THE FIRST PART OF THE SECOND VOLUME.

ON ALGEBRAIC EQUATIONS AND THE SOLUTION OF THE SAME.

CHAPTER 1

ON THE GENERAL SOLUTIONS OF PROBLEMS

1.

The general purpose of algebra, just as in all parts of mathematics, is directed therein towards determining the values of such magnitudes which hitherto were unknown, which in turn can be expressed by paying particular attention to the prescribed conditions, and which always are expressed by known quantities. Therefore algebra can be described thus, as that art through which unknown magnitudes can be found from known magnitudes.

2.

This is consistent with all that which has been considered previously, in that everything has been derived from other known magnitudes, so that previously unknown magnitudes may become known.

The first example is found at once in addition, since the sum can be found of two or more given numbers. Namely since a single number must be found which is equal to the given numbers taken together.

Again, a number could be found by subtraction, which was equal to the difference between two given numbers.

And just as happens also by multiplication and division, so also with the raising of powers and the extraction of roots, where a previously unknown number always may be found from known numbers.

3.

We have already solved various questions in the last section, whereby a number is found, which must arise from certain conditions between other given numbers.

Thus, all questions are reduced to this, that from some given numbers a new number shall be found, which can be determined with these standing in a given relation, and this relationship itself will be through known conditions or properties, which must be conducive to finding the number.

4.

For each single question arising now that number must be sought, to be indicated by one of the last letters of the alphabet, and thereby all the prescribed conditions are to be taken into consideration, whereby one is lead to a comparison between the two numbers.

From any such equation the value of the number sought must then be determined, through which the question is resolved. Occasionally also more numbers must be sought, which must come about equally through equations.

5.

In order that this will become clearer through an example; this question can be considered:
20 people, men and women, are living in an inn : a man is charged 8 Gr. but a woman 7 Gr. and the whole account amounts to 6 Rthl. [24 Groschen (Gr.) = 1 Reichstaler (Rthl.)] Now the question is, how many men and how many women were present there ?

In order to resolve this question, the number of men thus is put $= x$, and the same to be considered as known, or that is handled as if the answer were known, if through that the question could be resolved. Now since the number of $= x$ and both men and women together make 20 people, thus from that the number of woman can be determined, which is found if the number of men is taken away from 20. Thus, the number of women present is $= 20 - x$.

Since now a man spends 8 Gr. , thus these x men spend $8x$ Gr. And because a woman spends 7 Gr., thus these $20 - x$ women spend $140 - 7x$ Gr.

Thus the men and women together spend $140 + x$ Gr. But we know how much they have spend altogether, namely 6 Rthl. which changed to Gr shall become 144 Gr., from that we obtain this equation $140 + x = 144$ from which it is seen that $x = 4$.

Therefore in the case of this bill there were 4 men and 16 women.

6.

Another question of the same kind:

20 people, men and women, are in an inn. The men spend 24 Fl. and the women also spend 24 Fl. but it is found that a man must spend a Guilder more than a woman has to spend, how many men and women will there be ?

Let the number of men be $= x$ so the number of women $= 20 - x$.

Now this number of men x have paid 24 Fl. , so that a man pays $\frac{24}{x}$ Fl.

And because the $20 - x$ women also have paid 24 Fl. , so that a woman has paid $\frac{24}{20-x}$.

The account of a woman is now 1 less, than the account of the men. Thus if 1 Fl. is taken from the account of a man, so the account of a woman arises ; from which this equation is obtained $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. This is thus the equation from which the value of x must be sought, which is not obtained from this so easily as from the previous question. But from what follows it will be seen that $x = 8$, which also gives rise to the satisfactory equation found $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ that is $2 = 2$.

7.

For all questions it therefore arises, that after the unknown or the numbers sought have been indicated by letters, the circumstances of the question must be taken into consideration, and from that equations can be derived. Consequently there remains the whole art of how such equations are solved, and from that the value of unknown numbers can be found, and to be obtained in this section.

8.

With the questions themselves a distinction arises also, in that some are resolved by a single unknown number only, but others must be resolved by two or still more unknown numbers, in which it is to be noted in the latter case, that there just as many particular equations are required, which must be deduced from the circumstances of the question itself .

9.

According to that an equation consists of two parts, of which one will be put equal to the other part. Now in order to bring out the value of the unknown number from that often a great many changes must be put in place, but on which all therefore are based, that if two magnitudes are equal to each other, the same also remain equal to each other, if some magnitude is added to both or subtracted from them; the same also if both are multiplied or divided by some number ; further also if both are raised to some equal power or from both equal roots are extracted, and finally too if from both the logarithms are taken, as already has been prepared generally in the previous section.

10.

These equations, where the unknown number arises only from the first power, after which equations have been brought into an order, are amongst the easiest to be solved, and are called equations of the first order. Following after that such equations, wherein the second power or the square of the unknown number arises, these become quadratic equations, or are called of the second order. From these follow the equations of the third order or cubic, where the cube of the unknown number arises, and so forth, all of which shall be obtained in this section.

CHAPTER 2

CONCERNING EQUATIONS OF THE FIRST ORDER AND THEIR SOLUTIONS.

11.

If the unknown or sought number shall be indicated by the letter x , and from that considered the equation has been provided already, that the one side contains merely x and the other side a known number, as e.g. $x = 25$, so that already one really has the sought value of x desired, and one must always strive to reach this form, however muddled the first found equation may be, for which the rules shall be given in the following.

12.

We will begin with the easiest cases and set out initially, how from the equation arising, :

$x + 9 = 16$, so it is seen that $x = 7$.

It is from a general kind $x + a = b$, where a and b indicate known numbers, the same to be called as you wish. Here it is necessary to subtract a from both sides and this equation is obtained $x = b - a$ which indicates the value of x .

13.

If the equation found is $x-a=b$, on adding a to both sides, thus there arises $x=a+b$, which is the value sought of x.

Proceeding in the same manner, if the first equation dealt with thus provides: $x-a=aa+1$, then there becomes $x=aa+a+1$.

And from this equation $x-8a=20-6a$ there is obtained $x=20+8a-6a$ or $x=20+2a$.

And from this : $x+6a=20+3a$ there is found: $x=20-6a+3a$ or $x=20-3a$.

14.

If now the equation $x-a+b=c$ is provided, then a can be added to both sides, so there becomes $x+b=c+a$, now take b from both sides, thus there becomes $x=c+a-b$; but on adding $+a-b$ to both sides at the same time, thus $x=c+a-b$ is come upon at once. Thus in the following examples :

$$\text{if } x-2a+3b=0, \text{then } x=2a-3b,$$
$$\text{if } x-3a+2b=25+a+2b, \text{ then } x=25+4a,$$
$$\text{if } x-9+6a=25+2a, \text{ then } x=34-4a.$$

15.

If the equation were found to have this form $ax=b$,then both sides shall be divided by a so that there becomes $x=\frac{b}{a}$.

But if the equation is $ax+b-c=d$, then initially to bring away that standing by ax, $-b+c$ must be added to both sides thus there becomes $ax=d-b+c$, consequently $x=\frac{d-b+c}{a}$; or on subtracting $+b-c$ from both sides there becomes

$$ax=d-b+c \text{ and } x=\frac{d-b+c}{a}.$$

$$\text{If } 2x+5=17, \text{ then } 2x=12 \text{ and } x=6.$$
$$\text{If } 3x-8=7, \text{ then } 3x=15 \text{ and } x=5.$$
$$\text{If } 4x-5-3a=15+9a, \text{ then } 4x=20+12a, \text{ consequently } x=5+3a.$$

16.

Thus if the equation $\frac{x}{a}=b$ is provided, both sides are to be multiplied by a, so that $x=ab$.

Now if $\frac{x}{a}+b-c=d$, then initially there will be $\frac{x}{a}=d-b+c$ and

$$x=(d-b+c)a=ad-ab+ac.$$

$$\text{If } \tfrac{1}{2}x-3=4, \text{ then } \tfrac{1}{2}x=7 \text{ and } x=14.$$
$$\text{If } \tfrac{1}{3}x-1+2a=3+a, \text{then } \tfrac{1}{3}x= 4-a \text{ and } x=12-3a.$$
$$\text{If } \frac{x}{a-1}-1 =a \text{ then } \frac{x}{a-1}=a+1 \text{ and } x=aa-1.$$

17.

Thus, if the equation $\frac{ax}{b}=c$ is provided, thus both sides are to be multiplied by *b*, thus there becomes $ax=bc$, and further $x=\frac{bc}{a}$.

But if $\frac{ax}{b}-c=d$, thus $\frac{ax}{b}=d+c$ and $ax=bd+bc$ and consequently $x=\frac{bd+bc}{a}$

If $\frac{2}{3}x-4=1$, thus $\frac{2}{3}x=5$ and $2x=15$ consequently $x=\frac{15}{2}$, that is $7\frac{1}{2}$.

If $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5,$ thus $\frac{3}{4}x=\ 5-\frac{1}{2},$ which $=\frac{9}{2},$ and $3x=18$ and $x=6.$

18.

It can also be seen that two or more terms in the letter x may be included, and they may arise either on one side or on both. If they shall be on one side such as $x+\frac{1}{2}x+5=11$, so there becomes $x+\frac{1}{2}x=6$, $3x=12$ and $x=4.$

If there shall be $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, then what is x? One has to multiply by 3 so there becomes $4x+\frac{3}{2}x=132$, further multiplying by 2 there will be $11x=264$ and $x=24$; thus these three terms can become equal to a single one, such as $\frac{11}{6}x=44,$ one divides both sides by 11, thus one has $\frac{1}{6}x=4,$ and $x=\ 24$.

Let there be $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$ which taken together gives $\frac{5}{12}x=1$ and $x=2\frac{2}{5}$.

Let there be even as much as $(a-b+c)x=d$, from which there arises $x=\frac{d}{a-b+c}$.

19.

But if x should be present on both sides as, e.g. $3x+2=x+10$, the x on the smallest side must be taken, thus here x is subtracted from both sides, so that $2x+2=10$ arises, $2x=8$ and $x=4$.

Further let there be $x+4=20-x,$ thus $2x+4=20,$ $2x=16$ and $x=8$.

Let there be $x+8=32\ -3x,$ thus $4x+8=32,$ $4x=24$ and $x=6$.

Further, let there be $15-x=20-2x,$ thus $15+x=20$ and $x=5$.

Let there be $1+x=5-\frac{1}{2}x,$ thus $1+2x=5,$ $\frac{3}{2}x=4,$ $3x=8$ and $x=2\frac{2}{3}.$

Let there be $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, adding $\frac{1}{3}x$, thus there becomes $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x$, take away $\frac{1}{3}$, thus there is $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$, multiplied by 12, thus $x=2$.

Let there be $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, adding $\frac{2}{3}x$, thus arises $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$, take away $\frac{1}{4}$, thus giving $7x=7\frac{1}{2}$, multiplied by 6, thus becoming $7x=7\frac{1}{2}$, dividing by 7 gives $x=1\frac{1}{14}$ or $x=\frac{15}{14}$.

20.

Now we come to such an equation where the unknown number x is itself found in the denominator, thus the fraction must be eliminated and the whole equation multiplied by the denominator.

Thus if we find $\frac{100}{x} - 8 = 12$, add 8, thus there becomes $\frac{100}{x} = 20$, multiply by x, giving $100 = 20x$, divide by 20, thus $x = 5$ arises.

Further let there be $\frac{5x+3}{x-1} = 7$, multiply by $x-1$, thus we have $5x+3 = 7x-7$, subtract $5x$, thus $3 = 2x-7$, add 7, thus we have $2x = 10$, consequently $x = 5$.

21.

Sometimes also square roots arise, and still pertains to the first order; as if such a number were sought x less than 100, so that the square root of $100-x$ becomes equal to 8, or that $\sqrt{(100-x)} = 8$, thus we take the square of both sides $100-x = 64$, so we have if x be added $100 = 64+x$, subtract 64, giving $x = 36$; or also we can proceed thus : since $100-x = 64$, on subtracting 100, we have $-x = -36$, and multiply by − 1 gives $x = 36$.

22.

Sometimes also the unknown number x arises in the exponent, such an example was found above already, and there we have to take resort to taking the logarithm.

As if we find $2^x = 512$, then taking the logarithms of both sides, there we have $x\log 2 = \log 512$; dividing by log 2 there becomes $x = \frac{\log 512}{\log 2}$;
thus from the tables there is :

$$x = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = \frac{27092700}{03010300}; \text{ thus } x = 9.$$

Let there be $5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305$; on adding 100, thus there arises $5 \cdot 3^{2x} = 405$; dividing by 5, thus $3^{2x} = 81$; taking the logarithms : $2x\log 3 = \log 81$ and dividing by $2\log 3$ thus $x = \frac{\log 81}{2\log 3}$ or $\frac{\log 81}{\log 9}$, consequently $x = \frac{1{,}9084850}{0{,}9542425} = \frac{19084850}{09542425}$; thus becoming $x = 2$.

CHAPTER 3

THE SOLUTION OF SOME RELEVANT QUESTIONS.

23.

I. Question : Divide 7 into two parts, so that the greater exceeds the smaller be 3 ?

Let the greater part be $= x$ thus the smaller shall be $7-x$, therefore there must be $x = 7-x+3$ or $x = 10-x$; adding x, thus $2x = 10$ and divide by 2, so that $x = 5$.

Answer: the greater part is 5 and the lesser 2.

II. Question : Can you divide a into two parts, so that the greater shall exceed the lesser by b ?

The greater part shall be *x,* so that the lesser is $a-x$*;* therefore there will be $x=a-x+b$, add *x,* so that there becomes $2x=a+b$ and divide by 2, thus obtaining $x=\frac{a+b}{2}$.

Another solution : The greater part shall be $=x$, because now the same is to be greater than the lesser by b, so that conversely the smaller is lesser than the greater by b; therefore the smaller part will be $x-b$: both these parts taken together must make *a*, therefore we have : $2x-b=a$; adding *b,* so that $2x=a+b$, consequently $x=\frac{a+b}{2}$ which is the greater part, and the smaller part becomes $\frac{a+b}{2}-b$, or $\frac{a+b}{2}-\frac{2b}{2}$, or finally $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Question : A father leaves three sons and 1600 Rthl. According to his will the eldest son shall have 200 Rthl. more than the second, while the second has 100 Rthl. more than the third ; how much comes to each one ?

The inheritance of the third shall be $=x$, thus the inheritance of the second $=x+100$, and the inheritance of the first $=x+300$; these 3 together must make 1600 Rthl. From there becomes $3x+400=1600$; taking away 400, thus becoming $3x=1200$ and dividing by 3 gives $x=400$.

Answer: the third becomes 400 Rthl., the second 500 Rthl., and the first 700 Rthl.

25.

IV. Question: A father leaves 4 sons and 8600 Rthl. According to his will, the first shall obtain twice as much as the second less 100 Rthl. The second shall receive three times as much as the third less 200 Rthl. and the third shall have four times as much as the fourth less 300 Rthl. How much does each one receive ?

The inheritance of the fourth shall be $=x$, so the inheritance of the third shall be $4x-300$, of the second $12x-1100$ and of the first $24x-2300$. The sum of these must amount to 8600 Rthl. from which this equation arises : $41x-3700=8600$; adding 3700, thus appears $41x=12300$; and dividing by 41 gives $x=300$.

Answer: the fourth son receives 300 Rthl., the third 900 Rthl., the second 2500 Rthl. and the first 4900 Rthl.

26.

V. Question: A man leaves 11000 Rthl. and further a widow, three sons and three daughters. According to his will the wife should receive twice as much than a son, and a son twice as much as a daughter. How much does each one receive ?

The inheritance of a daughter shall be $=x$ so the inheritance of a son $=2x$ and the inheritance of the widow $=4x$*;* consequently the whole inheritance is $3x+4x+4x$, or $11x=11000$; dividing by 11 gives $x=1000$.

Answer:

a daughter receives 1000 Rthl. thus all three receive 3000 Rthl.

a son receives 2000 Rthl. thus together 4000

and the mother receives 4000

The sum 11000 Rthl.

27.

VI. Question: A father leaves three sons, which inherited estate is divided out amongst themselves following the form. The first receives 1000 Rthl. less than half of the whole estate ; the second 800 Rthl. less than the third part of the estate, and the third 600 Rthl. less than the fourth part of the estate. Now how big is the estate known to be, and how much does each one receive?

Let the whole estate $=x$

thus the first son receives $\frac{1}{2}x-1000$

the second $\frac{1}{3}x-800$

the third $\frac{1}{4}x-600$

All three sons together thus have received $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-2400$ which must be put equal to the whole estate x , from which the equation is composed, $\frac{13}{12}x-2400=x$. Subtracting x, thus we have $\frac{1}{12}x-2400=0$, adding 2400, thus $\frac{1}{12}x=2400$, and multiplying by 12 gives $x=28800$.

Answer: The whole estate was 28800 Rthl. from which now the

first son receives 13400 Rthl.

the second 8800

the third 6600

thus all three 28800 Rthl.

28.

VII. Question : A father leaves four sons, which the inheritance is divided thus between themselves : the first takes 3000 Rthl. less than half of the inheritance, the second takes 1000 Rthl. less than $\frac{1}{3}$ of the inheritance, the third takes just that $\frac{1}{4}$ of the whole inheritance, the fourth takes 600 Rthl. and that $\frac{1}{5}^{\text{th}}$ of the estate : how big was the estate and how much did each single son receive ?

We set the whole estate $=x$

so that the first receives $\frac{1}{2}x-3000$

the second $\frac{1}{3}x-1000$

the third $\frac{1}{4}x$

the fourth $\frac{1}{5}x+600$

and all four together got $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x-3400$, which must be $=x$: thus we have the equation : $\frac{77}{60}x-3400=x$, subtract *x*, thus there will be $\frac{17}{60}x-3400=0$, add 3400, thus the equation becomes $\frac{17}{60}x=3400$, dividing by 17 gives $\frac{1}{60}x=200$ and multiplying by 60, $x=12000$.

Answer: the whole estate was 12000 Rthl. From which the first got 3000 Rthl., the second 3000, the third 3000, and the fourth 3000.

29.

VIII. Question : Find a number if I add its half to that, that becomes just as much greater than 60 , as the number itself is less than 65?

The number shall be *x*, thus so that $x+\frac{1}{2}x-60$ shall be the same as $65-x$, that is $\frac{3}{2}x-60=65-x$, we add x and thus we have $\frac{5}{2}x-60=65$, adding 60 thus becoming $\frac{5}{2}x=125$, dividing by 5 there will be $\frac{1}{2}x=25$ and multiplying by 2 gives $x=50$.

Answer: the sought number is 50.

30.

IX. Question : Someone divides 32 into two parts, but if then I divide the smaller by 6, then the larger by 5, that the sum of the quotients together make 6.

The smaller part shall be $=x$ so that the greater part shall be $=32-x$; the smaller part divided by 6 gives $\frac{x}{6}$; the larger part divided by 5 gives $\frac{32-x}{5}$: thus there must be $\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$, with that multiplied by 5 gives $\frac{5x}{6}+32-x=30$, or $-\frac{x}{6}+32=30$, adding $\frac{1}{6}x$; thus giving $32=30+\frac{1}{6}x$, subtracting 30 gives $2=\frac{1}{6}x$, and multiplying by 6 there will be $x=12$.

Answer: the smaller part is 12, and the larger part 20.

31.

X. Question: Find such a number, if I multiply it by 5 so that the product is so much less than 40, as the number itself is less than 12.

This number shall be $=x$, which is less than 12 by $12-x$, the number times five is $5x$ and this is less than 40 by $40-5x$, which is just as much as $12-x$, therefore $40-5x=12-x$, add $5x$, so becoming $40=12+4x$, 12 subtracted gives $28=4x$, and divided by 4 becomes $x=7$.

Answer: the number is 7.

32.

XI. Question: Divide 25 into two parts, so that the greater is 49 times bigger than the lesser ?

Let the smaller part be $=x$ so the greater is $=25-x$; this divided by that must give 49, thus there becomes $\frac{25-x}{x}=49$, multiplying by *x* gives $25-x=49x$, and adding *x* the equation becomes $50x=25$, divided by 50 $x=\frac{1}{2}$ remains.

Answer: the smaller part is $\frac{1}{2}$ and the larger $24\frac{1}{2}$, which divided by $\frac{1}{2}$, that is multiplied by 2, gives 49.

33.

XII. Question: Divide 48 into nine parts, so that always each has to be $\frac{1}{2}$ greater than the previous part ?

The first and smallest part shall be $=x$ so that the second shall be $=x+\frac{1}{2}$ and the third $=x+1$ etc. Because now these parts make an arithmetical progression, of which the first term $=x$ so the ninth and last term is $x+4$, for which the first term x added gives $2x+4$. This sum multiplied by the number of terms 9 gives $18x+36$; this divided by 2 gives the sum of all nine terms $9x+18$, so that must become 48. Thus we have $9x+18=48$, 18 taken away gives $9x=30$, and divided by 9 gives $x=3\frac{1}{3}$.

Answer: the first term is $3\frac{1}{3}$ and the nine parts are as follows :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3\frac{1}{3}+ & 3\frac{5}{6}+ & 4\frac{1}{3}+ & 4\frac{5}{6}+ & 5\frac{1}{3}+ & 5\frac{5}{6}+ & 6\frac{1}{3}+ & 6\frac{5}{6}+ & 7\frac{1}{3}, \end{array}$$

of which the sum $=48$.

34.

XIII. Question: Find an arithmetical progression of which the first term $=5$ and the last $=10$, but the sum shall be = 60 ?

Since here neither the difference nor the number of terms is known, but the sum of all can be found from, if we now understand the number of terms itself thus to be $=x$, so the sum of the progression will be $\frac{15}{2}x=60$; dividing by 15 gives $\frac{1}{2}x=4$, and on multiplying by 2, $x=8$. Since now the number of terms is 8, thus we can put the difference $=z$, so that the second term is $5+z$, the third $5+2z$ and the eighth $5+7z$, which must be equal to 10.

Thus we have $5+7z=10$, and taking away 5, gives $7z=5$, dividing by 7 gives $z=\frac{5}{7}$.

Answer: The difference of the progression is $\frac{5}{7}$ and the number of terms is 8, therefore the progression itself will be,

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & +5\frac{5}{7} & +6\frac{3}{7} & +7\frac{1}{7} & +7\frac{1}{7} & +8\frac{4}{7} & +9\frac{2}{7} & +10, \end{array}$$

of which the sum is = 60.

35.

XIV. Question : Find a number if I subtract 1 from its double and double the remainder, from which I take away 2 , then divide the remainder by 4, that becomes 1 less than the number sought?

The number sought shall be x, thus its double $2x$, from which 1 taken away leaves $2x-1$, this doubles becomes $4x-2$, from which 2 taken away leaves $4x-4$, this divided by 4 gives $x-1$, which must be 1 less than x:

Thus $x-1=x-1$, this is an identical equation, and shows, that x cannot be determined, moreover for that one can take any number wished.

36.

XV. Question: I have bought several yards material and for each 5 yards given 7 Rthl. I have again sold each 7 yards for 11 Rthl. and gained 100 Rthl. for the whole transaction: how much material was there ?

Let there be x yards ; we must thus first see how much this costs in the purchase, which through the following rule of three will be found : 5 yards cost 7 Rthl., how much does x yards cost ? Answer: thus it has cost $\frac{7}{5}x$ Rthl. Now let us see, how much money has been recovered again, that happens through the rule of three : 7 yards cost 11 Rthl. in selling how much does x yards cost ? Answer : $\frac{11}{7}x$ Rthl.

This is the proceeds that is 100 Rthl. greater than the expenditure, from which the equation arises : $\frac{11}{7}x=\frac{7}{5}x+100$, $\frac{7}{5}x$ is taken away, leaving $\frac{6}{35}x=100$, which multiplied by 35 gives $6x=3500$, dividing by 6 there will be $x=583\frac{1}{3}$

Answer : There were $583\frac{1}{3}$ yards, which in the first place was purchased for $816\frac{2}{3}$ Rthl. thereafter the same was again sold for $916\frac{2}{3}$ Rthl. so that the gain from that became 100 Rthl.

37.

XVI. Question : Someone bought 12 pieces of cloth for 140 Rthl. of which 2 were white, 3 black, and 7 blue. A piece of the black cloth costs 2 Rthl. more than a piece of the white, and a blue piece 3 Rthl. more than a black piece : the question is how much did each piece cost?

A white piece is put to cost x Rthl. whereby the two white pieces cost $2x$ Rthl. Further a piece of the black costs $x+2$ thus the three black pieces cost $3x+6$ and a piece of blue costs $x+5$ consequently the 7 blue pieces cost $7x+35$ and all twelve pieces $12x+41$; but the same cost actually 140 Rthl., whereby one has $12x+41=140$, 41 subtracted leaves $12x=99$, which divided by 12 becomes $x=8\frac{1}{4}$.

Answer : therefore a white piece costs $8\frac{1}{4}$ Rthl.

a black piece	"	$10\frac{1}{4}$ Rthl.
a blue piece	"	$13\frac{1}{4}$ Rthl.

38.

XVII. Question: Someone has bought some nutmeg, and says that 3 pieces cost just as much more by 4 Pf., as 4 pieces cost more by 10 Pf. ; how expensive were the same ?

Let x be the amount 3 pieces cost more than 4 Pf. It can be said that 3 pieces cost $x+4$ Pf. just as much as 4 pieces cost $x+10$ Pf.

But now according to the first case it is found from the rule of three what 4 pieces cost, 3 pieces$: x+4\text{Pf.} = 4$ pieces$:$ .... Answer $\frac{4x+16}{3}$, thus becoming $\frac{4x+16}{3} = x+10$ or $4x+16 = 3x+30$, $3x$ taken away gives $x+16 = 30$, 16 taken away gives $x = 14$.

Answer : 3 pieces cost 18 Pf. and 4 pieces 24 Pf. consequently 1 piece costs 6 Pf.

39.

XVIII. Question: Someone has two silver goblets together with a single cover as well ; the first goblet weighs 12 ounces, and putting the cover on that it thus weighs twice as much as the other goblet ; but putting the cover on the other goblet, it weighs three times as much as the first; now the question is how much does the cover and the other goblet weigh?

One puts the cover to have a weight of x oz., thus the first goblet together with the cover weighs $x+12$ Oz. Since this weight is twice as great as of the other goblet, thus the other goblet weighs $\frac{1}{2}x+6$; putting the cover on that so it weighs $\frac{3}{2}x+6$ which is 3 times 12, that is 36, which it must equal. Thus there is $\frac{3}{2}x+6 = 36$ or $\frac{3}{2}x = 30$ and $\frac{1}{2}x = 10$ and $x = 20$.

Answer: the cover has a weight of 20 oz., but the other 16 oz.

40.

XIX. Question. A money changer has two kind of coins; giving a pieces of the first kind for a Rthl. and b pieces for the second kind. Now someone comes and will have c pieces for a Rthl. ; how much must the money changer give him of each kind ?

One sets out to give him x pieces of the first kind, and $c-x$ pieces of the second kind. But now every x piece is worth $a:1 = x:\frac{x}{a}$ Rthl. but these $c-x$ pieces are worth $b:1 = c-x:\frac{c-x}{b}$ Rthl.

Thus there must be $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b} = 1$, or $\frac{bx}{a}+c-x = b$, or $bx+ac-ax = ab$, and further $bx-ax = ab-ac$, consequently

$$x = \frac{ab-ac}{b-a} \text{ or } x = \frac{a(b-c)}{b-a},$$

therefore becoming

$$c-x = \frac{bc-ab}{b-a} = \frac{b(c-a)}{b-a}.$$

Answer: the money-changer thus gives $\frac{a(b-c)}{b-a}$ pieces of the first kind, and $\frac{b(c-a)}{b-a}$ pieces of the second kind.

To be noted: Both these numbers are seen to be found by the rule of three ; namely the first through this : as $b-a:b-c = a:\frac{ab-ac}{b-a}$, for the second number this holds: as $b-a:c-a = b:\frac{bc-ab}{b-a}$.

Hereby it is to be observed, that b is greater than a, and c is smaller than b but greater than a, as the nature of the problem necessitates.

41.

XX. Question: A money changer has two kinds of currency ; 10 pieces of the first is worth one Rthl.; of the second 20 pieces is worth one Rthl. Now someone requires 17 pieces for one Rthl. ; how much does he get of each kind?

Thus here there is $a=10$, $b=20$ and $c=17$; whereby the rule of three applies:

I.) $10:3=10:3$,thus there are 3 pieces of the first kind;
II.) $10:7=20:14$, and 14 pieces of the second kind.

42.

XXI. Question: A father after his death leaves some children together with his estate, which the children divide amongst themselves in such a way :

The first takes 100 Rthl. and in addition the 10th part of the remainder.
The second takes 200 Rthl. and in addition the 10th part of the remainder.
The third takes 300 Rthl. and in addition the 10th part of the remainder.
The fourth takes 400 Rthl. and in addition the 10th part of the remainder.

and so on: such a form is itself found, that the whole estate is divided equally amongst the children. Now this is the question, how large was the estate, how many children were left behind, and how much did each receive ?

This question is of a whole special kind and therefore deserves to be noted. In order that the same may be resolved more easily, thus we set the whole estate left $=z$ Rthl. and because all the children get an equal among, thus the share of each will be $=x$; therefore it is seen, that the number of children was $\frac{z}{x}$. Whereby we wish to establish the form the following solution takes.

The amount or the money to be divided	Order of the children	The amount of each	The differences
z	the first	$x=100+\frac{z-100}{10}$	
$z-x$	second	$x=200+\frac{z-x-200}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-2x$	third	$x=300+\frac{z-2x-300}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-3x$	fourth	$x=400+\frac{z-3x-400}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-4x$	fifth	$x=500+\frac{z-4x-500}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-5x$	sixth	$x=600+\frac{z-5x-600}{10}$	etc.

In the last column here the differences are put in place, which arise if each inheritance is taken from the following one. Because now all the inheritances are equal to each other, thus all these differences must be $=0$. Since it can be happily agreed, that all the differences are equal to each other, thus it is enough, that one of these be set equal to 0 , therefore we obtain this equation $100-\frac{x+100}{10}=0$. Multiplying by 10, thus $1000-x-100=0$ is obtained , or $900-x=0$, consequently $x=900$.

From which we know, that the inheritance of each child has been 900 Rthl. Now taking one of the equations in the third column, as it is wished, e.g. the first $900=100+\frac{z-100}{10}$, from which the value z can be found equally ; then $9000=1000+z-100$ or $9000=900+z$ thus $z=8100$, therefore $\frac{z}{x}=9$.

Answer : Thus the number of children was $=9$, the estate left $=8100$ Rthl., from which each child received 900 Rthl.

CHAPTER 4

THE SOLUTION OF TWO OR MORE EQUATIONS OF THE FIRST ORDER.

43.

It often happens, that two or more unknown numbers, to be represented by the letters *x, y, z* etc. , must be brought into the calculation, since then one arrives at just as many equations, if the question is determined otherwise, from which henceforth the unknown numbers must be found. But here we consider only such equations where only the first power of the unknown number itself is found, and also without one being multiplied by another. Thus so that each equation shall be of this form:

$$az+by+cx=d.$$

44.

We will thus make a start form two equations, and from that two unknown numbers *x* and *y* determined, and in order that the matter to be treated in a general manner, thus both these equations are to be given

I.) $ax+by=c$ and II.) $fx+gy=h$

where the letters *a, b, c* and *f, g, h* represent known numbers in place. Now the question here is how one can solve both equations to find *x* and *y* .

45.

Now the most natural way consists in that, that the value of one of the unknowns such as x is taken from each equation and therefore both these values be put equal to each other; from which one equation is obtained, since only the unknown number *y* appears, which can be determined according to the above rules. Now that *y* has been found, thus it is allowed simply to place the same known value found into one equation, so that the value of *x* can be obtained from that.

46.

According to this succession rule, we find from the first equation $x=\frac{c-by}{a}$, but from the other $x=\frac{h-gy}{f}$; setting both these values equal to each other, thus we obtain this new equation $\frac{c-by}{a}=\frac{h-gy}{f}$. Multiplying by a, $c-by=\frac{ah-agy}{f}$, and by f, becoming $fc-fby=ah-agy$. Adding agy thus there becomes $fc-fby+agy=ah$. Subtracting fc thus arising $-fby+agy=ah-fc$, or $(ag-fb)y=ah-fc$, dividing by $ag-bf$ thus becoming $y=\frac{ah-fc}{ag-fb}$.

Now writing this value for y in one of the two equations we have found for x, thus we obtain also the value of x. Taking the first so in the first place, $-by=\frac{-bah+bcf}{ag-fb}$, from this there becomes $c-by=c-\frac{abh-bcf}{ag-fb}$, or $c-by=\frac{agc-bcf-abh+bcf}{ag-fb}=\frac{agc-abh}{ag-fb}$; dividing by a gives $x=\frac{c-by}{a}=\frac{cg-bh}{ag-bf}$.

47.

I. Question: In order to clarify this through an example, thus this question is presented : Can two numbers be found whose sum is 15 and difference 7?

Let the greater number be $=x$ and the smaller $=y$, so that

$$\text{I.) } x+y=15, \text{ and II.) } x-y=7.$$

The first gives $x=15-y$ and from the second $x=7+y$, from which this new equation arises $15-y=7+y$, here on adding y, thus $15=7+2y$, taking away 7, there becomes $2y=8$, and on dividing by 2, $y=4$ and from that $x=11$.

Answer: the smaller number is 4 while the greater is 11.

48.

II. Question: We can compose this question generally and find two numbers, of which the sum is $=a$ and whose difference $=b$.

Let the greater be $=x$ and the lesser $=y$, so that we have

$$\text{I.) } x+y=a \text{ and II.) } x-y=b.$$

From the first we obtain $x=a-y$ and from the second $x=b-y$, from which the equation arises $a-y=b+y$, adding y, so that $a=b+2y$, taking b, thus giving $2y=a-b$, and on dividing by 2 there becomes $y=\frac{a-b}{2}$ and from this $x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Answer: the greater number is thus $x=\frac{a+b}{2}$ and the lesser $y=\frac{a-b}{2}$;
or since $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ and $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, thus we obtain this proposition :
The greater number is equal to half the sum plus half the difference, and the smaller number is equal to half the sum minus half the difference.

49.

We can also solve this question in the following manner : since both the equations are $x+y=a$ and $x-y=b$, thus on adding the same there will be $2x=a+b$ and $x=\frac{a+b}{2}$.

Consequently from the first take away the second, thus obtaining $2y=a-b$ and $y=\frac{a-b}{2}$, as before.

50.

III. Question: A mule and a donkey are each carrying some number of pud. [A pud is an archaic Russian weight of around 16 kg.]. The donkey complains about his load and says to the mule: if you were to give me a pud from your load, then I will have twice as much as you; to which the mule responds : if you give me a pud from your load then I will have three times as much as you, how many weights does each have ?

Let the mule have x pud, and the donkey y pud. The mule now give one pud to the donkey, so the donkey has $y+1$ but the mule still holds $x-1$, now the donkey has twice as much as the mule, thus there becomes $y+1=2x-2$.

But if the donkey gives one pud to the mule, thus the mule receives $x+1$ and the donkey holds still $y-1$. Since now this load is three times as great as that one, thus there becomes $x+1=3y-3$.

Thus our two equations are :

$$\text{I.) } y+1=2x-2,\ \text{II.) } x+1=3y-3 \ .$$

From the first one finds x and from the other $x=3y-4$, from which the new equation arises $\frac{y+3}{2}=3y-4$, which multiplied by 2 gives $y+3 \ =6y-8$ and taking away y $5y-8=3$, add 8 so that one has $5y=11$ and $y=\frac{11}{5}=$ or $2\frac{1}{5}$; from which $x=2\frac{3}{5}$.

Answer: Thus the mule had $2\frac{3}{5}$ Pud and the donkey $2\frac{1}{5}$ Pud.

51.

If one has three unknown numbers, and just as many equations, such as :

$$\text{I.) } x+y-z=8,\ \text{II.) } x+z-y=9\ \text{III.) } y+z-x=10,$$

likewise one looks for the value x from each equation :

$$\text{I.) } x=8\ +z-y\ \text{II.) } x=9+y-z\ \text{III.) } x=y+z-10.$$

Now setting the first equation equal to the second, and then also the first equal to the third, thus one has these two new equations:

$$\text{I.) } 8+z-y=9+y-z\ \text{II.) } 8+z-y=y+z-10.$$

But it follows from the first that $2z-2y=1$, and from the second $2y=18$, and since one thus obtains at once $y=9$, which value written for y in the previous equation, gives $2z-18=1$ and $2z=19$, therefore $z=9\frac{1}{2}$, from which it can be found that $x=8\frac{1}{2}$

Here it has itself been formed, that in the last equation the letter z disappeared, and also y thus can be determined from that. But if z were still present in that, thus one would have two equations between z and y, which still need to be resolved according to the first equation.

52.

It shall be that the three following equations have been found :

$$\text{I.) } 3x+5y-4z=25,\ \text{II.) } 5x-2y+3z=46,\ \text{III.) } 3y+5z-x=62.$$

The value of x is sought from each one, so that one has :

$$\text{I.) } x=\tfrac{25-5y+4z}{3},\quad \text{II.) } x=\tfrac{46+2y-3z}{5},\ \text{III.) } x=3y+5z-62.$$

Now these three equations are compared with each other, thus the third and the first give $3y+5z-62=\tfrac{25-5y+4z}{3}$, or by multiplying by 3

$$25-5y+4z=9y+15z-186,$$

adding 186, thus there arises $211-5y+4z=9y+15z$, $5y$ added gives
$211+4z=14y+15z$,
thus from I and III we obtain $211=14y+11z$.
The second and the third give

$$3y+5z-62=\tfrac{46+2y-3z}{5} \text{ or } 46+2y-3z=15y+25z-310$$

and from this equation it is found that $356=13y+28z$.
From both of these equations the value of y is sought y.

I.) $211=14y+11z$, where $11z$ is subtracted, leaving

$$14y=211-11z \text{ or } y=\tfrac{211-11z}{14}$$

II.) $356=13y+28z$, where $28z$ is subtracted, leaving

$$13y=356-28z \text{ or } y=\tfrac{356-28z}{13}$$

the two values are put equal to each other, to give:

$$\tfrac{211-11z}{14}=\tfrac{356-28z}{13},$$

and multiplying by $13\cdot 14$ there becomes $2743-143z=4984-392z$ and $392z$ added, gives
$249z+2743=4984$ or $249z=2241$ and thus $z=9$.
From this the value is obtained $y=8$ and finally $x=7$.

53.

Should there be more than three unknown numbers, and just as many equations arising, thus the solution can be put in place in a similar manner, which commonly would lead to irksome calculations.

But usually some such means can be expressed to attend to every single case, from which the solution will be particularly simplified, and such happens, in so far as also to the main unknown numbers a new arbitrary number is introduced, as e.g. the sum of all the rest in the calculation, and which has been used already in similar calculations, will be easily assessed how to be used in each similar case. To this end, we wish to quote some similar examples.

54.

IV. Question: Three people are playing games together, in the first game the first player loses so much to both the other players, as much money as each of the two players themselves had. In the following game the second player loses to the first and third players as much money as each one had at that point. In the third game the third player loses to the first and second players as much money as each had at that point, and since it shall be found, that everybody has the same amount of money at the end, namely each has 24 Fl. Now the question is, how much did each have at the start of the games ?

Setting the first to have had x Fl., the second y, and the third z. Knowing also that the sum of all the Fl. taken together $x+y+z=s$. Since now in the first game the first player the first loses just as much as both the others have, and the first has x, so that both the others have $s-x$, and therefore the first player loses this amount, thus he still has $2x-s$; but the second player will have $2y$ and the third $2z$.

Thus after the first game each one has as follows :

$$\mathrm{I}^{\mathrm{st.}})\ 2x-s,\ \ \mathrm{II}^{\mathrm{nd.}})\ 2y,\ \ \mathrm{III}^{\mathrm{rd.}})\ 2z.$$

In the second game the other, who now had $2y$, loses as much as the other two had, that is to say $s-2y$; *i.e.* he loses $2x-s+2z=2x-x-y-z+2z=s-2y$. Therefore the second player now has $4y-s$; but both the other two now have twice as much as they had before.

Thus after the second game the players have :

$$\mathrm{I}^{\mathrm{st}})\ 4x-2\mathrm{s},\ \ \mathrm{II}^{\mathrm{nd}})\ 4y-s,\ \mathrm{III}^{\mathrm{rd}})\ 4z.$$

In the third game the third player, who had $4z$, loses to both the other players as much as each had at that point, but they had $s-4z$, [as $4x-2s+\ 4y-s=s-4z$.]; thus the third player retains still $8z-s$ and the remaining two both get left twice as much as they had.

Thus after the third game each player will have :

$$\mathrm{I}^{\mathrm{st}})\ 8x-4s,\ \mathrm{II}^{\mathrm{nd}})\ 8y-2s,\ \text{and}\ \mathrm{III}^{\mathrm{rd}})\ 8z-s;$$

now since each one had 24 Fl., thus we have obtained the three equations, which thus are provided, so that one can find the original amount from the first player to equal x, from the second y and from the third z, in particular since now s is a known number, in that all together at the end the players have 72 Fl. From these alone give the same, but it is not necessary to consider that at first.

The calculations from that thus can be put in place :

$$\text{I.)}\quad 8x-4s=24,\quad \text{or } 8x=24+4s,\ \text{or } x=3+\tfrac{1}{2}s$$
$$\text{II.)}\quad 8y-2s=24,\ \text{or } 8y=24+2s,\ \text{or } y=3+\tfrac{1}{4}s$$
$$\text{III.)}\ 8z-s=24,\quad \text{or } 8z=24+s,\quad \text{or } z=3+\tfrac{1}{8}s$$

Adding these three values, thus we obtain :

$$x+y+z=9+\tfrac{7}{8}s,$$

now since $x+y+z=s$, thus we have $s=9+\frac{7}{8}s$; $\frac{7}{8}s$ subtracting leaves $\frac{1}{8}s=9$, and $s=72$.

Answer: Thus at the start of the game the first had 39 Fl., the second 21 Fl., and the third 12.

One sees from this solution, how through the aid of the sum of the three unknown numbers, happily all the difficulties mentioned above have been swept away.

55.

This question seems to be so hard, yet it is to be observed that the same can be resolved with hardly any algebra.

Now one must go backwards in the derivation itself: then these three people after the third game have got equal amounts, namely the first has 24, the second 24, and the third has 24; but in the third game the first and second have doubled their money, thus before the third game they must all have had, as follows :

I.) 12, II.) 12, III.) 48.

In the second game the first and the third had doubled their money, thus before the second game they must have had :

I.) 6, II.) 42, III.) 24.

In the first game the second and the third had doubled their money, thus before the first game they had:

I.) 39 II.) 21, III.) 12

and we have found just as much above for the start of the game.

56.

V. Question: Two people are owing 29 Rub. and in fact each one has money, but not so much that he could pay off the common debt alone ; concerning which the first says to the second: give me $\frac{2}{3}$ of your money so that I can pay off the debt alone ; the other answers on the contrary : give me $\frac{3}{4}$ of your money so that I can pay off the debt alone; how much money does each one have ?

Let the first have x Rub. and the second y Rub. Thus it is know in the first place that $x+\frac{2}{3}y=29$, thereupon also $y+\frac{3}{4}x=29$. From the first we have $x=29-\frac{2}{3}y$, and from the second $x=\frac{116-4y}{3}$.

From these two values put the equation in place :
$29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}$, thus $y=14\frac{1}{2}$; therefore $x=19\frac{1}{3}$.

Answer: the first has $19\frac{1}{3}$ and the second $14\frac{1}{2}$ Rub.

57.

VI. Question: Three people have bought a vineyard for 100 Rthl. ; the first wants $\frac{1}{2}$ of his money from another so that he can buy the vineyard alone ; the second wants $\frac{1}{3}$ of his money from the third so that he can buy the vineyard alone. The third wants $\frac{1}{4}$ of his money from the first, so that he can buy the vineyard alone. How much money does each have ?

Let the first have x, the second y, and the third z Rthl., thus one can put obtain the following three equations :

$$\text{I.)}\,x+\tfrac{1}{2}y=100. \qquad \text{II.)}\,y+\tfrac{1}{3}z=100. \qquad \text{III.)}\,z+\tfrac{1}{4}x=100.$$

from which the value of x will be found :

$$\text{I.)}\ x=100-\tfrac{1}{2}y, \qquad \text{III.)}\ x=400-4z$$

here x cannot be determined from the two equations.

But both the equations give these equations :

$$100-\tfrac{1}{2}y=400-4z \text{ or } 4z-\tfrac{1}{2}y=300$$

which must be taken together with the second, in order that y and z can be found from that. But now the second equation was $y+\frac{1}{3}z=100$; from which the equation will be found $y=100-\frac{1}{3}z$; but from the above equation found $4z-\frac{1}{2}y=300$ it is known that $y=8z-600$ from which this last equation arises : $100-\frac{1}{3}z=8z-600$, thus $8\frac{1}{3}z=700$, or $\frac{25}{3}z=700$, and $z=84$; from which there is found $y=100-28,$ or $y=72$, and finally $x=64$.

Answer: the first had 64 Rthl.; the second 72 Rthl.; the third 84 Rthl.

58.

Now since in this example in every equation two unknowns are present, thus the solution of a more convenient kind can be put in place.

Then one finds from the first $y = 200 - 2x$, thus *y* can be determined in terms of *x*, this value is written for *y* in the second equation, thus one has $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, take 100 thus there is left $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, or $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ and $z = 6x - 300$.

Therefore *z* also can be determine in terms of *x* : this value brings one now to the third equation, thus giving $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in which now *x* is forthcoming on its own and also $25x - 1600 = 0$; therefore
$x = 64$, consequently $y = 200 - 128 = 72$ and $z = 384 - 300 = 84$.

59.

Just as one can proceed if also more such equations are forthcoming, thus if one has equations of a general kind :

$$\text{I.)}\ u + \tfrac{x}{a} = n, \quad \text{II.)}\ x + \tfrac{y}{b} = n, \quad \text{III.)}\ y + \tfrac{z}{c} = n, \quad \text{IV.)}\ z + \tfrac{u}{d} = n$$

or after one has taken away the fractions :

$$\text{I.)} au + x = an, \quad \text{II.)} bx + y = bn, \quad \text{III.)} cy + z = cn, \quad \text{IV.)} dz + u = dn.$$

Here we have the first equation $x = an - au$, which value substituted into the second gives $abn - abu + y = bn$ also $y = bn - abn + abu$; this value in the third gives $bcn - abcn + abcu + z = cn$ also $z = cn - bcn + abcn - abcu$; this finally in the fourth equation gives

$$cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn.$$

Thus there will be:

$$dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcdu + u, \text{ or}$$
$$(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$$

from which one obtains

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n\frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

From which one finds further as follows:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$
$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$
$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$
$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

60.

VII. Question: A captain has three companies of soldiers. In the first they are Swiss, in the second Swabians, and in the third Saxons ; he will besiege a town with one of these and promises to reward with 901 Rthl. to be distributed thus:

That each one of the company who takes part in the assault receives 1 Rthl., but money left over will be divided equally among both the other companies.

Now it is indeed found, that if the Swiss make the assault, each one of the other two companies gets $\frac{1}{2}$ Rthl. ; but if the Swabians do the assault, each one of both the other companies would get $\frac{1}{3}$ Rthl. But had the Saxons done the assault then each one of both the other companies would get $\frac{1}{4}$ Rthl. Now the question is, from how many men is each company formed?

Now, putting the number of Swiss to be x , of the Swabians y and of the Saxons z. Further on putting the number of all to be $x+y+z=s$ as can be seen easily from above, that from that the calculation will be made much easier. Then if the Swiss do the assault, of which the number $=x$, then the number of both the rest $=s-x$, now since each receives 1 Rthl., these others receive a half Rthl., thus there will be $x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}x=901$. Just as if the Swabians make the assault, thus there will be $y+\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}y=901$, and finally if the Saxons make the assault, thus there will be $z+\frac{1}{4}s-\frac{1}{4}z=901$. From which three equations each one of the three letters x, y and z can be determined.
Then from the first one obtains $x=1802-s$, from the second $2y=2703-s$,
and from the third $3z=3604-s$.

Now one writes the same under one another; but first look for the values of $6x$, $6y$, and $6z$.

$$\begin{aligned} 6x &= 10812-6s \\ 6y &= 8109-3s \\ 6z &= 7208-2s \\ \hline \text{adding: } 6s &= 26129-11s \end{aligned}$$

from which there is found $s=1537$ which is the number of all the troops, and further from which one finds:

$$x=1802-1537=265$$
$$2y=2703-1537=1166 \text{ and } y=583$$
$$3z=3604-1537=2067 \text{ and } z=689.$$

Answer: The Swiss company thus consists of 265 men, the Swabians of 583, and the Saxons of 689 men.

DES ZWEYTEN THEILS ERSTER ABSCHNITT
VON DEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN UND DERSELBEN AUFLÖSUNG

CAPITEL 1

VON DER AUFLÖSUNG DER AUFGABEN ÜBERHAUPT

1.

Die Haupt-Absicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematic ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekant gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekante Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Dahero die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde wie man aus bekanten Größen unbekante ausfindig machen könne.

2.

Dieses stimmt auch mit allem demjenigen überein, was bisher vorgetragen worden, indem allenthalben aus bekanten Größen andere herausgebracht worden sind, so vorher als unbekant angesehen werden konnten.

Das erste Beyspiel findet man so gleich in der Addition, da von zwey oder mehr gegebenen Zahlen die Summa gefunden worden. Daselbst wurde nemlich eine Zahl gesucht welche den gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Bey der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterscheid zweyer gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln, wo immer eine vorher unbekante Zahl aus bekanten gefunden wird.

3.

In dem letzten Abschnitt haben wir schon verschiedene Fragen aufgelößt, wobey es immer auf die Erfindung einer Zahl angekommen, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewißen Bedingungen geschloßen werden mußte .

Alle Fragen lauffen also da hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewißen Verbindung stehe, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müßen, bestimmt.

4.

Bey einer jeden vorkommenden Frage wird nun diejenige Zahl die gesucht werden soll, durch einen der letztern Buchstaben des Alphabets angedeutet, und dabey alle vorgeschriebene Bedingungen in Erwegung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwischen zweyen Zahlen geführet wird. Aus einer solchen Gleichung muß hernach der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Frage aufgelößet wird. Bisweilen müßen auch mehrere Zahlen gesucht werden, welches auf gleiche weise durch Gleichungen geschehen muß.

5.

Dieses wird durch ein Exempel deutlicher werden; man stelle sich diese Frage vor:

20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirths-Haus: ein Man verzehrt 8 Gr. ein Weib aber 7 Gr. und die gantze Zeche beläuft sich auf 6 Rthl. Nun ist die Frage wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen?

Um diese Frage aufzulösen, so setze man die Zahl der Männer $= x$, und sehe dieselbe als bekant an, oder man verfahre damit als wann man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer $= x$ ist und Männer und Weiber zusammen 20 Person ausmachen so kann man daraus die Anzahl der Weiber bestimmen, welche gefunden wird wann man die Zahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gr. verzehrt, so werden diese x Männer verzehren $8x$ Gr. Und weil ein Weib 7 Gr. verzehrt, so werden diese $20 - x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gr.

Also verzehren Männer und Weiber zusammen $140 + x$ Gr. Wir wißen aber wie viel sie verzehrt haben, nemlich 6 Rthl. welche zu Gr. gemacht 144 Gr. sind, daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$ woraus man leicht sieht daß $x = 4$.

Dahero waren bey der Zeche 4 Männer und 16 Weiber.

6.

Eine andere Frage von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirths-Haus. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müßen, wie viel waren es Männer und Weiber?

Es sey die Zahl der Männer $= x$ so ist die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun diese x Männer 24 Fl. verzehrt haben, so hat ein Mann verzehrt $\frac{24}{x}$ Fl.

Und weil die $20 - x$ Weiber auch 24 Fl. verzehret haben, so hat ein Weib verzehrt $\frac{24}{20-x}$. Diese Zeche eines Weibes ist nun um 1 weniger, als die Zeche eines Mannes. Wann man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche eines Weibes heraus kommen; woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bey der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen daß $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7.

Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekanten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau in Erwegung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die gantze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelößet, und daraus der Werth der unbekandten Zahlen gefunden werden soll, und hiervon soll in diesem Abschnitt gehandelt werden.

8.

Bey den Fragen selbst ereignet sich auch ein Unterscheid, in dem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letztem Fall zu mercken, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erfodert werden, welche aus den Umständen der Frage selbst hergeleitet werden müßen.

9.

Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekanten Zahl herauszubringen, müßen öfters sehr viele Verwandelungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, daß wann zwey Größen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wann man zu beyden einerley Größen addirt oder davon subtrahirt; imgleichen auch wann dieselben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden; ferner auch wann beyde zugleich zu Potestäten erhoben oder aus beyden gleichnahmigte Wurzeln ausgezogen, und endlich auch wann von beyden die Logarithmen genommen werden, wie schon allbereit im vorigen Abschnitt geschehen.

10.

Diejenigen Gleichungen, wo von der unbekanten Zahl nur die erste Potestät vorkommt, nach dem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen vom ersten Grad genennet. Hernach folgen solche Gleichungen, worinneu die zweyte Potestät oder das Quadrat der unbekanten Zahl vorkommt, diese werden Quadratische Gleichungen, oder vom zweyten Grad genennt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grad oder die Cubischen worinneu der Cubus der unbekanten Zahl vorkommt, und so fort, von welchen allen in diesem Abschnitt gehandelt werden soll.

CAPITEL 2

VON DEN GLEICHUNGEN DES ERSTEN GRADS UND IHRER AUFLÖSUNG

11.

Wann die unbekante oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die heraus gebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz blos allein das x und der andere Satz eine bekante Zahl enthält, als z. E. $x = 25$, so hat man schon würcklich den Werth von x der verlangt wird, und auf diese Form muß man immer zu kommen trachten, so verwirt auch die erst gefundene Gleichung seyn mag, worzu die Regeln im folgenden gegeben werden sollen.

12.

Wir wollen bey den leichtesten Fällen anfangen und erstlich setzen, man sey auf diese Gleichung gekommen:

$x+9=16$, so sieht man daß $x=7$.

Es sey aber auf eine allgemeine Art $x+a=b$, wo a und b bekante Zahlen andeuten, dieselben mögen heißen wie sie wollen. Hier muß man also beyderseits a subtrahiren und da bekommt man diese Gleichung $x=b-a$ welche uns den Werth von x anzeigt.

13.

Wann die gefundene Gleichung ist $x-a=b$, so addire man beyderseits a, so kommt $x=a+b$, welches der gesuchte Werth von x ist.
Eben so verfährt man, wann die erste Gleichung also beschaffen ist $x-a=aa+1$, dann da wird $x=aa+a+1$.
Und aus dieser Gleichung $x-8a=20-6a$ bekommt man $x=20+8a-6a$ oder $x=20+2a$.
Und aus dieser $x+6a=20+3a$ findet man $x=20-6a+3a$ oder $x=20-3a$.

14.

Ist nun die Gleichung also beschaffen $x-a+b=c$, so kann man beyderseits a addiren, so kommt $x+b=c+a$, jetzt subtrahire man beyderseits b, so hat man $x=c+a-b$; man kann aber zugleich beyderseits $+a-b$ addiren, so bekommt man mit einmahl $x=c+a-b$. Also in den folgenden Exempeln:

wann $x-2a+3b=0,$ so wird $x=2a-3b,$

wann $x-3a+2b=25+a+2b,$ so wird $x=25+4a,$

wann $x-9+6a=25+2a,$ so wird $x=34-4a.$

15.

Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt $ax=b$, so dividire man beyderseits durch a so hat man $x=\frac{b}{a}$.
Ist aber die Gleichung $ax+b-c=d$, so muß man erstlich dasjenige was bey ax steht wegbringen, man addire beyderseits $-b+c$ so kommt $ax=d-b+c$, folglich $x=\frac{d-b+c}{a}$; oder man subtrahire beyderseits $+b-c$ so kommt $ax=d-b+c$ und $x=\frac{d-b+c}{a}$.

Es sey $2x+5=17,$ so kommt $2x=12$ und $x=6.$

Es sey $3x-8=7,$ so kommt $3x=15$ und $x=5.$

Es sey $4x-5-3a=15+9a,$ so wird $4x=20+12a,$ folglich $x=5+3a.$

16.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{x}{a}=b$, so multiplicire man beyderseits mit a, so kommt $x=ab$.
Ist nun $\frac{x}{a}+b-c=d$, so wird erstlich $\frac{x}{a}=d-b+c$ und

$$x=(d-b+c)a=ad-ab+ac.$$

Es sey $\frac{1}{2}x-3=4$, so wird $\frac{1}{2}x=7$ und $x=14$.

Es sey $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$, so wird $\frac{1}{3}x=4-a$ und $x=12-3a$.

Es sey $\frac{x}{a-1}-1=a$ so wird $\frac{x}{a-1}=a+1$ und $x=aa-1$.

17.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{ax}{b}=c$, so multiplicire man beyderseits mit *b*, so wird $ax=bc$, und ferner $x=\frac{bc}{a}$.

Ist aber $\frac{ax}{b}-c=d$, so wird $\frac{ax}{b}=d+c$ und $ax=bd+bc$ und folglich $x=\frac{bd+bc}{a}$

Es sey $\frac{2}{3}x-4=1$, so wird $\frac{2}{3}x=5$ und $2x=15$ folglich $x=\frac{15}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$.

Es sey $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5$, also $\frac{3}{4}x=5-\frac{1}{2}$, welches $=\frac{9}{2}$, und $3x=18$ und $x=6$.

18.

Es kann auch geschehen, daß zwey oder mehr Glieder den Buchstaben *x* enthalten, und entweder in einem Satz oder in beyden vorkommen. Sind sie auf einer Seite als $x+\frac{1}{2}x+5=11$, so wird $x+\frac{1}{2}x=6$ und $3x=12$ und $x=4$.

Es sey $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, was ist *x?* man multiplicire mit 3 so wird $4x+\frac{3}{2}x=132$, ferner mit 2 multiplicirt wird $11x=264$ und $x=24$; diese drey Glieder können aber so gleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}x=44$, man theile beyderseits durch 11 so hat man $\frac{1}{6}x=4$, und $x=24$.

Es sey $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$ welches zusammen gezogen giebt $\frac{5}{12}x=1$ und $x=2\frac{2}{5}$.

Es sey $ax-bx+cx=d$, so ist dieses eben so viel als $(a-b+c)x=d$, hieraus kommt $x=\frac{d}{a-b+c}$.

19.

Steht aber *x* in beyden Sätzen als z. E. $3x+2=x+10$ so müßen die *x* von der Seite wo man am wenigsten hat weggebracht werden, also subtrahire man hier beyderseits *x*, so kommt $2x+2=10$ und $2x=8$ und $x=4$.

Es sey ferner $x+4=20-x$, also $2x+4=20$ und $2x=16$ und $x=8$.

Es sey $x+8=32-3x$, also $4x+8=32$ und $4x=24$ und $x=6$.

Es sey ferner $15-x=20-2x$, also $15+x=20$ und $x=5$.

Es sey $1+x=5-\frac{1}{2}x$, also $1+2x=5$ und $\frac{3}{2}x=4$ und $3x=8$ und $x=2\frac{2}{3}$.

Es sey $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kommt $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$, multiplicire mit 12, so kommt $x=2$.

Es sey $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$, so kommt $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$, so hat man $7x=7\frac{1}{2}$, multiplicire mit 6, so bekommt man $7x=7\frac{1}{2}$, durch 7 dividirt, giebt $x=1\frac{1}{14}$ oder $x=\frac{15}{14}$.

20.

Kommt man auf eine solche Gleichung wo die unbekante Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die gantze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Also wann man findet $\frac{100}{x}-8=12$, addire 8, so kommt $\frac{100}{x}=20$, multiplicire mit x, so hat man $100=20x$, dividire durch 20, so kommt $x=5$.

Es sey ferner $\frac{5x+3}{x-1}=7$, multiplicire mit $x-1$, so hat man $5x+3=7x-7$, subtrahire $5x$, so kommt $3=2x-7$, addire 7, so bekommt man $2x=10$, folglich $x=5$.

21.

Bisweilen kommen auch Wurzel-Zeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem ersten Grad; als wann eine solche Zahl x gesucht wird unter 100, so daß die Quadrat-Wurzel aus $100-x$ gleich werde 8, oder daß $\sqrt{(100-x)}=8$, so nehme man beyderseits die Quadraten $100-x=64$, so hat man wann x addirt wird $100=64+x$, subtrahire 64, so hat man $x=36$; oder man könnte auch also verfahren: da $100-x=64$, so subtrahire man 100, und man bekommt $-x=-36$, mit − 1 multiplicirt, giebt $x=36$.

22.

Bisweilen kommt auch die unbekante Zahl x in den Exponenten, dergleichen Exempel schon oben vorgekommen, und da muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen .

Als wann man findet $2^{x}=512$, so nimmt man beyderseits ihre Logarithmen, da hat man $x\log 2=\log 512$; man dividire durch log2 so wird $x=\frac{\log 512}{\log 2}$;
nach den Tabellen ist also:

$$x=\frac{2,7092700}{0,3010300}=\frac{27092700}{03010300}\text{; also } x=9.$$

Es sey $5\cdot 3^{2x}-100=305$; man addire 100, kommt also $5\cdot 3^{2x}=405$; man dividire durch 5, so wird $3^{2x}=81$; man nehme die Logarithmen $2x\log 3=\log 81$ und dividire durch $2\log 3$ so wird $x=\frac{\log 81}{2\log 3}$ oder $\frac{\log 81}{\log 9}$, folglich $x=\frac{1,9084850}{0,9542425}=\frac{19084850}{09542425}$; also wird $x=2$.

CAPITEL 3

VON DER AUFLÖSUNG EINIGER HIEHER GEHÖRIGEN FRAGEN

23.

I. Frage: Zertheile 7 in zwey Theile, so daß der größere um 3 größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil $= x$ so wird der kleinere seyn $7 - x$, dahero muß seyn $x = 7 - x + 3$ oder $x = 10 - x$; man addire *x*, so kommt $2x = 10$ und dividire durch 2, so wird $x = 5$.

Antwort: der größere Theil ist 5 und der kleinere 2.

II. Frage: Man zertheile *a* in zwey Theile, so daß der größere um *b* größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil *x*, so ist der kleinere $a - x$; dahero wird $x = a - x + b$, man addire *x*, so wird $2x = a + b$ und dividire durch 2, so erhält man $x = \frac{a+b}{2}$.

Eine andere Auflösung: Es sey der größere Theil $= x$, weil nun derselbe um *b* größer ist als der kleinere, so ist hinwiederum der kleinere um *b* kleiner als der größere; dahero wird der kleinere Theil $x - b$: diese beyde Theile zusammen müßen *a* ausmachen, dahero bekommt man: $2x - b = a$; man addire *b*, so kommt $2x = a + b$, folglich $x = \frac{a+b}{2}$ welches der größere Theil ist, und der kleinere wird seyn $\frac{a+b}{2} - b$ oder $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne und 1600 Rthl. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthl. mehr haben als der zweyte, der zweyte aber 100 Rthl. mehr als der dritte; wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des dritten sey $= x$, so ist das Erbtheil des zweyten $= x + 100$, und das Erbtheil des ersten $= x + 300$; diese 3 zusammen müßen 1600 Rthl. machen. Dahero wird $3x + 400 = 1600$; man subtrahire 400, so wird $3x = 1200$ und durch 3 dividirt giebt $x = 400$.

Antwort: der dritte bekommt 400 Rthl., der zweyte 500 Rthl., der erste 700 RthL

25.

IV. Frage: Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 8600 Rthl. Nach seinem Testament soll der erste zweymal so viel bekommen als der zweyte weniger 100 Rthl. Der zweyte soll bekommen dreymal so viel als der dritte weniger 200 Rthl. und der dritte soll haben viermal so viel als der vierte weniger 300 Rthl. Wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des vierten sey $= x$, so ist das Erbtheil des dritten $4x - 300$, des zweyten $12x - 1100$ und des ersten $24x - 2300$. Hiervon muß die Summe ausmachen 8600 Rthl. woraus diese Gleichung entsteht: $41x - 3700 = 8600$; man addire 3700, so kommt $41x = 12300$; und durch 41 dividirt giebt $x = 300$.

Antwort: der vierte Sohn bekommt 300 Rthl. der dritte 900 Rthl. der zweyte 2500 Rthl. und der erste 4900 Rthl.

26.

V. Frage: Ein Mann hinterläßt 11000 Rthl. und darzu eine Wittwe, zwey Söhne und drey Töchter. Nach seinem Testament soll die Frau zweymal mehr bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweymal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt ein jedes?

Das Erbtheil einer Tochter sey $= x$ so ist das Erbtheil eines Sohnes $= 2x$ und das Erbtheil der Wittwe $= 4x$; folglich ist die gantze Erbschaft $3x + 4x + 4x$, oder $11x = 11000$; durch 11 getheilt giebt $x = 1000$.

Antwort:

eine Tochter bekommt 1000 Rthl. allso alle drey bekommen	3000 Rthl.
ein Sohn bekommt 2000 Rthl. allso beyde	4000
und die Mutter bekommt	4000
	Summa 11000 Rthl.

27.

VI. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne, welche das hinterlaßene Vermögen folgender Gestalt unter sich theilen. Der erste bekommt 1000 Rthl. weniger als die Hälfte von der gantzen Verlaßenschaft; der zweyte 800 Rthl. weniger als der dritte Theil der Verlaßenschaft, und der dritte 600 Rthl. weniger als der vierte Theil der Verlaßenschaft. Nun ist die Frage wie groß die Verlaßenschaft gewesen und wie viel ein jeder bekommen?

Es sey die gantze Verlaßenschaft $= x$

so hat der erste Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 800$

der dritte $\frac{1}{4}x - 600$

Alle drey Söhne zusammen haben also bekommen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$ welches der gantzen Verlaßenschaft x gleich gesetzt werden muß, woraus diese Gleichung entsteht, $\frac{13}{12}x - 2400 = x$. Man subtrahire x, so hat man $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$, man addire 2400, so ist $\frac{1}{12}x = 2400$, und mit 12 multiplicirt giebt $x = 28800$.

Antwort: die gantze Verlaßenschaft war 28800 Rthl. davon hat nun der
erste Sohn bekommen 13400 Rthl.
der zweyte 8800
der dritte 6600
alle drey allso 28800 Rthl.

28.

VII. Frage: Ein Vater hinterläßt vier Söhne, welche die Erbschaft also unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthl. weniger als die Hälfte der Erbschaft, der zweyte nimmt 1000 Rthl. weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft, der dritte nimmt just den $\frac{1}{4}$ der gantzen Erbschaft, der vierte nimmt 600 Rthl. und den 1 der Erbschaft: wie groß war die Erbschaft und wie viel hat ein jeder Sohn bekommen?

Man setze die gantze Erbschaft $= x$

so hat bekommen der erste $\frac{1}{2}x - 3000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 1000$

der dritte $\frac{1}{4}x$

der vierte $\frac{1}{5}x + 600$

und alle vier zusammen nahmen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, welches seyn muß $= x$: also hat man diese Gleichung: $\frac{77}{60}x - 3400 = x$, subtrahire *x*, so wird $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$, addire 3400, so kommt $\frac{17}{60}x = 3400$, durch 17 dividirt giebt $\frac{1}{60}x = 200$ und mit 60 multiplicirt $x = 12000$.

Antwort: die gantze Verlaßansehaft war 12000 Rthl. Davon bekam der erste 3000 Rthl., der zweyte 3000, der dritte 3000, der vierte 3000.

29.

VIII. Frage: Suche eine Zahl wann ich darzu ihre Hälfte addire, daß so viel über 60 kommen, als die Zahl selbst ist unter 65?

Die Zahl sey *x*, so muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ so viel seyn als $65 - x$, das ist $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$, man addire *x* so hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$, man addire 60 so kommt $\frac{5}{2}x = 125$, durch 5 dividirt wird $\frac{1}{2}x = 25$ und mit 2 multiplicirt giebt $x = 50$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 50.

30.

IX. Frage: Man zertheile 32 in zwey Theile, wann ich den kleinern dividire durch 6, den größern aber durch 5, daß die Quotienten zusammen 6 ausmachen.

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 32 - x$; der kleinere durch 6 dividirt giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt giebt $\frac{32-x}{5}$: also muß seyn $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$, mit 5 multiplicirt giebt $\frac{5x}{6} + 32 - x = 30$, oder $-\frac{x}{6} + 32 = 30$, man addire $\frac{1}{6}x \sim$, so kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$, 30 subtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$, mit 6 multiplicirt wird $x = 12$.

Antwort: der kleinere Theil ist 12, und der größere 20.

31.

X. Frage: Suche eine Zahl, wann ich sie mit 5 multiplicire so ist das Product so viel unter 40, als die Zahl selbst ist unter 12.

Es sey diese Zahl $= x$, welche unter 12 ist um $12 - x$, die Zahl fünfmal genommen ist $5x$ und ist unter 40 um $40 - 5x$, welches eben so viel seyn soll als $12 - x$, also $40 - 5x = 12 - x$, addire $5x$, so wird $40 = 12 + 4x$, 12 subtrahirt giebt $28 = 4x$, durch 4 dividirt wird $x = 7$.

Antwort: die Zahl ist 7.

32.

XI. Frage: Zertheile 25 in zwey Theile, so daß der größere 49 mal größer ist, als der kleinere ?

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 25 - x$ *;* dieser durch jenen dividirt soll 49 geben, also wird $\frac{25-x}{x} = 49$, mit x multiplicirt giebt $25 - x = 49x$, und x addirt kommt $50x = 25$, durch 50 dividirt bleibt $x = \frac{1}{2}$.

Antwort: der kleinere Theil ist $\frac{1}{2}$ und der größere $24\frac{1}{2}$, welcher durch $\frac{1}{2}$ dividirt, das ist mit 2 multiplicirt giebt 49.

33.

XII. Frage: Zertheile 48 in neun Theile, so daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer sey, als der vorhergehende?

Es sey der erste und kleinste Theil $= x$ so ist der zweyte $= x + \frac{1}{2}$ und der dritte $= x + 1$ etc. Weil nun diese Theile eine Arithmetische Progression ausmachen, davon das erste Glied $= x$ so ist das neunte und letzte Glied $x + 4$, wozu das erste x addirt $2x + 4$ giebt. Diese Summe mit der Anzahl der Glieder 9, multiplicirt giebt $18x + 36$; dieses durch 2 getheilt giebt die Summe aller neun Theile $9x + 18$, so da seyn muß 48. Also hat man $9x + 18 = 48$, 18 subtrahirt giebt $9x = 30$, durch 9 dividirt giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Antwort: der erste Theil ist $3\frac{1}{3}$ und die neun Theile sind folgende

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3\frac{1}{3} + & 3\frac{5}{6} + & 4\frac{1}{3} + & 4\frac{5}{6} + & 5\frac{1}{3} + & 5\frac{5}{6} + & 6\frac{1}{3} + & 6\frac{5}{6} + & 7\frac{1}{3}, \end{array}$$

davon die Summe $= 48$.

34.

XIII. Frage: Suche eine Arithmetische Progression davon das erste Glied $= 5$ und das letzte $= 10$ die Summe aber = 60 sey?

Da hier weder der Unterschied noch die Anzahl der Glieder bekant ist, aus dem ersten und letzten aber die Summe aller gefunden werden könnte, wann man nur die Anzahl der Glieder wüßte, so sey dieselbe $= x$, so wird die Summe der Progression seyn $\frac{15}{2}x = 60$; durch 15 dividirt $\frac{1}{2}x = 4$, mit 2 multiplicirt $x = 8$. Da nun die Anzahl der Glieder 8 ist, so setze man den Unterschied $= z$, so ist das zweyte Glied $5 + z$, das dritte $5 + 2z$ und das achte $5 + 7z$, welches gleich seyn muß 10.

Also hat man $5 + 7z = 10$, und 5 subtrahirt, giebt $7z = 5$, durch 7 dividirt $z = \frac{5}{7}$.

Antwort: Der Unterschied der Progression ist ~ und die Anzahl der Glieder 8, dahero die Progression selbst seyn wird,

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & + 5\frac{5}{7} & + 6\frac{3}{7} & + 7\frac{1}{7} & + 7\frac{1}{7} & + 8\frac{4}{7} & + 9\frac{2}{7} & + 10, \end{array}$$

davon die Summe = 60.

35.

XIV. Frage: Suche eine Zahl wann ich von ihrem Duplo subtrahire 1 und das übrige duplire, davon 2 subtrahire, den Rest durch 4 dividire, daß 1 weniger heraus komme als die gesuchte Zahl?

Die gesuchte Zahl sey x, so ist ihr Duplum $2x$, davon 1 subtrahirt bleibt $2x-1$, dieses duplirt wird $4x-2$, davon subtrahirt 2 bleibt $4x-4$, dieses durch 4 dividirt giebt $x-1$, welches 1 weniger seyn muß als x:

Also $x-1=x-1$, dieses ist eine Identische Gleichung, und zeiget an, daß x gar nicht bestimmt werde, sondern daß man davor eine jegliche Zahl nach Belieben annehmen könne.

36.

XV. Frage: Ich habe gekauft etliche Ellen Tuch und für jede 5 Ellen gegeben 7 Rthl. Ich habe wieder verkauft je 7 Ellen für 11 Rthl. und gewonnen 100 Rthl. über das Hauptguth: wie viel ist des Tuchs gewesen?

Es seyen gewesen x Ellen; man muß also erst sehen wie viel diese im Einkauf gekostet, welches durch folgende Regeldetri gefunden wird: 5 Ellen kosten 7 Rthl., was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{7}{5}x$ Rthl. so viel Geld hat er ausgegeben. Nun laßt uns sehen, wie viel er wieder eingenommen, dieses geschieht durch diese Regeldetri: 7 Ellen kosten im Verkauf 11 Rthl. was 11 kosten x Ellen? Antwort: $\frac{11}{7}x$ Rthl.

Dieses ist die Einnahme, welche um 100 Rthl. größer ist als die Ausgabe, woraus diese Gleichung entspringt: $\frac{11}{7}x=\frac{7}{5}x+100$, $\frac{7}{5}x$ subtrahirt, bleibt $\frac{6}{35}x=100$, mit 35 multiplicirt kommt $6x=3500$, durch 6 dividirt wird $x=583\frac{1}{3}$

Antwort: Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen, welche erstlich eingekauft worden für $816\frac{2}{3}$ Rthl. hernach sind dieselben wieder verkauft worden für $916\frac{2}{3}$ Rth1. also ist darauf gewonnen worden 100 Rthl.

37.

XVI. Frage: Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthl. davon sind 2 weiße, 3 schwartze, und 7 blaue. Kostet ein Stück schwartzes Tuch 2 Rthl. mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Rthl. mehr als ein schwartzes: ist die Frage wie viel jedes gekostet?

Man setze, ein weißes Stück kostet x Rth1. dahero kosten die zwey weiße Stücke $2x$ Rthl. Weiter kostet ein schwartzes Stück $x+2$ also die drey schwartzen $3x+6$ und ein blaues Stück $x+5$ folglich die 7 blauen $7x+35$ und alle zwölff Stuck $12x+41$; dieselben kosten aber würcklich 140 Rthl., dahero hat man $12x+41=140$, 41 subtrahirt bleibt $12x=99$, durch 12 divdirt wird $x=8\frac{1}{4}$.

Antwort: ein weißes Stück kostet demnach $8\frac{1}{4}$ Rthl.

ein schwartzes	"	$10\frac{1}{4}$ Rthl.
ein blaues	"	$13\frac{1}{4}$ Rthl.

38.

XVII. Frage: Einer hat Muscaten-Nüß gekauft, und sagt daß 3 Stück eben so viel über 4 Pf. kosten, als 4 Stück mehr kosten als 10 Pf. wie theuer waren dieselben?

Man sage 3 Stücke kosten $x+4$ Pf. so werden 4 Stücke kosten $x+10$ Pf.
Nun aber nach dem ersten Satz findet man durch die Regeldetri was 4 Stück kosten, 3 Stück: $x+4\text{Pf.}=4$ Stück : .... Antwort $\frac{4x+16}{3}$, also wird $\frac{4x+16}{3}=x+10$ oder $4x+16=3x+30$, $3x$ subtrahirt giebt $x+16=30$, 16 subtrahirt giebt $x=14$.

Antwort: Es kosten 3 Stück 18 Pf. und 4 Stück 24 Pf. folglich 1 Stück hat gekost 6 Pf.

39.

XVIII. Frage: Einer hat zwey silberne Becher nebst einem Deckel darzu; der erste Becher wiegt 12 Loth, legt man den Deckel darauf so wiegt er zweymal so viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreymal so viel als der erste: hier ist nun die Frage wie viel der Deckel und auch der andere Becher gewogen?

Man setze der Deckel habe gewogen x Loth, so wiegt der erste Becher sammt dem Deckel $x+12$ Loth. Da dieses Gewicht zweymal so groß ist, 1 als des andern Bechers, so hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x+6$; legt man darauf den Deckel so wiegt er $\frac{3}{2}x+6$ welches 3 mahl 12, das ist 36, gleich seyn muß. Also hat man $\frac{3}{2}x+6=36$ oder $\frac{3}{2}x=30$ und $\frac{1}{2}x=10$ und $x=20$.

Antwort: der Deckel hat gewogen 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth.

40.

XIX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Müntze; von der ersten Sorte gehen a Stück auf einen Rthl. von der zweyten Sorte b Stück. Nun kommt einer und will c Stück vor einen Rthl. haben; wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man setze er gebe ihm von der ersten Sorte x Stück und also von der andern $c-x$ Stück. Nun sind aber jene x Stück werth $a:1=x:\frac{x}{a}$ Rthl. a
diese $c-x$ Stück aber sind werth $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$ Rthl.

Also muß seyn $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1$, oder $\frac{bx}{a}+c-x=b$, oder $bx+ac-ax=ab$, und weiter $bx-ax=ab-ac$, folglich wird

$$x=\frac{ab-ac}{b-a} \text{ oder } x=\frac{a(b-c)}{b-a},$$

dahero wird

$$c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}.$$

Antwort: von der ersten Sorte giebt also der Wechsler $\frac{a(b-c)}{b-a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c-a)}{b-a}$ Stück.

Anmerckung: Diese beyden Zahlen laßen sich leicht durch die Regeldetri finden; nemlich die erste durch diese: wie $b-a:b-c=a:\frac{ab-ac}{b-a}$ für die zweyte Zahl gilt diese: wie $b-a:c-a=b:\frac{bc-ab}{b-a}$.

Hierbey ist zu mercken, daß b größer ist als a, und c kleiner als b aber größer als a, wie die Natur der Sache erfordert.

41.

XX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Müntze; von der ersten gelten 10 Stück einen Rthl. von der andern 20 Stück einen Rthl. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Rthl. wie viel bekommt er von jeder Sorte?

Hier ist also $a=10$, $b=20$ und $c=17$; woraus diese Regeldetrien fließen:

I.) $10:3=10:3$, also von der ersten Sorte 3 Stück;
II.) $10:7=20:14$, und von der andern Sorte 14 Stück.

42.

XXI. Frage: Ein Vater verläßt nach seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder dergestalt unter sich theilen:

Das erste nimmt 100 Rthl. und dazu noch den 10 ten Theil des übrigen.
Das zweyte nimmt 200 Rthl. und noch darzu den l0ten Theil des übrigen.
Das dritte nimmt 300 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen.
Das vierte nimmt 400 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen
und so fort: solcher gestalt findet es sich, daß das ganze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilet worden. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wie viel Kinder hintedaßen worden, und wie viel ein jedes bekommen?

Diese Frage ist von einer gantz besondern Art und verdienet deswegen bemercket zu werden. Um dieselbe desto leichter aufzulösen, so setze man das gantze hinterlaßene Vermögen $=z$ Rthl. und weil alle Kinder gleich viel bekommen, so sey das Antheil eines jeden $=x$; woraus man sieht, daß die Anzahl der Kinder gewesen $\frac{z}{x}$. Hieraus wollen wir die Auflößung folgender Gestalt anstellen.

Die Maße oder das zu theilende Geld	Ordnung der Kinder	Der Antheil eines jeden	Die Differenzen
z	das erste	$x=100+\frac{z-100}{10}$	
$z-x$	zweyte	$x=200+\frac{z-x-200}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-2x$	dritte	$x=300+\frac{z-2x-300}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-3x$	vierte	$x=400+\frac{z-3x-400}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-4x$	fünfte	$x=500+\frac{z-4x-500}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-5x$	sechste	$x=600+\frac{z-4x-600}{10}$	u.s.w.

In der letzten Columne sind hier die Differenzen gesetzt worden, welche entstehen, wann man ein jedes Erbtheil von dem folgenden subtrahirt. Weil nun alle Erbtheile ein ander gleich sind, so muß eine jede von diesen Differenzen seyn $=0$. Da es sich nun so glücklich füget, daß alle Differenzen ein ander gleich sind, so ist es genung, daß man eine davon gleich 0 setze, dahero erhalten wir diese Gleichung $100-\frac{x+100}{10}=0$. Man multiplicire mit 10 so erhält man $1000-x-100=0$, oder $900-x=0$, folglich $x=900$.

Woraus wir schon wißen, daß das Erbtheil eines jeden Kindes 900 Rthl. gewesen. Man nehme nun eine von den Gleichungen in der dritten Columne, welche man will, z. E. die erste $900=100+\frac{z-100}{10}$, woraus man z so gleich finden kann; dann $9000=1000+z-100$ oder $9000=900+z$ also $z=8100$, dahero wird $\frac{z}{x}=9$.

Antwort: Also war die Anzahl der Kinder $=9$ das hinterlaßene Vermögen $=8100$ Rthl. wovon ein jedes Kind bekommt 900 Rthl.

CAPITEL 4

VON AUFLÖSUNG ZWEYER ODER MEHR GLEICHUNGEN VOM ERSTEN GRAD.

43.

Ofters geschieht es, daß zwey oder auch mehr unbekante Zahlen, so durch die Buchstaben *x, y, z* etc. vorgestellt werden, in die Rechnung gebracht werden müßen, da man dann, wann anders die Frage bestimmt ist, auf eben so viel Gleichungen kommt, aus welchen hernach die unbekanten Zahlen gefunden werden müßen. Hier betrachten wir aber nur solche Gleichungen wo nur die erste Potestät der unbekanten Zahl sich findet, und auch keine mit der andern multiplicirt ist. Also daß eine jede Gleichung von dieser Form seyn wird

$$az+by+cx=d.$$

44.

Wir wollen also den Anfang von zwey Gleichungen machen, und daraus zwey unbekante Zahlen x und y bestimmen, und um die Sache auf eine allgemeine Art zu tractiren, so seyen diese beyde Gleichungen gegeben

I.) $ax+by=c$ und II.) $fx+gy=h$

wo die Buchstaben *a, b, c* und *f, g, h* die Stelle bekanter Zahlen vertreten. Hier ist nun die Frage wie man aus diesen beyden Gleichungen die beyden unbekanten Zahlen x und y herausbringen soll.

45.

Der natürlichste Weg bestehet nun darinn, daß man aus einer jeden Gleichung, den Werth von einer unbekanten Zahl als z. E. von x bestimmt und hernach diese beyde Werthe einander gleich setzt; woraus man eine Gleichung erhält, da nur die unbekante Zahl y vorkommt, welche man nach den obigen Reguln bestimmen kann. Hat man nun y

gefunden, so darf man nur anstatt desselben seinen gefundenen Werth setzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

46.

Dieser Regel zu Folge findet man aus der ersten Gleichung $x=\frac{c-by}{a}$, aus der andern aber findet man $x=\frac{h-gy}{f}$; diese beyden Werthe setze man einander gleich, so erhält man diese neue Gleichung $\frac{c-by}{a}=\frac{h-gy}{f}$. Mit a multiplicirt, wird $c-by=\frac{ah-agy}{f}$, mit f multiplicirt wird $fc-fby=ah-agy$. Man addire agy so wird $fc-fby+agy=ah$. Man subtrahire fc so wird $-fby+agy=ah-fc$, oder $(ag-fb)y=ah-fc$, man dividire durch $ag-bf$ so wird $y=\frac{ah-fc}{ag-fb}$.

Schreibt man nun diesen Werth für y in einem der beyden, so vor x gefunden worden, so erhält man auch den Werth von x. Man nehme den ersten so hat man erstlich $-by=\frac{-bah+bcf}{ag-fb}$, hieraus wird $c-by=c-\frac{abh-bcf}{ag-fb}$, oder $c-by=\frac{agc-bcf-abh+bcf}{ag-fb}=\frac{agc-abh}{ag-fb}$; durch a dividirt giebt $x=\frac{c-by}{a}=\frac{cg-bh}{ag-bf}$.

47.

I. Frage: Um dieses durch Exempel zu erläutern, so sey diese Frage vorgelegt: Man suche zwey Zahlen deren Summe sey 15 und die Differenz 7?

Es sey die größere Zahl $=x$ und die kleinere $=y$, so hat man

$$\text{I.) } x+y=15, \text{ und II.) } x-y=7.$$

Aus der ersten bekommt man $x=15-y$ und aus der zweyten $x=7+y$, woraus diese neue Gleichung entspringt $15-y=7+y$, hier addire man y, so hat man $15=7+2y$, man subtrahire 7, so wird $2y=8$, durch 2 dividirt wird $y=4$ und daraus $x=11$.

Antwort: die kleinere Zahl ist 4 die größere aber 11.

48.

II. Frage: Man kann diese Frage auch allgemein machen und zwey Zahlen suchen, deren Summe $=a$ und deren Differenz $=b$ sey.

Es sey die größere $=x$ und die kleinere $=y$, so hat man

$$\text{I.) } x+y=a \text{ und II.) } x-y=b.$$

Aus der ersten erhält man $x=a-y$ und aus der zweyten $x=b-y$, woraus diese Gleichung entspringt $a-y=b+y$, man addire y, so hat man $a=b+2y$, man subtrahire b, so kommt $2y=a-b$, durch 2 dividirt wird $y=\frac{a-b}{2}$ und hieraus wird $x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Antwort: die größere Zahl ist also $x=\frac{a+b}{2}$ und die kleinere $y=\frac{a-b}{2}$; oder da $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ und $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, so erhält man diesen Lehrsatz:
Die größere Zahl ist gleich der halben Summe *plus* der halben Differenz,

und die kleinere Zahl ist gleich der halben Summe *minus* der halben Differenz.

49.

Man kann auch diese Frage auf folgende Weise auflösen: da die beyden Gleichungen sind $x+y=a$ und $x-y=b$, so addire man dieselben so wird $2x=a+b$ und $x=\frac{a+b}{2}$.

Hernach von der ersten subtrahire man die zweyte, so bekommt man $2y=a-b$ und $y=\frac{a-b}{2}$, wie vorher.

50.

III. Frage: Ein Maul-Esel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maul-Esel: wann du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zwey mal so viel als du; darauf antwortet der Maul-Esel: wann du mir ein Pud von deiner Last gäbest so hätte ich dreymal so viel als du, wie viel Pud hat ein jeder gehabt?

Der Maul-Esel habe gehabt x Pud, der Esel aber y Pud. Giebt nun der Maul-Esel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y+1$ der Maul-Esel aber behält noch $x-1$, da nun der Esel zweymal so viel hat als der Maul-Esel so wird $y+1=2x-2$.

Wann aber der Esel dem Maul-Esel ein Pud giebt, so bekommt der Maul-Esel $x+1$ und der Esel behält noch $y-1$. Da nun jene Last dreymal so groß ist als diese, so wird $x+1=3y-3$.

Also sind unsere zwey Gleichungen

$$\text{I.) } y+1=2x-2,\ \text{II.) } x+1=3y-3 .$$

Aus der ersten findet man x und aus der andern $x=3y-4$, woraus diese neue Gleichung entspringt $\frac{y+3}{2}=3y-4$, welche mit 2 multiplicirt giebt $y+3 \;=6y-8$ und y subtrahirt kommt $5y-8=3$, addire 8 so hat man $5y=11$ und $y=\frac{11}{5}=$ oder $2\frac{1}{5}$; hieraus $x=2\frac{3}{5}$.

Antwort: Also hat der Maul-Esel gehabt $2\frac{3}{5}$ Pud der Esel aber $2\frac{1}{5}$ Pud.

51.

Hat man drey unbekante Zahlen, und eben so viel Gleichungen, als z. E.

$$\text{I.) } x+y-z=8,\ \text{II.) } x+z-y=9\ \text{III.) } y+z-x=10,$$

so suche man ebenfals aus einer jeden den Werth von x, aus der

$$\text{I.) } x=8\ +z-y\ \text{II.) }\ x=9+y-z\ \text{III.) } x=y+z-10.$$

Nun setze man erstlich den ersten gleich dem andern, und hernach auch gleich dem dritten so erhält man diese zwey neue Gleichungen:

$$\text{I.) } 8+z-y=9+y-z\ \text{II.) } 8+z-y=y+z-10.$$

Es folgt aber aus der ersten $2z-2y=1$, und aus der zweyten $2y=18$, und da erhält man so gleich $y=9$, welcher Werth in der vorhergehenden vor *y* geschrieben, giebt $2z-18=1$ und $2z=19$, dahero $z=9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x=8\frac{1}{2}$

Hier hat es sich gefüget, daß in der letzten Gleichung der Buchstaben *z* verschwunden, und also *y* so gleich daraus bestimmt werden konnte. Wäre aber *z* auch noch darinnen vorgekommen, so hätte man zwey Gleichungen gehabt zwischen *z* und *y*, welche nach der ersten Regel aufgelöst werden müßten.

52.

Es seyen die drey folgenden Gleichungen gefunden worden,

$$\text{I.) } 3x+5y-4z=25,\ \text{II.) } 5x-2y+3z=46,\ \text{III.) } 3y+5z-x=62.$$

Man suche aus einer jeden den Werth von *x*, so hat man

$$\text{I.) } x=\tfrac{25-5y+4z}{3},\quad \text{II.) } x=\tfrac{46+2y-3z}{5},\ \text{III.) } x=3y+5z-62.$$

Nun vergleiche man diese drey Werthe unter sich, so giebt der IIIte und Ite $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$, oder mit 3 multiplicirt

$$25-5y+4z=9y+15z-186,$$

addire 186, so kommt $211-5y+4z=9y+15z$, 5*y* addirt giebt $211+4z=14y+15z$, also aus I und III erhält man $211=14y+11z$.
Die IIte und IIIte giebt

$$3y+5z-62=\tfrac{46+2y-3z}{5} \text{ oder } 46+2y-3z=15y+25z-310$$

und man findet aus dieser Gleichung $356=13y+28z$.

Aus einer jeden dieser beyden Gleichungen suche man den Werth für *y*.

I.) $211=14y+11z$, wo 11*z* subtrahirt, bleibt

$$14y=211-11z \text{ oder } y=\tfrac{211-11z}{14}$$

II.) $356=13y+28z$, wo 28z subtrahirt, bleibt

$$13y=356-28z \text{ oder } y=\tfrac{356-28z}{13}$$

diese zwey Werthe einander gleich gesetzt, geben:

$$\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13},$$

mit $13\cdot 14$ multiplicirt wird $2743-143z=4984-392z$ und $392z$ addirt, giebt $249z+2743=4984$ oder $249z=2241$ und also $z=9$.
Hieraus erhält man $y=8$ und endlich $x=7$.

53.

Solten mehr als drey unbekante Zahlen, und eben so viel Gleichungen vorkommen, so könnte man die Auflösung auf eine ähnliche Art anstellen, welches gemeiniglich auf verdrießliche Rechnungen leiten würde.

Es pflegen sich aber bey einem jeglichen Fall solche Mittel zu äußern, wodurch die Auflößung ungemein erleichtert wird, und solches geschieht, indem man außer den Haupt unbekanten Zahlen noch eine neue willkührliche, als z. E. die Summe aller in die Rechnung mit einführet, welches von einem der sich in dergleichen Rechnungen schon ziemlich geübet hat, in einem jeglichen Fall leicht beurtheilet wird. Zu diesem Ende wollen wir einige dergleichen Exempeln anführen.

54.

IV. Frage: Drey spielen mit einander, im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beyden andern so viel, als ein jeder von den zwey andern an Gelde bey sich hatte. Im andern Spiel verliert der zweyte an den ersten und dritten so viel als ein jeder hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und zweyten so viel ein jeder hatte, und da findet es sich, daß alle nach geendigtem Spiel gleich viel haben, ein jeder nemlich 24 Fl. Nun ist die Frage, wie viel ein jeder anfänglich gehabt habe?

Man setze der erste habe gehabt x Fl. der zweyte y und der dritte z. Ueber dieses setze man die Summe aller Fl. zusammen $x+y+z=s$. Da nun im ersten Spiel der erste so viel verliert als die beyden andern haben, und der erste x hat, so haben die beyden andern $s-x$, und so viel verliert der erste, daher ihm noch übrig bleiben $2x-s$; der zweyte aber wird haben $2y$ und der dritte $2z$.

Also nach dem ersten Spiel wird ein jeder haben wie folget;

$$\text{der I.) } 2x-s, \text{der II.) } 2y, \text{ der III.) } 2z.$$

Im zweyten Spiel verliert der andere, der nun $2y$ hat, an die beyden andern, so viel als sie haben, oder $s-2y$. Dahero der zweyte noch behält $4y-s$; die beyden andern aber werden zweymal so viel haben als vorher.

Also nach dem zweyten Spiel wird haben:

$$\text{der I.) } 4x-2s, \text{ der II.) } 4y-s, \text{der III.) } 4z.$$

Im dritten Spiel verliert der dritte, der jetzt $4z$ hat, an die andern beyde so viel sie haben, sie haben aber $s-4z$; also behält der dritte noch $8z-s$ und die beyden übrigen bekommen doppelt so viel als sie hatten.

Also wird nach dem dritten Spiel ein jeder haben:

der I.) $8x - 4s$, der II.) $8y - 2s$, und der III.) $8z - s$;

da nun jetzt ein jeder 24 Fl. hat, so erhalten wir drey Gleichungen welche so beschaffen sind, daß man aus der ersten so gleich x, aus der andern y und aus der dritten s finden kann, insonderheit da jetzt s eine bekante Zahl ist, indem alle zusammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieses wird sich von selbsten geben, ohne daß man nöthig habe darauf zu sehen.

Diese Rechnung wird demnach also stehen:

I.) $8x - 4s = 24$, oder $8x = 24 + 4s$, oder $x = 3 + \frac{1}{2}s$

II.) $8y - 2s = 24$, oder $8y = 24 + 2s$, oder $y = 3 + \frac{1}{4}s$

III.) $8z - s = 24$, oder $8z = 24 + s$, oder $z = 3 + \frac{1}{8}s$

Man addire diese 3 Werthe, so bekommt man

$$x + y + z = 9 + \tfrac{7}{8}s,$$

da nun $x + y + z = s$, so hat man $s = 9 + \frac{7}{8}s$; $\frac{7}{8}s$ subtrahirt bleibt $\frac{1}{8}s = 9$, und $s = 72$.

Antwort: Also vom Anfang des Spiels hatte der erste 39 Fl. der zweyte 21 Fl. und der dritte 12.

Aus dieser Auflösung sieht man, wie durch Hülfe der Summe der drey unbekanten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Weg geräumet worden.

55.

So schwer diese Frage scheinet, so ist doch zu mercken daß dieselbe so gar ohne Algebra aufgelößt werden kann.

Man darf nur in Betrachtung derselben rückwerts gehen: dann da die drey Personen nach dem dritten Spiel gleich viel bekommen haben, nemlich der erste 24, der zweyte 24, der dritte 24; im dritten Spiel aber der erste und zweyte ihr Geld verdoppelt haben, so müßen sie vor dem dritten Spiel gehabt haben, wie folget:

I.) 12, II.) 12, III.) 48.

Im zweyten Spiel hat der erste und dritte sein Geld verdoppelt, also müßen sie vor dem zweyten Spiel gehabt haben:

I.) 6, II.) 42, III.) 24.

Im ersten Spiel hatte der zweyte und dritte sein Geld verdoppelt, also vor dem ersten Spiel haben sie gehabt:

I.) 39 II.) 21, III.) 12

und eben so viel haben wir auch vorher für den Anfang des Spiels gefunden.

56.

V. Frage: Zwey Personen sind schuldig 29 Rub. und es hat zwar ein jeder Geld, doch nicht so viel, daß er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; darum spricht der erste zu dem andern: giebst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes so könnte ich die Schuld so gleich allein bezahlen; der andere antwortet dagegen: gieb du mir $\frac{3}{4}$ deines Gelds so könnt ich die Schuld allein bezahlen; wie viel Geld hat jeder gehabt?

Der erste habe gehabt x Rub. der andere y Rub. Also bekommt man erstlich $x+\frac{2}{3}y=29$, hernach auch $y+\frac{3}{4}x=29$. Aus dem ersten findet man $x=29-\frac{2}{3}y$, aus dem zweyten $x=\frac{116-4y}{3}$.

Aus diesen beyden Werthen entsteht diese Gleichung:
$29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}$, also $y=14\frac{1}{2}$; dahero wird $x=19\frac{1}{3}$.

Antwort: der erste hat gehabt $19\frac{1}{3}$ der zweyte $14\frac{1}{2}$ Rub.

57.

VI. Frage: Drey haben ein Haus gekauft für 100 Rthl. der erste begehrt vom andern $\frac{1}{2}$ seines Gelds so könnte er das Haus allein bezahlen; der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen. Der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Gelds so möchte er das Haus allein bezahlen. Wie viel hat jeder Geld gehabt?

Der erste habe gehabt x, der zweyte y, der dritte z Rthl. so bekommt man folgende drey Gleichungen

$$\text{I.)}\, x+\tfrac{1}{2}y=100. \qquad \text{II.)}\, y+\tfrac{1}{3}z=100. \qquad \text{III.)}\, z+\tfrac{1}{4}x=100.$$

aus welchen der Werth von x gefunden wird:

$$\text{I.)}\ x=100-\tfrac{1}{2}y, \qquad \text{III.)}\ x=400-4z$$

hier konnte nemlich aus der zweyten Gleichung x nicht bestimmt werden.

Die beyden Werthe aber geben diese Gleichung:

$$100-\tfrac{1}{2}y=400-4z \text{ oder } 4z-\tfrac{1}{2}y=300$$

welche mit der zweyten verbunden werden muß, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweyte Gleichung $y+\frac{1}{3}z=100$; woraus gefunden wird $y=100-\frac{1}{3}z$; aus der oben gefundenen Gleichung $4z-\frac{1}{2}y=300$ aber ist bekannt $y=8z-600$ woraus diese letzte Gleichung entspringt: $100-\frac{1}{3}z=8z-600$, also $8\frac{1}{3}z=700$, oder $\frac{25}{3}z=700$, und $z=84$; hieraus findet man $y=100-28,$ oder $y=72$, und endlich $x=64$.

Antwort: der erste hat gehabt 64 Rthl. der zweyte 72 Rthl. der dritte 84 Rthl.

58.

Da bey diesem Exempel in einer jeden Gleichung nur zwey unbekante Zahlen vorkommen, so kann die Auflößung auf eine bequemere Art angestellet werden.

Dann man suche aus der ersten $y = 200 - 2x$, welches also durch *x* bestimmt wird, diesen Werth schreibe man vor *y* in der zweyten Gleichung, so hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, 100 subtrahirt so bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und $z = 6x - 300$.

Also ist auch *z* durch *x* bestimmt: diesen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, so kommt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur *x* allein vorkommt und allso

$$25x - 1600 = 0$$

dahero $x = 64$, folglich $y = 200 - 128 = 72$ und $z = 384 - 300 = 84$.

59.

Eben so kann man verfahren wann auch mehr solche Gleichungen vorkommen, also wann man auf eine allgemeine Art hat:

$$\text{I.)}\ u + \tfrac{x}{a} = n, \quad \text{II.)}\ x + \tfrac{y}{b} = n, \quad \text{III.)}\ y + \tfrac{z}{c} = n, \quad \text{IV.)}\ z + \tfrac{u}{d} = n$$

oder nach dem man die Brüche weggebracht diese:

$$\text{I.)} au + x = an, \quad \text{II.)} bx + y = bn, \quad \text{III.)} cy + z = cn, \quad \text{IV.)} dz + u = dn.$$

Hier bekommen wir aus der ersten $x = an - au$, welcher Werth in der zweyten giebt $abn - abu + y = bn$ allso $y = bn - abn + abu$; dieser Werth in der dritten giebt $bcn - abcn + abcu + z = cn$ also $z = cn - bcn + abcn - abcu$; dieser endlich in der vierten Gleichung giebt

$$cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn.$$

Also wird

$$dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcdu + u \text{ oder}$$
$$(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$$

woraus man erhält

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n\frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

Hieraus findet man ferner wie folget

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$
$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$
$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$
$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

60.

VII. Frage: Ein Hauptmann hat drey Compagnien Soldaten. In einer sind Schweitzer, in der andern Schwaben, in der dritten Sachsen; mit diesen will er eine Stadt bestürmen und verspricht zur Belohnung 901 Rthl. also auszutheilen:

Daß von der Compagnie, die den Sturm thut, ein jeder 1 Rthl. bekommen, das übrige Geld aber unter die beyden andern Compagnien gleich vertheilet werden soll.

Nun findet es sich, daß wann die Schweitzer den Sturm thäten, ein jeder von den beyden andern $\frac{1}{2}$ Rthl. bekäme; wann aber die Schwaben den Sturm thäten, ein jeder der beyden andern $\frac{1}{3}$ Rthl. bekommen würde. Thäten aber die Sachsen den Sturm so würde ein jeder der beiden andern $\frac{1}{4}$ Rthl. bekommen. Nun ist die Frage, aus wie viel Köpfen eine jede Compagnie bestanden?

Man setze nun, die Zahl der Schweitzer sey gewesen x Köpfe, der Schwaben y und der Sachsen z. Ferner setze man die Anzahl aller $x+y+z=s$ weil leicht vorher zu sehen, daß dadurch die Rechnung gar sehr erleichtert wird. Dann wann die Schweitzer den Sturm thun, deren Anzahl $=x$, so ist die Zahl der beyden übrigen $=s-x$, da nun jene 1 Rthl. diese aber einen halben Rthl. bekommen, so wird $x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}x=901$. Eben so wann die Schwaben Sturm lauffen, so wird $y+\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}y=901$, und endlich wann die Sachsen Sturm lauffen, so wird $z+\frac{1}{4}s-\frac{1}{4}z=901$ seyn. Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchstaben x, y und z bestimmt werden kann.

Dann aus der ersten erhält man $x=1802-s$, aus der andern $2y=2703-s$, aus der dritten $3z=3604-s$.

Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von $6x$, $6y$, und $6z$.

$$\begin{array}{rl} & 6x = 10812-6s \\ & 6y = 8109-3s \\ & 6z = 7208-2s \\ \hline \text{addirt:} & 6s = 26129-11s \end{array}$$

woraus gefunden wird $s=1537$ welches die Anzahl aller Köpfe ist und daraus findet man ferner:

$$x=1802-1537=265$$
$$2y=2703-1537=1166 \text{ und } y=583$$
$$3z=3604-1537=2067 \text{ und } z=689.$$

Antwort: die Compagnie der Schweitzer bestand also aus 265 Mann, die Schwaben aus 583, und die Sachsen aus 689 Mann.