NOTE VI.

ON THE METHOD OF APPROXIMATION DERIVED FROM RECURRING SERIES.

1. Taking the equation

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + ... = 0,$$

the roots of which we have designated by $\alpha,\ \beta,\ \gamma....$; we will have (Note II), by the nature of these roots, the equation identity

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + ... = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)...,$$

which must be the case, whatever the value of *x* may be.

Thus, the identity of the equation will still remain on putting $x+i$ in place of *x,* whatever the values of *x* and *i* may be ; thus also, if after the substitution we may expand the expression in terms of the powers of *i,* the terms associated with i^2, etc. will furnish other identical equations ; these will be the equations that we have called *derived* in the *Théorie des fonctions.*

The first of these derived equations will be

$$\begin{aligned} &mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - ... \\ &= (x-\beta)(x-\gamma)... + (x-\alpha)(x-\gamma)... + (x-\alpha)(x-\beta)... + ... \end{aligned}$$

Dividing this equation by the identity equation above, we will have

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - ...}{x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + ...} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + ...,$$

an equation which must also be an identity, whatever the value of *x* shall be. Thus it will be again, if we develop the two members in series which procede according to the positive or negative powers of *x.*

2. Developing initially according to the negative powers; the fraction which forms the first member will become

$$\frac{\mathrm{P}}{x} + \frac{\mathrm{Q}}{x^2} + \frac{\mathrm{R}}{x^3} + \frac{\mathrm{S}}{x^4} + ...$$

and, in order to find the values of the coefficients P, Q, R, ... , we have only to multiply by the denominator $x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + ...,$ and then to compare the terms with these of the numerator $mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + ...:$ hence we will have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P} = m,\\
&\mathrm{Q} = \mathrm{AP} - (m-1)\mathrm{A},\\
&\mathrm{R} = \mathrm{AQ} - \mathrm{BP} + (m-2)\mathrm{B},\\
&\mathrm{S} = \mathrm{AR} - \mathrm{BQ} + \mathrm{CP} - (m-3)\mathrm{C},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

from which we see that the sequence of the quantities P, Q, R, ... becomes recurrent after the m^{th} term, of which the scale is $\mathrm{A}, \ -\mathrm{B}, \ \mathrm{C}, \ -\mathrm{D},\ldots.$
Developing likewise the fractions which form the second member, it will become

$$\tfrac{m}{x} + (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\tfrac{1}{x^2} + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)\tfrac{1}{x^3} + (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots)\tfrac{1}{x^4} + \ldots.$$

Now, the comparison of the like terms of these two members of the equation gives

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Q} = \alpha+\beta+\gamma+\ldots,\\
&\mathrm{R} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots.\\
&\mathrm{S} = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

and, in general, some term of which the power shall be μ on account of Q, will be

$$\alpha^{\mu}+\beta^{\mu}+\gamma^{\mu}+\ldots.$$

This is the most general term of the series.

We have by that the most simple demonstration of the law given by Newton for the sum of the powers of the roots. But the preceding formulas are the most useful for approximating the value of the largest of the roots $\alpha, \ \beta, \ \gamma\ldots.$ Indeed, it is clear that, if all these roots are real and that α for example shall be the largest of the roots, be they positive or negative, the power μ will surpass so much more the similar powers of the other roots, and likewise the sum of these powers, which the exponent μ shall be greater ; from which it follows that, if T and V are some consecutive terms of the series P, Q, R, ..., we will have very nearly $\alpha = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}$, and this value of the root α will be approximated more than the terms in question extended further from the start of the series.

3. If there were imaginary roots among the roots $\beta, \ \gamma,\ldots$, we would have, for example,

$$\beta = \varpi + \rho\sqrt{-1}\ , \ \ \gamma = \varpi - \rho\sqrt{-1};$$

then, making $\sqrt{\varpi^2+\rho^2}=\Pi$ and $\frac{\rho}{\varpi}=\text{tang}\varphi,$ we would have

$$\beta=\Pi(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),\ \gamma=\Pi(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1});$$

thus, by the known theorem,

$$\beta^{\mu}=\Pi^{\mu}(\cos\mu\varphi+\sin\mu\varphi\sqrt{-1}),$$
$$\gamma^{\mu}=\Pi^{\mu}(\cos\mu\varphi-\sin\mu\varphi\sqrt{-1}),$$

and as a consequence

$$\beta^{\mu}+\gamma^{\mu}=2\Pi^{\mu}\cos\mu\varphi.$$

Hence, provided that the root α must be at the same time greater than Π or $\sqrt{\varpi^2+\rho^2}$, that is, greater than $\sqrt{\beta\gamma}$, the power a^{μ} also will exceed the some of the like powers of β and γ.
Thus the method will not be at fault, because of the imaginary roots, to such an extent that we will find in these that the real product of two corresponding roots will be greater than the square of the largest of the real roots; and, in this case, the series, in place of approximating and from that finally to be composed of a geometric series, would be continually extending itself.

4. This method evidently pertains to that which Daniel Bernoulli has deduced from the consideration of recurring sequences, and which Euler has set out in detail in his *Introduction.* In that, we give to the generating fraction of the series, for the numerator, some polynomial of a degree less than the denominator, which renders the first *m* terms of the series entirely arbitrary. This fraction decomposes into the simple fractions

$$\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\frac{c}{x-\gamma},\ldots,$$

from which there arises, for the terms of the series, this general expression

$$a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}+c\gamma^{\mu}+\ldots,$$

which gives equally, when the root α is much greater than each of the others, $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}$ for the approximate value of α, which shall be the value of the coefficient *a*. But the indeterminancy of the first terms of the series, in place of being an advantage of the method, is rather an inconvenience, for if it happens that the two roots α, β shall be equal, then the two terms $a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}$ in general take the form

$$(a'+b'\mu)\alpha^{\mu},$$

and, if the three roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ are equal, the three terms $a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}+c\gamma^{\mu}$ take the form

$$(a'+b'\mu+c'\mu^{2})\alpha^{\mu},$$

and hence in this manner ; where it is easy to see that, when the largest root α is a double or treble root, etc.,the series converges much less quickly towards a geometric series. In taking for the numerator the first function of the denominator, just as we have done above, all the coefficients *a, b, c,* ... become equal to one, and, in the case of equal roots α and β, the two terms $\alpha^{\mu}+\beta^{\mu}$ become simply $2\alpha^{\mu}$, and hence the others ; such that the equal roots have no influence on the convergence of the series.

5. To give an example of what we have just said, I will take that of article 346 of Euler's *Introduction*. The equation to be resolved is

$$x^{3}-3x^{2}+4=0;$$

Euler takes 0, 1 and 3 for the first three terms, and it forms by the steps of the relation 3, 0, − 4, the recurring series

$$1,\ 3,\ 9,\ 23,\ 57,\ 135,\ 313,\ 711,...,$$

in which he observes that the quotient of each term, divided by the preceding, is always greater than 2, the double root, and at the same time the greatest.

If we use the formulas given above, on making

$$m=3,\ \mathrm{A}=3,\ \mathrm{B}=0,\ \mathrm{C}=4,$$

all the terms P, Q, R, ... are found to be multiples of 3; such that, rejecting this factor for the most simplicity, we find by the same scale of the relation, but on taking the terms 1, 1, 3, the series

$$1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11,\ 21,\ 43,\ 85,\ 171,\ 341,\ ..\ ,$$

where we see that the quotient of each term, divided by that which precedes it, converges very quickly towards the double root 2.

[*Start of Euler's section.*

§ 346. With these considered properly, which since in general as well as according to the examples we have brought to advise us, the great usefulness of this method will be seen for finding the roots of equations more clearly. Truly the artifices, by which the operation may be able to be drawn together and with that to be returned more promptly, have been indicated too in a satisfactory manner, thus so that nothing further may be required to be added, except the cases in which the equation has equal or imaginary roots, remaining to be examined. Therefore we may put the denominator of the fraction

$$\frac{a+bz+cz^{2}+dz^{3}\ +\text{etc.}}{1-\alpha z-\beta z^{2}-\ \gamma z^{3}-\delta z^{4}-\text{etc.}}$$

to have the factor $(1-pz)^2$,with the remaining factors present $1-qz, \quad 1-rz$ etc. Therefore the general term of the recurring series hence generated will be

$$=z^n\left((n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n+\text{ etc.}\right);$$

[Recall that the separation of a denominator of the form

$$\frac{1}{(1-zp)^2(1-zq)(1-zr)......}$$

into factors including the square term introduces partial fractions of the form :

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-zp)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{(1-zp)}+\frac{\mathfrak{C}}{(1-zq)}.....;$$

these can be expanded in series, the n^{th} term of which has the form

$$z^n\left((n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n+\text{ etc.}\right).]$$

which value of this kind shall soon be arrived at, if *n* were an exceedingly great number, two cases are to be distinguished, the one in which *p* is a number greater than the remaining numbers *q, r* etc., and the other, in which *p* does not provide the maximum root. In the first case, for which *p* likewise is the maximum root, on account of the coefficient $n+1$ the remaining terms $\mathfrak{B}p^n, \mathfrak{C}q^n$ etc. besides do not vanish so quickly from that term ; but if *q* were $>p$, then also the term $(n+1)\mathfrak{A}p^n$ will vanish more slowly besides $\mathfrak{C}q^n$ and thus the investigation certainly will avoid the trouble.

EXAMPLE 1

Let the proposed equation be

$$x^3-3xx+4=0,$$

of which the maximum root 2 occurs twice.

Therefore this maximum root may be sought in the manner set out before by the expansion of the fraction,
[i.e. the fraction $\frac{1}{1-3z*+4z^3}$ is expanded out, according to the iterations of the sequence

$$s_{n+1}=3s_n-4s_{n-2}\,; \quad s_0=0\,; s_1=1\,; s_2=3\,;\text{for } n\geq 3.]$$

which will give that recurring series

$$1,\ 3,\ 9,\ 23,\ 57,\ 135,\ 313,\ 711,\ 1593 \text{ etc.},$$

where indeed some term divided by the preceding gives a quotient greater than two [for the root]. The ratio of which is readily apparent from the general term. For with the terms $\mathfrak{C}q^n$ etc. rejected from that, the corresponding term of the power z^n will be

$$=(n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n,$$

and the following

$$=(n+2)\mathfrak{A}p^{n+1}+\mathfrak{B}p^{n+1},$$

which divided by the first gives

$$\frac{(n+2)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{(n+1)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}p>p,$$

unless n now increases to infinity.

End of Euler's section.]

6. Above, we have developed the identity equation

$$\frac{mx^{m-1}-\ldots}{x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+\ldots}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\ldots$$

following the negative powers of *x;* now we develop the following positive powers. For that ,

$$a-bx+cx^2-dx^3+\ldots$$

shall be the last terms of the polynomial

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\ldots;$$

on putting the first member of the identity equation into the form

$$\frac{-b+2cx-3dx^2+4ex^3-\ldots}{a-bx+cx^2-dx^3+ex^4-\ldots},$$

and the development of this fraction following the known powers of x will be of the form

$$-\mathrm{P}'-\mathrm{Q}'x-\mathrm{R}'x^2-\mathrm{S}'x^3-\ldots;$$

on multipling by the denominator and comparing the terms, we will find

$$aP' = b,$$
$$aQ' = bP' - 2c,$$
$$aR' = bQ' - cP' + 3d,$$
$$aS' = bR' - cQ' + dP' - 4c,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

which gives a recurring series of which the sequence is

$$\tfrac{b}{a},\ -\tfrac{c}{a},\ \tfrac{d}{a},\ldots.$$

The second member of the same equation, being developed likewise following known powers of *x,* will give the series

$$-\left(\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{\beta}+\tfrac{1}{\gamma}+\ldots\right)-\left(\tfrac{1}{\alpha^2}+\tfrac{1}{\beta^2}+\tfrac{1}{\gamma^2}+\ldots\right)x-\left(\tfrac{1}{\alpha^3}+\tfrac{1}{\beta^3}+\tfrac{1}{\gamma^3}+\ldots\right)x^2-\ldots,$$

such that we will have by comparaison

$$\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{\beta}+\tfrac{1}{\gamma}+\ldots = P',$$
$$\tfrac{1}{\alpha^2}+\tfrac{1}{\beta^2}+\tfrac{1}{\gamma^2}+\ldots = Q',$$
$$\tfrac{1}{\alpha^3}+\tfrac{1}{\beta^3}+\tfrac{1}{\gamma^3}+\ldots = R',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

These formulas contain the law of the sums of the reciprocal powers of the roots.

It is evident that, if α is the smallest root, be it positive or negative, the powers $\frac{1}{\alpha^\mu}$ will surpass to such an extent the sum of the like powers of the other roots, that α will be much smaller than each of the other roots $\beta,\ \gamma,\ldots$. Consequently, if T' and V' are two consecutive terms of the series $P',\ Q',\ R',\ \ldots$, the quotient $\frac{T'}{V'}$ will approach so much more to the the value of the smallest real root of the equation, that these terms will be extended more from the start of the series. Hence this series will serve to find the smallest root, as the first P, Q, R, ... serve to find the largest; and , with regard to the imaginary roots, we will prove in the same manner that they will not prevent the approximation towards the smallest real root, seeing that the square of this root shall be at the same time smaller than each of the real products of the corresponding imaginary roots.

7. We may hence use this method of approximation for each of the real roots of any equation if we may know in advance an approximate value *a* of this root, such that the difference between this value and the true value of the root were a smaller amount, that is, made with the signs removed, so that the difference between the same value and each of the other real roots, and at the same time less than the square of each of the products of

the corresponding imaginary roots, if there are any, diminished to the same value; since then, on calling a the approximate value of the root sought and making $x = a + p$, we will have a transformation in p, of which the smallest root will be able to be determined by the preceding method, and this root, taken with the the first approximate value, will give the root sought. But we may not know how to find the first values in making use of the methods that we have given, and, once these values being known, it is more exact to use the method of approximation of Chapter III; also I have not entered into this detail on the method of approximation drawn from recurring series which leaves nothing to be desired on the subject in question.

8. If we wish to apply the preceding method to Newton's example, we will take at first the transformation (Note preceding)

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1;$$

and, as we know that the real root is less than $0{,}1$, it follows that the product of the two other roots, that we know to be imaginary, will be $> \frac{1}{0{,}1} > 10$, since the last term 1 is the product of the three roots; thus we are assured that the square of the root sought is much less than the product of the two imaginary roots. Thus we will form this recurring series by means of the fraction $\frac{10+12p+3p^2}{1-10p-6p^2-p^3}$ and we will have the terms

$$10,\ 112,\ 1183,\ 12512,\ 132330,...,$$

that we can continue as fas as we wish by the step of the relation 10, 6, 1 ; each of these terms, divided by the following, will give the fractions

$$\frac{10}{112},\ \frac{112}{1183},\ \frac{1183}{12512},...,$$

which, being reduced to decimals, become

$$0{,}089,\ \ 0{,}09467\ \ 0{,}094549,\ 0{,}0945515,....$$

Now, we have seen in the preceding that Newton's method gives for the value of p the converging series

$$0{,}1\ \ 0{,}0946,\ 0{,}09455147,....$$

from which we can judge the agreement of the two methods. Indeed, we are going to show below that these methods, although founded on different principles, arrive at almost the same in the end and give similar results.

OTE VII.

ON FONTAINE'S METHOD FOR THE RESOLUTION OF EQUATIONS.

As hardly any use is made of this method by anyone, which besides is little known, I could dispense with talking about it here ; but the name of the author and the manner in which he has announced it have got me involved to give an abridged version and to examine the principles on which it is based. *I give this,* he says, *for the whole analysis by which we have searched so needlessly since the origin of algebra.* (*See* the *Mémoires de l'Académie des Sciences* for the year 1747, p. 665.)

1. This method has two parts. In the first, the author considers the equations as composed of simple factors, real or imaginary, of the form $x \pm a$, $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$, and containing a certain number of real quantities *a, b, c,* ..., positive and unequal. He goes through all the combinations possible of the different factors that can be formed according to this manner, and he searches, for each system of factors, in the coefficients of the equation, the conditions which are appropriate for this system and which can distinguish it from all the others. Hence he forms tables which contain all the different systems of factors and the conditions which pertain to them, of such a kind that some one equaton being proposed, of which the coefficients are given by numbers, we may be able nevertheless to recognise from which system of factors it is composed. Thus we will know at once how many real roots the equation has, equal or unequal, and how many imaginary roots it has, with the form of each of the imaginary roots given.

2. In order to give a clearer idea of what I am going to discuss for those who are not disposed to consult Fontaine's Collected Works, I am going to bring the tables of the equations of the second degree back here, with a summary of the method by which the author has constructed that; then I shall make some notes on this method.

In the following formulas, the letters *m, n* and *a, b* designate either positive or negative numbers, and we assume that *a* is always a quantity greater than *b.*

$$x^2+mx+n=\begin{cases} (x+a)(x+a)\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-4n=0 \\ (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\ldots\ldots m^2-2n=0 \\ (x+a)(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-4n>0 \\ (x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\ldots\ldots \begin{cases} m^2+4n<0 \\ m^2-2n>0 \end{cases} \\ (x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\ldots\ldots m^2-2n<0, \end{cases}$$

$$x^2 + mx - n = (x+a)(x-b),$$

$$x^2 - mx + n = \begin{cases} (x-a)(x-a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m^2 - 4n = 0 \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) \ldots\ldots m^2 - 2n = 0 \\ (x-a)(x-b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m^2 - 4n > 0 \\ (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \ldots\ldots \begin{cases} m^2 - 4n < 0 \\ m^2 - 2n > 0 \end{cases} \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \ldots\ldots m^2 - 2n < 0, \end{cases}$$

$$x^2 - mx - n = (x-a)(x+b),$$
$$x^2 + n = (x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}),$$
$$x^2 - n = (x+a)(x-a).$$

We see at first that in this Table only all the possible combinations of the different factors, which are allowed to be here :

$$x \pm a,\ x \pm b,\ \text{or}\ x \pm a \pm a\sqrt{-1},\ x \pm a \pm b\sqrt{-1}\ \text{and}\ x \pm b \pm a\sqrt{-1}.$$

In order to know to which form of the equations each combination may be able to be referred, we have expanded the products and compaired them to the equations, on paying attention that the quantity *a* must be greater than *b*. Until now the method has no difficulaty except for the length of the calculation, and the whole art consists of finding the characteristics or proper conditions for each combination.

These conditions are of two kinds : one kind are given determined by these equations, as

$$m^2 - 4n = 0 \text{ or } m^2 - 2n = 0;$$

these are the ones which occur when when we assume that the quantity *b* becomes zero or becomes equal to *a*. They are not difficult to find, for, as these assumptions remove one of the two indeterminates *a, b,* on making the comparison of the terms resulting from the product of the factors with these of the equation, we have one equation more than there are indeterminates, such that, by elimination, necessarily we arrive at an equation of the condition; thus it is true that the equal factors $(x+a)(x+a)$ give the condition

$$m^2 - 4n = 0,$$

and that the factors $(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$ give

$$m^2-2n=0.$$

The other conditions are derived from these, on changing the sign of equality into that of greater than or less than. They result from the consideration that, if one function of the coefficients *m* and *n* is null since $a=b$ or $b=0$, it will be greater or less than zero when *a* will be greater than *b* or *b* greater than zero.

Hence, as the system $(x+a)(x+a)$ can result from this one :

$$(x+a)(x+b),$$

on making $b=a$, or to this one :

$$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}),$$

on making $b=0$, the function m^2-4n, which is zero for this system, will no longer be that in these two, and we find that this function is positive for the system $(x+a)(x+b)$, and negative for the system $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$.

The author assumes as a general principal that the function which is null in the case of the coincidence of the two systems will always be greater than zero in the one case and less than zero in the other, and he determines by an example particular to that of systems where it is positive and to that where it is negative; but this proposition cannot be admitted without demonstration, and there are even strong reasons to doubt that it may be true in general.

In the cases in question, we can prove the truth, for the system $(x+a)(x+b)$, being expanded, gives

$$x^2+(a+b)x+ab;$$

thus $m=a+b,\ n=ab,$ and as a consequence,

$$m^2-4n=(a-b)^2,$$

will always be a positive quantity. Likewise, the system

$$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})=x^2+2ax+a^2+b^2$$

gives $m=2a,\ n=a^2+b^2$, and

$$m^2-4n=-4b^2,$$

always a negative quantity. We can demonstrate the other conditions in the same manner for the different systems of the equations of the second degree.

3. The author has applied the same principles and the same method to equations of the third and forth degree, and he has given for these degrees tables similar to those we have recalled. (*See* his *Mémoires donnés à l'Académie Royal...* , printed in 1764.)

The extent of these tables increases in proportion to the number of combinations of the different factors, and the investigation of the proper conditions from each combination or system becomes more and more difficult, from which it happens often that the conditions which result from the equality of some particular ones of these quantities *a, b, c, ...* , which are considered to form a decreasing series, are put in place for more than one system at the same time, and it is then necessary to find the conditions distinguishing between these same systems.

The author has not given any general rule on this subject; he contents himself to try successively more and more simple coefficients *m, n, p, ...* of the equation, until he finds one which shall be null in the common case of two systems, and which must be greater than zero in the one and less than zero in the other.

This is the case, for example, where, having found for the equation

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

that the two systems

$$(x+a)(x+b)(x+b) \text{ and } (x+a)(x+a)(x+b)$$

have the same equation for the condition

$$4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 = 0,$$

he looks for a function of the form

$$Am^2 + Bn, \text{ or } Am^3 + Bmn + Cp, \text{ or } ...$$

such that it shall be $= 0$ in the common case $a = b$, and it shall be > 0 for the first system and < 0 for the second; he find this one:

$$2m^3 - 9mn + 27p ,$$

which satisfies both these conditions.

Although the author may have been able to find these functions for all the cases of the third and fourth degree, one can doubt whether in general to find these in the equations of higher degree ; at least he has not shown that it necessarily always exists for functions which may have these properties ; hence the theory can be at fault also in this aspect.

4. For the remainder, we can find the preceding conditions directly, for, if we suppose that the equation

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

has a double factor $(x+\alpha)^2$, we will only have to divide the polynomial x^3+mx^2+nx+p by $x^2+2\alpha x+\alpha^2$; we will find the quotient $x+m-2\alpha$ and the remainder

$$(n-\alpha^2-2m\alpha+4\alpha^2)x+p+2\alpha^3-m\alpha^2;$$

then it will be required to make separately

$$3\alpha^2-2m\alpha+n=0,$$
$$2\alpha^3-2m\alpha^2+p=0,$$

from which we express:

$$\alpha=\tfrac{mn-9p}{2m^2-6n}.$$

This value, substituted into the first equation, gives

$$(mn-9p)^2+4(m^2-3n)(3mp-n^2)=0\,,$$

which is the common condition for the two systems.

Now, since the quotient $x+m-2\alpha$ forms the unequal factor of the equation, we will make

$$\alpha=b,\ m-2\alpha=a \text{ for the system } (x+a)(x+b)(x+b),$$
$$\alpha=a,\ m-2\alpha=b \text{ for the system } (x+a)(x+a)(x+b);$$

therefore, since by hypothesis $a>b$, we will have

$$m-2\alpha>\alpha \text{ or } m-3\alpha>0 \text{ for the first system,}$$
$$m-3\alpha<0 \text{ for the second system.}$$

But, on substiting the value of α, we have

$$m-3\alpha=\tfrac{2m^3-9mn+27p}{m^2-3n};$$

on the other hand, it is easy to be assured that, for the two systems, we have

$$m^2-3n>0,$$

so that the system $(x+a)(x+b)(x+b)$ gives

$$m=a+2b, n=2ab+b^2,$$

as resulting from the expansion; thus

$$m^2 - 3n = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$

and, since for the other system we only have to change *a* into *b,* we will have likewise:

$$m^2 - 3n = (a-b)^2.$$

Thus the conditions for the two systems will be simply :

$$2m^3 - 9mn + 27p > 0 \text{ for the first,}$$
$$2m^3 - 9mn + 27p < 0 \text{ for the second,}$$

as Fontaine has found.

5. But the same conditions which result from the equality of some of the quantities *a, b, c,* ... are not always particular to the systems in which these equalities are placed, as Fontaine assumes, which destroys one of the fundamental principles of his theory.
For example, he find in the third degree that, for the equation

$$x^3 + mx^2 - nx - p = 0,$$

the condition

$$2m^3 - mn - p = 0$$

is particular to the system

$$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$

and must distinguish it from all the others. But I have found that this condition also happens for the whole system of the form

$$(x+a)(x-b)(x+c),$$

which returns to the same formula of the equation, when $a + c = 2b$, which can also be shown *a priori.*
Hence, if we have the equation

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

as it satisfies the condition in question, since on making $m = 2,\ n = 5,\ p = 6$, we have

$$2.8 - 2.5 - 6 = 0,$$

we may be able to conclude regarding the table on p.546 of Fontaine's Collected Works that this equation has three factors of the form

$$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}),$$

and which as a consequence has two imaginary roots, while on the contrary it has three real factors

$$(x+3)(x-2)(x+1).$$

We can say the same thing about the condition

$$2^4.3^4n^4q+2^2.3^5n^3p^2+2^7.3^2.5^2n^2q^2$$
$$+2^4.3^2.5.7np^2q-3^3.7^3p^4+2^8.5^4q^3=0,$$

which Fontaine found (p. 568) for the common character of the two systems

$$(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}),$$
$$(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$

pertaining to the formula

$$x^4-nx^2+px-q=0.$$

This condition is not particular to these two systems ; it also occurs in the whole system of the form

$$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

pertaining to the same formula of the equations (p. 552), since we would have $b+d=2c$*;* which we can find *a priori,* but this in detail would lead us too far away.

6. We can conclude from these observations that it is not always possible to find the conditions which distinguish each system of factors from the factors of all the others, by not considering the quantities *a, b, c, ...* which enter into these factors of other relations, other than these of equality or inequality, following Fontaine's theory. But, when we could, the work to be done in order to find these in degrees above the fourth would be immense, and would not be even useful for the numerical resolution of equations, as we are going to show in examining the second part of the method.

7. As soon as we have found, as the author assumes, the form of each factor of the propsed equation, it will only remain to determine the values of the quantities *a, b, c, ...* which enter into these factors, and which we know to be all positive and unequal ; and here is how he does this. He expands the products of the factors, and, comparing them to the proposed equation, he has just as many equations as indeterminates *a, b, c, ...* ; he

eliminates all these quantities, except two that he proposes to determine: thus he has two equations between these two quantities; he makes the greater of these quantities $=\mathrm{R}\alpha$ and the smaller $=\mathrm{R}\beta$, and, eliminating R, he has an homogenous equation between α and β, in which he substitutes $x\varphi+y$ for α and $z\varphi+u$ for β.

At first he assumes $x=1,\ y=0,\ z=0,\ u=1$; he has an equation in φ in which he makes successively $\varphi=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ until he finds two results of opposite sign ; then he makes $\varphi=\mathrm{A}$, A being the smaller of the two numbers which have given the results of opposite sign; thus

$$\alpha=\mathrm{A},\ \beta=1.$$

Then he makes $x=\mathrm{A},\ y=1,\ z=1,\ u=0,$ et, dans l'équation résultante en φ, il cherche de même deux substitutions qui donnent des résultats de signe contraire; nommant B le plus petit des deux nombres, il fait $\varphi=\mathrm{B}$; donc

$$\alpha=\mathrm{AB}+1,\ \beta=\mathrm{B}.$$

He continues in the same manner by making x equal to the last value of α, y from the last, z from the last value of β and u from the value before that.

Then substituting successively these values of α and β into the rational expression for R which gives two equations, we have these of a and b, all the more exactly as the operations on α and β have been pushed further along.

In order to give an example, I am going to refer to that which one finds in the *Mémoires de l'Académie* of 1747, p. 672.

Let the equation be

$$x^2-3x+1=0;$$

as it refers to the formula x^2-mx+n, on making $m=3,\ n=1$, if we examine the conditions relating to this formula in the table given above, we find that this one

$$m^2-4n>0$$

occurs ; from which e concluded that the two factors are of the form

$$(x-a)(x-b)$$

Thus we have, on expanding, $a+b=3$ and $ab=1$.

Let $a=\mathrm{R}\alpha, b=\mathrm{R}\beta$; we will have $\mathrm{R}(\alpha+\beta)=3,\ \mathrm{R}^2\alpha\beta=1$; thus, $\mathrm{R}=\frac{3}{\alpha+\beta}$ and $9\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$,
namely,

$$\alpha^2-7\alpha\beta+\beta^2=0,$$

where we will make $\alpha = x\varphi + y$ and $\beta = z\varphi + u$.
There shall be :
1° $x=1,\ y=0,\ z=0,\ u=1$; thus $\alpha=\varphi,\ \beta=1$; substituting these values, we have

$$\varphi^2 - 7\varphi + 1 = 0 \;;$$

making $\varphi = 1,\ 2,\ \ldots$ until $\varphi = 6$, we have negative results; but $\varphi = 7$ gives the result 1, thus $\varphi = 6$; thus

$$\alpha = 6,\ \beta = 1,\ \mathrm{R} = \tfrac{3}{7}.$$

2° $x=6,\ y=1,\ z=1,\ u=0;$ thus $\alpha = 6\varphi+1,\ \beta=\varphi,$ and we have the equation

$$5\varphi^2 - 5\varphi - 1 = 0.$$

Here $\varphi = 1$ gives the result $-1,\ \varphi = 2$ gives 9; thus $\varphi = 1$, and from that

$$\alpha = 7,\ \beta = 1,\ \mathrm{R} = \tfrac{3}{8}.$$

3° $x=7,\ y=6,\ z=1,\ u=1;$ donc $\alpha = 7\varphi+6,\ \beta=\varphi+1,$ and, substituting, we have the equation

$$5\varphi^2 - 5\varphi - 5 = 0.$$

Making $\varphi = 1,\ 2,\ldots$ as far as $\varphi = 5$, we have negative resultis; but $\varphi = 6$ gives the result 1, thus $\varphi = 5$; and from that

$$\alpha = 41,\ \beta = 6,\ \mathrm{R} = \tfrac{3}{47},$$

and hence so forth.

8. Such is the method of approximation that Fontaine has given without demonstration in his memoir of 1747 and which he has given again likewise in the Recollection of his Memoirs. It assumes, as one sees, that we can always, by substituting the numbers 1, 2, 3, ... in place of φ in the different equations in φ to find two numbers which give results of opposite sign, which, by what we have shown in Chaper 1 (§5 and the following), can only be used in these equations of which the least difference of the positive roots is greater than one. After this consideration, it is easy to find where Fontaine's method will be at fault.

Let there be, for example, the equation

$$x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0,$$

which is associated with the formula $x^3 - mx^2 - nx + p,$ on making $m=2, n=23, p=60$. The table on page 547 of Fontaine's *Recueil des Mémoires* gives these three conditions

$$4(m^2+3n^2)(n^2+3mp)-(-mn+9p)^2>0,\ mn-p<0,\ m^2-n<0,$$

for the system

$$(x+a)(x-b)(x-c),$$

which conditions are found to be satisfied here, if it follows that this system is that of the proposed equation.

In order to find the three unequal positive quantities *a, b, c, ...* , we will compare the product of the factors

$$x^3+(a-b-c)x^2+(-ab-ac+bc)\,x+abc$$

with the given equation ; we will have these three equations

$$a-b-c=-2,\ -ab-ac+bc=-23,\ abc=60\,.$$

Eliminating *c,* we will have $c=a-b+2$, and the two other equations will become

$$a^2-ab+b^2+2(a-b)=23,$$
$$(a-b)ab+2ab=60;$$

and, making $a=\mathrm{R}\alpha,\ b=\mathrm{R}\beta$, we will have

$$\mathrm{R}^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+2\mathrm{R}(\alpha-\beta)=23,$$
$$\mathrm{R}^3(\alpha-\beta)\alpha\beta+2\mathrm{R}^2\alpha\beta=60.$$

Finally, eliminating R, we will have a homogeneous equation of the sixth degree in α and β, reducable to this form

$$\left[20(\alpha^2+\beta^2)-41\alpha\beta\right]\left[15(\alpha^2+\beta^2)-34\alpha\beta\right]\left[12(\alpha^2+\beta^2)+25\alpha\beta\right]=0.$$

Now we make, following Fontaine, $\alpha=x\varphi+y,\ \beta=z\varphi+u$, and we will assume in the first operation : $x=1,\ y=0,\ z=0,\ u=1$, which gives

$$\alpha=\varphi,\ \beta=1;$$

thus the equation will become :

$$\left[20(\varphi^2+1)-41\varphi\right]\left[15(\varphi^2+1)-34\varphi\right]\left[12(\varphi^2+1)+25\varphi\right]=0,$$

and it will be necessary to make successively $\varphi = 1, 2, 3,\ ...$ until where we can find two values of φ which give results of opposite sign, which never happens, the results being positive always, as it is easy to convince onself of that by a simple inspection of the equation. Thus the method will be at fault from the first operation.

It is easy to see that one can have negative results only on giving a negative value to φ between 1 and 2. For example, on making $\varphi = \frac{3}{2}$, we find the result $-\frac{7.9.153}{16}$; but that is contrary to the spirit of Fontaine's method, which assumes that α and β are always whole numbers. Besides, if we wished to allow fractional numbers for φ, it would be better simple to operate at once on the proposed equation, in searching for two values of the unknown which give results of opposite sign; but the recognition of the form of the factors, which is the object of Fontaine's tables, become useless for this investigation, and the difficulty of the problem in its entirety.

We will note finally that, since in the first operation one made $\varphi = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$, the equation in φ always will be, generally speaking, of a degree higher than the proposed equation, for, if *a* and *b* are two real roots, the roots of the equation in φ will be all the quotients formed dividing one root by the other ; such that, if *m* is the degree of that proposed, $m(m-1)$ will be that of the equation in φ which besides necessarily will be of the nature of the reciprocals.

But if, *a* being one real root, *b* may be the real part of two imaginary roots, then $\frac{a}{b}$ may be the quotinet of one root divided by the half sum of the other two roots, and the equaton in φ shall be of degree $\frac{m.(m-1)(m-2)}{2}$.

9. For the rest, as the equation in α and β that we find by Fontaine's procedure is necessarily a homogeneous equation, it has only, to talk properly, a single unknown $\frac{\alpha}{\beta}$ and the substitution of $x\varphi + y$ in place of α and of $z\varphi + u$ in place of β at once comes back to substitute $\frac{x\varphi+y}{z\varphi+u}$ in place of the unknown of this equation ; now this formula is the general expression of convergent fractions which give rise to a continued fraction, in which φ represents successively the denominators of this fraction, and $\frac{y}{u}$, $\frac{x}{z}$ are the two successive fractions which precede the fraction $\frac{x\varphi+y}{z\varphi+u}$, as it arises from the known theory of continued fractions. Hence it appears that Fontaine has sought how to express the ratio between these quantities α and β, which is the same as that between the quantities *a* and *b,* by these the converging fractions depend on the continued fractions; but the difficulty consists in determining the values of φ when the fraction $\frac{a}{b}$ is only given by an equation. [*See above* Article IV (§78).]

I have extended myself a little on the analysis of Fontaine's method, since I know only at present of two authors who have spoken about it, d'Alembert in *l'Encyclopédie,* for the word *Équation,* and Condorcet in *l'Histoire de l'Académie des Sciences* for the years

1771 and 1772, and that both have been content to cast doubts on this method without giving the means of appreciating it.

NOTE VIII.

ON THE BOUNDS OF THE ROOTS OF EQUATIONS AND ON THE CHARACTERISTICS OF THE REALITY OF ALL THEIR REAL ROOTS.

The investigation of the bounds of roots is the first problem which arises in the theory of equations, following that of their general resolution. As this resolution is limited here as far as the fourth degree, and as it has been shown by the consideration of the functions of the roots that, if it were possible beyond this degree, this can only be by the resolution of equations of a much higher degree, which may give expressions intractable by their complexity, we can say that it is the problem of the bounds on which the whole art of solving equations now depends. Indeed, as soon as we have found the particular bounds for each root, we can restrict them by successive substitutions and hence approach as close as we wish to the value of the root.

1. Before the end of the 18th century, one had felt the necessity of considering this problem, and, as soon as it had been found that the equation formed by multiplying each term of a given equation by the exponent of its unknown, contained the conditions of the equality of the proposed roots, we soon discovered that the roots of this same equation thus formed were the bounds of the primitive equation of these. [Now known as Hudde's two rules.] We know that Hudde is the author of the first of these two important discoveries, and I think that the second is due to Rolle, who has given it in his *Algèbre,* printed in 1690, and who has made the method of cascades the base of his method. Following this method, the bounds of the roots of an equation depend likewise on an equation of degree less by one, and hence accordingly; such that, in order to arrive at the boundaries of the roots of the proposed equation, it will be required to resolve these different successive equations , which always procede by lowering by one degree. (*See the analysis shown by* Reyneau, where this method has been set out in great detail.) But the length of the calculation which it demands and the uncertainty arising from imaginary roots have made it abandonned for a long time, and one would perhaps be obliged to renounce that for a general method for resolving equations if one had not been found, in order to determine the bounds of the roots by a means independent of the resolution of the whole equation, as we have seen in Chapter I and in Note lV.
The consideration of the maxima and minima of parabolic lines has led Stirling to a method for determining the number and bounds of real roots of the third and fourth degree, which has been generalised by Euler in his *Calcul différentiel.* This method returns to that of Rolle fundamentally; but it embraces equally real and imaginary roots, and may be able to provide general formulas in order to distinguish these roots in equations of the fifth degree, by means of roots in the fourth.

The same consideration has enabled a method to be found by De Gua for determining the true nature of all the roots of some equation. (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1741.)

We have seen that this problem also can resolve this problem by means of the equation of which the roots are the squares of the differences between the roots of the given equation; but this solution is based on the same form of the imaginary roots, in place of which De Gua's theory is independent of this form, and his method had the further advantage of depending only on the calculation of equations of degrees less than that of the proposed equation.

As these different methods are interesting by themselves, and again more by the use which they can provide in many occasions, I have thought that it would be quite easy to gather together these found here and to deduce from the same theory, founded uniquely on the first principles of the analysis of equations.

2. In general $\mathrm{F}(x)$ shall be a rational function without common divisor, such that

$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots + \mathrm{V};$$

and if we call $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$ the real roots of the equation

$$\mathrm{F}(x) = 0,$$

that's to say the values of x which are able to satisfy this equation, we will have the identical equation

$$\mathrm{F}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.\times f(x),$$

$f(x)$ being a similar function of x, but of a degree less than m, and which will never become null or negative, whatever value may given to x (Note II).

This equation must have a place whatever the value of x may be, also on putting $x+i$ in place of x, whatever the value of i may be ; thus, expanding the functions according to the powers of i, it will be necessary that all the terms associated with the same power of i mutually cancel each other, which will give at last just as many identical equations as one would wish to find thus from the actual expansion. But, as these new equations are none other than what we have called *derived* in the *Théorie des Fonctions,* we will employ here, for the simplest, the notation and the algorithm of that theory, and the application we are going to put in place for the equations will provide a new example of its usage in algebra, of which it is properly only a branch .

3. For brevity, designating the function

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.;$$

by $\varphi(x)$, we will have the identical equation

$$\mathrm{F}(x)=\varphi(x)\times f(x),$$

from which we will express the derived equation at once

$$\mathrm{F}'(x)=\varphi'(x)\times f(x)+\varphi(x)\times f'(x),$$

and we will find

$$\begin{aligned}&\varphi'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ \dots\ +(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\ \dots\\&+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)\ \dots\ +(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \dots\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Assuming that the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\dots$ shall be arranged in order of magnitude, on starting from the largest positive ones and ending with the largest negative ones. It is easy to see, by the nature of the function $\varphi'(x)$, that on making $x=\alpha$ we will have $\varphi'(x)>0$, that on making $x=\beta$ we will have $\varphi'(x)<0$, on making $x=\gamma$ we will have $\varphi'(x)>0$, and thus henceforth. On the one hand, on making $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\dots$, we always have $\varphi(x)=0$ and $f(x)>0$, from the nature of these functions. Hence

$$\begin{aligned}x&=\alpha, \text{ will give } \mathrm{F}(x)>0,\\x&=\beta, \quad\text{"}\quad \mathrm{F}(x)<0,\\x&=\gamma, \quad\text{"}\quad \mathrm{F}(x)>0,\end{aligned}$$

and thus henceforth.

Now, on taking the derived function of the polynomial F(x), we have

$$\mathrm{F}'(x)=mx^{m-1}+(m-1)\mathrm{A}x^{m-2}+(m-2)\mathrm{B}x^{m-3}+\ \dots+\mathrm{T};$$

hence the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, which is of degree $m-1$, necessarily will have real roots which fall between the values of the roots α and β, β and γ, γ and δ, ... (Note 1).

4. Designating the real roots of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$ by $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\dots$, and we will demonstrate in the same manner that

$$\begin{aligned}x&=\alpha_1, \text{ will give } \mathrm{F}''(x)>0,\\x&=\beta_1, \quad\text{"}\quad \mathrm{F}''(x)<0,\\x&=\gamma_1, \quad\text{"}\quad \mathrm{F}''(x)>0,\end{aligned}$$

and thus henceforth.

From where it follows that the equation $F''(x)=0$, in which

$$F''(x)=m(m-1)x^{m-2}+(m-1)(m-2)Ax^{m-3}$$
$$+(m-2)(m-3)Bx^{m-4}+\ ...+2S,$$

also will have real roots which will fall between the values of the roots α_1 and β_1, β_1 and γ_1,..., and thus henceforth.

It follows that we are going to develop the consequences of these different formulas.

If the original equation $F(x)=0$ has two equal roots, the derived equation $F'(x)=0$ will have one root which, before falling between these two, will still be their equal; consequently, the factor which will contain this root will be a common divisor of the two polynomials $F(x)$ and $F'(x)$, which is evident besides, because the polynomial $F(x)$ containing the square factor $(x-\alpha)^2$, the polynomial $F'(x)$ will still contain the simple factor $x-\alpha$. Hence the equation $F'(x)=0$ contains the condition so that one of the roots of the equation $F(x)=0$ shall be double.

We will show in the same manner that, if the equation $F(x)=0$ has three equal roots, the factor which is going to contain this root will be a common divisor of the three polynomials $F(x)$, $F'(x)$ and $F''(x)$, and that the two equations $F'(x)=0$, $F''(x)=0$ contain the conditions so that the equation $F(x)=0$ may have three equal roots, and hence soforth, which gives the known theorems about equal roots.

5. Considering at first the real roots of the equation $F(x)=0$, in as much as they can be positive or negative, and assuming that it may have the number p of positive roots and the number q of negative roots. Hence the equation $F'(x)=0$ will have necessarily $p-1$ real positive roots, $q-1$ real negative ones, and further a real root which may be positive or negative, for, since between two consecutive roots of the equation $F(x)=0$ necessarily there falls one of the equation $F'(x)=0$, there will fall $p-1$ positive roots between the p positive ones, $q-1$ negative ones between the q negative ones, and one between the smallest positive and the first negative, which will be either positive or negative.

Thus, if the equation $F(x)=0$ has more positive roots than the equation $F'(x)=0$, it can only have one more, et, and if it has more negative roots than that, it can only have one more.

Now, as the whole equation has always an even or odd number of positive roots, following which its last term is positive or negative (Note II), it follows that, if the last terms without x of the equations $F(x)=0$, $F'(x)=0$ are of the same sign, the equation $F(x)=0$ cannot have one positive root more than the equation $F'(x)=0$; thus, in this case, it can only have one negative root more than this last equation, and consequently also it can only have one positive root more than that in the case where the last terms of the same equations will be of different signs.

Thus, in general, the equation $\mathrm{F}(x)=0$ can only have one positive or negative root more than the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, according as their last terms are of different or of the same signs. For the same reason, the equation $\mathrm{F}'(x)=0$ will only be able to have one positive or negative root more than the equation $\mathrm{F}''(x)=0$, following which their last terms will be of different or the same signs, and thus henceforth.

Now we see, by the above formulas, that the last term of the equation $\mathrm{F}(x)=0$ is V, the last term of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$ is T, while the last term of the equation $\mathrm{F}''(x)=0$ is 2S, and thus henceforth; such that, on taking these equations in reverse,

The $(m-1)^{ième}$ will have for the last term $2.3 \ldots (m-1)\mathrm{A}$,
The $(m-2)^{ième}$ " $2.3 \ldots (m-2)\mathrm{B}$,
The $(m-3)^{ième}$ " $2.3 \ldots (m-3)\mathrm{C}$,

and thus henceforth. But the $(m-1)^{th}$ equation, where $\mathrm{F}^{(m-1)}(x)=0$, become

$$2.3.4 \ldots mx + 1.2.3 \ldots (m-1)\mathrm{A} = 0,$$

which has, as we see, the positive or negative root $-\frac{\mathrm{A}}{m}$ following which A is negative or positive. Hence the $(m-2)^{th}$ equation cannot have a positive or negative root greater than that as long as B will be of the different or the same sign as A. Likewise, the $(m-3)^{th}$ equation cannot have a positive or negative root greater than the $(m-2)^{th}$ provided C will be of the different or of the same sign as B, and thus henceforth.

From which we can conclude that the equation $\mathrm{F}(x)=0$, or

$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots + \mathrm{V} = 0,$$

cannot have in this equation more positive or negative roots than it has of consecutive terms of different signs or of the same sign, that's to say, of the variations or constancies of the signs; as a consequence, if the equation has all its roots real, it will have just as many positive roots as sign variations, and just as many negative roots as constant signss.

This is the famous theorem of Descartes, which the English attribute to Harriot, and of which we have different demonstrations given by De Gua in the *Mémoires de Paris,* by Segner and Aepinus in these of Berlin, by Krestner in Newton's *Commentaire sur l'Arithmétique*, etc. I have brought forwards the preceding because it arises naturally from our analysis ; however the simplest of these demonstrations is that which Segner has given in the *Mémoires de Berlin* for the year 1756. It consists simply by showing that in multiplying some equation by $x-a$ we increase the number of the variations of the sign by one, and on multiplying by $x+a$ we also increase by one the number of constancies, which shall be the value of the coefficients of the equation.

6. We are now going to consider the roots of the equation $\mathrm{F}(x)=0$ as real or imaginary.

As above, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ shall be the real roots of the equation $\mathrm{F}(x)=0$, and $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$ the real roots of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, these roots being arranged in order of magnitude. I say that the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ can only have one root greater than α_1, that another falls between α_1 and β_1, another falls between β_1 and γ_1, and so forth hence, and at last a single root one smaller than the smallest of the quantities $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$; as if α and β, for example, were both greater than α_1, since between the two roots α and β, necessarily there must fall a root of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, this assumed root would always be greater than α_1 ; thus α_1 shall not excede the largest root of $\mathrm{F}'(x)=0$, as we suppose. In the same manner, if the two roots β and γ at the same time may fall between the two roots α_1 and β_1, since between β and γ, by necessity there must fall a root of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, this root also may fall between α_1 and β_1, contrary to the hypothesis, since these are assumed to follow relative to their magnitude, and thus so forth. Finally, if several of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ may be found smaller than the smallest of the roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$, then necessarily these must fall between the roots of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, these roots thus will still be smaller than the smallest of the same roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$, which cannot happen.

Now, since in general we have

$$\mathrm{F}(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ ...\ \times f(x),$$

it is clear that on substituting α_1 in place of *x,* if each of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ is not greater than α_1, the value of $\mathrm{F}(x)$ will be positive, and, if the single root α is greater than α_1, the value of $\mathrm{F}(x)$ will become negative, since in the first case all the factors will be positive, and in the second case only the first will be negative, the polynomial $f(x)$ always maintaining a positive value.

Assuming next that we have substituted β_1 in place of *x,* and, if none of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ may fall between α_1 and β_1, this substitution will give a value of $\mathrm{F}(x)$ of the same sign as the substitution of α_1; but it will give a value of the contrary sign if one of the roots falls between α_1 and β_1. For it is seen that the whole product, as $(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\alpha)$, necessarily is always positive as long as the quantity α at the same time is greater or less than each of the quantities α_1, β_1, but on the contrary it is necessarily negative if the quantity α is found between the two quantities α_1 and β_1, that is greater than one and less than the other. Now the substitution of α_1 in place of x in $\mathrm{F}(x)$ gives

$$(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)(\alpha_1-\gamma)\ \ldots\ \times f(\alpha_1),$$

and the substitution of β_1 in place of x in the same function gives

$$(\beta_1-\alpha)(\beta_1-\beta)(\beta_1-\gamma)\ \ldots\ \times f(\beta_1);$$

thus the product of these two quantities, in order to know the value of $\mathrm{F}(\alpha_1)\times\mathrm{F}(\beta_1)$, will be of the form

$$(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)(\beta_1-\beta)(\alpha_1-\gamma)(\beta_1-\gamma)\ \ldots\ \times f(\alpha_1)\times f(\beta_1).$$

Thus this product will be positive if none of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ fall between the quantities $\alpha_1,\ \beta_1,$ and it will be negative if a single one of the quantities $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ falls between the quantities $\alpha_1,\ \beta_1,$ since the quantities $f(\alpha_1)$ et $f(\beta_1)$ essentially are always positive ; consequently, the values of $\mathrm{F}(\alpha_1)$ and of $\mathrm{F}(\beta_1)$ will be of the same sign in the first case and of opposite signs in the second.

We will show in the same manner that the substitution of γ_1 in place of x in $\mathrm{F}(x)$ will give a result of the same sign or of the contrary sign to that of the substitution β_1, according to whether none of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ fall between α_1 and $\gamma_1,$ or that one may fall there, and thus henceforth.

Finally, if we designate by v_1 the last in the magnitudes of the roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$, we will find, from the expression of $\mathrm{F}(x)$ in factors, that the result of substituting v_1 in place of x in $\mathrm{F}(x)$ will be positive or negative, following which none of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ will be smaller than v_1, or it will have one root smaller than v_1, the number of these roots being even, and that, when this number will be odd, the same result will be on the contrary positive or negative, following which one of the same roots will be smaller than v_1, or none of these will be less than v_1. Now, since the number of imaginary roots is always even, the number of real roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ of the equation $\mathrm{F}(x)=0$ necessarily will be even or odd, according to the total number of roots, that is, the degree m of the equation will itself be even or odd.

7. Thus we will be able always to judge the nature of the roots of some equation of degree *m,* $\mathrm{F}(x)=0$, by these of the derived equation $\mathrm{F}'(x)=0$, which is always less by a degree of one unit, for, having the real roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,v_1$, of that, which we can assume arranged in order of magnitude, it will only be required to substitute these successively in place of x in the proposed equation; and from that we may conclude:

1° That the equation will or will not have a root greater than α_1, provided that $\mathrm{F}(\alpha_1)$ will be $<$ or >0;

2° That the equation will or will not have a root included between α_1 and β_1, according as $\mathrm{F}(\beta_1)$ will be of a different or of the same sign as $\mathrm{F}(\alpha_1)$;

3° That the equation will or will not have a root included between β_1 and γ_1, according as $\mathrm{F}(\gamma_1)$ will be of a different or of the same sign as $\mathrm{F}(\beta_1)$, and hence so forth;

4° And that finally the equation will or will not have a root smaller than v_1, according as v_1 will be positive or negative in the case of m odd, and negative or positive in the case of m even.

Thus we will know by these rules not only the number of real roots of the proposed equation, but again their bounds, and, if we wish to complete these limits with regard to the roots greater than α_1 or smaller than v_1, we would have only to investigate the bounds of the positve and negative roots, by the methods of Chaper IV (§12).

We note here, on the occasion of the rules given here for finding these bounds after Newton and Maclaurin, that Rolle knew them already, as you can see from Chapters V and VI of the second Book of his *Algebra.*

8. We have assumed up to this point that the proposed equation would have imaginary roots mixed with the real ones; presently we examine what must happen in the assumption that all the roots shall be real.

It is evident at first that the equation $\mathrm{F}(x)=0$ of degree m will have m real roots and the derived equation $\mathrm{F}'(x)=0$ of degree $m-1$ necessarily also will have $m-1$ real roots, since, between two consecutive real roots of the equation $\mathrm{F}(x)=0$, there always falls a real root of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$. On the same account, the second derived equation $\mathrm{F}''(x)=0$ also necessarily will have all its roots, and hence so forth.

Hence the first condition so that an equation may have all its roots real is that its derived equations also may have all their roots real; but these in turn may be able to have all their roots real without the initial equation having had any.

Assuming thus that all the $m-1$ roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$ of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$ shall be real, and observing what the necessary conditions must be in order that the m roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ of the equation $\mathrm{F}(x)=0$ also shall be real. Since we have shown, in general, that the real roots of the equation $\mathrm{F}(x)=0$ cannot fall more than once into each interval between two consecutive roots of the equation $\mathrm{F}'(x)=0$, and that also it can only have one greater and one smaller root than the greatest and smallest root of this equation, it is again evident that, when these roots are all real and of number *m,* they must be necessarily such that α shall be greater than α_1, that β falls between α_1 and β_1, that γ falls between β_1 and γ_1, and so henceforth. On the other hand, if they are not all real, as the number of reals then would be unable to surpass $m-2$ and as a consequence would be less than that of the roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...,$ it is seen that the same disposition cannot occur and that necessarily there would be some interval between these last roots in which none of the these would fall of the equation $\mathrm{F}(x)=0$, or at least that none of these would be greater or less than the greatest or least of the roots $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,...$

Thus, by that which has been shown above, if on substituting successively in place of x in F(x) all the roots $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,...$, we will have necessarily in the first case

$$\mathrm{F}(\alpha_1)<0,\ \mathrm{F}(\beta_1)>0,\ \mathrm{F}(\gamma_1)<0,...,$$

and, in the second case, there will be one or more of these conditions which cannot be satisfied.

On the one hand, on substituting successively the same roots $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,...$ into the second derived function $\mathrm{F}''(x)$, we will have always, as we have seen above,

$$\mathrm{F}''(\alpha_1)>0,\ \mathrm{F}''(\beta_1)<0,\ \mathrm{F}''(\gamma_1)>0,...$$

Thus, on combining these conditions with the preceding ones, we will conclude that, when the roots of the given equation $\mathrm{F}(x)=0$ are all real, the quantities

$$\mathrm{F}(\alpha_1)\times\mathrm{F}''(\alpha_1),\ \mathrm{F}(\beta_1)\times\mathrm{F}''(\beta_1),\ \mathrm{F}(\gamma_1)\times\mathrm{F}''(\gamma_1),...$$

will all be negative, and that on the contrary, it will necessarily have positive values if the given equation has imaginary roots.
We shall have the same result if we consider the quotients

$$\frac{\mathrm{F}(\alpha_1)}{\mathrm{F}''(\alpha_1)},\ \frac{\mathrm{F}(\beta_1)}{\mathrm{F}''(\beta_1)},\ ...,$$

and in general the functions of the form

$$\mathrm{M}\left[\mathrm{F}(\alpha_1)\right]^{\mu}\left[\mathrm{F}''(\alpha_1)\right]^{\nu},\ \mathrm{M}\left[\mathrm{F}(\beta_1)\right]^{\mu}\left[\mathrm{F}''(\beta_1)\right]^{\nu},...$$

M being a positive coefficient or some essentially positive function, and $\mu,\ \nu$ some whole numbers positive or negative.

Now, if we make

$$\mathrm{F}(x)\times\mathrm{F}''(x)=y,\ \text{or, in general, } \mathrm{M}\left[\mathrm{F}(x)\right]^{\mu}\times\left[\mathrm{F}''(x)\right]^{\nu}=y,$$

and that we eliminate x next by means of the equation

$$\mathrm{F}'(x)=0,$$

of which the roots are $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,...$ we will have an equation in y of the same degree as this equation, and of which the roots will be the values of y which would result from the successive substitution of the roots $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,...$ in place of x. Thus, if these values are all negative, the equation in y will have only negative roots, and, consequently, all these terms will have the sign +. And reciprocally, if all the terms of this equation have the sign +, it will have only negative roots, and all the values of y will be negative.

9. We can conclude from that, that the circumstance of the real roots of the equation $\mathrm{F}(x)=0$ is that the derived equation

$$\mathrm{F}'(x)=0$$

has all its roots real, and that the equation in y resulting from the elimination of x by means of this last equation and from the equation

$$\mathrm{F}(x)\times\mathrm{F}''(x)=y, \text{ or } \mathrm{M}\left[\mathrm{F}(x)\right]^{\mu}\times\left[\mathrm{F}''(x)\right]^{\nu}=y,$$

has all its terms positive.

In applying the same reasoning to the derived equation $\mathrm{F}'(x)=0$, we can conclude also that the nature of the real roots are that the second derived equation

$$\mathrm{F}''(x)=0$$

has all its roots real, and from the equation in y resulting from the elimination of x by means of this and the equation

$$\mathrm{F}'(x)\times\mathrm{F}''(x)=y$$

has all its terms positive, and thus henceforth.

Thus finally, in order to have all the characteristics of the nature of the roots of the equation $\mathrm{F}(x)=0$:

1° Making

$$y=\mathrm{F}(x)\times\mathrm{F}''(x),$$

and on eliminating x by means of the equation

$$\mathrm{F}'(x)=0;$$

we will have the first equation in y.

2° Making

$$y=\mathrm{F}'(x)\times\mathrm{F}'''(x),$$

and on eliminating x by means of the equation

$$\mathrm{F}''(x)=0;$$

we will have the second equation in y.

3° Making

$$y=\mathrm{F}''(x)\times\mathrm{F}^{iv}(x),$$

and eliminating x by means of the equation

$$F'''(x)=0;$$

we will have the third equation in *y,* and thus henceforth.

These equations in *y* will be $m-1$ in number if the original equation $F(x)=0$ is of degree *m,* because the m^{th} function derived from F(*x*) will be constant and will not contain *x* further.

10. With that in place, the nature of the real roots of the equation $F(x)=0$ will be reduced to where all the terms of the different equations in *y* shall be positive, that's to say, of the same sign as the first term in each equation.

Now it is easy to see, the equation $F(x)=0$ being of degree *m,* that the derived functions $F'(x), F''(x), \ldots$ will be successively of degrees $m-1,\ m-2,\ \ldots$, and that the equations in *y* will also be of the same degrees ; as a consequence they will provide each of so many conditions, of such a kind that the total of these conditions will be

$$(m-1)+(m-2)+(m-3)+\ldots,\ \text{or}\ 1+2+3+\ldots+(m-1)=\tfrac{m(m-1)}{2}.$$

We have seen already (Chap. V, §28) that we can deduce the circumstances of the reality of all the roots of an equation from its *equation of differences,* which must have for that all its terms alternating positive and negative, which gives just as many differences as there are units in the degree of this equation ; such that, *m* being the degree of the proposed equation, $\frac{m(m-1)}{2}$ will be the number of conditions necessary for the reality of all the roots. Hence the two methods give the same number of conditions, which is the more remarkable because, in equations of the third and fourth degree, the conditions for the reality of the roots are reducable to a smaller number, as we have seen in the Chaper indicated (§ III).

But the preceding method has this advantage, that the conditions found for the reality of the roots of the equations of some degree can serve for all the higher degrees, which cannot happen with regard to those which result from the equations of differences. Hence we would be able to construct the tables which would contain successively the nature of the reality of all the roots, on beginning with the equation of the second degree, and rising successively to the equations of higher degrees.

11. In order to give a trial of these tables, we will begin with the simplest function of *x*, which is x^o or 1, which we will designate by X, and we will rise successively to the basic functions, which we will designate by $X_{/},\ X_{//},\ X_{///},\ \ldots$, such that X will be the derived function of $X_{/}$, $X_{/}$ the derived function of $X_{//}$, and thence so on. Hence we will have, on multiplying these functions by the numbers 2, 3, 4, ... to avoid fractions, and adding successively the constants A, B, C, ... ,

$$\begin{aligned}
&X = 1,\\
&X_{/} = x + A,\\
&2X_{//} = x^2 + 2Ax + B,\\
&2.3X_{///} = x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C,\\
&2.3.4X_{1v} = x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Now, for the equation of the second degree

$$x^2 + 2Ax + B,$$

we will have

$$y = 2XX_{//} = x^2 + 2Ax + B,$$

and we will eliminate x by means of the equation

$$X_{/} = 0, \text{ or } x + A = 0;$$

and we will have the equation in y

$$y + A^2 - B = 0.$$

Thus,

$$A^2 - B > 0$$

will be the condition of the reality of the roots of the proposed equation.

For the equation of the third degree

$$x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C = 0,$$

we will have at first the preceding condition ; from which we will have $y = 2.3X_{/}X_{//}$, to wit,

$$\begin{aligned}
y &= (x + A)(x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C)\\
&= x^4 + 4Ax^3 + 3(A^2 + B)x^2 + (3AB + C)x + AC,
\end{aligned}$$

and we will eliminate x by means of the equaton

$$X_{//} = 0, \text{ or } x^2 + 2Ax + B = 0,$$

we will find this equation of the second degree

$$y^2 + 2(Aa - b)y + a^2B - 2abA + b^2 = 0,$$

and on abbreviating to make

$$a = 2A^3 - 3AB + C,$$
$$b = A^2B - 2B^2 + AC;$$

thus we will have further these two conditions

$$Aa - b > 0,\ a^2B - 2abA + b^2 > 0.$$

For the equation of the fourth degree

$$x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D = 0,$$

we will have the three preceding conditions; then we will have

$$y = (x^2 + 2Ax + B)(x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D),$$

and, eliminating x by means of the equation

$$X_{///} = 0,\ \text{or}\ \ x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C = 0$$

we will have an equation in y of the third degree, which, being represented by

$$y^3 + My^2 + Ny + P = 0\,,$$

will give further the three conditions

$$M > 0, N > 0, P > 0,$$

and thence so on.

12. For the remainder, we must not forget a very pretty consequence which De Gua has expressed from his theory; consisting of this.

If in the equation $F(x) = 0$ we substitute $a + z$ in place of x, we have, by the formula of the development of functions, the transformation

$$F(a) + \frac{F'(a)}{1}z + \frac{F''(a)}{2}z^2 + \frac{F'''(a)}{2.3}z^3 + \ldots + z^m = 0,$$

of which we can make some term disappear, containing for example the power z^n, by determining a in such a way that we would have $F^n(a) = 0.$ Now, we come to see that, if all the roots of the equation $F(x) = 0$ are all real, the values of $F^{n-1}(a)$ and $F^{n+1}(a)$ are necessarily of opposite signs for all the values of x which result from the equation

$F^n(a) = 0$; thus also the values of $F^{n-1}(a)$ and of $F^{n+1}(a)$ will be of opposite signs for all the values of *a* resulting from the equation $F^n(a) = 0$. From which it follows that, if we make some one term of the transformation in *z* vanish, the two neighbouring terms necessarily will be of opposite signs if the proposed equation has all its root real; as a consequence, it will have imaginary roots if the neighbouring terms of that which vanishes are of the same sign, and from that we can conclude also that the whole equation which lacks these terms has by necessity imaginary roots if the neighbouring terms to these which are lacking, are of the same sign.

13. When all the roots of the equation are real, we can find their bounds without the aid of another equation, by means of the single rule of Descartes of which we have spoken above (n° 5); for, if we diminish for example, all the roots of an equation in x by the amount *a,* in substituting there $z + a$ in place of *x,* the equation transformed into *z* or $x - a$ will have less variations of sign than it will have positive roots of the equation in *x* which will become negative in the equation in $x - a$, and consequently, among the positive roots of the equation in *x,* it will have so many which will be less than *a.* Thus, if we form successively the transformations into $x-1,\ x-2,\ x-3,\ \ldots$, each variation in sign which will vanish from one transformation into another, for example by the transformed equation form $x - n$ into the transformation $x - n - 1$, will indicate a positive root less than $n+1$, but not less than *n,* and as a consequence to be contained between the bounds n and $n+1$. We will be able hence to find successively the first bounds of the positive roots, and we will have likewise these of the negative roots by the consideration of the unchanged signs in the transformed equations into $n+1,\ n+2,\ \ldots$.

14. I am unaware if this remark had been made before the memoir that Budan presented to the Institute in 1803, and that it came to be published with some parts augmented, under the title of *Nouvelle méthode pour la résolution des equations numériques.* There the author gives a simple and elegant means of forming the coefficients ot the transformed equations in $x-1,\ x-2,\ \ldots$, and applying Descartes rule to these transformations hence to other deductions from these, he finds the bounds of all the roots and their values to be approximated also as wished. One can say that this work leaves nothing to be desired in the resolution of numerical equations of which all the roots are real, and it could in this regard serve to supplement the present treatise.

For the rest, if the equation may have some imaginary roots, it may be able to dispense with the variations of sign from one transformed equation to another without any of the real positive roots becoming negative, as we can be convinced about that easily by some examples ; hence the equation

$$x^3 - 2x^2 + 6x - 11 = 0$$

has for a transformation by $x-1$

$$(x-1)^3 + (x-1)^2 + 5(x-1) - 6 = 0,$$

where we see that two variations of sign have disappeared; nevertheless , it has not any roots between 0 and 1.

But, if the number of variations of sign which may vanish from one transformation to another were odd, we could conclude the presence of a real positive root always, for that cannot happen unless the last term does not change sign. Now it is seen that the last terms of the transformations by $x-n,\ x-n-1$ are non other than the substitutions of n and of $n+1$ in place of x in the proposed equation, since these transformed equations are reducet to their last term on making $x=n=n+1$; hence it must be necessary to have a real root between n and $n+1$, (Chap. 1, §1). The equation transformed by $x-2$ in the equation above is

$$(x-2)^3+4(x-2)^2+10(x-2)+1=0,$$

which has one less variation than the preceding; so there is a root of the proposed equation between 1 and 2.

NOTE VI.

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION TIRÉE DES SÉRIES RÉCURRENTES.

1. Reprenons l'équation

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots = 0,$$

dont on a désigné les racines par $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots.$; on aura (Note II), par la nature de ces racines, l'équation identique

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots,$$

laquelle doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de *x*.

L'identité de l'équation subsistera donc encore en mettant $x+i$ au lieu de *x,* quelles que soient les valeurs de *x* et *i;* donc aussi, si après la substitution on développe suivant les puissances de *i,* les termes affectés de $i^2,\ldots$ fourniront d'autres équations identiques; ce seront les équations que nous avons appelées *dérivées* dans la *Théorie des fonctions.*

La première de ces équations dérivées sera

$$\begin{aligned}&mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - \ldots\\&= (x-\beta)(x-\gamma)\ldots + (x-\alpha)(x-\gamma)\ldots + (x-\alpha)(x-\beta)\ldots + \ldots.\end{aligned}$$

Divisons cette équation par l'équation identique ci-dessus; on aura

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + (m-2)\mathrm{B}x^{m-3} - \ldots}{x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots,$$

équation qui doit être aussi identique, quelle que soit la valeur de *x.* Donc elle le sera encore si l'on en développe les deux membres en séries qui procèdent suivant les puissances positives ou négatives de *x*.

2. Développons d'abord suivant les puissances négatives; la fraction qui forme le premier membre deviendra

$$\frac{\mathrm{P}}{x} + \frac{\mathrm{Q}}{x^2} + \frac{\mathrm{R}}{x^3} + \frac{\mathrm{S}}{x^4} + \ldots.$$

et, pour trouver les valeurs des coefficients P, Q, R, ... , il n'y a qu'il multiplier par le dénominateur $x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \ldots,$ et comparer ensuite les termes avec ceux du numérateur $mx^{m-1} - (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} + \ldots$: on aura ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P} = m,\\
&\mathrm{Q} = \mathrm{AP} - (m-1)\mathrm{A},\\
&\mathrm{R} = \mathrm{AQ} - \mathrm{BP} + (m-2)\mathrm{B},\\
&\mathrm{S} = \mathrm{AR} - \mathrm{BQ} + \mathrm{CP} - (m-3)\mathrm{C},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où l'on voit que la suite des quantités P, Q, R, ... devient après le $m^{ième}$ terme une suite récurrente, dont l'échelle de relation est $\mathrm{A},\ -\mathrm{B},\ \mathrm{C},\ -\mathrm{D},\ldots.$
Développant de même les fractions qui forment le second membre, il deviendra

$$\tfrac{m}{x} + (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\tfrac{1}{x^2} + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)\tfrac{1}{x^3} + (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots)\tfrac{1}{x^4} + \ldots.$$

Maintenant, la comparaison des termes semblables des deux membres de l'équation donne

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Q} = \alpha+\beta+\gamma+\ldots,\\
&\mathrm{R} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots.\\
&\mathrm{S} = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et, en général, un terme quelconque, dont le quantième sera μ à compter de Q, sera égal à

$$\alpha^\mu+\beta^\mu+\gamma^\mu+\ldots.$$

C'est l'expression du terme général de la série.

On a par là la démonstration la plus simple de la loi donnée par Newton pour la somme des puissances des racines. Mais les formules précédentes sont surtout utiles pour approcher de la valeur de la plus grande des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots.$ En effet, il est clair que, si toutes ces racines sont réelles et que α soit par exemple la plus grande des racines, soit qu'elle soit positive ou négative, la puissance μ surpassera d'autant plus les puissances semblables des autres racines, et même la somme de ces puissances, que l'exposant μ sera plus grand; d'où il s'ensuit que, si T et V sont des termes consécutifs de la série P, Q,R, ... , on aura à très-peu près $\alpha = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}$, et cette valeur de la racine α sera d'autant plus approchée que les termes dont il s'agit seront plus éloignés du commencement de la série.

3. Si parmi les racines $\beta,\ \gamma,\ldots$ il y en avait d'imaginaires, on aurait, par exemple,

$$\beta = \varpi + \rho\sqrt{-1}\ ,\ \ \gamma = \varpi - \rho\sqrt{-1};$$

alors, faisant $\sqrt{\varpi^2+\rho^2}=\Pi$ et $\frac{\rho}{\varpi}=\text{tang}\varphi$, on aurait

$$\beta=\Pi(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),\ \gamma=\Pi(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1});$$

donc, par le théorème connu,

$$\beta^\mu=\Pi^\mu(\cos\mu\varphi+\sin\mu\varphi\sqrt{-1}),$$
$$\gamma^\mu=\Pi^\mu(\cos\mu\varphi-\sin\mu\varphi\sqrt{-1}),$$

et par conséquent

$$\beta^\mu+\gamma^\mu=2\Pi^\mu\cos\mu\varphi.$$

Ainsi, pourvu que la racine α soit en même temps plus grande que Π ou $\sqrt{\varpi^2+\rho^2}$, c'est-à-dire plus grande que $\sqrt{\beta\gamma}$, la puissance a^μ surpassera aussi la somme de pareilles puissances de β et γ.

Donc la méthode ne sera en défaut, à cause des racines imaginaires, qu'autant qu'il s'en trouvera dans lesquelles le produit réel des deux racines correspondantes sera plus grand que le carré de la plus grande des racines réelles; et, dans ce cas, la série, au lieu de s'approcher et de se confondre à la fin avec une série géométrique, s'en éloignera continuellement.

4. Cette méthode rentre évidemment dans celle que Daniel Bernoulli a déduite de la considération des suites récurrentes, et qu'Euler a exposée en détail dans son *Introduction.* Dans celle-ci, on donne à la fraction génératrice de la série, pour numérateur, un polynôme quelconque d'un degré moindre que le dénominateur, ce qui rend les *m* premiers termes de la série entièrement arbitraires. Cette fraction se décompose dans les fractions simples

$$\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\frac{c}{x-\gamma},\ldots,$$

d'où résulte, pour les termes de la série, cette expression générale

$$a\alpha^\mu+b\beta^\mu+c\gamma^\mu+\ldots,$$

laquelle donne également, lorsque la racine α est beaucoup plus grande que chacune des autres, $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}$ pour la valeur approchée de α, quelle que soit la valeur du coefficient *a.* Mais l'indétermination des premiers termes de la série, au lieu d'être un avantage de cette méthode, est plutôt un inconvénient; car s'il arrive que les deux racines α, β soient égales, alors les deux termes $a\alpha^\mu+b\beta^\mu$ prennent en général la forme

$$(a'+b'\mu)\alpha^\mu,$$

et, si les trois racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont égales, les trois termes $a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}+c\gamma^{\mu}$ prennent la forme

$$(a'+b'\mu+c'\mu^2)\alpha^{\mu},$$

et ainsi de suite; d'où il est aisé de voir que, lorsque la plus grande racine α est une racine double ou triple, etc., la série converge bien moins rapidement vers une série géométrique. En prenant pour numérateur la fonction prime du dénominateur, ainsi que nous l'avons fait ci-dessus, tous les coefficients *a, b, c,* ... deviennent égaux à l'unité, et, dans le cas des racines égales α et β, les deux termes $\alpha^{\mu}+\beta^{\mu}$ deviennent simplèment $2\alpha^{\mu}$, et ainsi des autres; de sorte que les racines égales n'influent en rien sur la convergence de la série.

5. Pour donner un exemple de ce que nous venons de dire, je prendrai celui de l'article 346 de *l'Introduction* d'Euler. L'équation à résoudre est

$$x^3-3x^2+4=0;$$

Euler prend 0, 1 et 3 pour les trois premiers termes, et il forme par l'échelle de relation, 3, 0, − 4, la série récurrente

$$1,\ 3,\ 9,\ 23,\ 57,\ 135,\ 313,\ 711,...,$$

dans laquelle il observe que le quotient de chaque terme, divisé par le précédent, est toujours plus grand que 2, racine double, et en même temps la plus grande.

Si l'on emploie les formules données ci-dessus, en faisant

$$m=3,\ \mathrm{A}=3,\ \mathrm{B}=0,\ \mathrm{C}=4,$$

tous les termes P, Q, R, ... sc trouvent multiples de 3; de sorte que, rejetant ce facteur pour plus de simplicité, on trouve par la même échelle de relation, mais en partant des termes 1, 1, 3, la série

$$1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11,\ 21,\ 43,\ 85,\ 171,\ 341,\ ..\ ,$$

où l'on voit que le quotient de chaque terme, divisé par celui qui le précède, converge très-rapidement vers la racine double 2.

6. Nous avons développé plus haut l'équation identique

$$\frac{mx^{m-1}-...}{x^m-\mathrm{A}x^{m-1}+...}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\cdots$$

suivant les puissances négatives de *x;* développons-la maintenant suivant les puissances positives. Pour cela, soient

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ...$$

les derniers termes du polynôme

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - ...;$$

on mettra le premier membre de l'équation identique sous la forme

$$\frac{-b+2cx-3dx^2+4ex^3-...}{a-bx+cx^2-dx^3+ex^4-...},$$

ct le développement de cette fraction suivant les puissances croissants de x sera de la forme

$$-\mathrm{P}' - \mathrm{Q}'x - \mathrm{R}'x^2 - \mathrm{S}'x^3 - ...;$$

en multipliant par le dénominateur et comparant les termes, on trouvera

$$\begin{aligned}
&a\mathrm{P}' = b,\\
&a\mathrm{Q}' = b\mathrm{P}' - 2c,\\
&a\mathrm{R}' = b\mathrm{Q}' - c\mathrm{P}' + 3d,\\
&a\mathrm{S}' - b\mathrm{R}' - c\mathrm{Q}' + d\mathrm{P}' - 4c,\\
&.......................................,
\end{aligned}$$

ce qui donne une série récurrente dont l'échelle est

$$\frac{b}{a},\ -\frac{c}{a},\ \frac{d}{a},....$$

Le second membre de la même équation, étant développé pareillement suivant les puissances croissantes de x, donnera la série

$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+...\right)-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+...\right)x-\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}+...\right)x^2-...,$$

de soite qu'on aura par la comparaison

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+... = \mathrm{P}',\\
&\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+... = \mathrm{Q}',\\
&\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}+... = \mathrm{R}',\\
&.................................
\end{aligned}$$

Ces formules renferment la loi des sommes des puissances réciproques des racines.

Il est évident que, si α est la plus petite racine, soit positive ou négative, les puissances $\frac{1}{\alpha^{\mu}}$ surpasseront d'autant plus la somme des pareilles puissances des autres racines, que α sera plus petite que chacune des autres racines $\beta,\ \gamma,\ldots$. Par conséquent, si T' et V' sont deuxtermes consécutifs de la série $\mathrm{P}',\ \mathrm{Q}',\ \mathrm{R}',\ \ldots$, le quotient $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{V}'}$ approchera d'autant plus de la valeur de la plus petite racine réelle de l'équation, que ces termes seront plus éloignés du commencement de la série. Ainsi cette série servira à trouver la plus petite racine, comme la première P, Q, R, ... sert à trouver la plus grande; et, à l'égard des racines imaginaires, on prouvera de la même manière qu'elles n'empêcheront pas l'approximation vers la plus petite racine réelle, pourvu que le carré de cette racine soit en même temps plus petit que chacun des produits réels des racines imaginaires correspondantes.

7. On pourrait donc employer cette méthode d'approximation pour chacune des racines réelles d'une équation quelconque si l'on connaissait d'avance une valeur approchée a de cette racine, telle que la différence entre cette valeur et la vraie valeur de la racine fût moindre en quantité, c'est-à-dire abstraction faite des signes, que la différence entre la même valeur et chacune des autres racines réelles, et en même temps moindre que la racine carrée de chacun des produits des racines imaginaires correspondantes, s'il y en a, diminuées de la même valeur; car alors, en nommant a la valeur approchée de la racine cherchée et faisant $x = a + p$, on aura une transformée en p, dont la plus petite racine pourra se déterminer par la méthode précédente, et cette racine, jointe à la première valeur approchée, donnera la racine cherchée. Mais on ne saurait trouver les premières valeurs qu'en faisant usage des méthodes que nous avons données, et, ces valeurs étant une fois connues, il est hien plus exact d'employer la méthode d'approximation du Chapitre III; aussi ne suis-je entré dans ce détail sur la méthode d'approximation tirée des séries récurrentes que pour ne rien laisser à désirer sur le sujet dont il s'agit.

8. Si l'on veut appliquer la méthode précédente à l'exemple de Newton, on prendra d'abord la transformée (Note précédente)

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1;$$

ct, comme on sait que la racine réelle est moindre que 0,1, il s'ensuit que le produit des deux autres racines, qu'on sait être imaginaires, sera $> \frac{1}{0{,}1} > 10$, puisque le dernier terme r est le produit des trois racines; ainsi l'on est assuré que le carré de la racine cherchée est beaucoup moindre que le produit des deux racines imaginaires. On formera donc la série récurrente par le moyen de la fraction $\frac{10+12p+3p^2}{1-10p-6p^2-p^3}$ et l'on aura les termes

$$10,\ 112,\ 1183,\ 12512,\ 132330,\ldots,$$

qu'on peut continuer· aussi loin qu'on veut par l'échelle de relation 10, 6, 1 ; chacun de ces termes, divisé par le suivant, donnera les fractions

$$\frac{10}{112},\ \frac{112}{1183},\ \frac{1183}{12512},\ldots,$$

qui, étant réduites en décimales, deviennent

$$0{,}089,\ \ 0{,}09467\ \ 0{,}094549,\ 0{,}0945515,\ldots.$$

Or, nous avons vu dans la Note précédente que la méthode de Newton donne pour la valeur de p la série convergente

$$0{,}1\ \ 0{,}0946,\ 0{,}09455147,\ldots.$$

d'où l'on peut juger de l'accord des deux méthodes. En effet, nous ferons voir plus bas que ces méthodes, quoique fondées sur des principes différents, reviennent à peu près au même dans le fond et donnent des résultats semblables.

NOTE VII.

SUR LA MÉTHODE DE FONTAINE, POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

Comme on ne fait point usage de cette méthode, qui est d'ailleurs peu connue, je pourrais me dispenser d'en parler ici; mais le nom de l'Auteur et la manière dont il l'a annoncée m'engagent à en donner une idée abrégée et à examiner les principes sur lesquels elle est fondée. *Je la donne,* dit-il, *pour l'analyse en entier que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'Algèbre. (Voir* les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1747, p. 665.)

1. Cette méthode a deux parties. Dans la première, l'Auteur considère les équations comme composées de facteurs simples, réels ou imaginaires de la forme $x \pm a,\ x \pm a \pm b\sqrt{-1},$ et contenant un certain nombre de quantités réelles positives et inégales, *a, b, c,* .... Il parcourt toutes les combinaisons possibles des différents facteurs qu'on peut former de cette manière, et il cherche, pour chaque système de facteurs, dans les coefficients de l'équation, les conditions qui sont propres à ce système et qui peuvent le distinguer de tous les autres. Il forme ainsi des Tables qui contiennent tous les différents systèmes de facteurs et les conditions qui leur appartiennent, de manière qu'une équation quelconque étant proposée, dont les coefficients sont donnés en nombres, on puisse tout de suite reconnaître quel est le système de facteurs, dont elle peut être composée. Ainsi l'on saura sur-le-champ combien elle a de racines réelles inégales ou égales, positives ou négatives, et combien elle en a d'imaginaires, avec la forme de chacune des imaginaires.

2. Pour donner une idée plus nette de ce que je viens de dire à ceux qui ne sont pas à portée de consulter le Recueil des Mémoires de Fontaine, je vais rapporter ici la Table des équations du second degré, avec un précis de la méthode par laquelle l'Auteur l'a construite; ensuite je ferai quelques remarques sur cette méthode.

Dans les formules suivantes, les lettres *m, n* et *a, b* désignent des nombres ou des quantités quelconques positives, et l'on suppose que *a* est toujours une quantité plus grande que *b.*

$$x^2+mx+n=\begin{cases} (x+a)(x+a)\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-4n=0 \\ (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\ldots\ldots m^2-2n=0 \\ (x+a)(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-4n>0 \\ (x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\ldots\ldots \begin{cases} m^2+4n<0 \\ m^2-2n>0 \end{cases} \\ (x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\ldots\ldots m^2-2n<0, \end{cases}$$

$$x^2+mx-n=(x+a)(x-b),$$

$$x^2-mx+n=\begin{cases} (x-a)(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-4n=0 \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})\ldots\ldots m^2-2n=0 \\ (x-a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots m^2-4n>0 \\ (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})\ldots\ldots \begin{cases} m^2-4n<0 \\ m^2-2n>0 \end{cases} \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\ldots\ldots m^2-2n<0, \end{cases}$$

$$x^2-mx-n=(x-a)(x+b),$$
$$x^2+n=(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}),$$
$$x^2-n=(x+a)(x-a).$$

On voit d'abord dans cette Table toutes les combinaisons possibles des différents facteurs, qui ne peuvent être ici que

$$x\pm a,\ x\pm b,\ \text{ou}\ x\pm a\pm a\sqrt{-1},\ x\pm a\pm b\sqrt{-1}\ \text{et}\ x\pm b\pm a\sqrt{-1}.$$

Pour savoir à quelle forme d'équations chaque combinaison pouvait, se rapporter, on a développé les produits et on les a comparés aux équations, en faisant attention que la quantité a doit être plus grande que b. Jusque-là la méthode n'a de difficulté que la longueur du calcul, et tout l'art consiste à trouver les caractères ou conditions propres à chaque combinaison.

Ces conditions sont de deux sortes : les unes sont données par des équations déterminées, comme

$$m^2 - 4n = 0 \text{ ou } m^2 - 2n = 0;$$

ce sont celles qui ont lieu lorsqu'on suppose que la quantité b devient nulle ou devient égale à a . Elles ne sont pas difficiles à trouver, car, comme ces suppositions détruisent une des deux indéterminées a, b, en faisant la comparaison des termes résultant du produit des facteurs avec ceux de l'équation, on a une équation de plus qu'il n'y a d'indéterminées, de sorte que, par l'élimination, on parvient nécessairement à une équation de condition; c'est ainsi que les facteurs égaux $(x+a)(x+a)$ donnent la condition

$$m^2 - 4n = 0,$$

et que les facteurs $(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$ donnent

$$m^2 - 2n = 0.$$

Les autres conditions dérivent de celles-ci, en changeant le signe d'égalité dans celui de majorité ou de minorité. Elles résultent de cette considération que, si une fonction des coefficients m et n est nulle lorsque $a = b$ ou $b = 0$, elle sera plus grande ou plus petite que zéro lorsque a sera plus grand que b ou b plus grand que zéro.

Ainsi, comme le système $(x+a)(x+a)$ peut résulter de celui-ci

$$(x+a)(x+b),$$

en faisant $b = a$, ou de celui-ci

$$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}),$$

en faisant $b = 0$, la fonction $m^2 - 4n$, qui est nulle pour ce système là, ne le sera plus dans ces deux-ci, et l'on trouve que cette fonction est positive pour le système $(x+a)(x+b)$, et négative pour le systeme $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$.

L'Auteur suppose comme un principe général que la fonction qui est nulle dans le cas de la coïncidence de deux systèmes sera toujours plus grande que zéro dans l'un et moindre que zéro dans l'autre, et il détermine par un exemple particulier celui des systèmes où elle est positive et celui où elle est négative; mais cette proposition ne peut pas être admise sans démonstration, et il y a même de fortes raisons de douter qu'elle soit vraie en général.

Dans les cas dont il s'agit, on en peut prouver la vérité, car le système $(x+a)(x+b)$, étant développé, donne

$$x^2+(a+b)x+ab;$$

donc $m=a+b,\ n=ab,$ et par conséquent

$$m^2-4n=\left(a-b\right)^2,$$

quantité toujours positive. De même, le système

$$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})=x^2+2ax+a^2+b^2$$

donne $m=2a,\ n=a^2+b^2$, et

$$m^2-4n=-4b^2,$$

quantité toujours négative. On peut démontrer de la même manière les autres conditions pour les différents systèmes des équations du second degré.

3. L'Auteur a appliqué les mêmes principes et la même méthode aux équations du troisième et du quatrième degré, et il a donné pour ces degrés des Tables semblables à celle que nous venons de rapporter. (*Voir* le Recueil de ses Mémoires, imprimé en 1764.)

L'étendue de ces Tables augmente en proportion du nombre des combinaisons des différents facteurs, et la recherche des conditions propres à chaque combinaison ou système devient d'autant plus difficile, qu'il arrive souvent que les conditions qui résultent de l'égalité de quelques-unes des quantités *a, b, c, ...* , qui sont censées former une série décroissante, ont lieu pour plus d'un système à la fois, et qu'il est alors nécessaire de trouver des conditions pour distinguer ces mêmes systèmes entre eux.

L'Auteur ne donne aucune règle générale sur cet objet; il se contente d'essayer successivement les fonctions les plus simples des coefficients *m, n, p, ...* de l'équation, jusqu'à ce qu'il en trouve une qui soit nulle dans le cas commun à deux systèmes, et qui soit plus grande que zéro dans l'un et plus petite que zéro dans l'autre.

C'est ainsi, par exemple, que, ayant trouvé pour l'équation

$$x^3+mx^2+nx+p=0$$

que les deux systèmes

$$\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+b\right) \text{ et } \left(x+a\right)\left(x+a\right)(x+b)$$

ont la même équation de condition

$$4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0,$$

il cherche une fonction de la forme

$$Am^2 + Bn, \text{ ou } Am^3 + Bmn + Cp, \text{ ou ...}$$

telle qu'elle soit $=0$ dans le cas commun de $a=b$, et qu'elle soit >0 pour le premier système et <0 pour le second; il trouve celle-ci

$$2m^3 - 9mn + 27p\,,$$

qui satisfait à ces deux conditions.

Quoique l'Auteur soit parvenu à trouver ces fonctions pour tous les cas des équations du troisième et du quatrième degré, on peut douter qu'il soit possible de les trouver en général dans les équations des degrés supérieurs; du moins il n'est pas démontré qu'il existe toujours nécessairement des fonctions qui aient ces propriétés; ainsi la théorie peut être aussi en défaut de ce côté.

4. Au reste, on peut trouver directement les conditions précédentes, car, si l'on suppose que l'équation

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

ait un facteur double $(x+\alpha)^2$, il n'y aura qu'à diviser le polynôme $x^3 + mx^2 + nx + p$ par $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$; on trouvera le quotient $x + m - 2\alpha$ et le reste

$$(n - \alpha^2 - 2m\alpha + 4\alpha^2)x + p + 2\alpha^3 - m\alpha^2;$$

alors il faudra faire séparément

$$3\alpha^2 - 2m\alpha + n = 0,$$

$$2\alpha^3 - 2m\alpha^2 + p = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \tfrac{mn-9p}{2m^2-6n}.$$

Cette valeur, substituée dans la première équation, donne

$$(mn - 9p)^2 + 4(m^2 - 3n)(3mp - n^2) = 0\,,$$

ce qui est la condition commune aux deux systèmes.

Maintenant, comme le quotient $x + m - 2\alpha$ forme le facteur inégal de l'équation, on fera

$$\alpha = b,\ m - 2\alpha = a \text{ pour le système } (x+a)(x+b)(x+b),$$

$$\alpha = a,\ m - 2\alpha = b \text{ pour le système } (x+a)(x+a)(x+b);$$

donc, puisque par l'hypothèse $a > b$, on aura

$$m - 2\alpha > \alpha \text{ ou } m - 3\alpha > 0 \text{ pour le premier système,}$$
$$m - 3\alpha < 0 \text{ pour le second système.}$$

Mais, en substituant la valeur de α, on a

$$m - 3\alpha = \frac{2m^3 - 9mn + 27p}{m^2 - 3n};$$

d'un autre côté, il est facile de s'assurer que, pour les deux systèmes,
on a

$$m^2 - 3n > 0,$$

car le système $(x+a)(x+b)(x+b)$ donne

$$m = a + 2b, n = 2ab + b^2,$$

comme il résulte du développement; donc

$$m^2 - 3n = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$

et, comme pour l'autre système il n'y a qu'à changer *a* en *b,* on aura de même

$$m^2 - 3n = (a-b)^2.$$

Donc les conditions pour les deux systèmes seront simplement

$$2m^3 - 9mn + 27p > 0 \text{ pour le premier,}$$
$$2m^3 - 9mn + 27p < 0 \text{ pour le second,}$$

comme Fontaine l'a trouvé.

5. Mais les conditions mêmes qui résultent de l'égalité de quelques-unes des quantités *a, b, c,* ... ne sont pas toujours particulières aux systèmes dans lésquels ces égalités ont lieu, comme Fontaine le supposé, ce qui détruit un des principaux fondements de sa théorie.

Par exemple, il trouve dans le troisième degré que, pour l'équation

$$x^3 + mx^2 - nx - p = 0,$$

la condition

$$2m^3 - mn - p = 0$$

est particulière au système

$$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$

et doit le distinguer de tous les autres. Mais j'ai reconnu que cette condition a lieu aussi pour tout système de la forme

$$(x+a)(x-b)(x+c),$$

qui se rapporte à la mème formule d'équation, lorsque $a+c=2b$, ce qu'on peut aussi prouver *a priori.*
Ainsi, si l'on a l'équation

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

comme elle satisfait à la condition dont il s'agit, puisque, en faisant $m=2,\ n=5,\ p=6$, on a

$$2.8-2.5-6=0,$$

on pourrait conclure de la Table de la page 546 du Recueil des Mémoires de Fontaine que cette équation a trois facteurs de la forme

$$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}),$$

et que par conséquent elle a deux racines îmaginaires, tandis qu'elle a au contraire les trois facteurs réels

$$(x+3)(x-2)(x+1).$$

On doit dire la même chose de la condition

$$\begin{gathered}2^4.3^4n^4q+2^2.3^5n^3p^2+2^7.3^2.5^2n^2q^2\\+2^4.3^2.5.7np^2q-3^3.7^3p^4+2^8.5^4q^3=0,\end{gathered}$$

que Fontaine trouve (p. 568) pour le caractère commun des deux systèmes

$$\begin{gathered}(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}),\\(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})\end{gathered}$$

appartenant à la formule

$$x^4-nx^2+px-q=0.$$

Cette condition n'est pas particulière à ces deux systèmes; elle a lieu aussi dans tout système de la forme

$$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

appartenant à la même formule d'équations (p. 552), pourvu que l'on ait $b+d=2c$*;* c'est ce qu'on peut trouver *a priori,* mais ce détail nous mènerait trop loin.

6. On peut conclure de ces observations qu'il n'est pas toujours possible de trouver les conditions qui distinguent chaque système de facteurs de tous les autres, en ne considérant dans les quantités *a, b, c, ...* qui entrent dans ces facteurs d'autres rapports que ceux d'égalité ou d'inégalité, suivant la théorie de Fontaine. Mais, quand on le pourrait, le travail pour les trouver dans les degrés au-dessus du quatrième serait immense et ne serait pas même utile pour la résolution numérique des équations, comme nous allons le montrer en examinant la seconde partie de la méthode.

7. Dès qu'on aura trouvé, comme l'Auteur le suppose, la forme de chaque facteur de l'équation proposée, il n'y aura plus qu'à déterminer les valeurs des quantités *a, b, c, ...* qui entrent dans ces facteurs, et qu'on sait être toutes positives et inégales; et voici comment il s'y prend. Il développe les produits des facteurs, et, les comparant à l'équation proposée, il a autant d'équations qu'il y a d'indéterminées *a, b, c, ...* ; il élimine toutes ces quantités, hors deux qu'il se propose de déterminer : il a ainsi deux équations entre ces deux quantités; il fait là plus grande de ces quantités $=\mathrm{R}\alpha$ et la plus petite $=\mathrm{R}\beta$, et, éliminant R, il a une équation homogène en α et β, dans laquelle il substitue $x\varphi+y$ pour α et $z\varphi+u$ pour β.

Il suppose d'abord $x=1,\ y=0,\ z=0,\ u=1$**;** il a une équation en φ dans laquelle il fait successivement $\varphi=1,\ 2,\ 3,\ ...$ jusqu'à ce qu'il trouve deux résultats de signe contraire; alors il fait $\varphi=\mathrm{A}$, A étant le plus petit des deux nombres qui ont donné des résultats de signe contraire; donc

$$\alpha=\mathrm{A},\ \beta=1.$$

Il fait ensuite $x=\mathrm{A},\ y=1,\ z=1,\ u=0,$ et, dans l'équation résultante en φ, il cherche de même deux substitutions qui donnent des résultats de signe contraire; nommant B le plus petit des deux nombres, il fait $\varphi=\mathrm{B}$; donc

$$\alpha=\mathrm{AB}+1,\ \beta=\mathrm{B}.$$

Il continue de la même manière en faisant x égal à la dernièr valeur de α, y à l'avant-dernière, z à la dernière valeur de β et u à l'avant-dernière.

Substituant ensuite successivement ces valeurs de α et β dans l'expression rationnelle de R qui résulte des deux équations, on a celles de a et b, d'autant plus exactement que les opérations sur α et β ont été poussées plus loin.

Pour en donner un exemple, je vais rapporter celui que l'on trouve dans les *Mémoires de l'Académie* de 1747, p. 672.

Soit l'équation

$$x^2-3x+1=0;$$

comme elle se rapporte à la formule $x^2 - mx + n$, en faisant $m = 3,\ n = 1$, si l'on examine les conditions relatives à cette formule dans la Table donnée ci-dessus, on trouve que celle-ci

$$m^2 - 4n > 0$$

a lieu; d'où l'on conclut que les deux facteurs sont de la forme

$$(x-a)(x-b)$$

.

On a donc, en développant, $a + b = 3$ et $ab = 1$.

Soient $a = \mathrm{R}\alpha, b = \mathrm{R}\beta$; on aura $\mathrm{R}(\alpha + \beta) = 3,\ \mathrm{R}^2\alpha\beta = 1$; donc $\mathrm{R} = \frac{3}{\alpha+\beta}$ et $9\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2$,
savoir

$$\alpha^2 - 7\alpha\beta + \beta^2 = 0,$$

où l'on fera $\alpha = x\varphi + y$ et $\beta = z\varphi + u$.
Soient:
1° $x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ u = 1$; donc $\alpha = \varphi,\ \beta = 1$; substituant ces valeurs, on a

$$\varphi^2 - 7\varphi + 1 = 0\ ;$$

faisant $\varphi = 1,\ 2,\ \ldots$ jusqu'à $\varphi = 6$, on a des résultats négatifs; mais $\varphi = 7$ donne le résultat 1, donc $\varphi = 6$; donc

$$\alpha = 6,\ \beta = 1,\ \mathrm{R} = \tfrac{3}{7}.$$

2° $x = 6,\ y = 1,\ z = 1,\ u = 0$; donc $\alpha = 6\varphi + 1,\ \beta = \varphi,$ et l'on a l'équation

$$5\varphi^2 - 5\varphi - 1 = 0.$$

Ici $\varphi = 1$ donne le résultat -1, $\varphi = 2$ donne 9; donc $\varphi = 1$, et de là

$$\alpha = 7,\ \beta = 1,\ \mathrm{R} = \tfrac{3}{8}.$$

3° $x = 7,\ y = 6,\ z = 1,\ u = 1$; donc $\alpha = 7\varphi + 6,\ \beta = \varphi + 1,$ et,
substituant, on a l'équation

$$5\varphi^2 - 5\varphi - 5 = 0.$$

Faisant $\varphi = 1,\ 2, \ldots$ jusqu'à $\varphi = 5$, on a des résultats négatifs; mais $\varphi = 6$ donne le résultat 1, donc $\varphi = 5$; et de là

$$\alpha = 41,\ \beta = 6,\ \mathrm{R} = \tfrac{3}{47},$$

et ainsi de suite.

8. Telle est la méthode d'approximion que Fontaine a donnée sans démonstration dans son Mémoire de 1747 et qu'il a redonnée de même dans le Recueil de ses Mémoires. Elle suppose, comme l'on voit, qui l'on peut toujours, par la substitution des nombres 1, 2, 3, ... au lieu de φ dans les différentes équations en φ trouver deux nombres qui donnent des résultats de signe différent, ce qui, par ce que nous avons démontré dans le Chapitre 1 (§5 et suiv.), n'a lieu qu'autant que ces équations ont des racines positives dont la moindre différence est plus grande que l'unité. D'après cette considération, il est facile de trouver des exemples où la méthode de Fontaine sera en défaut.
Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0,$$

qui se rapporte à la formule $x^3 - mx^2 - nx + p,$ en faisant $m = 2, n = 23, p = 60$. La Table de la page 547 du Recueil des Mémoires de Fontaine donne ces trois conditions

$$4(m^2 + 3n^2)(n^2 + 3mp) - (-mn + 9p)^2 > 0,\ mn - p < 0,\ m^2 - n < 0,$$

pour le système

$$(x + a)(x - b)(x - c),$$

lesquelles se trouvant remplies ici, il s'ensuit que ce système est celui de l'équation proposée.

Pour trouver les trois quantités positives et inégales *a, b, c, ...* , on comparera le produit des facteurs

$$x^3 + (a - b - c)x^2 + (-ab - ac + bc)\,x + abc$$

avec l'équation donnée; on aura ces trois équations

$$a - b - c = -2,\ -ab - ac + bc = -23,\ abc = 60\,.$$

Éliminant *c,* on aura $c = a - b + 2$, et les deux autres équations deviendront

$$a^2 - ab + b^2 + 2(a - b) = 23,$$
$$(a - b)ab + 2ab = 60;$$

et, faisant $a = \mathrm{R}\alpha,\ b = \mathrm{R}\beta$, on aura

$$\mathrm{R}^2(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + 2\mathrm{R}(\alpha - \beta) = 23,$$
$$\mathrm{R}^3(\alpha - \beta)\alpha\beta + 2\mathrm{R}^2\alpha\beta = 60.$$

Enfin, éliminant R, on aura une équation homogène du sixième degré en α et β, réductible à cette forme

$$\left[20(\alpha^2+\beta^2)-41\alpha\beta\right]\left[15(\alpha^2+\beta^2)-34\alpha\beta\right]\left[12(\alpha^2+\beta^2)+25\alpha\beta\right]=0.$$

Maintenant on fera, suivant Fontaine, $\alpha = x\varphi + y,\ \beta = z\varphi + u,$ et l'on supposera dans la première opération $x=1,\ y=0,\ z=0,\ u=1$, ce qui donne

$$\alpha=\varphi,\ \beta=1;$$

l'équation sera donc

$$\left[20(\varphi^2+1)-41\varphi\right]\left[15(\varphi^2+1)-34\varphi\right]\left[12(\varphi^2+1)+25\varphi\right]=0,$$

et il faudra faire successivement $\varphi=1,2,3,\ \ldots$ jusqu'à ce que l'on trouve deux valeurs de φ qui donnent des résultats de signe contraire, ce qui n'arrivera jamais, les résultats étant toujours positifs, comme il est facile de s'en convaincre par la simple inspection de l'équation. Ainsi la méthode sera en défaut dès la première opération.

Il est aisé de voir qu'on ne peut avoir des résultats négatifs qu'en donnant à φ une valeur intermédiaire entre 1 et *2.* Par exemple, en faisant $\varphi=\frac{3}{2}$, on trouve le resultat $-\frac{7.9.153}{16}$; mais cela est contraire à l'esprit de la méthode de Fontaine, qui suppose que α et β sont toujours des nombres entiers. D'ailleurs, si l'on voulait admettre pour φ des nombres fractionnaires, il serait bien plus simple d'opérer immédiatement sur l'équation proposée, en cherchant deux valeurs de l'inconnue qui donnent des résultats de signe contraire; mais la connaissance de la forme des facteurs, qui est l'objet des Tables de Fontaine, devient inutile pour cette recherche, et la difficulté du problème demeure en son entier.

Nous remarquerons encore que, puisque dans la première opération on fait $\varphi=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b}$, l'équation en φ sera toujours, généralement parlant, d'un degré plus haut que l'équation proposée, car, si *a* et *b* sont deux racines réelles, les racines de l'équation en φ seront tous les quotients qu'on peut formeren divisant une racine par l'autre; de sorte que, si *m* est le degré de la proposée, $m(m-1)$ sera celui de l'équation en φ laquelle sera d'ailleurs nécessairement du genre des réciproques.

Mais si, *a* étant une racine réelle, *b* était la partie réelle de deux racines imaginaires, alors $\frac{a}{b}$ serait le quotient d'une racine divisée par la demi-somme de deux autres racines, et l'équation en φ serait du degré $\frac{m.(m-1)(m-2)}{2}$.

9. Au reste, comme l'équation en α et β que l'on trouve par le procédé de Fontaine est nécessairement une équation homogène, elle n'a, à proprement parler, qu'une seule

inconnue $\frac{\alpha}{\beta}$ et la substitution de $x\varphi + y$ à la place de α et de $z\varphi + u$ à la place de β revient à substituer immédiatement $\frac{x\varphi+y}{z\varphi+u}$ à la place de l'inconnue de cette équation; or cette formule est l'expression générale des fractions convergentes qui résultent d'une fraction continue, dans laquelle φ représente successivement les dénominateurs de cette fraction, et $\frac{y}{u}$, $\frac{x}{z}$ sont les deux fractions successives qui précèdent la fraction $\frac{x\varphi+y}{z\varphi+u}$, comme il résulte de la théorie connue des fractions continues. Ainsi il paraît que Fontaine a cherché à exprimer le rapport entre les quantités α et β, qui est le même que celui entre les quantités *a* et *b,* par les fraction convergentes dépendantes des fractions continues; mais la difficulté consiste à déterminer les valeurs de φ lorsque la fraction $\frac{a}{b}$ n'est donnée que par une équation. [*Voir* ci-dessus l'Article IV (§78).]

Je me suis un peu étendu sur l'analyse de la méthode de Fontaine, parce que je ne connais jusqu'à présent que deux Auteurs qui en aient parlé, d'Alembert dans *l'Encyclopédie,* au mot *Équation,* et Condorcet dans *l'Histoire de l'Académie des Sciences* pour les années 1771 et 1772, et que l'un et l'autre se sont contentés de jeter des doutes sur cette méthode sans donner les moyens de l'apprécier.

NOTE VIII.

SUR LES LIMITES DES RACINES DES ÉQUATIONS ET SUR LES CARACTÈRES DE LA RÉALITÉ DE TOUTES LEURS RACINES.

La recherche des limites des racines est le premier problème qui se présente dans la théorie des équations, après celui de leur résolution générale. Comme cette résolution est bornée jusqu'ici au quatrième degré, et comme il est démontré par la considération des fonctions des racines que, si elle est possible au delà de ce degré, ce ne peut être qu'en résolvant des équations d'un degré beaucoup plus élevé, ce qui donnerait des expressions intraitables par leur complication, on peut dire que c'est du problème des limites que dépend maintenant tout l'art de résoudre les équations. En effet, dès qu'on a trouvé des limites particulières pour chaque racine, on peut les resserrer par des substitutions successives et approcher ainsi de la valeur de la racine autant que l'on veut.

1. On a senti avant la fin du xvii^{e} siècle la nécessité de s'occuper de ce problème, et, dès qu'on eut trouvé que l'équation formée en multipliant chaque terme d'une équation donnée par l'exposant de son inconnue renferme les conditions de l'égalité des racines de la proposée, on découvrit bientôt que les racines de cette même équation ainsi formée étaient les limites de celles de l'équation primitive. On sait que Hudde est l'auteur de la première de ces deux importantes découvertes, et je crois que la seconde est due à Rolle, qui l'a donnée dans son *Algèbre,* imprimée en 1690, et qui en a fait la base de sa méthode des *cascades.* Suivant cette méthode, les limites des racines d'une équation dépendent d'une équation d'un degré inférieur d'une unité, et les limites des racines de celles-ci dépendent de même d'une autre équation d'un degré moindre d'une unité, et ainsi

de suite; de sorte que, pour parvenir aux limites des racines, de l'équation proposée, il faut résoudre des équations différentes et successives, qui vont toujours en baissant d'un degré. (*Voir l'Analyse démontree* de Reyneau, oü cette méthode est exposée avec beaucoup de détail.) Mais la longueur du calcul qu'elle demande et l'incertitude qui naît des racines imaginaires l'ont fait abandonner depuis longtemps, et l'on aurait peut-être été obligé de renoncer à avoir une méthode générale pour résoudre les équations si l'on n'avait pas trouvé, pour déterminer les limites des racines un moyen indépendant de la résolution de toute équation, comme on l'a vu dans le Chapitre I et dans la Note lV.

La considération des maxima et minima des lignes paraboliques a conduit Stirling à une méthode pour déterminer le nombre et les limites des racines réelles du troisième et du quatrième degré, laquelle a été généralisée par Euler dans son *Calcul différentiel.* Cette méthode revient à celle de Rolle dans le fond; mais elle embrasse également les racines réelles et les racines imaginaires, et pourrait fournir des formules générales pour distinguer ces racines dans les équations du cinquième degré, au moyen des racines du quatrième.

La même considération a fait trouver à De Gua une méthode pour déterminer les caractères de la réalité de toutes les racines d'une équation quelconque. (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* année 1741.)

Nous avons vu que ce problème peut se résoudre aussi par le moyen de l'équation dont les racines sont les carrés des différences entre les racines de l'équation donnée; mais cette solution est fondée sur la forme même des racines imaginaires, au lieu que la théorie de De Gua est indépendante de cette forme, et sa méthode a de plus l'avantage de n'exiger que le calcul d'équations de degrés inférieurs à celui de l'équation proposée.

Comme ces différentes méthodes sont intéressantes par elles-mêmes, et encore plus par l'usage dont elles peuvent être dans plusieurs occasions, j'ai cru qu'on serait bien aise de les trouver ici réunies et déduites d'une même théorie, fondée uniquement sur les premiers principes de l'analyse des équations.

2. Soit en général $\mathrm{F}(x)$ une fonction rationnelle et sans diviseur, telle que

$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots + \mathrm{V};$$

si l'on nomme $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$ les racines réelles de l'équation

$$\mathrm{F}(x) = 0,$$

c'est-à-dire les valeurs de x qui peutent satisfaire à cette équation, on aura l'équation identique

$$\mathrm{F}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.\times f(x),$$

$f(x)$ étant une pareille fonction de x, mais d'un degré moindre que m, et qui ne pourra jamais devenir nulle ni négative, quelque valeur qu'on donne à x (Note II).

Cette équation devant avoir lieu quelle que soit la valeur de x, elle aura lieu aussi en mettant $x+i$ à la place de x, quelle que soit la valeur de i ; donc, développant les fonctions suivant les puissances de i, il faudra que tous les termes affectés d'une même puissance de i se détruisent mutuellement, ce qui donnera encore autant d'équations identiques qu'on pourra trouver ainsi par le développement actuel. Mais, comme ces nouvelles équations ne sont autre chose que celles que nous avons appelées *dérivées* dans la *Théorie des fonctions,* nous emploierons ici, pour plus de simplicité, la notation et l'algorithme de cette théorie, et l'application que nous allons en faire aux équations fournira un nouvel exemple de son usage dans l'Algèbre, dont elle n'est proprement qu'une branche.

3. Désignons, pour abréger, par $\varphi(x)$ la fonction

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)....;$$

on aura l'équation identique

$$\mathrm{F}(x)=\varphi(x)\times f(x),$$

d'où l'on tirera sur-le-champ l'équation dérivée

$$\mathrm{F}'(x)=\varphi'(x)\times f(x)+\varphi(x)\times f'(x),$$

et l'on trouvera

$$\begin{aligned}&\varphi'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ ...\ +(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\ ...\\&+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)\ ...\ +(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ ...\\&+..\end{aligned}$$

Supposons que les racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ soient rangées par ordre de grandeur, en commençant par les plus grandes positives et finissant par les plus grandes négatives. Il est facile de voir, par la nature de la fonction $\varphi'(x)$, qu'en faisant $x=\alpha$ on aura $\varphi'(x)>0$, qu'en faisant $x=\beta$ on aura $\varphi'(x)<0$, qu'en faisant $x=\gamma$ on aura $\varphi'(x)>0$, et ainsi de suite. D'un autre côté, en faisant $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$, on a toujours $\varphi(x)=0$ et $f(x)>0$, par la nature de ces fonctions. Donc

$$\begin{aligned}&x=\alpha,\ \text{donnera } \mathrm{F}(x)>0,\\&x=\beta,\qquad \text{"}\qquad \mathrm{F}(x)<0,\\&x=\gamma,\qquad \text{"}\qquad \mathrm{F}(x)>0,\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Or, en prenant la fonction dérivée du polynôme F(x), on a

$$\mathrm{F}'(x)=mx^{m-1}+(m-1)\mathrm{A}x^{m-2}+(m-2)\mathrm{B}x^{m-3}+\ ...+\mathrm{T}\,;$$

donc l'équation $F'(x)=0$, qui est du degré $m-1$, aura nécessairement des racines réelles qui tomberont entre les valeurs des racines α et β, β et γ, γ et δ, ... (Note 1).

4. Désignons par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ les racines réelles de l'équation $F'(x)=0$, et l'on démontrera de la même manière que

$$\begin{aligned} x=\alpha_1, &\text{ donnera } F''(x)>0,\\ x=\beta_1, &\quad\text{"}\quad F''(x)<0,\\ x=\gamma_1, &\quad\text{"}\quad F''(x)>0, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

D'où il s'ensuit que l'équation $F''(x)=0$, dans laquelle

$$\begin{aligned} F''(x) &= m(m-1)x^{m-2}+(m-1)(m-2)Ax^{m-3}\\ &\quad +(m-2)(m-3)Bx^{m-4}+\ \ldots+2S, \end{aligned}$$

aura aussi des racines réelles qui tomberont entre les valeurs des racines α_1 et β_1, β_1 et $\gamma_1, \ldots$, et ainsi de suite.

Il résulte de ces formules différentes conséquences que nous allons développer.

Si l'équation primitive $F(x)=0$ a deux racines égales, l'équation dérivée $F'(x)=0$ aura une racine qui, devant tomber entre ces deux, leur sera encore égale; par conséquent, le facteur qui contiendra cette racine sera un diviseur commun des deux polynômes $F(x)$ et $F'(x)$, ce qui est d'ailleurs évident, parce que le polynôme $F(x)$ contenant le facteur carré $(x-\alpha)^2$, le polynôme $F'(x)$ contiendra encore le factem simple $x-\alpha$. Ainsi l'équation $F'(x)=0$ renferme la condition pour qu'une des racines de l'équation $F(x)=0$ soit double.

On prouvera de la même manière que, si l'équation $F(x)=0$ a trois racines égales, le facteur qui contiendra cette racine sera un diviseur commun des trois polynômes $F(x)$, $F'(x)$ et $F''(x)$, et que les deux équations $F'(x)=0$, $F''(x)=0$ contiennent les conditions pour que l'équation $F(x)=0$ ait trois racines égales, et ainsi de suite, ce qui donne les théorèmes connus sur les racines égales.

5. Considérons d'abord les racines réelles de l'équation $F(x)=0$, en tant qu'elles peuvent être positives et négatives, et supposons qu'elle en ait un nombre p de positives et un nombre q de négatives. Donc l'équation $F'(x)=0$ aura nécessairement $p-1$ racines réelles positives, $q-1$ racines réelles négatives, et de plus une racine réelle qui pourra

être positive ou négative, car, puisque entre deux racines consécutives de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ il en tombe nêcessairement une de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, il en tombera $p-1$ positives entre les p positives, $q-1$ négatives entre les q négatives, et une entre la plus petite positive et la première négative, qui pourra être positive ou négative.

Donc, si l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ a plus de racines positives que l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, elle ne peut en avoir qu'une de plus, et, si elle a plus de racines négatives que celle-ci, elle n'en peut avoir qu'une de plus.

Or, comme toute équation a toujours un nombre pair ou impair de racines positives, suivant que son dernier terme est positif ou négatif (Note II), il s'ensuit que, si les derniers termes sans x des équations $\mathrm{F}(x)=0,\ \mathrm{F}'(x)=0$ sont de même signe, l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ ne pourra pas avoir une racine positive de plus que l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$; donc, dans ce cas, elle ne pourra avoir qu'une racine négative de plus que cette dernière équation, et par conséquent aussi elle ne pourra avoir une racine positive de plus que celle-ci que dans le cas où les derniers termes des mêmes équations seront de signe différent.

Donc, en général, l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ ne pourra avoir qu'une racine positive ou négative de plus que l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, suivant que leurs derniers termes sont de signe différent ou de même signe. Par la même raison, l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$ ne pourra avoir qu'une racine positive ou négative de plus que l'équation $\mathrm{F}''(x)=0$, suivant que leur derniers termes seront de signe différent ou de même signe, et ainsi de suite.

Or on voit, par les formules ci-dessus, que le dernier terme de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ est V, que le dernier terme de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$ est T, que le dernier terme de l'équation $\mathrm{F}''(x)=0$ est 2S, et ainsi de suite; de sorte que, en prenant ces équations à rebours,

La $(m-1)^{ième}$ aura pour dernier terme $2.3\ldots(m-1)\mathrm{A}$,
La $(m-2)^{ième}$ " $2.3\ldots(m-2)\mathrm{B}$,
La $(m-3)^{ième}$ " $2.3\ldots(m-3)\mathrm{C}$,

et ainsi de suite . Mais la $(m-1)^{ième}$ équation, ou $\mathrm{F}^{(m-1)}(x)=0$, devient

$$2.3.4\ldots mx+1.2.3\ldots(m-1)\mathrm{A}=0,$$

qui a, comme l'on voit, la racine positive ou négative $-\frac{\mathrm{A}}{m}$ suivant que A est négatif ou positif. Donc la $(m-2)^{ième}$ équation ne pourra avoir une racine positive ou négative de plus que celle-ci qu'autant que B sera de différent ou de même signe que A. De même, la $(m-3)^{ième}$ équation ne pourra avoir une racine positive ou négative de plus que la $(m-2)^{ième}$ qu'autant que C sera de différent ou de même signe que B, et ainsi de suite.

D'où l'on peut conclure que l'équation $\mathrm{F}(x)=0$, ou

$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \mathrm{C}x^{m-3} + \ldots + \mathrm{V} = 0,$$

ne peut avoir plus de racines positives ou négatives qu'il y a dans cette équation de termes consécutifs de different ou de même signe, c'est-à-dire que de variations ou de permanences de signe; par conséquent, si l'équation a toutes ses racines réelles, elle aura précisément autant de racines positives que de variations et autant de négatives que de permanences.

C'est là le fameux théorème de Descartes, que les Anglais attribuent à Harriot, et dont on a différentes démonstrations données par De Gua dans les *Mémoires de Paris,* par Segner et Aepinus dans ceux de Berlin, par Krestner dans le *Commentaire sur l'Arithmétique* de Newton, etc. J'ai rapporté la précédente parce qu'elle découle naturellement de notre analyse; cependant la plus simple de ces démonstrations est celle que Segner a donnée dans les *Mémoires de Berlin* de l'année 1756. Elle consiste simplement à faire voir qu'en multipliant une équation quelconque par $x-a$ on augmente d'une unité le nombre des variations de signe, et qu'en la multipliant par $x+a$ on augmente aussi d'une unité le nombre des permanences; quelle que soit la valeur des coefficients de l'équation.

6. Nous allons considérer maintenant les racines de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ comme réelles ou imaginaires.

Soient, comme ci-dessus, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ les racines réelles de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$, et $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$ les racines réelles de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, ces racines étant rangées par ordre de grandeur. Je dis que des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ il ne peut y en avoir qu'une qui soit plus grande que α_1, qu'une qui tombe entre α_1 et β_1, qu'une qui tombe entre β_1 et γ_1, et ainsi de suite, et enfin une seule plus petite que la plus petite des quantités $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$; car, si α et β, par exemple, étaient à la fois plus grandes que α_1, comme entre les deux racines α et β, il doit tomber nécessairement une racine de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, cette racine serait alors plus grande que α_1 ; donc α_1 ne serait plus la plus grande des racines de $\mathrm{F}'(x)=0$, comme on le suppose. De même, si deux racines β et γ, y tombaient à la fois entre les deux α_1 et β_1, comme entre β et γ, il doit nécessairement tomber une racine de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, cette racine tomberait aussi entre α_1 et β_1, contre l'hypothèse, puisque celles-ci sont supposées se suivre relativement à leur grandeur, et ainsi de suite. Enfin, si plusieurs des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ se trouvaient plus petites que la plus petite des racines $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$, comme il tomberait nécessairement entre elles des racines de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$, ces racines seraient donc encore plus petites que la plus petite des mêmes racines $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$, ce qui ne se peut.

Or, puisqu'on a en général

$$\mathrm{F}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \ldots \times f(x),$$

il est clair qu'en substituant α_1, au lieu de *x,* si aucune des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ n'est plus grande que α_1, la valeur de $\mathrm{F}(x)$ sera positive, et, si la seule racine α est plus grande que α_1, la valeur de $\mathrm{F}(x)$ deviendra négative, puisque dans le premier cas tous les facteurs simples seront positifs, et que dans le second il n'y en aura qu'un de négatif, le polynôme $f(x)$ conservant toujours une valeur positive.

Supposons ensuite qu'on substitue β_1 au lieu de *x,* et, si aucune des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ ne tombe entre α_1 et β_1, cette substitution donnera une valeur de $\mathrm{F}(x)$ de même signe que la substitution de α_1; mais elle donnera une valeur de signe contraire si une des racines tombe entre α_1 et β_1. Car il est visible que tout produit, comme $(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\alpha)$, est toujours nécessairement positif tant que la quantité α est à la fois plus grande ou plus petite que chacune des quantités α_1, β_1, qu'au contraire il est nécessairement négatif si la quantité α se trouve entre les deux quantités α_1 et β_1, c'est-à-dire plus grande que l'une d'entre elles et plus petite que l'autre. Or la substitution de α_1 au lieu de *x* dans $\mathrm{F}(x)$ donne

$$(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)(\alpha_1-\gamma)\ ...\ \times f(\alpha_1),$$

et la substitution de β_1 au lieu de *x* dans la même fonction donne

$$(\beta_1-\alpha)(\beta_1-\beta)(\beta_1-\gamma)\ ...\ \times f(\beta_1);$$

donc le produit de ces deux quantités, savoir la valeur de $\mathrm{F}(\alpha_1)\times\mathrm{F}(\beta_1)$, sera de la forme

$$(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)(\beta_1-\beta)(\alpha_1-\gamma)(\beta_1-\gamma)\ ...\ \times f(\alpha_1)\times f(\beta_1).$$

Donc ce produit sera positif si aucune des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ ne tombe entre les quantités $\alpha_1,\ \beta_1,$ et il sera négatif si une seule des quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ tombe entre les quantités $\alpha_1,\ \beta_1,$ puisque les quantités $f(\alpha_1)$ et $f(\beta_1)$ sont toujours essentiellement positives; par conséquent, les valeurs de $\mathrm{F}(\alpha_1)$ et de $\mathrm{F}(\beta_1)$ seront de même signe dans le premier cas et de signe différent dans le second.

On démontrera de la même manière que la substitution de γ_1 au lieu de *x* dans $\mathrm{F}(x)$ donnera un résultat de même signe ou de signe contraire à celui de la substitution de β_1, suivant qu'aucune des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ ne tombera entre α_1 et $\gamma_1,$ ou qu'il en tombera une, et ainsi de suite.

Enfin, si l'on désigne par v_1 la dernière en grandeur des racines $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$, on trouvera, par l'expression de $\mathrm{F}(x)$ en facteurs, que le résultat de la substitution de v_1 au lieu de x dans $\mathrm{F}(x)$ sera positif ou négatif, suivant qu'aucune des racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ ne sera plus petite que ν_1 ou qu'il y en aura une plus petite que ν_1 le nombre de ces racines étant pair, et que, lorsque ce nombre sera impair, le même résultat sera au contraire positif ou négatif, suivant qu'une des mêmes racines sera plus petite que ν_1 ou qu'aucune d'elles ne sera moindre que ν_1. Or, comme le nombre des racines imaginaires est toujours pair, le nombre des racines réelles $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ sera nécessairement pair ou impair, suivant que le nombre total des racines, c'est-à-dire le degré m de l'équation, sera lui-même pair ou impair.

7. On pourra donc toujours juger de la nature des racines d'une équation quelconque de degré m, $\mathrm{F}(x)=0$, par celles de l'équation dérivée $\mathrm{F}'(x)=0$, qui est toujours d'un degré moindre d'une unité, car, ayant les racines réelles $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,\nu_1$, de celle~ci, qu'on suppose rangées par ordre de grandeur, il n'y aura qu'à les substituer successivement au lieu de x dans l'équation proposée; et l'on en conclura:

1° Qu'elle aura ou n'aura pas une racine plus grande que α_1, selon que $\mathrm{F}(\alpha_1)$ sera < ou > 0;

2° Qu'elle aura ou n'aura pas une racine comprise entre α_1 et β_1, selon que $\mathrm{F}(\beta_1)$ sera de signe différent ou de même signe que $\mathrm{F}(\alpha_1)$;

3° Qu'elle aura ou n'aura pas une racine comprise entre β_1 et γ_1, selon que $\mathrm{F}(\gamma_1)$ sera de signe différent ou de même signe que $\mathrm{F}(\beta_1)$, et ainsi de suite;

4° Et qu'enfin elle aura ou n'aura pas une racine plus petite que ν_1, selon que ν_1 sera positif ou négatif dans le cas de m impair, et négatif ou positif dans le cas de m pair.

Ainsi l'on connaîtra par ces règles non-seulement le nombre des racines réelles de la proposée, mais encore leurs limites, et, si l'on veut compléter ces limites à l'égard des racines plus grandes que α_1 ou plus petites que ν_1, il n'y aurait qu'à chercher encore, par les méthodes du Chapitre IV (§12), les limites des racines positives et des racines de l'équation proposée.

Nous remarquerons ici, à l'occasion des règles données dans cet endroit d'après Newton et Maclaurin pour trouver ces limites; que Rolle lês connaissait déjà, comme on le voit par les Chapitres V et VI du second Livre de son *Algèbre*.

8. Nous avons supposé jusqu'ici que l'équation proposée pouvait avoir des racines imaginaires mêlées avec les réelles; examinons présentement ce qui doit résulter de la supposition que toutes ses racines soient réelles.

Il est d'abord évident que l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ du degré m aura m racines réelles et que l'équation dérivée $\mathrm{F}'(x)=0$ du degré $m-1$ aura aussi nécessairement $m-1$ racines réelles, puisque, entre deux racines réelles consécutives de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$, il tombe toujours une racine réelle de l'équation $\mathrm{F}'(x)=0$. Par la même raison, la seconde équation dérivée $F''(x)=0$ aura aussi nécessairement toutes ses racines réelles, et ainsi de suite.

Ainsi la première condition pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles est que ses équations dérivées aient aussi toutes leurs racines réelles; mais celles-ci pourraient avoir toutes leurs racines réelles sans que l'équation primitive en eût aucune.

Supposons donc que les $m-1$ racines $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,...$ de l'équation $F'(x)=0$ soient toutes réelles, et voyons quelles sont les conditions nécessaires pour que les *m* racines $\alpha,\ \beta,\ \gamma,...$ de l'équation $F(x)=0$ soient aussi nécessairement réelles. Puisque nous avons démontré, en général, que les racines réelles de l'équation $F(x)=0$ ne peuvent tomber plus d'une à la fois dans chaque intervalle entre deux racines consécutives de l'équation $F'(x)=0$, et qu'il ne peut y en avoir aussi qu'une plus grande et une plus petite que la plus grande et la plus petite de cette équation, il est encore évident que, lorsque ses racines sont toutes réelles et au nombre de *m,* elles doivent nécessairement être telles que α soit plus grande que α_1, que β tombe entre α_1 et β_1, que γ tombe entre β_1 et γ_1, et ainsi de suite. Au contraire, si elles n'étaient pas toutes réelles, comme le nombre des réelles ne pourrait alors surpasser $m-2$ et serait par conséquent moindre que celui des racines $\alpha_1,\beta_1,\ \gamma_1,...,$ il est visible que la même disposition ne pourrait plus avoir lieu et qu'il y aurait nécessairement quelque intervalle entre ces dernières racines dans lequel il ne tomberait aucune de celles de l'équation $F(x)=0$, ou au moins qu'aucune de celles-ci ne serait plus grande ou plus petite que la plus grande ou la plus petite des racines $\alpha_1,\beta_1,\ \gamma_1,...$

Donc, par ce qui à été démontré ci-dessus, si l'on substitue successivement au lieu de *x* dans F(*x*) toutes les racines $\alpha_1,\beta_1,\ \gamma_1,...$, on aura nécessairement dans le premier cas

$$F(\alpha_1)<0,\ F(\beta_1)>0,\ F(\gamma_1)<0,...,$$

et, dans le second cas, il y aura une ou plusieurs de ces conditions qui n'auront pas lieu.

D'un autre côté, en substituant successivement les mêmes racines $\alpha_1,\beta_1,\ \gamma_1,...$ dans la seconde fonction dérivée $F''(x)$, on aura toujours, comme on l'a vu plus haut,

$$F''(\alpha_1)>0,\ F''(\beta_1)<0,\ F''(\gamma_1)>0,...$$

Donc, en combinant ces conditions avec les précédentes, on en conclura que, lorsque les racines de l'équation donnée $F(x)=0$ sont toutes réelles, les quantités

$$F(\alpha_1)\times F''(\alpha_1),\ F(\beta_1)\times F''(\beta_1),\ F(\gamma_1)\times F''(\gamma_1),...$$

seront toutes négatives, et qu'au contraire il y en aura nécessairement de positives si l'équation donnée a des racines imaginaires.
On aurait le même résultat si l'on considérait les quotients

$$\frac{F(\alpha_1)}{F''(\alpha_1)},\ \frac{F(\beta_1)}{F''(\beta_1)},\ \ldots,$$

et en général des fonctions de la forme

$$M\left[F(\alpha_1)\right]^{\mu}\left[F''(\alpha_1)\right]^{\nu},\ M\left[F(\beta_1)\right]^{\mu}\left[F''(\beta_1)\right]^{\nu},\ldots$$

M étant un coefficient positif ou une fonction quelconque essentiellement positive, et $\mu,\ \nu$ des nombres entiers impairs positifs ou négatifs.

Or, si l'on fait

$$F(x)\times F''(x)=y,\ \text{ou, en général,}\ M\left[F(x)\right]^{\mu}\times\left[F''(x)\right]^{\nu}=y,$$

et qu'on élimine ensuite x au moyen de l'équation

$$F'(x)=0\,,$$

dont les racines sont $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$ on aura une équation en y du même degré que cette équation, et dont les racines seront les valeurs de y qui résulteraient de la substitution successive des racines $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots$ à la place de x. Donc, si ces valeurs sont toutes négatives, l'équation en y n'aura que des racines négatives, et, par conséquent, tous ses termes auront le signe +. Et réciproquement, si tous les termes de cette équation ont le signe +, elle n'aura que des racines négatives, et les valeurs de y seront toutes négatives.

9. On peut conclure de là que les caractères de la réalité des racines de l'équation $F(x)=0$ sont que l'équation dérivée

$$F'(x)=0$$

ait toutes ses racines réelles, et que l'équation en y résultante de l'élimination de x au moyen de cette dernière équation et de l'équation

$$F(x)\times F''(x)=y,\ \text{ou}\ M\left[F(x)\right]^{\mu}\times\left[F''(x)\right]^{\nu}=y,$$

ait tous ses termes positifs.

En appliquant les mêmes raisonnements à l'équation dérivée $F'(x)=0$, on en conclura aussi que les caractères de la réalité de ses racines sont que la seconde équation dérivée

$$F''(x)=0$$

ait toutes ses racines réelles, et que l'équation en y résultante de l'élimination de x par le moyen de celle-ci et de l'équation

$$F'(x)\times F''(x)=y$$

ait tous ses termes positifs, et ainsi de suite.

Donc enfin, pour avoir tous les caractères de la réalité des racines de l'équation $F(x)=0$:

1° On fera

$$y = F(x)\times F''(x),$$

et l'on éliminera x au moyen de l'équation

$$F'(x)=0;$$

on aura la première équation en y.

2° On fera

$$y = F'(x)\times F'''(x),$$

et l'on éliminera x au moyen de l'équation

$$F''(x)=0;$$

on aura la seconde équation en y.

3° On fera

$$y = F''(x)\times F^{iv}(x),$$

et l'on éliminera x au moyen de l'équation

$$F'''(x)=0;$$

on aura la troisième équation en y, et ainsi de suite.

Ces équations en y seront au nombre de $m-1$ si l'équation primitive $F(x)=0$ est du degré m, parce que la $m^{\text{ième}}$ fonction dérivée de $F(x)$ sera constante et ne contiendra plus x.

10. Cela posé, les caractères de la réalité des racines de l'équation $F(x)=0$ se réduiront à ce que tous les termes de ces différentes équations en y soient positifs, c'est-à-dire du méme signe que le premier dans chaque équation.

Or il est aisé de voir que, l'équation $F(x)=0$ étant du degré m, les fonctions dérivées $F'(x), F''(x),\dots$ seront successivement des degrés $m-1,\ m-2,\ \dots$, et que les équations en y seront aussi de ces mêmes degrés; elles fourniront, par conséquent, chacune autant de conditions, de sorte que le nombre total des conditions sera

$$(m-1)+(m-2)+(m-3)+\dots,\ \text{ou } 1+2+3+\dots+(m-1)=\tfrac{m(m-1)}{2}.$$

Nous avons déjà vu (Chap. V, §28) qu'on peut déduire les caractères de la réalité de toutes les racines d'une équation de son *équation des différences,* laquelle doit avoir pour cela tous ses termes alternativement positifs et négatifs, ce qui donne autant de conditions qu'il y a d'unités dans le degré de cette équation; de sorte que, m étant le degré de l'équation proposée, $\tfrac{m(m-1)}{2}$ sera le nombre des conditions nécessaires pour la réalité de toutes les racines. Ainsi les deux méthodes donnent le même nombre de conditions, ce qui est d'autant plus remarquable que, dans les équations du troisième et du quatrième degré, les conditions de la réalité des racines sont réductibles à un moindre nombre, comme on l'a vu dans le Chapitre cité (Art. III).

Mais la méthode précédente a cet avantage, que les conditions trouvées pour la réalité des racines des équations d'un degré quelconque peuvent servir pour tous les degrés plus élevés, ce qui n'a pas lieu à l'égard de celles qui résultent des équations des différences. Ainsi l'on pourrait facilement construire des Tables qui contiendraient successivement les caractères de la réalité de toutes les racines, en commençant par l'équation du second degré, et remontant successivement aux équations plus élevées.

11. Pour donner un essai de ces Tables, nous commencerons par la fonction la plus simple de x, qui est x^{o} ou 1 que nous désignerons par X, et nous remonterons successivement aux fonctions primitives, que nous désignerons par $\mathrm{X}_{/}, \mathrm{X}_{//}, \mathrm{X}_{///}, \ldots$, en sorte que X sera la fonction dérivée de $\mathrm{X}_{/}$, $\mathrm{X}_{/}$ la fonction dérivée de $\mathrm{X}_{//}$, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi, en multipliant ces fonctions par les nombres 2, 3, 4, ... pour éviter les fractions, et ajoutant successivement les constantes A, B, C, ... ,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}=1,\\
&\mathrm{X}_{/}=x+\mathrm{A},\\
&2\mathrm{X}_{//}=x^2+2\mathrm{A}x+\mathrm{B},\\
&2.3\mathrm{X}_{///}=x^3+3\mathrm{A}x^2+3\mathrm{B}x+\mathrm{C},\\
&2.3.4\mathrm{X}_{\mathrm{iv}}=x^4+4\mathrm{A}x^3+6\mathrm{B}x^2+4\mathrm{C}x+\mathrm{D},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Maintenant, pour l'équation du second degré

$$x^2+2\mathrm{A}x+\mathrm{B},$$

on fera

$$y=2\mathrm{X}\mathrm{X}_{//}=x^2+2\mathrm{A}x+\mathrm{B},$$

et l'on éliminera x au moyen de l'équation

$$\mathrm{X}_{/}=0,\ \text{ou}\ \ x+\mathrm{A}=0;$$

on aura l'équation en y

$$y+\mathrm{A}^2-\mathrm{B}=0.$$

Donc

$$\mathrm{A}^2-\mathrm{B}>0$$

sera la condition de la réalité des racines de l'équation proposée.

Pour l'équation du troisième dègré

$$x^3+3\mathrm{A}x^2+3\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0,$$

on aura d'abord la condition précédente; ensuite on fera $y = 2.3\mathrm{X}_{/}\mathrm{X}_{//}$,
savoir

$$y = (x + \mathrm{A})(x^3 + 3\mathrm{A}x^2 + 3\mathrm{B}x + \mathrm{C})$$
$$= x^4 + 4\mathrm{A}x^3 + 3(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B})x^2 + (3\mathrm{AB} + C)x + \mathrm{AC},$$

et l'on éliminera x au moyen de l'équation

$$\mathrm{X}_{//} = 0,\ \text{ou}\ x^2 + 2\mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

on trouvera cette équation du second degré

$$y^2 + 2(\mathrm{A}a - b)y + a^2\mathrm{B} - 2ab\mathrm{A} + b^2 = 0,,$$

en faisant pour abréger

$$a = 2\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{AB} + \mathrm{C},$$
$$b = \mathrm{A}^2\mathrm{B} - 2\mathrm{B}^2 + \mathrm{AC};$$

ainsi l'on aura de plus ces deux conditions

$$\mathrm{A}a - b > 0,\ a^2\mathrm{B} - 2ab\mathrm{A} + b^2 > 0.$$

Pour l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 4\mathrm{A}x^3 + 6\mathrm{B}x^2 + 4\mathrm{C}x + \mathrm{D} = 0,$$

on aura d'abord les trois conditions précédentes; ensuite on fera

$$y = (x^2 + 2\mathrm{A}x + \mathrm{B})(x^4 + 4\mathrm{A}x^3 + 6\mathrm{B}x^2 + 4\mathrm{C}x + \mathrm{D}),$$

et, éliminant x au moyen de l'équation

$$\mathrm{X}_{///} = 0,\ \text{ou}\ x^3 + 3\mathrm{A}x^2 + 3\mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0$$

on aura une équation en y du troisième degré, qui, étant représentée par

$$y^3 + \mathrm{M}y^2 + \mathrm{N}y + \mathrm{P} = 0\,,$$

donnera de plus les trois conditions

$$\mathrm{M} > 0, \mathrm{N} > 0, \mathrm{P} > 0,$$

et ainsi de suite.

12. Au reste, nous ne devons pas oublier une très-belle conséquence que De Gua a tirée de sa théorie; voici en quoi elle consiste.

Si dans l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ on substitue $a+z$ à la place de *x,* on a, par la formule du développement des fonctions, la transformée

$$\mathrm{F}(a)+\frac{\mathrm{F}'(a)}{1}z+\frac{\mathrm{F}''(a)}{2}z^2+\frac{\mathrm{F}'''(a)}{2.3}z^3+\ldots+z^m=0,$$

dont on peut faire disparaître un terme quelconque, contenant par exemple la puissance z^n, en déterminant *a* de manière que l'on ait $\mathrm{F}^n(a)=0.$ Or, nous venons de voir que, si toutes les racines de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ sont toutes réelles, les valeurs de $\mathrm{F}^{n-1}(a)$ et $\mathrm{F}^{n+1}(a)$ sont nécessairement de signes contraires pour toutes les valeurs de *x* qui résultent de l'équation $\mathrm{F}^n(a)=0$; donc aussi les valeurs de $\mathrm{F}^{n-1}(a)$ et de $\mathrm{F}^{n+1}(a)$ seront de signès contraires pour toutes les valeurs de *a* résultantes de l'équation $\mathrm{F}^n(a)=0$. D'où il s'ensuit que, si l'on fait évanouir un terme quelconque de la transformée en *z,* les deux tèrmes voisins auront nécessairement des signes différents si la proposée a toutes ses racines réelles; par conséquent, elle aura des racines imaginaires si les termes voisins de celui qui disparaît ont les mêmes signes, et de là on p'eut conclure aussi que toute équation à qui il manque des termes a nécessairement des racines imaginaires si les termes voisins de ceux qui manquent sont, de même signe.

13. Lorsque toutes les racines de l'équation sont réelles, on peut trouver leurs limites sans le secours d'aucune autre équation, par le moyen de la seule règle de Descartes dont nous avons parlé plus haut (n° 5); car, si l'on diminue, par exemple, toutes les racines d'une équation en *x* de la quantité *a,* en y substituant $z+a$ à la place de *x,* la transformée en *z* ou en $x-a$ aura autant de variations de signe de moins qu'il y aura de racines positives de l'équation en *x* qui seront devenues négatives dans l'équation en $x-a$, et par conséquent, parmi les racines positives de l'équation en *x,* il y en aura autant qui seront moindres que *a.* Donc, si l'on forme successivement les transformées en $x-1,\ x-2,\ x-3,\ \ldots$, chaque variation de signe qui disparaîtra d'une transformée à l'autre, par exemple de la transformée en $x-n$ à la transformée en $x-n-1$, indiquera une racine positive moindre que $n+1$, mais non moindre que *n,* et par conséquent contenue entre les limites net $n+1$. On pourra trouver ainsi successivement les premières limites des racines positives, et l'on aura de même celles des racines négatives par la considération des permanences dans les transformées en $n+1,\ n+2,\ \ldots.$

14. J'ignore si cette remarque avait été faite avant le Mémoire que M. Budan présenta à l'Institut en 1803, et qu'il vient de publier avec des augmentations, sous le titre de

Nouvelle méthode pour la résolution des equations numériques. L'Auteur y donne un moyen simple et élégant de former les coefficients des transformées en $x-1$, $x-2$, ... , et, appliquant la règle de Descartes à ces transformées ainsi qu'à d'autres déduites de celles-là, il trouve les limites de toutes les racines et leurs valeurs aussi approchées qu'on veut. On peut dire que cet Ouvrage ne laisse rien à désirer sur la résolution des équations numériques dont toutes les racines sont réelles, et il pourrait à cet égard servir de supplément au présent Traité.

Au reste, si l'équation avait des racines imaginaires, il pourrait disparaître des variations de signe d'une transformée à l'autre sans qu'aucune des racines réelles positives devint négative, comme on peut s'en convaincre aisément par des exemples; ainsi l'équation

$$x^3-2x^2+6x-11=0$$

a pour transformée en $x-1$

$$(x-1)^3+(x-1)^2+5(x-1)-6=0,$$

où l'on voit que deux variations de signe ont disparu; cependant, elle n'a pas de racines entre 0 et 1.

Mais, si le nombre des variations de signe qui disparaissent d'une transformée à la suivante était impair, on en pourrait toujours conclure l'existence d'une racine réelle positive, car cela ne peut arriver à moins que le dernier terme ne change de signe. Or il est visible que les derniers termes des transformées en $x-n$, $x-n-1$ ne sont autre chose que les résultats des substitutions de n et de $n+1$ à la place de x dans la proposée, parce que ces transformées se réduisent à leur dernier terme en y faisant $x=n=n+1$; ainsi il doit nécessairement y avoir une racine réelle entre n et $n+1$, (Chap. 1, §1). La transformée en $x-2$ de l'équation ci-dessus est

$$(x-2)^3+4(x-2)^2+10(x-2)+1=0,$$

qui a une variation de moins que la précédente; aussi y a-t-il une racine de la proposée entre 1 et 2.