} + \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Y}}i^{m-3} + \ldots\ + \frac{1}{\mathrm{Y}} = 0,$$

tout se réduira à trouver une limite plus grande que la plus grande des racines de cette dernière équation, en supposant qu'on y substitue successivement pour *x* chacune des *m* racines de l'équation proposée; car, cette limite étant trouvée, si on la nomme L, il est visible que $\frac{1}{\mathrm{L}}$ sera la limite cherchée plus petite que chacune des *m* racines.

2. Or on sait (§ 12) que le plùs grand coefficient des termes négatifs d'une équation, pris positivement et augmenté d'une unité, est plus grand que la plus grande de ses racines positives. Ainsi, pour avoir la limite L, il n'y aurait qu'à trouver la plus grande valeur négative qui pourrait résulter de la substitution des racines de l'équation $\mathrm{X} = 0$ à la place de *x* dans les coefficients $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}},\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Y}},\ \ldots$ de l'équation en *i*, ou une quantité plus grande que cette valeur.

Si ces coefficients ne contenaient que des puissances de x sans dénominateur, on pourrait résoudre la question en substituant à la place de x, dans les termes positifs, une limite plus petite que la plus petite des valeurs positives de x, et, dans les termes négatifs, une limite plus grande que la plus grande de ces valeurs; car il est visible qu'on aurait, par ce moyen, des quantités négatives plus grandes que les valeurs négatives que chaque coefficient pourrait recevoir par la substitution de chacune des racines positives de la proposée en x; et, pour avoir égard aux racines négatives de la même équation, il n'y aurait qu'à changer dans les expressions des mêmes coefficients x en $-x$, et substituer ensuite dans les termes positifs une valeur de x plus petite que la plus petite racine négative de cette équation, prise positivement, et dans les termes négatifs une valeur de x plus grande que la plus grande de ces racines.

La plus grande des quantités négatives trouvées de cette manière, prise positivement et augmentée de l'unité, pourrait sans scrupule être employée pour la limite cherchée L. Toute la difficulté vient donc du dénominateur Y, qui contient aussi l'inconnue x. J'avais proposé autrefois de prendre pour Y une valeur plus petite que chacune de celles qui pourraient résulter de la substitution des racines de l'équation $\mathrm{X}=0$ à la place de x; mais la difficulté était d'avoir cette limite, et il ne paraît pas possible de la trouver autrement que par l'équation même dont les différentes valeurs de Y seraient racines. Pour avoir cette équation, on ferait $\mathrm{Y}=y$, et l'on éliminerait x au moyen de l'équation $\mathrm{X}=0$ et de celle-ci, $y-\mathrm{Y}=0$; l'équation résultante en y serait du mième degré, et la limite plus petite que la plus petite de ses racines serait la quantité qu'on pourrait prendre pour Y; mais cette équation en y peut encore être fort longue à calculer, soit qu'on la déduise de l'élimination, soit qu'on veuille la chercher directement par la nature même de ses racines.

3. J'ai fait réflexion, depuis, qu'on pouvait toujours éliminer l'inconnue x du polynôme Y en le multipliant par un polynôme convenable du même degré $m-1$, et en faisant disparaître, au moyen de l'équation $\mathrm{X}=0$, toutes les puissances de x plus hautes que x^{m-1}.

En effet, si l'on prend un polynôme tel que

$$x^{m-1}-ax^{m-2}+bx^{m-3}-cx^{m-4}+\ldots,$$

que nous nommerons ξ pour abréger, et dans lequel les coefficients a, b, c,... soient arbitraires, et qu'on multiplie le polynôme Y par celui-ci, on aura un polynôme du degré $2m-2$. Or, l'équation $\mathrm{X}=0$ donne d'abord la valeur de x^m, et avec cette valeur on pourra former, en multipliant successivement par x et substituant à mesure la valeur de x^m, toutes les puissances de x supérieures à x^{m-1} jusqu'à x^{2m-2}. On substituera donc ces valeurs dans le polynôme $\mathrm{Y}\xi$, et il s'abaissera à la puissance $m-1$; on fera alors disparaître tous les termes qui contiennent x, en égalant à zéro chacun de leurs coefficients, ce qui

donnera $m-1$ équations linéaires en $a,\ b,\ c,...$, lesquelles serviront à déterminer ces inconnues dont le nombre est aussi $m-1$; nommant K le terme ou les termes restants et tout connus, on aura $\mathrm{Y}\xi=\mathrm{K}$, et par consequent $\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{K}}{\xi}$.
L'équation en *i* deviendra, par cette substitution,

$$i^{m-1}+\frac{\mathrm{Z}\xi}{\mathrm{K}}i^{m-2}+\frac{\mathrm{V}\xi}{\mathrm{K}}i^{m-3}+...+\frac{\xi}{\mathrm{K}}=0;$$

et, comme les coefficients $\frac{\mathrm{Z}\xi}{\mathrm{K}},\ \frac{\mathrm{V}\xi}{\mathrm{K}}$,.... ne contiennent plus que des puissances de *x* sans dénominateur, on pourra y appliquer la méthode proposée ci-dessus et trouver une limite L plus grande que la plus grande des valeurs de *i.*

On pourra réduire aussi les polynômes $\mathrm{Z}\xi,\ \mathrm{V}\xi$,.... à ne contenir que des puissances de *x* moindres que x^{m-1} par les mêmes substitutions des valeurs de x^m et des puissances supérieures à x^m. Cette réduction n'est pas absolument nécessaire, et l'on peut sans inconvénient employer les polynômes tels qu'ils résultent de la multiplication de Z, V, ... par ξ; mais elle est utile pour simplifier le calcul et avoir une limite L plus approchée.

4. Il est bon de remarquer encore que, comme les valeurs de *u* qui représentent les différences entre les racines de l'équation proposée peuvent être également positives et négatives, les valeurs de *i* pourront l'être aussi, puisque nous avons fait $u=\frac{1}{i}$; d'où il s'ensuit que la limite des valeurs positives de *i* le sera aussi des valeurs négatives prises positivement, et réciproquement celle des plus grandes valeurs négatives prises positivement le deviendra des plus grandes positives.

On pourra donc, dans l'équation en *i,* prendre également *i* positif ou négatif, et par conséquent prendre le second, le quatrième, le sixième, etc. termes de l'équation en *i* avec des signes contraires, si, de cette manière, il en résulte pour L une limite moindre.

5. Ayant ainsi trouvé la limite L, on aurai pour $\frac{1}{\mathrm{L}}$ la limite plus petite que la plus petite différence entre les racines de l'équation proposée, et l'on pourra faire $\Delta=\frac{1}{\mathrm{L}}$ (§ 6) pour avoir la suite $\Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,...$ des nombres dont la substitution successive fera connaitre sûrement toutes les racines réelles de la même équation et donnera leurs premières limites.

Si la quantité K était nulle, on aurait pour L une quantité infinie, et la limite $\frac{1}{\mathrm{L}}$ deviendrait zéro, ce qui indiquerait l'égalité de deux ou plusieurs racines dans l'équation proposée. En effet, s'il y a deux racines égales, il est clair qu'il y aura une des valeurs de *u* qui sera nulle; donc le dernier terme Y de l'équation en *u* deviendra nul en y substituant pour x une des racines de l'équation $\mathrm{X}=0$; donc cette équation aura lieu en même temps que l'équation $\mathrm{Y}=0$, c'est-à-dire $\mathrm{X}'=0$ ou $\frac{d\mathrm{X}}{dx}=0$, ce qui revient a ce que l'on sait depuis longtemps. Donc l'équation résultante de celle-ci par l'élimination de x aura lieu aussi. Or, il est facile de voir que cette équation n'est autre chose que l'équation $\mathrm{K}=0$; car, puisque le produit $\mathrm{Y}\xi$; devient $=\mathrm{K}$ par le moyen de l'équation $\mathrm{X}=0$, on aura $\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{K}}{\xi}$ et, par conséquent, l'équation $\mathrm{Y}=0$ donnera $\mathrm{K}=0$.

Lorsqu'on sera assuré par là que l'équation en x a des racines égales, on les trouvera en cherchant le commun diviseur des équations $\mathrm{X}=0$ et $\mathrm{Y}=0$ (§15); ensuite l'équation en i donnée ci-dessus, étant multipliée par K et divisée par $\mathrm{Z}\xi$, deviendra, à cause $\mathrm{K}=0$,

$$i^{m-2}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}}i^{m-3}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{Z}}=0,$$

à laquelle on pourra appliquer la même méthode pour trouver une limite plus grande que les valeurs de i, et ainsi de suite. Au reste, comme, avant d'entreprendre la résolution d'une équation par quelque méthode que ce soit, il est toujours nécessaire de s'assurer si elle a des racines égales, parce que ces racines peuvent se déterminer à part d'une manière rigoureuse, on voit que le calcul de la quantité K est indispensable lorsqu'on ne calcule pas l'équation des différences, car l'équation $\mathrm{K}=0$ est proprement celle que l'on trouve par les méthodes ordinaires lorsqu'on cherche les conditions de l'égalité des racines. Ainsi, à cet égard, la méthode que nous proposons n'allonge point le calcul nécessaire pour la résolution des équations.

6. La quantité K étant connue, tout se réduit à chercher une quantité égale ou plus grande que la plus grande valeur négative des quantités $\frac{\mathrm{Z}\xi}{\mathrm{K}}$, $\frac{\mathrm{V}\xi}{\mathrm{K}}$,....,$\frac{\xi}{\mathrm{K}}$, coefficients de l'équation en i; pour cela, on substituera à la place de x une quantité plus petite que la plus petite des racines positives de l'équation $\mathrm{X}=0$ dans les termes positifs de ces coefficients, et une quantité plus grande que la plus grande de ces racines dans les termes négatifs; ensuite, ayant changé dans ces mêmes coefficients x en $-x$, on substituera de même dans les termes positifs une quantité plus petite que la plus petite des racines négatives, et dans les termes négatifs une quantité plus grande que la plus grande des racines négatives de la même équation; en prenant ces racines positivement. Le plus grand résultat négatif qu'on aura de cette manière, étant pris positivement et augmenté de l'unité, donnera la valeur de la limite L que l'on cherche.

Pour avoir ces quantités plus grandes et plus petites que les racines de l'équation $\mathrm{X}=0$, on pourrait prendre tout de suite le plus grand coefficient des termes négatifs de cette équation, augmenté de l'unité, pour la quantité plus grande que ses racines positives; ensuite, après avoir échangé dans la même équation x en ; et fait disparaître par la multiplication les puissances négatives de x, on prendrait de même le plus grand coefficient des termes qui seraient de signe différent du premier, et l'unité divisée par ce coefficient augmenté de l'unité serait la quantité plus petite que les mêmes racines. A l'égard des racines négatives, on changerait dans l'équation x en $-x$ pour les rendre positives, et l'on trouverait de la même manière les quantités plus grandes et plus petites que ces racines.

Mais, quoique les limites qu'on trouvera par cette méthode soient toujours exactes, elles peuvent néanmoins être trop éloignées entre elles, ce qui aurait l'inconvénient de donner pour la limite L une quantité trop grande, et par conséquent pour la différence Δ des termes de la suite une quantité trop petite : d'où résulterait un trop grand nombre de substitutions successives à faire dans l'équation proposée pour en découvrir toutes les racines (§ 6).

7. Il est donc utile d'avoir des limites plus resserrées, et l'on pourra les trouver par la méthode exposée dans le §12. Suivant l'esprit de cette méthode, il ne s'agira que de chercher d'abord une valeur de x qui rende positives les valeurs des fonctions $\mathrm{X},\ \mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \ldots,$ ce qui n'est pas difficile en commençant par la dernière, où x n'est qu'à la première dimension, et remontant successivement à celles qui précèdent. Cette valeur sera la limite plus grande que toutes les racines positives de l'équation $\mathrm{X}=0$. Pour avoir ensuite une limite plus petite que ces racines, on transformera la fonction X en y substituant $\frac{1}{x}$ à la place de x, et la multipliant par x^m pour faire disparaître les puissances négatives; et, si le terme où est x^m se trouve négatif, on changera tous les signes pour le rendre positif. On prendra cette nouvelle fonction pour X, et, en ayant déduit les fonctions $\mathrm{X}',\ \mathrm{X}'',\ \ldots,$ on cherchera de nouveau la valeur de x qui rendra toutes ces fonctions positives. L'unité divisée par cette valeur donnera une limite plus petite que toutes les racines positives de la même équation $\mathrm{X}=0$. Enfin on changera dans ces deux séries les fonctions x en $-x$, en changeant en même temps tous les signes, si la plus haute puissance de x se trouve affectée du signe −; et les valeurs de x qui les rendront toutes positives seront les limites plus grandes et plus petites que les racines négatives de la même équation prises positivement.

8. Pour donner un exemple de la méthode que nous venons d'exposer, nous l'appliquerons à l'équation

$$x^3-7x+7=0,$$

que nous avons résolue dans le § 27.

On aura donc ici

$$\mathrm{X}=x^3-7x+7$$

et les fonctions dérivées seront

$$\mathrm{X}'=3x^2-7,\ \mathrm{X}''=6x,\ \mathrm{X}'''=6,\ \mathrm{X}^{\mathrm{IV}}=0;\,;$$

donc

$$\mathrm{Y}=\mathrm{X}'=3x^2-7,\ \mathrm{Z}=\tfrac{\mathrm{X}''}{2}=3x,\ \mathrm{V}=\tfrac{\mathrm{X}'''}{2\cdot 3}=1,$$

et l'équation en u sera du second degré.
On prendra pour ξ le polynôme indéterminé du second degré

$$x^2+ax+b,$$

et, en le multipliant par le polynôme Y, on aura

$$\mathrm{Y}\xi=3x^4+3ax^3+\left(3b-7\right)x^2-7ax-7b.$$

Mais l'équation $\mathrm{X}=0$ donne

$$x^3=7x-7;$$

donc

$$x^4=7x^2-7x.$$

Faisant ces substitutions, on aura

$$\mathrm{Y}\xi=(3b+14)x^2+(14a-21)x-21a-7b.$$

On fera donc

$$3b+14=0,\ 14a-21=0,\ -21a-7b=\mathrm{K},$$

d'où l'on tire

$$a=\tfrac{3}{2},\ b=-\tfrac{14}{3}\ \text{et}\ \mathrm{K}=\tfrac{7}{6}.$$

Ainsi, puisque la quantité K n'est pas nulle, on en conclura d'abord que l'équation n'a pas de racines égales.
Maintenant on aura

$$\xi=x^2+\tfrac{3x}{2}-\tfrac{14}{3},$$

ct de là, en multipliant par $\mathrm{Z}=3x$ et substituant pour x^3 sa valeur,

$$\mathrm{Z}\xi=\tfrac{9x^2}{2}+7x-21;$$

de sorte que les deux coefficients de l'équation en i seront

$$\tfrac{27x^2+42x-126}{7},\ \tfrac{6x^2+9x-28}{7};$$

ct il ne s'agira plus que de trouver une quantité égale ou plus grande que la plus grande valeur négative que ces coefficients puissent avoir sans connaître les valeurs de x; or c'est à quoi on peut parvenir par le moyen des limites de ces valeurs.

9. Pour cela, on commencera par chercher des limites plus grandes ct plus petites que les valeurs de x, tant positives que négatives. Je remarque d'abord que, le plus grand coeflicient des termes négatifs dans l'équation en x étant 7, on pourrait prendre 8 pour la limite plus grande que les racines positives; mais on peut trouver une limite moindre par la considération des fonctions $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{X}''$, savoir,

$$x^3 - 7x + 7,\ 3x^2 - 7,\ 6x,$$

en cherchant une valeur de x qui les rende toutes positives; on trouve que $x = 2$ satisfait à ces conditions, de sorte que 2 sera une limite plus grande que les racines positives.

Si l'on change dans ces mêmes fonctions x en $-x$, en changeant en même temps les signes, s'il est nécessaire, pour que le premier terme soit toujours positif, on a celles-ci

$$x^3 - 7x + 7,\ 3x^2 - 7,\ 6x;$$

et l'on voit que, pour les rendre toutes positives, il faut faire en nombres entiers $x = 4$; mais, en nombres fractionnaires, il suffit de $x = 3 + \frac{1}{10}$: ainsi $\frac{31}{10}$ sera une limite plus grande que les racines négatives prises positivement.

On transformera maintenant la fonction x par la substitution de $\frac{1}{x}$ à la place de x, et, l'ayant multipliée par x^3 pour faire disparaître les puissances négatives, on aura, après avoir divisé par 7, coefficient du premier terme, cette fonction transformée

$$x^3 - x^2 + \tfrac{1}{7},$$

dont les deux fonctions dérivées seront

$$3x^2 - 2x,\ 6x - 2,$$

qu'il faudra rendre positives pour une valeur supposée de x. Or on trouve que 1 satisfait à ces conditions; mais on peut y satisfaire par un nombre moindre, comme $\frac{3}{4}$. Ainsi $\frac{4}{3}$ sera une limite plus petite que les racines positives.

Enfin, en changeant dans ces mêmes fonctions x en $-x$ et changeant en même temps tous les signes de la première et de la troisième pour rendre les premiers termes positifs, on a celles-ci

$$x^3 + x^2 - \tfrac{1}{7},\ 3x^2 + 2x,\ 6x + 2,$$

et l'on trouvera aisément qu'elles deviennent toutes positives en faisant $x = \frac{1}{3}$; d'où il s'ensuit que 3 sera une limite moindre que les racines négatives prises positivement.

On a donc, pour les limites des racines positives, les nombres $\frac{1}{3}$ et 2 et, pour celles des racines négatives prises positivement, les nombres 3 et $\frac{31}{10}$

On substituera donc d'abord, à la place de *x*, $\frac{4}{3}$ dans les termes positifs et 2 dans les termes négatifs des deux quantités

$$\frac{27x^2+42x-126}{7},\ \frac{6x^2+9x-28}{7},$$

et l'on trouvera les résultats $-\frac{22}{7}$ et $-\frac{16}{21}$; comme le premier de ces deux résultats est le plus grand, il est bon de voir si, en changeant toute les signes de la première quantité, ce qui la réduit à

$$\frac{-27x^2-42x+126}{7},$$

et substituant de même $\frac{4}{3}$ dans les termes positifs et 2 dans les termes négatifs, au lieu de *x,* on aurait un résultat moindre; mais on trouve celui-ci $-\frac{174}{7}$, qui est au contraire plus grand, et par conséquent inutile.

On changera maintenant dans ces mêmes quantités *x* en −*x,* ce qui les changera en celles-ci

$$\frac{27x^2-42x-126}{7},\ \frac{6x^2-9x-28}{7},$$

et l'on y substituera 3, à la place de *x,* dans les termes positifs, et $\frac{31}{10}$ dans les termes négatifs ; il viendra ces résultats $-\frac{66}{35}$ et $-\frac{19}{70}$; et, comme le résultat de la première quantité est moindre que l'un de ceux que nous avons déjà trouvés, il est inutile d'en chercher un autre en changeant les signes de cette quantité.

Puisque $-\frac{22}{7}$ est le plus grand résultat négatif, on aura

$\mathrm{L}=\frac{22}{7}+1,$ et par consequent $\varDelta=\frac{1}{\mathrm{L}}=\frac{7}{29}$ pour la limite cherchée, moindre que la plus petite différence entre les racines de l'équation proposée.

Nous avons trouvé par l'équation même des différences $\Delta=\frac{1}{3}$ (§ 27); d'où l'on voit que la méthode précédente donne à la vérité une limite un peu plus petite, mais que la différence est peu considérable. Au reste, quoique pour une équation du troisième degré il n'y ait guère rien à gagner par cette méthode sur la longueur du calcul, il n'en sera pas de même pour les équations des degrés supérieurs, car le nombre des opérations que cette méthode exige n'augmente que comme le degré de l'équation, au lieu que celui des opérations nécessaires pour calculer l'équation des différences et en déduire la limite cherchée augmente comme les carrés de ce même degré.

NOTE V.

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DONNÉE PAR NEWTON.

Comme la méthode de Newton pour la résolution approchée des équations numériques est la plus connue et la plus usitée, à cause de sa simplicité, il est important d'apprécier le degré d'exactitude dont elle est susceptible; voici comment on peut y parvenir.

1. Soit l'équation générale du degré *m*

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - ... = 0$$

dont on cherche une racine. La méthode dont il s'agit demande qu'on connaisse d'avance une valeur approchée de la racine cherchée; en désignant cette valeur par *a,* on fera $x = a + p$, et l'on aura par cette substitution une équation transformée en *p* qui, à commencer par les demiers termes, sera de la forme

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}p + \mathrm{Z}p^2 + \mathrm{V}p^3 + \ ... \ + p^m,$$

où les quantités X, Y, Z, ... seront des fonctions de *a,* qu'on trouvera tout de suite par les formules du § 8, en changeant *x* en *a;* ainsi l'on aura

$$\mathrm{X} = a^m - \mathrm{A}a^{m-1} + \mathrm{B}a^{m-2} - \mathrm{C}a^{m-3} + \ ... \ ,$$
$$\mathrm{Y} = ma^{m-1} - \ (m-1)\mathrm{A}^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}a^{m-3} - ....,$$
$$..$$

Comme *p* doit être, par l'hypothèse, une quantité assez petite, étant la différence entre la vraie racine et la valeur supposée de cette racine, les puissances $p^2, p^3,...$ seront de fort petites quantités auprès de *p*; par conséquent, les termes affectés de ces puissances seront eux-mêmes nécessairement très-petits à l'égard des premiers termes $\mathrm{X} + \mathrm{Y}p$, puisque les coefficients Z, V, ... ne peuvent jamais devenir fort grands, étant des fonctions sans dénominateur; ainsi, en réduisant toute l'équation à ces deux termes, on en tirera une valeur approchée de *p* qui sera $= -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$. Appelons *b* cette valeur approchée de *p,* on pourra faire par la même raison, dans l'équation en *p,* la substitution de $b + q$ à la place de *p,* et négliger ensuite dans la transformée en *q* les termes qui contiendront le carré et les puissances plus hautes de *q;* cette transformée, étant ainsi réduite aux deux premiers termes de la forme $(\mathrm{X}) + (\mathrm{Y})q$, donnera sur-le-champ $q = -\frac{(\mathrm{X})}{(\mathrm{Y})}$.. Cette quantité éant nommée *c,* on substituera $c+r$ à la place de q dans la dernière transformée, et l'on en aura une nouvelle en $r,$ d'où l'on tirera de même la valeur de $r,$ et ainsi de suite.

De cette manière, on aura les approximations a, $a+b$, $a+b+c$,... vers la vraie valeur de la racine cherchée.

2. Voilà la méthode telle que Newton l'a donnée dans la *Méthode des fluxiom;* mais il est bon de remarquer qu'on peut se dispenser de faire continuellement de nouvelles transformées, car, puisque la transformée en p est le résultat de la substitution de $a+p$ au lieu de x dans l'équation en $x,$ et que la transformée en q est le résultat de la substitution de $b+q$ au lieu de p dans la transformée en $p,$ il s'ensuit que cette transformée en q sera le résultat de la substitution immédiate de $a+b+q$ à la place de x dans la même équation en x; par conséquent, elle ne sera autre chose que la première transformée en $p,$ en y changeant p en q et a en $a+b;$ d'où il s'ensuit qu'ayant trouvé l'expression générale de p en $a,$ on aura celle de q en y substituant $a+b$ au lieu de a; et par la même raison on aura la valeur de r en substituant $a+b+c$ au lieu de $a,$ et ainsi de suite.

Donc, en général, si dans l'expression de p en a on substitue pour a un terme quelconque de la suite convergente vers la racine cherchée, on aura la quantité qu'il faudra ajouter à ce terme pour avoir le terme suivant.

La méthode qui résulte de cette considération est, comme l'on voit, plus simple que celle de Newton; c'est celle que Raphson a donnée dans l'Ouvrage intitulé *Analysis aequationum universalis,* imprimé à Londres en 1690 et réimprimé en 1697. Comme la méthode de Newton avait déjà paru dans l'édition anglaise de *I'Algebre* de Wallis en 1685, et qu'elle a été ensuite expliquée en détail dans l'édition latine de 1793, on peut être surpris que Raphson n'en ait pas fait mention dans son Ouvrage, ce qui porterait à croire qu'il la regardait comme entièrement différente de la sienne; c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas inutile de faire remarquer que ces deux méthodes ne sont au fond que la même présentée différemment.

3. Maintenant il est clair que la bonté de la méthode dont il s'agit dépend de cette condition que, si a est une valeur approchée d'une des racines de l'équation proposée, $a+p$ sera une valeur plus approchée de la même racine; c'est donc ce qu'il faut examiner.

Soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ ...$ les m racines de l'équation

$$x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}-...=0\,;$$

cette équation, comme on l'a vu dans la Note II, peut toujours se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)....=0.$$

Mettons $a+p$ à la place de $x,$ et développons les termes suivant les puissances de $p;$ on trouvera, pour les deux premiers termes $\mathrm{X}+\mathrm{Y}p\,,$ ces valeurs de X et Y

$$\mathrm{X} = (a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\ \ldots\ ,$$
$$\mathrm{Y} = (a-\beta)(a-\gamma)\ \ldots.\ +(a-\alpha)(a-\gamma)\ \ldots\ +(a-\alpha)(a-\beta)\ldots+\ldots,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{a-\gamma} + \ldots\ ,$$

et par conséquent

$$p = -\frac{1}{\frac{1}{a-\alpha}+\frac{1}{a-\beta}+\frac{1}{a-\gamma}+\ldots} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha-a}+\frac{1}{\beta-a}+\frac{1}{\beta-a}+\ldots}$$

Supposons que α soit la racine que l'on cherche et que *a* soit une valeur approchée en plus ou en moins, $\alpha - a$ sera le défaut ou l'excès de la valeur *a* sur la véritable α, et $\alpha - a - p$ sera le défaut ou l'excès de la valeur corrigée $a+\ p$ *;* et il faudra, pour la bonté de la méthode, que la quantité $\alpha - a - p$ soit toujours plus petite que la quantité $\alpha - a$*,* abstraction faite des signes de ces quantités, et, par conséquent, que la quantité $\frac{1}{\alpha-a-p}$ soit toujours plus grande que $\frac{1}{\alpha-a}$, abstraction faite des signes.

4. Faisons, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\beta-a} + \frac{1}{\gamma-a} + \ldots\ ;$$

on aura, par la formule trouvée ci-dessus, pour la valeur de *p,*

$$\alpha - a - p = \alpha - a - \frac{1}{\frac{1}{\alpha-a}+\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}(\alpha-a)}{\frac{1}{\alpha-a}+\mathrm{R}};$$

donc

$$\frac{1}{\alpha-a-p} = \frac{\frac{1}{\alpha-a}+\mathrm{R}}{\mathrm{R}(\alpha-a)} = \frac{1}{(\alpha-a)} + \frac{1}{(\alpha-a)^2\mathrm{R}}.$$

D'où je conclus que, si la valeur de R est du même signe que celle de $\alpha - a$*,* la valeur de $\alpha - a - p$ sera encore du même signe, et que la condition dont il s'agit aura nécessairement lieu.

Mais, si les deux quantités $\alpha - a$ et R sont de signes contraires, alors, pour que la condition ait lieu, abstraction faite des signes, il faudra que l'on ait

$$\frac{1}{(\alpha-a-p)^2} > \frac{1}{(\alpha-a)^2};$$

or, de l'équation précédente on tire

$$\frac{1}{(\alpha-a-p)^2}=\frac{1}{(\alpha-a)^2}+\frac{2}{(\alpha-a)^3\mathrm{R}}+\frac{1}{(\alpha-a)^4\mathrm{R}^2};$$

donc il faudra que

$$\frac{2}{(\alpha-a)^3\mathrm{R}}+\frac{1}{(\alpha-a)^4\mathrm{R}^2}$$

soit une quantité positive et, par conséquent, que l'on ait la condition

$$2(\alpha-a)\mathrm{R}+1>0.$$

Comme la valeur de R dépend des autres racines $\beta,\ \gamma,....$ qui sont inconnues, il est difficile, peut-être même impossible, de trouver *a priori* un caractère pour juger si la condition dont il s'agit est remplie ou non.

Il est aisé d'ailleurs de former *a posteriori* des équations oü cette condition n'aura point lieu, en prenant les racines $\beta,\ \gamma,....$ de manière que quelques-unes des différences $\beta-a,\ \gamma-a,....$ soient fort petites et de signes différents; et, si β et γ, par exemple, sont imaginaires et de la forme $\varpi+\rho\sqrt{-1}$ et $\varpi-\rho\sqrt{-1}$, il n'y aura qu'à prendre ϖ peu différent de *a* et ρ fort petit. Alors la valeur corrigée $a+p$, au lieu d' ètre plus près de la vraie valeur de la racine α que la valeur de *a,* s'en éloignera au contraire davantage.

5. Il n'y a donc que le premier cas où l'on puisse établir un caractère certain pour le succès de la méthode; car il est visible que, si la quantité *a* est à la fois plus petite que chacune des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,....$ de l'équation proposée ou plus grande que chacune de ces racines, en regardant, comme on le doit, les quantités négatives comme plus petites que les positives et les plus grandes négatives comme plus petites que les moins grandes, alors la quantité R sera nécessairement de même signe que la quantité $\alpha-a$; et si, parmi ces racines, il y en a d'imaginaires de la forme $\varpi+\rho\sqrt{-1}$, $\varpi-\rho\sqrt{-1}$, il en résultera dans R les termes

$$\frac{1}{\varpi-a+\rho\sqrt{-1}}+\frac{1}{\varpi-a-\rho\sqrt{-1}},$$

qui se réduisent à

$$\frac{2(\varpi-a)}{(\varpi-a)^2+\rho^2},$$

quantité qui sera aussi de même signe que $\alpha-a$, si *a* est en même temps plus petit ou plus grand que ϖ .

D'où l'on peut conclure, en général, que l'usage de la méthode dont il s'agit n'est sûr que lorsque la valeur approchée *a* est à la fois ou plus grande ou plus petite que chacune des racines réelles de l'équation et que chacune des parties réelles des racines imaginaires, et que, par conséquent, cette méthode ne peut être employée sans scrupule que pour trouver la plus grande ou la plus petite racine d'une équation qui n'a que des racines réelles, ou qui en a d'imaginaires, mais dont les parties réelles sont moindres que la plus grande racine réelle ou plus grandes que la plus petite de ces racines.

Pour que les valeurs corrigées successivement approchent toutes de plus en plus de la vraie valeur de la racine, il faudra prendre pour première valeur approchée une quantité plus grande que la plus grande des racines si c'est celle-ci qu'on cherche, ou plus petite que la plus petite racine si l'on cherche la plus petite; alors toutes les valeurs corrigées successivement seront aussi plus grandes que la plus grande ou plus petites que la plus petite des racines, et la condition nécessaire pour la convergence aura constamment lieu pour toutes ces valeurs, puisque R et $\alpha - a$ seront toujours de même signe, en prènant pour a chacune de ces mêmes valeurs.

6. Lorsque toutes les racines de l'équation sont réelles, il est facile de reconnaître si la première valeur approchée a est plus grande ou plus petite que chacune des racines; car, en mettànt l'équation sous la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)....=0,$$

et substituant $a+p$ pour x, elle deviendra

$$(a+p-\alpha)(a+p-\beta)(a+p-\gamma)....=0,$$

où $a-\alpha,\ a-\beta,\ a-\gamma,\ ....$ seront, dans le premier cas, des quantités positives, et, dans le second, toutes négatives; donc, dans le premier cas, on aura une transformée en p dont tous les termes seront positifs, et, dans le second cas, cette transformée aura ses termes alternativement positifs et négatifs.

Réciproquement, si les termes de la transformée en p sont tous positifs, il est évident qu'il n'y aura alors aucune valeur positive de p qui puisse satisfaire à l'équation; par conséquent, les valeurs réelles de p seront nécessairement négatives; donc, les racines de l'équation en p étant $\alpha-a,\ \beta-a,\ \gamma-a,\ ....$, il faudra que ces quantités soient toutes négatives ou imaginaires; donc la quantité a sera nécessairement plus grande que chacune des racines réelles de l'équation, quand même elle aurait des racines imaginaires.

On prouvera de la même manière que, si les termes de la transformée en p sont alternativement positifs et négatifs, la quantité a sera nécessairement plus petite que chacune des racines réelles, soit qu'il y ait des imaginaires ou non.

7. Mais, dans le cas où l'équation a des racines imaginaires, on ne pourra pas s'assurer de la même manière que la quantité a sera en même temps plus grande ou plus petite que chacune des parties réelles de ces racines; je ne vois pas même qu'on puisse s'en assurer autrement que par le moyen de l'équation dont ces parties réelles seraient racines. Or, si

$$\beta=\varpi+\rho\sqrt{-1} \text{ et } \gamma=\ \varpi-\rho\sqrt{-1},$$

on a

$$\varpi = \frac{\beta+\gamma}{2};$$

ainsi l'équation dont ϖ sera une des racines ne peut être que celle qui aura pour racines les demi-sommes des racines de la proposée, prises deux à deux, et qui, par la théorie des combinaisons, montera au degré $\frac{m(m-1)}{2}$.

Ayant formé cette équation par les formules que nous avons indiquées plus haut (Note III), on y substituera $a+z$ à la place de l'inconnue; et, si la transformée a tous ses termes positifs ou alternativement positifs et négatifs, on sera assuré que le nombre a sera plus grand ou plus petit que chacune des valeurs de ϖ, et par conséquent aussi que chacune des parties réelles des racines imaginaires.

8. Newton n'a appliqué sa méthode qu'à l'équation

$$x^3-2x-5=0,$$

que nous avons résolue (§ 25). Il suppose d'abord, dans le Chapitre IV, $a=2$, et, substituant $2+p$ à la place de x, il a la transformée

$$0=-1+10p+6p^2+p^3,$$

d'où il tire $p=\frac{1}{10}=0{,}1$; il fait ensuite $p=0{,}1+q$, il a la nouvelle transformée

$$0=0{,}061+11{,}23q+\ 6{,}3q^2+q^3,$$

d'où i'l tire $q=-\frac{0{,}061}{11{,}23}=-0{,}0054...$; il continue en faisant $q=-\ 0{,}0054+r$, il vient la transformée

$$0=0{,}000541708+11{,}16196r+6{,}3r^2+r^3,$$

d'où, il déduit $r=\frac{-0{,}000541708}{11{,}16196}=-0{,}00004853$ ... , et ainsi de suite.

Ainsi les valeurs convergentes de x sont

$$2,\quad 2{,}1,\quad 2{,}0946,\quad 2{,}09455147,$$

dont la dernière est exacte à la dernière décimale près (numéro cité).

Dans ce cas, la série est, comme l'on voit, très-convergente. On peut, en effet, s'assurer *a priori,* par ce que nous avons démontré, que cela doit être ainsi.

Car nous avons vu (numéro cité) que les deux autres racines de cette équation sont imaginaires, et qu'en les représentant par $\varpi \pm \rho\sqrt{-1}$, on a à très-peu près

$$\rho^2 = \frac{160}{4.31} = \frac{40}{31} \text{ et } \varpi = -\frac{15}{8\rho^2+4} = -\frac{15.31}{4.111} = -\frac{465}{444};$$

donc, puisque, outre la racine α que l'on cherche, il n'y a que ces deux racines imaginaires, on aura dans ce cas

$$\mathrm{R} = \frac{2(\varpi - a)}{(\varpi - a)^2 + \rho^2}.$$

Or, a étant $=2$, on a

$$\varpi - a = -\frac{1353}{444};$$

mais, α étant à très-peu près $2,0945$ ..., , on a

$$\alpha - a = 0,0945 \ldots;$$

d'où l'on voit d'abord que R et $\alpha - a$ sont de signes différents, et qu'ainsi, pour que la première correction de a soit juste, il faut que la condition

$$2(\alpha - a)\mathrm{R} + 1 > 0$$

ait lieu. Or on trouve

$$\mathrm{R} = -0,66575 \text{ et de là } 2(\alpha - a)\mathrm{R} = -0,1244;$$

de sorte que la condition dont il s'agit est amplement satisfaite. Ainsi on est assuré que la première valeur corrigée 2,1 approchera davantage de la vraie valeur de la racine. En prenant cette valeur pour *a,* on a

$$\alpha - a = -0,0055 \ldots ;$$

donc, $\alpha - a$ et R étant maintenant de même signe, les corrections suivantes approcheront toutes de plus en plus de la vraie valeur de la racine cherchée.