NOTE IX.

On the form of imaginary roots.

1. When we had found the general formulas of the roots of the third or fourth degree, we have noted that the imaginary roots of these equation were reduced, as were those of equations of the second degree, to the form $p+q\sqrt{-1}$, p and q being some real quantities ; and we were led to conclude that the imaginary roots of all these equations were always reducible to the same form. Nevertheless we should not adopt this general proposition without demonstration ; and it is only after several attempts that we have managed to convince ourselves about that by rigorous proofs. As this point of the theory of equations is one of those with which geometers are no longer occupied in this century, I have thought that no one would be troubled to find here a short exposition of the different investigations that it has brought about.

2. *D' Alembert* is the first person who has considered this question in a general manner, in his *Pièce sur les Vents*, and in the *Mémoires de l'Académie de Berlin*, for the year 1746.

He shows first that any algebraic quantity, composed of as may imaginary numbers as desired of the $a+b\sqrt{-1}$, always can be reduced to the same form. That is readily seen for quantities formed by multiplication, division, and raised to whole number powers: it can be shown in general for quantities of the form $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$, by the ordinary expansion of the binomial; but in order to have finite expressions, *d'Alembert* used an ingenious method, involving differentiation and integration, in allowing the quantities *a, b, p* and *q* to vary in the equation

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}.$$

Nevertheless it must be confessed that the use of differential calculus is not natural in a question such as this one, where the consideration of infinitely small parts or fluxions, is quite strange, since it is only with regard to a simple algebraic transformation. But the derived functions are presented, on the contrary, very naturally, and even here provide one or the most appropriate examples to show the use of their algorithm in algebra.

3. Indeed, if we consider the identity equation,

$$(x+y\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1},$$

by regarding y as a given function of *z,* and *p, q* as some unknown functions of z which it is required to determine, thus the derived functions of the two members will again form an identical equation

$$(m+n\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})^{m-1+n\sqrt{-1}}(1+y'\sqrt{-1})=p'+q'\sqrt{-1};$$

dividing this equation by the original equation; we will have :

$$\frac{(m+n\sqrt{-1})(1+y'\sqrt{-1})}{x+y\sqrt{-1}}=\frac{p'+q'\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}},$$

an equation which consequently will still be identical.

We can multiply the top and bottom of the fraction of the first member, by $x-y\sqrt{-1}$, and the top and bottom of the fraction of the second member, by $p-q\sqrt{-1}$ in order to make the root of the denominator $\sqrt{-1}$ disappear, and then we compare the real part of the first member with the real part of the second, and imaginary with imaginary, we will have these two equations

$$\frac{m(x+yy')-n(xy'-y)}{x^2+y^2}=\frac{pp'+qq'}{p^2+q^2},$$
$$\frac{n(x+yy')+m(xy'-y)}{x^2+y^2}=\frac{pq'-qp'}{p^2+q^2}.$$

Now taking the original functions [*i.e.* on integrating] we will have on designating the one part by hyperbolic logarithms, and the other part by the Atang of the tangent angle,

$$ml.\sqrt{(x^2+y^2)}-n\text{Atang}\tfrac{y}{x}=l.\sqrt{(p^2+q^2)}+K,$$
$$nl.\sqrt{(x^2+y^2)}+m\text{Atang}\tfrac{y}{x}=\text{Atang}\tfrac{q}{p}+H,$$
$$[\text{i.e. }\tan(\text{Atan}\tfrac{y}{x})=\tfrac{y}{x}\therefore\sec^2(\text{Atan}\tfrac{y}{x})\cdot D(\text{Atan}\tfrac{y}{x})=\tfrac{xy'-y}{x^2},\text{etc.}]$$

K and H being two arbitrary constants which it will be required to be determined conforming with the original given equation. Now, on making in this equation $y=0$ and $x=1$, we have $q=0$ and $p=1$; and these assumptions being introduced into the preceding equations, give $\mathrm{K}=0$ and $\mathrm{H}=0$.

Thus if we make, for more simplicity, $x=u\cos.z$, $y=u\sin.z$, which gives

$$u=\sqrt{(x^2+y^2)},\quad \text{tang}.z=\tfrac{y}{x},$$

and then

$$p=r\cos.s,\quad q=r\sin.s,$$

we will have

$$lr=mlu-nz,$$
$$s=nlu+mz,$$

and returning from logarithms to numbers :

$$r = u^m e^{-nz},\ s = u^n e^{mz}.$$

e being the number of which the hyperbolic logarithm is unity. [The formula for *s* is not given in the original work.]

Hence *r* and *s,* as a consequence *p* and *q,* will be some real functions, on assuming *x, y, m, n* to be real quantities.

4. We can, by these formulas, reduce the expression of the roots of equations of the third degree to the form of a real expression, in the irreducible case.
For the general expression of *x* in the equation

$$x^3 - 3\mathrm{M}x - 2\mathrm{N} = 0\,,$$

being, as we know,

$$\sqrt[3]{[\mathrm{N} + \sqrt{(\mathrm{N}^2 - \mathrm{M}^3)}]} + \sqrt[3]{[\mathrm{N} - \sqrt{(\mathrm{N}^2 - \mathrm{M}^3)}]},$$

which, in the irreducible case where $\mathrm{M}^3 > \mathrm{N}^2$, becomes

$$\sqrt[3]{[\mathrm{N} + \sqrt{(\mathrm{M}^3 - \mathrm{N}^2)}\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[\mathrm{N} - \sqrt{(\mathrm{M}^3 - \mathrm{N}^2)}\sqrt{-1}]},$$

if , in the preceding formulas, we make

$$x = \mathrm{N},\ \ y = \sqrt{(\mathrm{M}^3 - \mathrm{N}^2)},\ \ m = \tfrac{1}{3},\ n = 0,$$

we will have $u = \sqrt{\mathrm{M}^3}$, $\operatorname{tang} z = \frac{\sqrt{(\mathrm{M}^3 - N^2)}}{N}$, and from that $r = u^{\frac{1}{3}} = \sqrt{M}$, $s = \frac{z}{3}$; hence we will have

$$\sqrt{[\mathrm{N} \pm \sqrt{(\mathrm{M}^3 - \mathrm{N}^2)}.\sqrt{-1}]} = \sqrt{\mathrm{M}}\left(\cos\tfrac{z}{3} \pm \sin\tfrac{z}{3}\sqrt{-1}\right),$$

and the sum of the two roots will be $2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos\frac{z}{3}$.

Now, since for the same tangent $\frac{\sqrt{(\mathrm{M}^3 - N^2)}}{N}$ the angles correspond $z,\ z + 2\Delta, z + 2\Delta,\ \Delta$ being a right angle, the expression $2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos\frac{\pi}{3}$ will have these three different values,

$$2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos\tfrac{z}{3},\ \ 2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos(\tfrac{z}{3}+\tfrac{2\Delta}{3}),\ \ 2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos(\tfrac{z}{3}+\tfrac{4\Delta}{3}),$$

which will be the three roots of the proposed equation, and which we can find readily by trigonometric tables.

5. For the rest, it is worthwhile to observe that, when it concerns only pairs of roots, we can make the reduction in question by the simple operations of ordinary algebra. Indeed let $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$ be the quantity to be reduced ; I consider the quantity

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=u;$$

we will have, on squaring,

$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=u^2,$$

a quantity necessarily always positive on taking the positive root ; thus u will be a real quantity.

Next I consider the quantity

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=t;$$

likewise I find, on squaring ,

$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=t^2,$$

essentially a negative quantity ; hence we will have $t^2=-\mathrm{V}^2$, and $t=\mathrm{V}\sqrt{-1}$, V being a real quantity: from that, we will have

$$\sqrt{(a\pm b\sqrt{-1})}=\tfrac{1}{2}(u\pm \mathrm{V}\sqrt{-1}).$$

Considering likewise the quantity

$$\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=s;$$

we will have, on squaring,

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$$
$$=s^2=u+2\sqrt[4]{(a^2+b^2)},$$

essentially a positive quantity, on taking the positive root; thus s will be a real quantity.

Considering next the quantity

$$\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=r;$$

we will have in the same manner

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}\\&=r^2=u-2\sqrt[4]{(a^2+b^2)},\end{aligned}$$

essentially a negative quantity; for $u^2=2a+2\sqrt{(a^2+b^2)}<4\sqrt{(a^2+b^2)}$, and as a consequence $u<2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$. Thus, making $r^2=-S^2$, we will have $r=S\sqrt{-1}$, S being a real quantity ; thus

$$\sqrt[4]{(a\pm b\sqrt{-1})}=\tfrac{1}{2}(s\pm S\sqrt{-1}),$$

and hence so forth.

6. Assuming these reductions, *d'Alembert* considers some curve, of which the ordinate y shall be null or infinite, when the abscissa x is null; and he observes that, whatever the equation of the curve may be, one can always, when x is very small, have the value of y in terms of x, by means of *Newton's* parallelogram, expressed by a very convergent series of the form $y=ax^{\frac{m}{n}}+bx^{\frac{r}{s}}+cx^{\frac{t}{u}}+\text{etc.}$, in which the exponents of x are considered to go on increasing, and of which we can always assume that all the terms are real, on making x positive ; for we can always make the positive x values correspond to the branch where the y values are real.

On making x negative, the terms become imaginary where x is found raised to some fractional powers of which the denominator is an even number ; and by the preceding theorem, they will always be reducible to the form $p+q\sqrt{-1}$, p and q being some real quantities. Thus all the series, and as a consequence the value of y, when it becomes imaginary, also will be of the same form as long as x is very small.

Now, whatever the value of y shall be for some value of x, we can always assume $y=p+q\sqrt{-1}$, p and q being some indeterminate quantities ; and as this value is double, on account of the root $\sqrt{-1}$, the quantities p and q will be expressed by two equations which we will have on substituting $p+q\sqrt{-1}$, in place of y, in the equation of the curve, and equaling separately to zero the whole real part of the transformation, and the part multiplied by $\sqrt{-1}$; these equations will contain the quantities p and q mixed together; but we will have, by the known methods, these changed into two others, of which the one contains only p and x, and the other q and x.

Now, if y is not always of the same form $p+q\sqrt{-1}$, p and q being some real quantities for all the values of x, let a be the greatest value of x , for which y will be of this form, and let $p=b,\ q=c$ when $x=a$. Assuming $x=a+i$, and $p=b+r,\ q=c+s$: on substituting these values into the two equations in p and q, we will have two equations, one in r and i , and the other in s and i, in which $i=0$ will give $r=0$ and $s=0$, and which, by the preceding demonstration, will give r and s of the form $p+q\sqrt{-1}$, when i will be very small, if r and s become imaginary. Thus we will have then $r=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ s=\gamma+\delta\sqrt{-1},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ being some real quantities ; thus $p=b+\alpha+\beta\sqrt{-1},\ q=c+\gamma+\delta\sqrt{-1}$, and as a consequence, $y=b+\alpha-\delta+(\beta+c+\gamma)\sqrt{-1}$; that's to say, of the same form as $p+q\sqrt{-1}$. Thus a is not, as we have assumed, the greatest value of x which gives y of this form; thus the value of y, when it is imaginary, will be always of this same form, whatever the value of x shall be.

This general conclusion naturally applies to equations of any degree with a single unknown; for calling y the unknown of the equation, and assuming the last term equal to x, we will have an equation between x and y, in which $x=0$ will give $y=0$, and which will be in accordance with the preceding demonstration. Thus, whatever the value of the last term x may be, that of y, if it may become imaginary, will be of the form $p+q\sqrt{-1}$.

The equation thus having an imaginary root of this form, necessarily it will have another of the form $p-q\sqrt{-1}$, since the calculation is the same for the two roots, because of the ambiguity of the root $\sqrt{-1}$; it will thus have the two factors $y-p-q\sqrt{-1}$ and $y-p+q\sqrt{-1}$, which form the double real factor $y^2-2py+p^2+q^2$, and consequently will be divisible by this factor ; which will lower it by a degree of at least two units, and the same reasoning and conclusions will be able to be applied to a new equation , and thus so forth.

7. This demonstration is incomplete; for though in an equation for two indeterminates we can always express one of the indeterminates by a series of ascending powers of the other indeterminate, it can happen that the coefficients themselves of the dependent series of equations which have no real roots, may introduce imaginary numbers into the series of the other imaginary numbers which arise from the powers of the indeterminate. But we can, on the same principles, base a more rigorous demonstration, and at the same time simpler and more general, in the following manner.
Let the equation be

$$x^m+\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}+\text{etc.}+\mathrm{V}=0,$$

which we will represent, for greater simplicity, by $fx+\mathrm{V}=0$, fx being a rational and whole function of x, which contains x in all its terms [normally called $f(x)$, and here representing the above infinite series]. We will assume that this equation shall have no real roots, because if it has such, we can eliminate them, by dividing the equation by the simple factors which result from these roots.

It is clear that if the proposed equation has no real roots in its present state, that's to say that as long as its coefficients have the values given, it can only receive changes in the value of the last term V; for on taking some quantity K , and making $\mathrm{V}=-f\mathrm{K}$, the equation $fx-fK=0$ will have the real root K. Therefore considering one of the imaginary roots of the equation $fx+\mathrm{V}=0$, which becomes real on changing the value of V, and assuming that it only remains imaginary as long as the value of V will lie between the limits a and b, a being $< b$, such that x may have a real value α in the equation $fz+a=0$, and a real value β in the equation $fx+b=0$, and this root shall be imaginary in the equation $fx+a+i=0$, and in the equation $fx+b-i=0$, i being some positive quantity, as small as we would wish. Let $\alpha+u$ be the imaginary value of x in the equation $fx+a+i=0$, the function fx will be come, by the substitution of $\alpha+u$ in place of x, $f\alpha+uf'\alpha+\frac{u^2}{2}f''\alpha+\text{etc.}$, by the known formula for the expansion of functions ; but since α is the root of the equation $fx+a=0$, we have $f\alpha+a=0$; thus $a=-f\alpha$; hence the equation $fx+a+i=0$ will become

$$uf'\alpha+\frac{u^2}{2}f''\alpha+\text{etc.}+i=0.$$

Now, if the coefficient $f'\alpha$ is not null, it is evident that on supposing i to be a very small quantity, as wished, we will always be able to have u by a completely real and rapidly converging series ; for we will have at first $u=-\frac{i}{f'\alpha}$, then, on substituting this first value of u , we will have $u=-\frac{i}{f'\alpha}-\frac{i^2f''\alpha}{2f'\alpha^2}$, and thus so on. Thus u will be a real quantity, contrary to the hypothesis.

Thus it will be required, in order that u may become imaginary, that we may have $f'\alpha=0$; then the equation will become

$$\frac{u^2}{2}f''\alpha+\frac{u^3}{2.3}f'''\alpha+\text{etc.}+i=0,$$

and the first approximate value of u will be $\sqrt{-\frac{2i}{f''\alpha}}$, which will be real or imaginary, following which $f''\alpha$ will be a negative or positive quantity, since i is assumed positive.

If the first term of u is real, it is easy to see that all the others will be real also ; as a consequence, the whole value of u will be real. If the coefficient $f''\alpha$ is positive, the first term of u will be imaginary of the form $\sqrt{\frac{2i}{f''\alpha}}\times\sqrt{-1}$, and the following terms will be real or imaginary of the same form, such that the whole value of u will be of the form $p+q\sqrt{-1}$, p and q being real.

But if we had at the same time $f''\alpha = 0$, then the equation becoming

$$\frac{u^3}{2.3} f'''\alpha + \frac{u^4}{2.3.4} f^{iv}\alpha + \text{etc.} + i = 0,$$

it is easy to see that the value of *u* will be again real, as long as the term which contains u^3 may not disappear, and that $f^{iv}\alpha$ shall not be positive ; for in this case we will have $u = \sqrt[4]{\frac{2.3.4i}{f^{iv}\alpha}}.\sqrt[4]{-1}$; but by the theorem shown above (n° 5), $\sqrt[4]{-1}$ is reducible to the form $m + n\sqrt{-1}$, *m* and *n* being real quantities; thus, the first value, approximating to *u,* will be of the form $p + q\sqrt{-1}$, and the terms following also will be of the same form, such that the whole value of *u* will be of this form, and hence so forth.

8. It results from this conclusion, that when a root α of the equation $fx + a = 0$, is passing from real to imaginary, we have, not only $fx + a = 0$, but again $f'\alpha = 0$ and $f''\alpha > 0$, and that if $f''\alpha = 0$, we will have, further $f'''\alpha = 0$ and $f^{iv}\alpha > 0$, and thus so forth. now, on making $fx + a = Fx$, we have $f'x = \mathrm{F}'x,\ f''x = \mathrm{F}''x,$ etc.; thus, just as we have seen in the preceding Note (n° 4), $f'\alpha = 0$ shall be the condition so that this root α of the equation $fx + a = 0$ shall be double, $f''\alpha = 0$ will be the condition so that the root shall be triple, etc.

From which it follows that a root cannot pass from being real to imaginary, without becoming double or quadruple, and in general a multiple of an even order.

We will prove, in the same way, on making $x = \beta + u$ in the equation $fx + b - i = 0$, that the value of u cannot become imaginary, unless we have $f'\beta = 0$ and $f''\beta < 0,$ and if $f''\beta = 0$, it will be necessary further, what we may have $f'''\beta = 0$ and $f^{iv}\beta < 0$, and so on thus. From which we will conclude that in the passage from imaginary to real, the root also becomes either double, or quadruple, etc.

So far this proposition has been demonstrated only by the theory of curves, or as a consequence of the theorem on the form of imaginary roots.

9. Now*,* since where the value of V is very close to limits *a* and *b,* one of the imaginary roots of the equation $fx + \mathrm{V} = 0$, is necessarily of the form $p + q\sqrt{-1}$, but if this root were not always of the same form for all the values of V taken between these limits, then let *c* be the greatest value of V, for which *x* will be of this form ; of such a kind that, in the equation $fx + c = 0$, we shall have $x = m + n\sqrt{-1}$, *m* and *n* being some real quantities, and let $m + n\sqrt{-1} + u$ be the value of *x,* when V will be $c + i$, *i* being some arbitrary very small quantity. Thus we will have $f(m + n\sqrt{-1}) + c = 0,$ and $f(m + n\sqrt{-1} + u) + c + i = 0$; expanding the value of u in the second equation, and subtracting the first, we will have

$$uf'(m + n\sqrt{-1}) + \frac{u^2}{2} f''(m + n\sqrt{-1}) + \text{etc.} + i = 0.$$

But the derived functions will be

$$uf'(m+n\sqrt{-1}),\ f''(m+n\sqrt{-1}),\ \text{etc.},$$

containing only powers of $m+n\sqrt{-1}$, all reducible to the form $p+q\sqrt{-1}$: hence, on taking the real quantities M, N, P, Q, etc., the preceding equation will become

$$u(\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1})+\tfrac{u^2}{2}(\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1})+\text{etc.}+i=0.$$

Thus, the first approximate value of u will be

$$-\frac{i}{\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1}}=-\frac{i(\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{-1})}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2},$$

and as a consequence of the form $p+q\sqrt{-1}$ and we will find that all the following terms of the series, which we can render as convergent as we wish, on taking *i* very small as desired, also will be of the same form ; such that the whole series will be of this form also. Thus we will have, for a value of *i* as small as we desire, $u=r+s\sqrt{-1}$; thus the value of *x* will be $m+r+(n+s)\sqrt{-1}$ and as a consequence again of the same form $p+q\sqrt{-1}$, contrary to the hypothesis. Thus there is no intermediary value of V between the limits *a* and *b,* for which the root *z* shall not be of this same form.
If the function $f'(m+n\sqrt{-1})$ were null, then the equation in *u* would become

$$\tfrac{u^2}{2}f''(m+n\sqrt{-1})+\tfrac{u^3}{2.3}f'''(m+n\sqrt{-1})+\text{etc.}+i=0,$$

and we would prove likewise that the value of *u* would always be of the form $p+q\sqrt{-1}$, and hence so on.

This demonstration has the advantage of being able to be applied equally to equations which consist of logarithmic or circular functions, and in general to any equation of the form $\mathrm{F}x=0$, in which the derived function $\mathrm{F}'x$ will be reducible to the form $p+q\sqrt{-1}$ on making $x=m+n\sqrt{-1}$; for then all the other derived functions $\mathrm{F}''x,\ \mathrm{F}'''x,$ etc. also will be reducible to the same form; but this detail would take us too far from our subject.

10. We have just shown that in equations which have only imaginary roots, there will be there at least two of the form $p\pm q\sqrt{-1}$; thus we will be able to find the values of p and *q* by the method of Ch. II (§17) , and the equation will be divisible by $x^2-2px+p^2+q^2=0$; after the division, it may not contain more than the other imaginary roots; and on applying there the same reasoning, we will prove likewise that two or more of these roots necessarily will be of the form $p\pm q\sqrt{-1}$, and thus so on.

Although the preceding demonstration may suffice to prove the truth of the proposition with which it is concerned, we cannot disagree that it is not indirect, and that it still leaves a demonstration to be desired expressed uniquely from the principles of the matter. Indeed, we have already observed that every imaginary root of the form $p+q\sqrt{-1}$ assumes a real factor of the second degree $x^2-2px+p^2+q^2=0$, thus the question is reduced to proving that every equation is always divisible by the real factors of the first and second degree; and as equations of an odd degree always have one real root, and are, consequently, divisible by a real factor of the first degree, which lowers these to a degree smaller by one, it follows that it will be sufficient to consider equations of even degree.

11. *Descartes* has found that the equation of the fourth degree

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

has two factors of the second degree,

$$x^2 \pm yx+\tfrac{y^2}{2}+\tfrac{1}{2}p\mp\tfrac{q}{2y}=0,$$

the quantity y being given by the equation

$$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0$$

Thus, since this equation has its last term negative, it has always necessarily a real root (Ch. I, § 3); as a consequence, the two factors will be real on using this root.

Hudde next considered the general equation of the sixth degree, in his treatise *De Reductione Æquationum*, printed following the commentary of *Schoten* on *Descartes*' *Geometry,* and he has found that this equation is divisible by an equation of the second degree, as $x^2-yx+u=0,$ in which the coefficient y is given by an equation of the fifth degree, and the coefficient u is a rational function of y. Now, the equation of the fifth degree having necessarily one real root, it follows that the divisor of the second degree will always be able to be real on using this root; such that the equation being found next lowered to the fourth degree will have still two other real divisors.

Hudde was no further; and as he had found an equation in y of the fifteenth degree which was making the calculation very long, he must have felt that he had fallen into calculations unpractable by their length, if he wanted to treat likewise equations of higher degree.

12. We find at the end of *Saunderson's Algebra*, printed in 1740, after his death, this important remark, that in the divisor $x^2-yx+u=0$ of the equation of the fourth degree, the coefficient y is given by an equation of the sixth degree, because this coefficient must become the sum of two roots of the equation of the fourth degree, the equation in y must have for roots all the different sums that can be made from the four roots of the equation, taken in pairs of two ; and since these combinations are for the number six, the equation

in y must be of the sixth power, as *Descartes* had found; but the author only applies this remark to a particular example, and in addition does not form any other consequence.

Le Seur, one of the commentators of Newton's *Principia* , has generalised this result, in a small work on the integral calculus, printed in Rome in 1748. He proves, by the theory of combinations, that when we search for a divisor of one equation of degree *m* by an equation of a smaller degree *n,* the coefficients of that one are given necessarily by equations of degree

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots n},$$

because the divisor must have, which is evident, *n* roots in common with the equation proposed, we can form just as many differing divisors as there are ways of taking *n* things for *m* things; and from that he concludes that any equation of degree $4m+2$ is always divisible by a real factor of the second degree, because this factor depends on an equation which is found of an odd degree, and which will have consequently one real root ; but we can conclude nothing about the reality of the divisors of the second degree of equations of which the degree is a number which is not of the form $4n+2$, because these divisors then depend on equations of even degrees.

13. *Euler* has delved into this theory in a Memoir printed in 1751, in the Records of these of the Berlin Academy for the year 1749 [E170], and it is put in place principally to prove that every equation expressed by an even power of 2, is decomposable into two real equations of degree less than half; for that, he assumes that the proposed equation has been deprived of its second term; which makes the coefficient of the second term to be the same with the signs opposite in the two equations of which it is the product; and he finds, by the theory of combinations, that this coefficient is given by an equation of a completely even degree, which lacks all the odd powers, and of which the last term is the square of a function of the roots of the proposed equation, preceded by a negative sign.

Euler assumes that this function of the roots can always be determined without irrationality by the coefficients of the equation proposed, and he concludes from that its square necessarily will be a positive quantity, and that as a consequence the equation which determines the coefficient concerned has two real roots; it arises, indeed, that this will be the case when the proposed equation is only of the fourth degree, as can be seen from *Descartes's* formulas*,* mentioned above ; but for equations of higher degrees, it will require a demonstration from the start, which Euler has not given, and what is even still more necessary, that this function does not contain all roots of the same kind, but it does not appear determinable by a rational function of the coefficients, which are themselves, as we know, functions where all the roots enter equally.

Euler considers further, equations of which the degrees are expressed by the numbers 2*i*, 4*i,* 8*i,* etc., *i* being some odd number, and he finds that they allow real divisors of the degrees 2, 4, 8, etc., because the equations which these divisors depend on, are all of odd degrees ; such that, by this means, every equation can be decomposed into real equations of degrees expressed by powers of 2 ; but the difficulty of decomposing these following, when they have passed the fourth degree, rests entirely on Euler's theory.

14. One can avoid this difficulty, as *Foncenex* has done in the first volume of the *Miscellanea* of Turin, printed in 1759*,* on considering only divisors of the second degree. For $2^{\mu}\nu$ shall be the degree of the equation proposed, ν being an odd number, if we search for the divisor by an equation of the second degree $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$, we find, by the theory of combinations, that the coefficient u is determined by an equation of degree $\frac{2^{\mu}\nu(2^{\mu}\nu-1)}{2} = 2^{\mu-1}\nu(2^{\mu}\nu - 1) = 2^{\mu-1}\pi$, π being, as we see, an odd number.

Thus, if $\mu = 1$, this equation will be of odd degree and necessarily it will have a real root; such that, as the final term V generally is expressed by a rational function of *u,* the equation proposed will have a rational divisor of the second degree, and it will be lowered by that to a degree less by two units.

If μ is much greater than unity, we will look likewise for a divisor of the equation in *u,* by an equation of the second degree, such as $u^2 - tu + \mathrm{T} = 0$, and the coefficient t will be given by an equation of degree

$$\frac{2^{\mu-1}\pi(2^{\mu-1}\pi-1)}{2} = 2^{\mu-2}\pi(2^{\mu-1}\pi - 1) = 2^{\mu-2}\rho\,,$$

ρ being, as we see, an odd number; and the term T will be expressed generally by a rational function *t.*

Thus, of $\mu = 2$, this equation will be of an odd degree, and it will have a real root ; thus t and T will have real values, and the equation $u^2 - tu + \mathrm{T} = 0$ will give for u either a real value or an imaginary number of the form $p + q\sqrt{-1}$. In the first case, u and V will be real quantities ; in the second case, these quantities will be imaginaries of the same form, since V is a rational function of *u.* But the equation $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$ gives $x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{(\frac{u^2}{4} - \mathrm{V})}$; thus, by the reduction of the imaginary roots, this value also is going to become of the form $p + q\sqrt{-1}$.

If μ is a number greater than 2, we will continue the same calculation, and divide the equation in t of degree $2^{\mu-2}\rho$, by an equation of the second degree, such as $t^2 - st + \mathrm{S} = 0$; we will have, for the determination of *s,* an equation of degree

$$\frac{2^{\mu-2}\rho(2^{\mu-2}\rho-1)}{2} = 2^{\mu-3}\rho(2^{\mu-2}\rho - 1) = 2^{\mu-3}\sigma\,,$$

σ being, as we see, an odd number, and the quantity S will be generally a rational function of *s.*

Thus, if $\mu = 3$, this equation being of an odd degree, will have a real root; thus s and S will have real values; thus the equation $t^2 - st + \mathrm{S} = 0$ will give for t either a real value or an imaginary value of the form $p + q\sqrt{-1}$. Thus, in the equation $u^2 - tu + \mathrm{T} = 0$, the coefficients t and T will have real or imaginary values of the same form; and also for the resolution u a real or imaginary value of the same form $p+q\sqrt{-1}$, as we have seen above, since $u=\frac{t}{2}\pm\sqrt{(\frac{t^2}{4}-\mathrm{T})}$; thus finally the equation $x^2-ux+\mathrm{V}=0$, also will give for x a real or imaginary value of the same form.

If μ is greater than 3, we will continue the calculation in the same manner, and necessarily we are going to arrive at a divisor of the second order, of which the coefficients will be real ; and from that, on rising again successively to divisors of the second degree, where we will find that their coefficients will be real or imaginary of the same form $p+q\sqrt{-1}$, just as for the divisor $x^2-ux+\mathrm{V}=0$ of the equation proposed, which also will give for x a real or imaginary value of the same form.

Such is the demonstration given by *Foncenex;* we see that it is very rigorous, in allowing the principle, that the coefficient of the equation of the second degree, which is a divisor of an equation of degree n, depends only on a single root of the equation of degree $\frac{n(n-1)}{2}$. This principal is true generally ; but I have noted since, that it was subject to some exceptions which were able to put the preceding demonstration in default. Indeed, when we try to render a polynomial of some degree m, divisible by another of a lesser degree n, should one make the division in the ordinary manner, and equate each of the following remaining terms to zero, should we multiply this polynomial by another of degree $m-n$, and compare the product term by term with the polynomial proposed; we arrive always, by successive elimination, on taking one of the coefficients of the divisor as the principal unknown, to determine the other coefficients of the same polynomial by these rational functions of that, and then we find, by these substitutions, an equation there is no more than the unknown itself, and where the unknown rises to the degree

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots n},$$

as we have said above.

15. But if it arises that this equation may have two or several equal roots, then, unless the values of the other coefficients which correspond to these equal roots, may not be able to be equal also, which happens only when the divisor is itself a double or triple, etc., it is seen that these values can no longer be expressed in rational functions of these same roots, but that they themselves must depend on equations of the second, third degree, etc., following the degree of equality of the roots. In this case, on substituting into these rational functions found, one of equal roots, the functions will become indeterminate, by the simultaneous vanishing of the numerator and denominator; and on returning to these eliminations, we will find ourselves stopped at an equation of the second or third degree, etc., because the equation by which it will be required to be compared with that, in order to lower that to a lesser degree, will be identical with that. Concerning which we can convince ourselves by the calculation; and we will give a general demonstration concerning that in the following Note. As the same difficulty can arise in all the eliminations, it pleases me to call the attention of the reader to this point, so that he need not feel any embarrassment on the occasion.

We see that this circumstance can put into default the theory that we have just set out on the divisors of the second degree; for when the equation on which it depends one of the coefficients has equal roots, the other coefficient, on using these roots, will depend on an equation of a degree equal to the number of these equal roots, and which, as a consequence, if it is not of an odd degree, will require new combinations in order to be assured that it has a real root of the form $p+q\sqrt{-1}$; and if we do not wish to use these equal roots, then, on eliminating these by division, we would have an equation of one degree less, truly, but which will no longer be expressed by a number of the same form $2^{m-1}\pi$, or $2^{m-2}\rho$, etc.

If we consider, for example, the formula found by *Descartes,* for the resolution of equations of the fourth degree, which we have mentioned above, *i.e.* [$x^4+px^2+qx+r=0$, has two factors of the second degree, $x^2\pm yx+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2y}=0$,] and after which we have concluded at once that the equation is always decomposable into two real factors of the second degree, we see that nevertheless there is a case which has escaped from this conclusion ; it is that where we have $q=0$; for then the reduction in *y* has two equal roots $y=0$; and on using these roots, the term $\frac{q}{2y}$ of the factor of the second degree becomes $\frac{0}{0}$. We could make use of other roots; but the equation in *y* [*i.e.* $y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0$] being divided by y^2, becomes $y^4+2py^2+p^2-4r=0$, which being again of the fourth degree, and its last term essentially not being negative, the difficulty has been brought back to the same point. It is not only in this particular case that we cannot prove, by these same formulas, the truth of these two factors ; for if $p^2<4r$, the last term of the equation in y will be negative; and consequently there will be two real roots. If $p^2>4r$, then the equation proposed becoming, on account of $q=0$, $x^4+p^2x^2+4r=0$, will have the two real factors, $x^2+\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-r)}$.

16. These difficulties have occasioned the investigations that I have given on this matter to the Berlin Academy in 1772, and in which I am particularly concerned to complete the theory started by *Euler.*

I have shown in a rigorous manner, that if we wish to decompose a polynomial of degree 2^m into two polynomials of degree 2^{m-1}, such as (n being $=2^{m-1}$),

$$x^n+\mathrm{M}x^{n-1}+\mathrm{N}x^{n-2}+\mathrm{P}x^{n-3}+\text{etc.},$$
$$x^n+\mathrm{M}_1x^{n-1}+\mathrm{N}_1x^{n-2}+\mathrm{P}_1x^{n-3}+\text{etc.},$$

and that we may make

$$u=a(\mathrm{M}-\mathrm{M}_1)+b(\mathrm{N}-\mathrm{N}_1)+c(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)+\text{etc.},$$

a, b, c, etc., being some constant quantities, we will be able to determine generally the coefficients M, N, P, etc., M_1, N_1, P_1, etc. of the two polynomials, by some rational functions of *u,* and that for *u* we will find an equation of a completely even degree, having only even powers of *u,* of which the last term will be essentially negative ; and because of the arbitrary *a, b, c,* etc., we will always be able to make such a kind that the last term shall not be null, which would give it the two equal roots $u = 0$, nor that it may have other equal roots. Such that we will always be assured to have by that real values for the coefficients with which it is concerned, and as a consequence to be able to decompose the equation of degree 2^m into two of degree 2^{m-1}, and consequently each of these into two of degree 2^{m-2}, and so forth thence, as far as to equations of the second degree.

With regard to equations of the degree $2^m i$, *i* being an odd number, *Euler* had found that by using a divisor of degree 2^m, we come upon an equation of an odd degree, in order to determine some one of its coefficients; and I have noted that if it has some equal roots, double roots, quadruple roots, etc. will be eliminated, because the equation will still remain of an odd degree, and that triple, quintuple, etc., roots will be able to be used in the determination of the other coefficients, because it will then depend on equations of the third, fifth, etc. degree, which will be consequently always real roots.

17. In this manner, the decomposition of equations into real divisors of the first and second degree has been demonstrated rigorously; but *Laplace* has since given, in his Leçons de l'École Normale, a more simple means of establishing this truth, in taking the analysis used by *Foncenex.* In place of considering simply the equation which determines the coefficient *u* of the quadratic divisor $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$, he considers the equation which determines the quantity $u + a\mathrm{V}$, which I had designated by u_1, *a* being some constant coefficient. This equation will be, by the theory of combinations, of the same degree as the equation in *u.* Thus, if the equation proposed is of degree 2*v*, *v* being odd*,* the equation in *u,* will be of an odd degree, and will have always a real root; and as we can give to *a* an infinity of values, we will have an infinity of equations which will all have a real root. Among these roots, it will necessarily have there several which will refer to the same divisor; let α, β be two of these roots, and *a, b* the two values of the coefficient *a;* we will have $u + a\mathrm{V} = \alpha$, $u + b\mathrm{V} = \beta$, from which we will derive these values of u and V, which consequently will be real.

If the proposed equation is of the degree 4^v, *v* being some odd number, the equation in u_1 will be of degree 2π, π being also an odd number. This equation will be thus, as we have just shown, a quadratic divisor of the form $u_1^2 - tu_1 + \mathrm{T} = 0,$ which will give for u_1, a value of the form $\alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$, and on giving an infinitude of values to a, we will have an infinitude of equations in u_1, each of which will have a root of the form $\alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$; among these roots, it will have there necessarily two which refer to the same divisor; on designating these by $\alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$ and $\beta + \mathrm{B}\sqrt{-1}$, and by *a, b* the two values of *a* which correspond there, we will have $u + a\mathrm{V} = \alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$, $u + b\mathrm{V} = \beta + \mathrm{B}\sqrt{-1}$; thus *u* and V will be both of the form $p+q\sqrt{-1}$, and the value of x, extracted from the equation $x^2-ux+\mathrm{V}=0$, will again be of the same form. Thus, every equation of degree 4^v, will have two roots of the form $p \pm q\sqrt{-1}\,p$, and as a consequence a real divisor of the second degree, and thus so on.

This demonstration leaves nothing to be desired as a simple demonstration ; but if we wished to resolve effectively a given equation into its real factors of two dimensions, it would be as impossible to follow the procedure indicated by the analysis we have just set out. Nevertheless this resolution is necessary in order to find the primitive functions, or the integrals of rational fractional functions of a single variable, and we assume that in all the treatises on the integral calculus. This reason commits me to stop again on this important subject, and to make it the subject of the following Note.

NOTE IX.

Sur la forme des racines imaginaires.

1. Lorsqu'on eut trouvé les formules générales des racines des équations du troisième et da quatrième degré , on remarqua que les racines imaginaires de ces équations se réduisent, comme celles des équations du second degré, à la forme $p+q\sqrt{-1}$, p et q étant des quantités rèelles; et l'on fut porté à conclure que les racines imaginaires de toutes les équationt étaient toujours réductibles à la même forme. Cependant on ne pouvait pas adopter cette proposition générale sans démonstration; et ce n'est qu'après plusieurs tentatives qu'on est parvenu à s'en convaincre par des preuves rigoureuses. Comme ce point de la théorie des équations est un de ceux dont les géomètres se sont le plus occupés dans ce siècle, j'ai cru qu'on ne serait pas fâché de trouver ici un exposé succinct des différentes recherches qu'il a occasionnées.

2. *D' Alembert* est le premier qui ait envisagé cette question d'une manière générale, dans sa Pièce sur les Vents, et dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1746.

Il démontre d'abord qu'une quantité algébrique quelconque, composée de tant d'imaginaires qu'on voudrà, de la forme $a+b\sqrt{-1}$, peut toujours se réduire à la même forme. Cela se voit facilement pour les quantités formées par multiplication, division, et élévation aut puissances entières : on pourrait le démontrer en général pour les quantités de la forme $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$, par le développement ordinaire du binome; mais pour avoir des expressions finies, *d'Alembert* emploie d'une manière ingénieuse, la différentiation et l'intégration, en faisant varier les quantités *a, b, p* et *q* dans l'équation

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}.$$

Cependant il faut avouer que l'emploi du calcul différentiel est per naturel dans une question comme celle-ci, où la considération des infiniment petits ou des fluxions, est tout-à-fait étrangère, puisqu'il ne s'agit que d'une simple transformation algébrique. Mais les fonctions dérivées se présentent, au contraire, très naturellement, et offrent même ici un des exemples les plus propres à montrer l'usage de leur algorithme dans l'Algèbre.

3. En effet, si l'on considère l'équation identique,

$$(x+y\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1},$$

en regardant *y* comme une fonction donnée de *z,* et *p, q* comme des fonctions inconnues de *z* qu'il s'agit de déterminer, les fonctions dérivées des deux membres formeront encore une équation identique; on aura ainsi divisant cette équation par l'équation primitive, on aura ainsi

$$(m+n\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})^{m-1+n\sqrt{-1}}(1+y'\sqrt{-1})=p'+q'\sqrt{-1};$$

divisant cette équation par l'équation primitive, on aura

$$\frac{(m+n\sqrt{-1})(1+y'\sqrt{-1})}{x+y\sqrt{-1}}=\frac{p'+q'\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}},$$

équation qui sera, par conséquent, encore identique.

Qu'on multiplie le haut et le bas de la fraction du premier membre, par $x-y\sqrt{-1}$, et le haut et le bas de la fraction du second membre, par $p-q\sqrt{-1}$ pour faire disparaître le radica $\sqrt{-1}$ du dénominateur et qu'ensuite on compare la partie réelle du premier membre avec la partie réelle du second , et l'imaginaire avec l'imaginaire, on aura ces deux équations

$$\frac{m(x+yy')-n(xy'-y)}{x^2+y^2}=\frac{pp'+qq'}{p^2+q^2},$$
$$\frac{n(x+yy')+m(xy'-y)}{x^2+y^2}=\frac{pq'-qp'}{p^2+q^2}.$$

Qu'on prenne maintenant les fonctions primitives, on aura, en désignant par les logarithmes hyperboliques, et par Atang l'angle de la tangente ,

$$ml.\sqrt{(x^2+y^2)} - n\text{Atang}\tfrac{y}{x} = l.\sqrt{(p^2+q^2)} + K,$$
$$nl.\sqrt{(x^2+y^2)} + m\text{Atang}\tfrac{y}{x} = \text{Atang}\tfrac{q}{p} + H,$$

K et H étant deux constantes arbitraires qu'il s'agit de déterminer conformément à l'équation primitive donnée. Or, en faisant dans cette équation $y=0$ et $x=1$, on a $q=0$ et $p=1$; et ces suppositions étant introduites dans les équations précédentes , donnent $\text{K}=0$ et $\text{H}=0$.

Si donc on fait, pour plus de simplicité, $x = u\cos.z$, $y = u\sin.z$,
ce qui donne

$$u = \sqrt{(x^2+y^2)}, \quad \text{tang}.z = \tfrac{y}{x},$$

et ensuite

$$p = r\cos.s, \quad q = r\sin.s,$$

on aura

$$lr = mlu - nz,$$
$$s = nlu + mz,$$

et repassant des logarithmes aux nombres

$$r = u^m e^{-nz},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Ainsi *r* et *s,* et par conséquent *p* et *q,* seront des fonctions réelles, en supposant *x,y, m, n* des quantités réelles.

4. On peut, par ces formules, réduire à une forme réelle l'expression des racines des équations du troisième degré, dans le cas irréductible.
Car l'expression générale de *x* dans l'équation

$$x^3 - 3\text{M}x - 2\text{N} = 0,$$

étant, comme l'on sait,

$$\sqrt[3]{[\text{N}+\sqrt{(\text{N}^2-\text{M}^3)}]} + \sqrt[3]{[\text{N}-\sqrt{(\text{N}^2-\text{M}^3)}]},$$

laquelle, dans le cas irréductible où $\text{M}^3 > \text{N}^2$, devient

$$\sqrt[3]{[\mathrm{N}+\sqrt{(\mathrm{M}^3-\mathrm{N}^2)}\sqrt{-1}]}+\sqrt[3]{[\mathrm{N}-\sqrt{(\mathrm{M}^3-\mathrm{N}^2)}\sqrt{-1}]},$$

si l'on fait dans les formules précédentes

$$x=\mathrm{N},\ \ y=\sqrt{(\mathrm{M}^3-\mathrm{N}^2)},\ \ m=\tfrac{1}{3},\ n=0,$$

on aura $u=\sqrt{\mathrm{M}^3}$, tang $z=\frac{\sqrt{(\mathrm{M}^3-N^2)}}{N}$, et de là $r=u^{\frac{1}{3}}=\sqrt{M}$, $s=\frac{z}{3}$; donc on aura

$$\sqrt{[\mathrm{N}\pm\sqrt{(\mathrm{M}^3-\mathrm{N}^2)}.\sqrt{-1}]}=\sqrt{\mathrm{M}}\left(\cos\tfrac{z}{3}\pm\sin\tfrac{z}{3}\sqrt{-1}\right),$$

et la somme des deux radicaux sera $2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos\frac{z}{3}$.

Or, comme à la même tangente $\frac{\sqrt{(\mathrm{M}^3-N^2)}}{N}$ répondent les angles $z,\ z+2\Delta, z+2\Delta,\ \Delta$ étant l'angle droit, l'expression $2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos\frac{\pi}{3}$ aura ces trois valeurs différentes,

$$2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos\tfrac{z}{3},\ \ 2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos(\tfrac{z}{3}+\tfrac{2\Delta}{3}),\ \ 2\sqrt{\mathrm{M}}.\cos(\tfrac{z}{3}+\tfrac{4\Delta}{3}),$$

qui seront les trois racines de l'équation proposée, et qu'on trouvera ainsi facilement par les tables trigonométriques.

5. Au reste, il est bon de remarquer que, lorsqu'il ne s'agit que de radicaux pairs, on peut faire la réduction dont il s'agit par les simples opéràtions de l'Algèbre ordinaire. En effet, soit la quantité $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$ à réduire; je considère la quantité

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=u;$$

j'aurai, en élevant au carré ,

$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=u^2,$$

quantité toujours nécessairement positive en prenaut le radical positivement; donc u sera une quantité réelle.

Je considère ensuite la quantité

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=t;$$

je trouve de même, en carrant ,

$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=t^2,$$

quantité essentiellement négative; ainsi on aura $t^2=-\mathrm{V}^2$, et $t=\mathrm{V}\sqrt{-1}$, V étant une quantité réelle : de là, on aura

$$\sqrt{(a\pm b\sqrt{-1})}=\tfrac{1}{2}(u\pm \mathrm{V}\sqrt{-1}).$$

Considérons de méme la quantité

$$\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=s;$$

on aura, en carrant,

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$$
$$=s^2=u+2\sqrt[4]{(a^2+b^2)},$$

quantité essentiellement positive, en prenant le radical positivement; donc s sera une quantité réelle.

Considérons ensuite la quantité

$$\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=r;$$

on aura de la même manière

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$$
$$=r^2=u-2\sqrt[4]{(a^2+b^2)},$$

quantité essentiellement négative ; car $u^2=2a+2\sqrt{(a^2+b^2)}<4\sqrt{(a^2+b^2)}$, et par consequent $u<2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$. Donc, faisant $r^2=-S^2$, on aura $r=S\sqrt{-1}$, S étant une quantité réelle ; donc

$$\sqrt[4]{(a\pm b\sqrt{-1})}=\tfrac{1}{2}(s\pm S\sqrt{-1}),$$

et ainsi de suite.

6. Ces réductions supposées , *d'Alembert* considère une courbe quelconque, dont l'ordonnée y soit nulle ou infinie, lorsque l'abscisse x est nulle; et il observe que, quelle que puisse être l'équation de la courbe , on peut toujours, lorsque x est très petite, avoir la valeur de y en x, au moyen du parallélogramme de *Newton*, exprimée par une série très convergente de la forme $y=ax^{\frac{m}{n}}+bx^{\frac{r}{s}}+cx^{\frac{t}{u}}+\text{etc.}$, dans laquelle les exposans de x sont

imaginés aller en augmentant, et dont on peut toujours supposer que tous les termes sont réels , en faisant x positive ; car on peut faire répondre les x positives à la branche où les y sont réelles.

En faisant x négative, les termes où x se trouve élevée à des puissances fractionnaires dont le dénominateur est un nombre pair, deviennent imaginaires; et par le théorème précédent, ils seront toujours réductibles à la forme $p+q\sqrt{-1}$, p et q étant des quantités réelles. Donc toute la série, et par conséquent la valeur de y, lorsqu'elle devient imaginaire, sera aussi de la même forme tant que x sera très petite.

Maintenant, quelle que soit la valeur de y pour une de x quelconque, on peut toujours supposer $y=p+q\sqrt{-1}$, p et q étant des quantités indéterminées ; et comme cette valeur est réellement double, à raison du radical $\sqrt{-1}$ les quantités p et q seront exprimées par deux équations qu'on aura en substituant $p+q\sqrt{-1}$, au lieu de y, dans l'équation de la courbe, et égalant séparément à zéro la partie toute réelle de la transformée, et la partie multipliée par $\sqrt{-1}$; ces équations contiendront les quantités p et q mêlées ensemble ; mais on pourra , par les méthodes connues, les changer en deux autres, dont l'une ne renferme que p et x, et l'autre q et x.

Or, si y n'est pas toujours de la même forme $p+q\sqrt{-1}$, p et q étant des quantités réelles pour toutes les valeurs de x, soit a la plus grande valeur de x , pour laquelle y sera de cette forme, et soit $p=b,\ q=c$ lorsque $x=a$. Supposons $x=a+i$, et $p=b+r,\ q=c+s$: en substituant ces valeurs dans les deux équations en p et q, on aura deux équations , l'une en r et i , et l'autre en s et i, dans laquelle $i=0$ donnera $r=0$ et $s=0$, et qui, par la démonstration précédente, donneront r et s de la forme $p+q\sqrt{-1}$, lorsque i sera très petite , si r et s deviennent imaginaires. On aura donc alors $r=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ s=\gamma+\delta\sqrt{-1},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ étant des quantités réelles; donc $p=b+\alpha+\beta\sqrt{-1},\ q=c+\gamma+\delta\sqrt{-1},$ et par conséquent, $y=b+\alpha-\delta+(\beta+c+\gamma)\sqrt{-1}$; c'est-à-dire de la même forme $p+q\sqrt{-1}$. Donc a n'est pas, comme on l'a supposé, la plus grande valeur de x qui donne y de cette forme; donc la valeur de y, lorsqu'elle est imaginaire, sera toujours de cette même forme, quelle que soit la valeur de x.

Cette conclusion générale s'applique naturellement aux équations d'un degré quelconque, à une seule inconnue; car nommant y l'inconnue de l'équation, et supposant le dernier terme égal à x, on aura une équation entre x et y, dans laquelle $x=0$ donnera $y=0$, et qui sera susceptible de la démonstration précédente. Donc, quelle que soit la valeur du dernier terme x, celle de y, si elle devient imaginaire, sera de la forme $p+q\sqrt{-1}$.

L'équation ayant ainsi une racine imaginaire de cette forme, en aura nécessairement une autre de la forme $p-q\sqrt{-1}$, puisque le calcul est le même pour les deux racines, à cause de l'ambiguité du radical $\sqrt{-1}$; elle aura donc les deux facteurs $y-p-q\sqrt{-1}$; et $y-p+q\sqrt{-1}$, qui forme le facteur double réel $y^2-2py+p^2+q^2$, et sera, par conséquent , divisible par ce facteur; ce qui l'abaissera à un degré moindre de deux unités, et l'on pourra appliquer à cette nouvelle équation les mêmes raisonnemens et les mêmes conclusions , et ainsi de suite.

7. Cette démonstration est incomplète; car quoique dans une équation à deux indéterminées on puisse toujours exprimer l'une des indéterminées par une série de puissances ascendantes de l'autre indéterminée, il peut arriver que les coefficiens des termes de la série dépendent eux-mémes d'équations qui n'aient point de racines réelles, ce qui introduirait dans la série d'autres imaginaires que celles qui viennent des puissances de l'indéterminée. Mais on peut, sur les mêmes principes, fonder une démonstration plus rigoureuse, et en même temps plus générale et plus simple, de la manière suivante.
Soit l'équation

$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \text{etc.} + \mathrm{V} = 0,$$

que nous représenterons, pour plus de simplicité, par $fx + \mathrm{V} = 0$, fx étant une fonction rationnelle et entière de x, qui contient x dans tous ses termes. Nous supposerons que cette équation n'ait point de racines réelles, parce que si elle en a, on peut les éliminer, en divisant l'équation par les facteurs simples réels qui résultent de ces racines.

Il est clair que si l'équation proposée n'a pas de racines réelles dans l'état où elle est, c'est-à-dire tant que ses coefficiens ont les valeurs données, elle peut en recevoir en changeant seulement la valeur du dernier terme V; car en prenant une quantité quelconque K , et faisant $\mathrm{V} = -f\mathrm{K}$, l'équation $fx - fK = 0$ aura la racine réelle K. Considérons donc une des racines imaginaires de l'équation $fx + \mathrm{V} = 0$, laquelle devienne réelle en faisant varier la valeur de V, et supposons qu'elle ne demeure imaginaire que tant que la valeur de V sera entre les limites a et b, a étant < b, de manière que x ait une valeur réelle α dans l'équation $fz + a = 0$, et une valeur réelle β en dans l'équation $fx + b = 0$, et que cette racine soit imaginaire dans l'équation $fx + a + i = 0$, et dans l'équation $fx + b - i = 0$, i étant une quantité quelconque positive, aussi petite qu'on voudra. Soit $\alpha + u$ la valeur imaginaire de x dans l'équation $fx + a + i = 0$ la fonction fx deviendra, par la substitution de $\alpha + u$ à la place de x, $f\alpha + uf'\alpha + \frac{u^2}{2}f''\alpha + \text{etc.}$, par la formule connue du développement des fonctions; mais puisque α est la racine de l'équation $fx + a = 0$, on $f\alpha + a = 0$; donc, $a = -f\alpha$; ainsi l'équation $fx + a + i = 0$ deviendra

$$uf'\alpha + \frac{u^2}{2}f''\alpha + \text{etc.} + i = 0.$$

Or, si le coefficient $f'\alpha$ n'est pas nul, il est évident qu'en supposant i une quantité très petite, à volonté, on pourra toujours avoir u par une série très convergente et toute réelle ; car on aura d'abord $u = -\frac{i}{f'\alpha}$, ensuite, en substituant cette première valeur de u , on aura $u = -\frac{i}{f'\alpha} - \frac{i^2 f''\alpha}{2f'\alpha^2}$, et ainsi de suite. Donc u sera une quantité réelle, contre l'hypothèse.

Il faudra donc, pour que u devienne imaginaire, que l'on ait $f'\alpha = 0$; alors l'équation deviendra

$$\tfrac{u^2}{2} f''\alpha + \tfrac{u^3}{2.3} f'''\alpha + \text{etc.} + i = 0,$$

et la première valeur approchée de u sera $\sqrt{-\tfrac{2i}{f''\alpha}}$, laquelle sera réelle ou imaginaire, suivant que $f''\alpha$ sera une quantité négative ou positive, puisque i est supposée positive.

Si le premier terme de u est réel , il est aisé de voir que tous les autres le seront aussi; par conséquent, toute la valeur de u sera réelle. Si le coefficient $f''\alpha$ est positif, le premier terme de u sera imaginaire de la forme $\sqrt{\tfrac{2i}{f''\alpha}} \times \sqrt{-1}$, et les termes suivans seront réels ou imaginaires de la même forme, de sorte que toute la valeur de u sera de la forme $p + q\sqrt{-1}$, p et q étant réelles.

Mais si l'on avait en même temps $f''\alpha = 0$, alors l'équation devenant

$$\tfrac{u^3}{2.3} f'''\alpha + \tfrac{u^4}{2.3.4} f^{iv}\alpha + \text{etc.} + i = 0,$$

il est aisé de voir que la valeur de u serait de nouveau réelle , à moins que le terme qui contient u^3 ne disparaisse, et que $f^{iv}\alpha$ ne soit positif; car dans ce cas on aurait $u = \sqrt[4]{\tfrac{2.3.4i}{f^{iv}\alpha}}.\sqrt[4]{-1}$; mais par le théorème démontré plus haut (n° 5), $\sqrt[4]{-1}$ est réductible à la forme $m + n\sqrt{-1}$, m et n étant des quantités réelles; donc, la première valeur, approchée de u, sera de la forme $p + q\sqrt{-1}$, et les termes suivans seront aussi de la même forme, en sorte que toute la valeur de u sera encore de cette forme, et ainsi de suite.

8. Il résulte de là cette conclusion, que lorsqu'une racine α de l'équation $fx + a = 0$, est dans le passage du réel à l'imaginaire, on a, non-seulement $fx + a = 0$, mais encore $f'\alpha = 0$ et $f''\alpha > 0$, et que si $f''\alpha = 0$, on aura, de plus $f'''\alpha = 0$ et $f^{iv}\alpha > 0$, et ainsi de suite. Or, en faisant $fx + a = Fx$, on a $f'x = F'x,\ f''x = F''x,$ etc. ; donc, par ce qu'on a vu dans la Note précédente (n° 4), $f'\alpha = 0$ sera la condition pour que la racine ci de l'équation $fx + a = 0$ soit double, $f''\alpha = 0$ sera la condition pour que cette racine soit triple, etc.

D'où il suit qu'une racine ne peut passer du réel à l'imaginaire, sans devenir double ou quadruple, et en général multiple d'un ordre pair.

On prouvera, de la même manière , en faisant $x = \beta + u$ dans l'équation $fx + b - i = 0$, que la valeur de u ne pourra devenir imaginaire, à moins que l'on n'ait $f'\beta = 0$ et $f''\beta < 0,$ et si $f''\beta = 0$, il faudra, de plus, que l'on ait $f'''\beta = 0$ et $f^{iv}\beta < 0$, et ainsi de suite. D'où l'on conclura que dans le passage de l'imaginaire au réel, la racine devient aussi double, ou quadruple, ou, etc.

Cette proposition n'avait été démontrée jusqu'ici que par la théorie des courbes, ou comme une suite du théorème sur la forme des racines imaginaires.

9. Maintenant, puisque quand la valeur de V est très près des limites *a* et *b,* une des racines imaginaires de l'équation $fx+\mathrm{V}=0$, est nécessairement de la forme $p+q\sqrt{-1}$, si cette racine n'est pas toujours de la même forme pour toutes les valeurs de V comprises entre ces limites, soit *c* la plus grande valeur de V, pour laquelle *x* sera de cette forme; de manière que, dans l'équation $fx+c=0$, on ait $x=m+n\sqrt{-1}$, *m* et *n* étant des quantités réelles, et soit $m+n\sqrt{-1}+u$ la valeur de *x,* lorsque V sera $c+i$, *i* étant une quantité positive et très petite à volonté. On aura donc
$f(m+n\sqrt{-1})+c=0,$ et $f(m+n\sqrt{-1}+u)+c+i=0$; développant la valeur de *u* dans la seconde équation, et retranchant la première, on aura

$$uf'(m+n\sqrt{-1})+\tfrac{u^2}{2}f''(m+n\sqrt{-1})+\text{etc.}+i=0.$$

Mais les fonctions dérivées

$$uf'(m+n\sqrt{-1}),\ f''(m+n\sqrt{-1}),\ \text{etc.},$$

ne contenant que des puissances de $m+n\sqrt{-1}$, sont toutes réductibles à la forme $p+q\sqrt{-1}$: ainsi, en prenant des quantités réelles M, N, P, Q, etc., l'équation précédente deviendra

$$u(\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1})+\tfrac{u^2}{2}(\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1})+\text{etc.}+i=0.$$

Donc, la première valeur approchée de *u* sera

$$-\frac{i}{\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1}}=-\frac{i(\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{-1})}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2},$$

et par conséquent de la forme $p+q\sqrt{-1}$ et l'on trouvera que tous les termes suivans de la série, qu'on peut rendre aussi convergente que l'on veut, en prenant *i* très petite à volonté, seront aussi de la même forme; de sorte que la série entière le sera aussi,
On aura donc, pour une valeur de *i* aussi petite qu'on voudra, $u=r+s\sqrt{-1}$; donc la valeur de *x* sera $m+r+(n+s)\sqrt{-1}$ et par conséquent encore de la même forme $p+q\sqrt{-1}$, contre l'hypothèse. Donc il n'y a aucunè valeur de V intermédiaire entre les limites *a et b,* pour laquelle la racine *z* ne soit pas de cette même forme.
Si la fonction $f'(m+n\sqrt{-1})$ devenait nulle, alors l'équation en *u* serait

$$\tfrac{u^2}{2}f''(m+n\sqrt{-1})+\tfrac{u^3}{2.3}f'''(m+n\sqrt{-1})+\text{etc.}+i=0,$$

et l'on prouverait de même que la valeur de u serait toujours de la forme $p+q\sqrt{-1}$, et ainsi de suite.

Cette démonstration a l'avantage de pouvoir s'appliquer également aux équations qui renfermeraient des fonctions logarithmiques ou circulaires, et en général à toute équation de la forme $\mathrm{F}x=0$, dans laquelle la fonction dérivée $\mathrm{F}'x$ sera réductible à la forme $p+q\sqrt{-1}$ en faisant $x=m+n\sqrt{-1}$; car alors toutes les autres fonctions dérivées $\mathrm{F}''x$, $\mathrm{F}'''x$, etc. seront aussi réductibles à la même forme; mais ce détail nous écarterait trop de notre sujet.

10. Nous venons de démontrer que dans les équations qui n'ont que des racines imaginaires, il y en a, au moins, deux de la forme $p\pm q\sqrt{-1}$; on pourra donc trouver les valeurs de p et q par la méthode du chapitre II (§17), et l'équation sera divisible par $x^2-2px+p^2+q^2=0$; après la division, elle ne contiendra plus que les autres racines imaginaires; et en y appliquant les mêmes raisonnemens, on prouvera de même que deux de ces racines seront nécessairement de la forme $p\pm q\sqrt{-1}$, et ainsi de suite.

Quoique la démonstration précédente soit suffisante pour prouver la vérité de la proposition dont il s'agit , on ne peut disconvenir qu'elle ne soit indirecte, et qu'elle ne laisse encore à désirer une démonstration tirée uniquement des principes de la chose. En effet, nous avons déjà observé que toute racine imaginaire de la forme $p+q\sqrt{-1}$ suppose le facteur réel du second degré $x^2-2px+p^2+q^2=0$, ainsi la question se réduit à prouver que toute équation est toujours divisible par des facteurs réels du premier et du second degré; et comme les équations d'un degré impair ont toujours une racine réelle, et sont, par conséquent, divisibles par un facteur réel du premier degré, ce qui les rabaisse à un degré moindre d'une unité, il s'ensuit qu'il suffit de considérer les équations des degrés pairs.

11. *Descartes* a trouvé que l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

a deux facteurs du second degré,

$$x^2\pm yx+\tfrac{y^2}{2}+\tfrac{1}{2}p\mp\tfrac{q}{2y}=0,$$

la quantité y étant donnée par l'équation

$$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0$$

Donc, comme cette équation a son dernier terme négatif, elle a toujours nécessairement une racine réelle (chap. I^{er}, § 3); par conséquent, les deux facteurs seront réels en employant cette racine.

Hudde a considéré ensuite l'équation générale du sixième degré, dans son Traité *De Reductione AEquationum*, imprimé à la suite du Commentaire de *Schoten* sur la Géométrie de *Descartes,* et il a trouvé que cette équation est divisible par une équation du second degré, comme $x^2 - yx + u = 0$, dans laquelle le coefficient y est donné par une équation du quinzième degré, et le coefficient u est une fonction rationnelle de y. Or, l'équation du quinzième degré ayant nécessairement une racine réelle, il s'ensuit que le diviseur du second degré pourra toujours être réel en employant celle racine; de sorte que l'équation se trouvant ensuite abaissée au quatrième degré, on aura encore deux autres diviseurs réels.

Hudde n'a pas été plus loin; et comme il n'avait trouvé l'équation en y du quinzième degré qu'en faisant le calcul tout au long, il a dû sentir qu'il tomberait dans des calculs impraticables par leur longueur, s'il voulait traiter de même les équations des degrés plus élevés.

12. On trouve à la fin de l'Algèbre de *Saunderson,* imprimée en 1740, après sa mort, cette remarque importante, que dans le diviseur $x^2 - yx + u = 0$ de l'équation du quatrième degré, le coefficient y est donné par une équation du sixième degré, parce que ce coefficient devant être la somme de deux racines de l'équation du quatrième degré, l'équation en y doit avoir pour racines toutes les différentes sommes qu'on peut faire des quatre racines de la proposée , prises deux à deux ; et comme ces combinaisons sont au nombre de six, l'équation en y doit être du sixième degré, comme *Descartes* l'a trouvé; mais l'auteur n'applique cette remarque qu'à un exemple particulier, et n'en tire d'ailleurs aucune autre conséquence.

Le Seur, l'un des commentateurs des Principes de *Newton,* a généralisé ce résultat, dans un petit ouvrage sur le calcul intégral, imprimé à Rome en 1748. Il prouve , par la théorie des combinaisons, que quand on cherche à diviser une équation du degré m par une équation d'un degré moindre $n,$ les coefficiens de celle-ci sont donnés nécessairement par des équations du degré

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots n},$$

parce que le diviseur devant avoir, ce qui est évident, n racines communes avec l'équation proposée, on peut former autant de diviseurs différens qu'il y a de manières de prendre n choses sur m choses; et de là il conclut que toute équation du degré $4m+2$ est toujours divisible par un facteur réel du second degré , parce que ce facteur dépend d'une équation qui se trouve d'un degré impair, et qui aura par conséquent une racine réelle; mais on n'en peut rien conclure pour la réalité des diviseurs du second degré des équations dont le degré est un nombre qui n'est pas de la forme $4n+2$, parce que ces diviseurs dépendent alors d'équations de degrés pairs.

13. *Euler* a approfondi cette théorie dans un Mémoire imprimé en 1751, dans le Recueil de ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1749, et il s'est attaché principalement à prouver que toute équation d'un degré exprimé par une puissance de 2, est décomposable en deux équations réelles d'un degré moindre de la moitié; pour cela, il suppose que l'équation proposée est privée de son second terme; ce qui fait que le

coefficient du second terme est le mème avec des signes contraires dans les deux équations dont elle est le produit; et il trouve, par la théorie des combinaisons, que ce coefficient est donné par une équation d'un degré impairement pair, qui manque de toutes les puissances impaires, et dont le dernier terme est le carré d'une fonction des racines de la proposée, précédé du signe moins.

Euler suppose que cette fonction des racines peut toujours être déterminée sans irrationalité par les coefficiens de l'équation proposée, et il en conclut que son carré est nécessairement une quantité positive, et que, par conséquent, l'équation qui détermine le coefficient dont il s'agit a deux racines réelles; il arrive, en effet, que cela a lieu lorsque l'équation proposée n'est que du quatrième degré, comme on le voit par les formules de *Descartes,* rapportées ci-dessus; mais pour les équations des degrés plus élevés, il faut une démonstration à priori, qu'Euler n'a point donnée, et qui est même d'autant plus nécessaire, que cette fonction ne contenant pas toutes les racines de la même manière, ne paraît pas déterminable par une fonction rationnelle des coefficiens, qui sont eux-mêmes, comme l'on sait, des fonctions où toutes les racines entrent également.

Euler considère, de plus, les équations dont les degrés sont exprimés par les nombres $2i$, $4i$, $8i$, etc., i étant un nombre impair quelconque, et il trouve qu'elles admettent des diviseurs réels des degrés 2, 4, 8, etc., parce que les équations dont ces diviseurs dépendent, sont toutes de degrés impairs; de sorte que, par ce moyen, toute équation peut se décomposer en équations réelles de degrés exprimés par des puissances de 2 ; mais la difficulté de décomposer ensuite celles-ci , lorsqu'elles passent le quatrième degré, reste en son entier dans la théorie d'Euler.

14. On peut éviter cette difficulté, comme *Foncenex* l'a fait dans le premier volume des *Miscellanea* de Turin, imprimé en 1759*,* en ne considérant que les diviseurs du second degré. Car soit $2^{\mu}v$ le degré de l'équation proposée, v étant un nombre impair, si l'on cherche à la diviser par une équation du second degré $x^2-ux+\mathrm{V}=0$, on trouve, par la théorie des combinaisons, que le coefficient u est déterminé par une équation du degré $\frac{2^{\mu}v(2^{\mu}v-1)}{2}=2^{\mu-1}v(2^{\mu}v-1)=2^{\mu-1}\pi$, π etant, comme l'on voit, un nombre impair.

Donc, si $\mu=1$, cette équation sera d'un degré impair et aura nécessairement une racine réelle; de sorte que, comme le dernier terme V est exprimé généralement par une fonction rationnelle de *u,* l'équation proposée aura un diviseur rationnel du second degré, et s'abaissera par là à un degré moindre de deux unités.

Si μ est plus grand que l'unité, on cherchera à diviser pareillement l'équation en *u,* par une équation du second degré, comme $u^2-tu+\mathrm{T}=0$, et le coefficient t sera donné par une équation du degré

$$\frac{2^{\mu-1}\pi(2^{\mu-1}\pi-1)}{2}=2^{\mu-2}\pi(2^{\mu-1}\pi-1)=2^{\mu-2}\rho,$$

ρ étant, comme l'on voit, un nombre impair; et le terme T sera exprimé généralement par une fonction rationnelle de *t.*

Donc, si $\mu = 2$, cette équation sera d'un degré impair, et aura une racine réelle; donc t et T auront des valeurs réelles, et l'équation $u^2 - tu + \mathrm{T} = 0$ donnera pour u une valeur réelle ou imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$. Dans le premier cas, u et V seront des quantités réelles; dans le second, ces quantités seront imaginaires de la même forme, puisque V est une fonction rationnelle de u. Mais l'équation $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$ donne $x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{(\frac{u^2}{4} - \mathrm{V})}$; donc, par la réduction des radicaux imaginaires, cette valeur deviendra aussi de la forme $p + q\sqrt{-1}$.

Si μ est un nombre plus grand que 2, on continuera le même calcul, et l'on divisera l'équation en t du degré $2^{\mu-2}\rho$, par une équation du second degré , comme $t^2 - st + \mathrm{S} = 0$; on aura , pour la détermination de $s,$ une équation du degré

$$\frac{2^{\mu-2}\rho(2^{\mu-2}\rho-1)}{2} = 2^{\mu-3}\rho(2^{\mu-2}\rho-1) = 2^{\mu-3}\sigma ,$$

σ etant , comme l'on voit, un nombre impair; et la quantité S sera généralement une function rationnelle de s.

Donc, si $\mu = 3$, cette équation étant d'un degré impair, aura une racine réelle; donc s et S auront des valeurs réelles; donc l'équation $t^2 - st + \mathrm{S} = 0$ donnera pour t une valeur réelle ou imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$. Donc, dans l'équation $u^2 - tu + \mathrm{T} = 0$, les coefficiens t et T auront des valeurs réelles ou imaginaires de la même forme ; et de là résultera aussi pour u une valeur réelle ou imaginaires de la même forme $p + q\sqrt{-1}$, comme nous l'avons vu ci-dessus , parce que $u = \frac{t}{2} \pm \sqrt{(\frac{t^2}{4} - \mathrm{T})}$; donc enfin l'équation $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$, donnera aussi pour x une valeur réelle ou imaginaire de la même forme.

Si μ est plus grand que 3, on continuera le calcul de la même manière, et l'on parviendra nécessairement à un diviseur du second degré, dont les coefficiens seront réels; et de là, en remontant successivement aux diviseurs précédens du second degré, ou trouvera que leurs coefficiens seront réels ou imaginaires de la forme. $p + q\sqrt{-1}$, jusqu'au diviseur $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$ de l'équation proposée, lequel donnera aussi pour x une valeur réelle ou imaginaire de la même forme.

Telle est la démonstration donnée par *Foncenex;* on voit qu'elle est très rigoureuse, en admettant le principe, que les coefficiens de l'équation du second degré, qui est un diviseur d'une équation du degré $n,$ ne dépendent que d'une seule racine d'une équation du degré $\frac{n(n-1)}{2}$. Ce principe est vrai généralement ; mais j'ai remarqué, depuis , qu'il était sujet à des exceptions qui pouvaient mettre la démonstration précédente en défaut. En effet, lorsqu'on cherche à rendre un polynome d'un degré quelconque $m,$ divisible par un autre polynome d'un degré moindre n , soit qu'on fasse la division à la manière ordinaire, et qu'on égale ensuite à zéro chaque terme du reste, soit qu'on multiplie ce polynome par un autre du degré $m-n,$ et qu'on compare le produit terme à terme avec le polynome proposé; on parvient toujours, par l'élimination successive, en prenant un des coefficiens du polynome diviseur pour l'inconnue principale, à déterminer les autres coefficiens du même polynome par des fonctions rationnelles de celui-ci , et ensuite on trouve, par les substitutions, une équation où il n'y a plus que celui-ci d'inconnue, et où l'inconnue monte au degré

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots n},$$

comme on l' a dit plus haut.

15. Mais s'il arrive que cette équation ait deux ou plusieurs racines égales, alors , à moins que les valeurs des autres coefficiens qui répondent à ces racines égales, ne soient aussi égales, ce qui n'a lieu que lorsque le diviseur est lui-même un diviseur double ou triple, etc., il est visible que ces valeurs ne peuvent plus être exprimées en fonctions rationnelles de ces mêmes racines, mais qu'elles doivent dépendre elles-mêmes d'équations du second, du troisième degré, etc., suivant le degré d'égalité des racines. Dans ce cas, en substituant dans les fonctions rationnelles trouvées , une des racines égales, les fonctions deviendront indéterminées, par l'évanouissement simultané du numérateur et du dénominateur ; et en revenant sur les éliminations, on se trouvera arrêté à une équation du second ou du troisième, etc. degré, parce que l'équation à la quelle il faudrait la comparer, pour l'abaisser à un degré moindre, sera identique avec elle. C'est de quoi on peut se convaincre par le calcul; et nous en donnerons, dans la Note suivante, une démonstration générale. Comme la même difficulté peut se présenter dans toutes les éliminations, je suis bien aise d'appeler l'attention du lecteur sur ce point, pour qu'il ne se trouve point embarrassé dans l'occasion.

On voit que cette circonstance peut mettre en défaut la théorie que nous venons d'exposer sur les diviseurs du second degré; car lorsque l'équation d'où dépend un des coefficiens a des racines égales, l'autre coefficient, en employant ces racines, dépendra d'une équation d'un degré égal au nombre des racines égales , et qui , par conséquent , si elle n'est pas d'un degré impair, demandera de nouvelles combinaisons pour pouvoir s'assurer qu'elle a une racine réelle de la forme $p+q\sqrt{-1}$; et si l'on ne voulait pas employer ces racines égales, alors, en les éliminant par la division, on aurait une équation d'un degré moindre, à la vérité, mais qui ne serait plus exprimée par un nombre de la même forme $2^{m-1}\pi$, ou $2^{m-2}\rho$, etc.

Si l'on considère, par exemple, la formule trouvée par *Descartes,* pour la résolution des équations du quatrième degré, que nous avons rapportée ci- dessus , et d'après laquelle nous avons conclu tout de suite que l'équation est toujours décomposable en deux fàctenrs réels du second degré, on voit qu'il y a néanmoins un cas qui échappe à cette conclusion ; c'est celui où l'on aurait $q=0$; car alors la réduite en y a deux racines égales $y=0$; et en employant ces racines, le terme $\frac{q}{2y}$ du facteur du second degré devient $\frac{0}{0}$.
On pourrait employer d'autres racines; mais l'équation en y étant divisée par y^2, devient $y^4+2py^2+p^2-4r=0$, laquelle étant de noveau du quatrième degré, et son dernier terme n'étant pas essentiellement négatif, la difficulté est ramenée au même point. Ce n'est pas que dans ce cas particulier on ne puisse prouver, par ces formules mêmes, la

réalité des deux facteurs; car si $p^2 < 4r$, le dernier terme de l'équation en y sera négatif; et par conséquent il y aura deux racines réelles. Si $p^2 > 4r$, alors l'équation proposée devenant, à cause de $q = 0$, $x^4 + p^2x^2 + 4r = 0$, aura les deux facteurs réels, $x^2 + \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - r)}$.

16. Ces difficultés ont occasionné les recherches que j'ai données sur cette matière à l'Académie de Berlin, en 1772, et dans lesquelles je me suis particulièrement attaché à compléter la théorie commencée par *Euler*.

J'ai démontré d'une manière rigoureuse, que si l'on veut décomposer un polynome du degré 2^m en deux polynomes du degré 2^{m-1}, tels que (n étant $= 2^{m-1}$),

$$x^n + \mathrm{M}x^{n-1} + \mathrm{N}x^{n-2} + \mathrm{P}x^{n-3} + \text{etc.},$$
$$x^n + \mathrm{M}_1x^{n-1} + \mathrm{N}_1x^{n-2} + \mathrm{P}_1x^{n-3} + \text{etc.},$$

et qu'on fasse

$$u = a(\mathrm{M}\text{-}\mathrm{M}_1) + b\left(\mathrm{N} - \mathrm{N}_1\right) + c(\mathrm{P}\text{-}\mathrm{P}_1) + \text{etc.},$$

a, b, c, etc. étant des quantités quelconques, on pourra déterminer généralement les coefficiens M, N, P, etc., M_1, N_1, P_1, etc. des deux polynomes, par des fonctions rationnelles de *u,* et que l'on trouvera pour *u* une équation d'un degré impairement pair, n'ayant que des puissances paires de *u,* dont le dernier terme sera essentiellement négatif; et à cause des arbitraires *a, b, c,* etc., on pourra toujours faire en sorte que le dernier terme de cette équation ne soit pas nul, ce qui lui donnerait les deux racines égales $u = 0$, ni qu'elle ait d'autres racines égales. De sorte qu'on sera toujours. assuré d'avoir par là des valeurs réelles pour les coefficiens dont il s'agit, et par conséquent de pouvoir décomposer l'équation du degré 2^m en deux du degré 2^{m-1}, et ensuite chacune de celles-ci en deux, du degré 2^{m-2}, et ainsi de suite, jusqu'aux équations du second degré.

A l'égard des équations du degré $2^m i$, *i* étant un nombre impair, *Euler* avait trouvé qu'en employant un diviseur du degré 2^m, on tombe dans une équation d'un degré impair, pour la détermination . d'un quelconque de ses coefficiens; et j'ai remarqué que si elle a des racines égales, les racines doubles, quadruples, etc. pourront être éliminées, parce que l'équation restante sera encore d'un degré impair, et que les racines triples, quintuples, etc. pourront être employées dans la détermination des autres coefficiens, parce qu'elle dépendra alors d'équations du troisième, du cinquième, etc. degré , qui auront, par conséquent, toujours des racines réelles.

17. De celle manière, la décomposition des équations en diviseurs réels du premier et du second degré était rigoureusement démontrée ; mais *Laplace* a donné, depuis , dans les Leçons de l'ÉcoleNormale, un moyen plus simple d'établir cette vérité , en partant

de l'analyse employée par *Foncenex.* Au lieu de considérer simplement l'équation qui détermine le coefficient u du diviseur quadratique $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0$, il considère l'équation qui détermine la quantité $u + a\mathrm{V}$, que je désignerai par u_1, a étant un coefficient quelconque. Cette équation sera, par la théorie des combinaisons, du même degré que l'équation en u. Donc, si l'équation proposée est du degré $2v$, v étant impair, l'équation en u, sera d'un degré impair, et aura toujours une racine réelle ; et comme on peut donner à a une infinité de valeurs, on aura une infinité d'équations qui auront toutes one racine réelle. Parmi ces racines, il y en aura nécessairement plusieurs qui se rapporteront au même diviseur; soient α, β deux de ces racines, et a, b les deux valeurs du coefficient a; on aura $u + a\mathrm{V} = \alpha,\ u + b\mathrm{V} = \beta$, d'où l'on tirera les valeurs de u et V, qui seront par conséquent réelles.

Si l'équation proposée est du degré 4^v, v étant un nombre impair quelconque, l'équation en u_1 sera du degré $2\pi,\ \pi$ étant aussi un nombre impair. Cette équation aura donc, par ce qu'on vient de démontrer, un diviseur quadratique de la forme $u_1^2 - tu_1 + \mathrm{T} = 0,$ qui donnera pour u_1, une valeur de la forme $\alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$, et en donnant à a une infinité de valeurs, on aura une infinité d'équations en u_1, dont chacune aura une racine de la forme $\alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$; parmi ces racines, il y en aura nécessairement deux qui se rapporteront au même diviseur; en les désignant par $\alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1}$ et $\beta + \mathrm{B}\sqrt{-1}$, et par a, b les deux valeurs de a qui y répondent, on aura $u + a\mathrm{V} = \alpha + \mathrm{A}\sqrt{-1},\ u + b\mathrm{V} = \beta + \mathrm{B}\sqrt{-1}$; donc u et V seront l'une et l'autre de la forme $p + q\sqrt{-1}$, et la valeur de x, tirée de l'équation $x^2 - ux + \mathrm{V} = 0,$ sera encore de la même forme Donc, toute équation du degré 4^v, aura deux racines de la forme $p \pm q\sqrt{-1}\,p$, et par conséquent un diviseur réel du second degré, et ainsi de suite.

Cette démonstration ne laisse rien à désirer comme simple démonstration; mais si l'on voulait résoudre effectivement une équation donnée en ses facteurs réels de deux dimensions, il serait comme impossible de suivre le procédé indiqué par l'analyse que nous venons d'exposer. Cependant cette résolution est nécessaire pour trouver les fonctions primitives, ou les intégrales des fonctions rationnelles fractionnaires d'une seule variable, et on la suppose dans tous les Traités de Calcul intégral. Cette raison m'engage à m'arrêter encore sur cet objet important, et à en faire le sujet de la Note suivante.