CHAPTER 10

ON THE SOLUTION OF PURE CUBIC EQUATIONS.

144.

A pure cubic equation can be solved if the cube of a known number can be put equal to the cube of the unknown number, thus so that neither the square of the unknown number, nor the number itself arises.
Such an equation is $x^3 = 125$, or of a general kind $x^3 = a$, or $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Now so that the value of *x* can be found from such an equation, it is to be apparent, in that it is necessary only to take the cube root of both sides.
Thus from the equation $x^3 = 125$, $x = 5$ is found, and from the equation $x^3 = a$ there is found $x = \sqrt[3]{a}$; but from $x^3 = \frac{a}{b}$ there is had $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ or $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.
Therefore if it is understood that only the cube root of such a given number is to be taken, then such equations can be solved.

146.

But such a form gives only one value for *x*, now since each quadratic equation has two values, thus there is reason to suspect, that a cubic equation must have more than one value, therefore it is worthwhile to investigate this matter more generally, and in the case of such an equation more values should be had for *x*, the same as are to be found out.

147.

We will, for example, consider this equation $x^3 = 8$, from which all the numbers shall be found, of which the cube shall be equal to 8, since now one such number without dispute is $x = 2$, thus according to the above chapter the formula $x^3 - 8 = 0$ itself by necessity must be divided by $x - 2$; we will perform this division as follows :

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3-8\quad (xx+2x+4\\
\qquad\ \ \underline{x^3-2xx}\\
\qquad\qquad 2xx-8\\
\qquad\qquad \underline{2xx-4x}\\
\qquad\qquad\qquad 4x-8\\
\qquad\qquad\qquad \underline{4x-8}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Thus our equation $x^3-8=0$ can itself be presented by these factors

$$(x-2)\left(xx+2x+4\right)=0.$$

148.

Since now the question is what kind of number must be assumed for x, that becomes $x^3=8$, or that becomes $x^3-8=0$, thus it is clear, that these will be found, if the product were put equal to zero; moreover the same will be 0, not only if the first factor $x-2=0$, from which there becomes $x=2$, but also if the other factor $xx+2x+4=0$. Thus putting in place $xx+2x+4=0$, hence there becomes $xx=-2x-4$ and therefore $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

149.

But for the case $x=2$ in which the equation $x^3=8$ is satisfied, we still have two more values for *x*, of which the cubes equally shall be 8, and which thus are provided :

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$ and II.) $x=-1-\sqrt{-3}$

which also put in place two more values, if the cubes of these are taken, as follows:

$$
\begin{array}{ccc}
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3}\\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}}\\
-1-\sqrt{-3} & & 1+\sqrt{-3}\\
\underline{\quad -\sqrt{-3}-3} & & \underline{\quad +\sqrt{-3}-3}\\
-2-2\sqrt{-3} & \text{square} & -2+2\sqrt{-3}\\
\underline{-1+\ \sqrt{-3}} & & \underline{-1-\ \sqrt{-3}}\\
2+2\sqrt{-3} & & 2-2\sqrt{-3}\\
\underline{\quad -2\sqrt{-3}+6} & & \underline{\quad +2\sqrt{-3}+6}\\
8 & \text{cube} & 8
\end{array}
$$

Both these values are two imaginary or impossible numbers, which nevertheless deserve to be noted.

150.

This is found in the general case also for each suchlike cubic equation $x^3 = a$, where as well as the value $x = \sqrt[3]{a}$ in addition two other cases are found. For brevity there is put $\sqrt[3]{a} = c$ that also gives $a = c^3$ and our equation adopts this form, $x^3 - c^3 = 0$, which is allowed to be divided by $x - c$, as can be seen from this division :

$$\begin{array}{l} x-c)\ x^3 - c^3 \quad (xx+cx+cc \\ \underline{x^3 - cxx} \\ \quad cxx - c^3 \\ \quad \underline{cxx - ccx} \\ \qquad ccx - c^3 \\ \qquad \underline{ccx - c^3} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

therefore our equation can be presented by this product

$$(x-c)(xx+cx+cc) = 0,$$

which actually will be equal to 0, not only if $x - c = 0$ or $x = c$, but also when $xx + cx + cc = 0$, but from which $xx = -cx - cc$ and therefore

$$x = -\tfrac{c}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{cc}{4} - cc)}, \text{ or } x = \tfrac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2},$$

that is

$$x = \tfrac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c,$$

in which formula two values for *x* are contained.

151.

Now since we have written *c* instead of $\sqrt[3]{a}$, thus we draw this conclusion from that, that from any single cubic equation of this form $x^3 = a$ three values for *x* can be found, which can be expressed thus:

$$\text{I.) I.) } x = \sqrt[3]{a}, \quad \text{II.) } x = \tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a} \quad \text{III.) } x = \tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a},$$

from which it is clear, that one such cubic root has three values, of which indeed only the first is possible, but the other two are impossible, which therefore here it is well to note, as we have seen above already, that each quadratic has two values, and under it will be seen still, that each root of a fourth order equation has four different values, of the fifth order five suchlike values, and so forth.

By the usual calculations, truly only the first of the three values is used, because the two others are impossible, and we will still add some examples about that.

152.

I. Question: Find a number, that itself squared and multiplied by its quarter produces 432 ?

Let this number be x, thus must xx be multiplied by $\frac{1}{4}x$ become equal to the number 432 : therefore becoming $\frac{1}{4}x^3 = 432$, multiplied by 4 becomes $x^3 = 1728$ and the cube root taken, gives $x = 12$.

Answer: the number sought is 12 then its square is 144 multiplied by a quarter of itself, that is 3, gives 432.

153.

II. Question: Find a number, of which the fourth power divided by its half and $14\frac{1}{4}$ added to that, becomes 100 ?

The number shall be x, thus its fourth power is x^4, which divided by its half, $\frac{1}{2}x$, gives $2x^3$, to that added $14\frac{1}{4}$ shall make 100 ; thus one has $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, where $14\frac{1}{4}$ taken gives $x^3 = \frac{343}{8}$, divided by 2 , and the cube root extracted gives $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Question: Some captains are camped in the field, each has under him three times as many cavalry and 20 as many foot-soldiers as there are captains ; and a cavalry man's monthly pay is as many florins as there are captains, but the foot-soldiers receive half as much as the cavalrymen, and the monthly pay altogether amounts to 13000 Fl. How many captains were there ?

Suppose there were x captains, thus each had under himself $3x$ cavalry and $20x$ foot-soldiers. Hence the number of all the cavalry was $3xx$ and of the foot-soldiers $20xx$. Now since a cavalryman receives x Fl., but a foot-soldier $\frac{1}{2}x$ Fl. thus the monthly wages of the cavalry amounts to $3x^3$ Fl., but of the foot-soldiers $10x^3$ Fl. thus altogether that amounts to $13x^3$ Fl. thus that must be equal to the number 13000 : thus since $13x^3 = 13000$ hence giving $x^3 = 1000$ and $x = 10$.

Thus so many is the number of captains.

155.

IV. Question: Some merchants form a company, and each advances 100 times as much as there are of them, from that sending a factor to Venice, who gains for each 100 Fl. twice as many Fl. as there are of them, comes back again, and the profits amount to 2662 Fl. How many merchants are there ?

Let there be x merchants, thus each had advanced $100x$ Fl. and the whole capital was $100xx$ Fl. Now since with 100 Fl., $2x$ Fl. is the profit, thus the profit is $2x^3$, which must be equal to 2662 : thus $2x^3 = 2662$, therefore $x^3 = 1331$ and consequently $x = 11$, as many as the number of merchants.

156.

V. Question: A farmer's wife exchanges cheeses for chickens, she gives 2 cheeses for 3 chickens; the chickens lay eggs, each giving $\frac{1}{3}$ rd as many eggs as there are chickens, with these she goes off to the market, and gives 9 eggs for just as many pennies as a chicken had laid, she gets 72 pennies: how many cheeses did the farmer's wife exchange ?

Let the number of cheeses be x, so that the same will be exchanged for $\frac{3}{2}x$ chickens ; now since a chicken lays $\frac{1}{2}x$ eggs, thus the number of all the eggs is $\frac{3}{4}xx$. Now 9 eggs are sold for $\frac{1}{2}x$ pence, thus the total obtained is $\frac{1}{24}x^3$, that must be equal to 72 : thus $\frac{1}{24}x^3 = 72$, consequently $x^3 = 24\cdot 72 = 8\cdot 3\cdot 8\cdot 9$ or $x^3 = 8\cdot 8\cdot 27$ consequently $x = 12$, and the farmer's wife had just as many cheeses, which she exchanged for 18 chickens.

CHAPTER 11

ON THE SOLUTION OF COMPLETE CUBIC EQUATIONS

157.

A cubic equation is called complete, if the cube of the unknown number, as well as the unknown number itself and its square arise, therefore the general form of such equations is :

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

namely if all the terms have been brought to one side. As now the value for x from such an equation, which also can called the root of the equation to be found, shall be found in this chapter ; then one can set down here from before, that such an equation always has three roots, as this has been shown already in the above chapter from the pure equation of this order.

158.

We will consider this equation initially:

$$x^3-6xx+11x-6=0,$$

and since a quadratic equation can be seen as a product of two factors, thus this cubic equation can be seen as a product from three factors, which in this case are :

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

as which the above equation is forthcoming by multiplication. Then $(x-1)\cdot(x-2)$ gives $xx-3x+2$, and this yet multiplied by $x-3$ gives $x^3-6xx-11x-6$ which is the above form, thus it shall be $=0$. This therefore happens, if this product $(x-1)(x-2)(x-3)$ were zero, which occurs if any one of the three factors were $=0$, and thus in three cases, firstly if $x-1=0$ or $x=1$, secondly if $x-2=0$ or $x=2$, and thirdly if $x-3=0$ or $x=3$.

It can be seen also, that if any other number were put in place for *x*, neither of these three factors would be 0, and thus also neither would the product. Therefore neither does our equation have any other roots than these 3.

159.

The three factors in any other case can be assigned to any such equation, thus the three roots themselves are had. To this end we will consider three such factors of a general kind, which shall be $x-p,\ x-q,\ x-r$; therefore their product is sought, and since the first multiplied by the second gives

$$xx-(p+q)x+pq,$$

thus this product again multiplied by $x-r$ gives the following formula

$$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-\ pqr.$$

Now should this formula be equal to 0, thus this happens in three cases ;
firstly if $x-p=0$ or $x=p$, secondly if $x-q=0$ or $x=q$ and thirdly if $x-r=0$ or $x=r$.

160.

Now let the equation be expressed in the following way

$$x^3 - axx + bx - c = 0,$$

and if the roots themselves shall be :

$$\text{I.) } x = p,\ \text{II.) } x = q,\ \text{III.) } x = r,$$

thus in the first place there must be $a = p + q + r$, and then secondly $b = pq + pr + qr$ and thirdly $c = pqr$, from which we see, that the second term contains the sum of the three roots, the third term the sum of the products of each two roots and finally the last term the product of all the roots multiplied by each other.

This last property thus equally provides us with this important benefit, certainly that a cubic equation can have no rational roots, as such, by which the last term itself can be divided : since then the same is the product of all three roots, thus it must be allowed to be divided by each of the same. It is equally known from that, if one can only guess a root, which numbers can be used to test.

To illustrate this we will consider this equation $x^3 = x + 6$, or $x^3 - x - 6 = 0$. Now since the same can have no other rational roots, as such, than the last term 6 can itself be divided, thus it is necessary for trials to use these numbers 1, 2, 3, 6, which trials can be set out thus:

I.)	if $x = 1$	thus giving	$1 - 1 - 6 = -6.$
II.)	if $x = 2$	"	$8 - 2 - 6 = 0.$
III.)	if $x = 3$	"	$27 - 3 - 6 = 18.$
IV.)	if $x = 6$	"	$216 - 6 - 6 = 204.$

[No mention is made of using the same trial numbers with opposite signs.]
From this we see, that $x = 2$ is a root of the above equation, from which it is now easy to find the two remaining roots. Then since $x = 2$ is a root, thus $x = 2$ is a factor of the equation, thus one must search for the other two only, which is done by the following division

$$
\begin{array}{l}
x-2)x^3-x-6(xx+2x+3 \\
\underline{x^3-2xx\qquad\qquad} \\
\qquad 2xx-\ x-6 \\
\qquad \underline{2xx-4x\qquad} \\
\qquad\qquad 3x-6 \\
\qquad\qquad \underline{3x-6\quad} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Since now our formula is presented by this product:

$$(x-2)(xx+2x+3)$$

thus the same will be 0, not only if $x-2=0$, but also if

$$xx+2x+3=0.$$

Moreover from this we obtain $xx=-2x-3$ and therefore $x=-1\pm\sqrt{-2}$,
which are the two other roots of our equation, which as can be seen are impossible or imaginary.

161.

But this occurs only if the first term of the equation x^3 shall be multiplied by 1 and the remaining terms are multiplied by whole numbers. But if fractions occur within the equation, thus the middle of the equation has to be changed into another, which is to be freed from fractions, so that then the above trial can be used.
Then if this equation shall be given $x^3-3xx+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0;$ because here a quarter occurs, thus setting $x=\frac{y}{2}$, there one finds

$$\frac{y^3}{8}-\frac{3yy}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0,$$

which multiplied by 8 gives $y^3-6yy+11y-6=0$, from which the roots are as we have found $y=1,\ y=2,\ y=3$, therefore our equation becomes :

$$\text{I.) } x=\tfrac{1}{2},\ \text{II.) } x=1,\ \text{III.) } x=\tfrac{3}{2}.$$

162.

Now if the first term is multiplied by a number, but the last is 1, such as in this equation $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0,$ from which divided by 6 this arises $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0,$ which can be freed from fractions after the above rule, in which one puts $x = \frac{y}{6}$; then there is obtained $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0,$ and this multiplied by 216 becomes

$$y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0\,.$$

Here would be troublesome to represent the trials with all the divisors of the number 36 ; but because in our first equation the last term is 1, thus putting $x = \frac{1}{z}$ so becoming $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ which multiplied by z^3 gives $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ and all the terms are taken to the other side $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$, the roots of which are $z = 1,\ z = 2,\ z = 3;$ therefore we have for our equation $x = 1,\ x = \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{3}$.

163.

One knows from above, that if all the roots shall be positive numbers, then in the equation the *plus* and *minus* signs must alternate, also that the equation adopts such a form: $x^3 - axx + bx - c = 0$, where three changes of sign occur, namely just as many as the positive roots present. But if all three roots were negative and these three factors $x + p,\ x + q,\ x + r$ were multiplied by each other, then all the terms would have a *plus* sign, and the equation assumes this form $x^3 + axx + bx + c = 0$, where the same signs follow each other three times, that is, that is there are just as many negative roots.

From this the rule now can be extracted, that as often as the signs alternate, the equation has just as many positive roots, but as often as equal signs follow each other, the equation has just as many negative roots. Everything noted here is of the greatest importance, for from that the divisors of the last term can be known, whether they should be taken positive or negative.

164.

In order to illustrate this by an example, thus we will consider the following equation:

$$x^3 + xx - 34x + 56 = 0,$$

in which two changes of the signs occur and only one succession of the signs occurs, from which we conclude that the equation has two positive roots and one negative root, which must be the divisors of the last term 56 and thus must be realized among these numbers ± 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56.

Now putting $x = 2$ thus $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, from which we see that $x = 2$ is a positive root, and thus $x - 2$ is a divisor of our equation, from which both the remaining roots can be found easily, if the equation is divided by $x - 2$ as follows :

$$
\begin{array}{lll}
x-2) & x^3+xx-34x+56 & (xx+3x-28 \\
 & \underline{x^3-2xx\qquad\qquad} & \\
 & \quad 3xx-34x+56 & \\
 & \quad \underline{3xx-6x\qquad} & \\
 & \qquad -28x+56 & \\
 & \qquad \underline{-28x+56} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Thus setting the quotient $xx+3x-28=0$ from that the two remaining roots are found, which will be $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, therefore the two remaining roots are $x=4$ and $x=-7$ to which the above root $x=2$ is taken.

From which it is clear that actually there are two positive roots and only one negative root ; this we will illustrate further through the following examples.

165.

I. Question: There are two numbers, their difference is 12, if their product is multiplied by their sum, thus there comes about 14560, what numbers are these?

The smaller shall be x thus the larger shall be $x+12$, their product is $xx+12x$ thus multiplied by their sum $2x+12$ gives $2x^3+36xx+144x=14560$ and divided by 2 becomes $x^3+18xx+72x=7280$.

Now the last term 7280 is far too large so that the trials with all their divisors can be used, but the same is divisible by, thus we put $x=2y$ since then there comes about : $8y^3+72yy+144y=7280$ which equation divided by 8 becomes $y^3+9yy+18y=910$, and now one must only test the divisors of the number 910, which are 1, 2, 5, 7, 10, 13 etc. , but now the first 1, 2, 5 clearly to be too small, but taking $y=7$ thus there occurs $343+441+126=910$; thus one root is $y=7$, consequently x = 14; it is still required to find the other two remaining roots of y, thus $y^3+9yy+18y=910$ is divided by $y-7$ as follows :

$$
\begin{array}{lll}
y-7) & y^3+9yy+\ \ 18y-910 & (yy+16y+130 \\
 & \underline{y^3-7yy\qquad\qquad} & \\
 & \quad 16yy+\ \ 18y-910 & \\
 & \quad \underline{16yy-112y\quad} & \\
 & \qquad\quad 130y-910 & \\
 & \qquad\quad \underline{130y-910} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Now putting this quotient $yy+16y+130=0$, thus finding $yy=16y-130$ and from that $y=-8+\sqrt{-66}$, and thus the two other roots are impossible.

Answer: therefore the two numbers sought are 14 und 26, whose product 364 multiplied by its sum 40 gives 14560.

166.

II. Question: Find two numbers whose difference is 18, if the difference of their cubes is multiplied by the sum of their cubes, from which there arises 275184, which numbers shall these be ?

Let the smaller number be *x,* thus the larger is $x+18$, moreover the cube of the smaller shall be x^3 and the cube of the larger $=x^3+54xx+972x+5832$, thus the difference of the same shall be $54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$ which must be multiplied by the sum of the numbers $2x+18=2(x+9)$; moreover that product is $108\left(x^3+27xx+270x+972\right)=275184;$ dividing by 108 thus comes about $x^3+27xx+270x+972=2548$ or $x^3+27xx+270x=1576$. The divisors of the number 1576 are 1, 2, 4, 8 etc. where 1 and 2 are too small, but 4 for *x* suffices to accomplish this equation; should the remaining roots be required to be found, thus the equation must be divided by $x-4$ as follows:

$$
\begin{array}{l}
x-4)\ x^3+27xx+270x-1576\ (xx+31x+394 \\
\qquad\quad \underline{x^3-\ \ 4xx\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 31xx+270x \\
\qquad\qquad\quad \underline{31xx-124x\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 394x-1576 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{394x-1576} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}
$$

Therefore from the quotient there is obtained $xx=-31x-394$ and from that $x=\ -\frac{31}{2}\pm\ \sqrt{\left(\frac{961}{4}-\frac{1576}{4}\right)}$ which two roots are imaginary or impossible.

Answer: thus the two numbers sought are 4 and 22.

167.

III. Question: Find two numbers whose difference is 720 ; so that if the square root of the greater number is multiplied by the smaller number then there arises 20736. Which numbers are they ?

Let the smaller be $=x$ thus the greater is $x+720$ and there shall be

$$x\sqrt{(x+720)}=20736=8\cdot 8\cdot 4\cdot 81.$$

Now taking the square of both sides thus becoming

$$xx(x+720)=x^3+720xx=8^2\cdot 8^2\cdot 4^2\cdot 81^2$$

putting $x=8y$, thus there shall be $8^3y^3+720\cdot 8^2y^2=8^2\cdot 8^2\cdot 4^2\cdot 81^2$, divide by 8^3 becomes $y^3+90y^2=8\cdot 4^2\cdot 81^2$; now there shall be $y=2z$, thus $8z^3+4\cdot 90zz=8\cdot 4^2\cdot 81^2$, divide by 8 and $z^3+45zz=4^2\cdot 81^2$. Further putting $z=9u$, thus $9^3u^3+45\cdot 9^2uu=4^2\cdot 9^4$, dividing by 93 gives $u^3+5uu=4^2\cdot 9$ or $uu(u+5)=16\cdot 9=144$. Here on sees at once, that $u=4$: then since there will be $uu=16$ and $u+5=9$*;* since now $u=4$ thus $z=36$, $y=72$ and $x=576$, which was the smaller number, but the larger is 1296, from which the square root 36 multiplied by the smaller number 576 gives 20736.

168.

Note: This question can be solved more conveniently in the following form: because the greater number must be a square as otherwise its root multiplied by a smaller number cannot produce the previous number, thus so that *xx* is the greater number, and thus the smaller is $xx-720$ which by that square root *x*, by which it is multiplied, gives $x^3-720x=20736=64\cdot 27\cdot 12$; putting $x=4y$ thus $64y^3-720\cdot 4y=64\cdot 27\cdot 12$, dividing by 64 there becomes $y^3-45y=27\cdot 12$; further putting $y=3z$, thus $27z^3-135z=27\cdot 12$, dividing by 27, $z^3-5z=12$ or $z^3-5z-12=0$.
The divisors of 12 are 1, 2, 3, 4, 6, 12, of which 1 and 2 are too small, but on putting $z=3$ thus there occurs $27-15-12=0$; therefore $z=3, y=9$ and $x=36$; therefore the greater number is $xx=1296$ and the smaller number $xx-720=576$ as above.

169.

IV. Question: There are two numbers 2, whose difference is 12. So now multiplying this difference by the sum of their cubes, thus 102144 arises: what are the numbers?

Let the smaller be *x* so that the larger is $x+12$, the cube of the first is x^3, but of the second it is $x^3+36xx+432x+1728$, the sum of the same multiplied by 12 gives

$$12\left(2x^3+36xx+432x+1728\right)=102144\,;$$

divided by 12 becomes $2x^3+36xx+432x+1728=8512$, again divided by 2 gives $x^3+18xx+216x+864=4256$ or $x^3+18xx+216x=3392=8\cdot 8\cdot 53$. Putting $x=2y$ and dividing at once by 8 thus there becomes $y^3+9yy+54y=8\cdot 53=424$.

The divisors of the last term are 1, 2, 4, 8, 53, etc. of which 1 and 2 are too small; however putting $y=4$ there comes about $64+144+216=424$. Thus $y=4$ and $x=8$; therefore the two numbers are 8 and 20.

170.

V. Question: Some merchants form a company, to which each advances ten times as many Florins. as there are people in the company, gaining for each 100 Fl., 6 Fl. more than there are of them. Now it is found that the whole profit itself amounts to 392 Fl, how many members were there?
Putting *x* to the number of members, thus each one advances 10*x* Fl., but altogether they advance 10*xx* Fl. and each gains for 100 Fl., 6 Fl. more than there are partners; thus for 100 Fl. the gain shall be $x+6$ Fl. and with the whole capital the gains shall be $\left[\frac{x+6}{100}\times 10x^2\right]=\frac{x^3+6xx}{10}=392$. Multiplying by 10 becoming $x^3+6xx=3920$. Now putting $x=2y$,thus we have $8y^3+24yy=3920$, which divided by 8 gives $y^3+3yy=490$. The divisors of the last term are 1, 2, 5, 7, 10, etc. for which 1, 2 and 5 are too small. However on putting $y=7$ thus there becomes $343+147=490$, so that $y=7$ and $x=14$.

Answer: There were 14 partners, and each one had advanced 140 Fl.

171.

VI. Question: Some businessmen have put together a common capital of 8240 Rthl. to that each one contributes further 40 times that many Rthl. as there shall be partners. With this whole sum the profit shall be as many percent as the number of partners shall be; thereupon they divide the winnings and then it is found that, after each has taken ten times as much as there were partners, there still remains 224. How many partners were there?
The number of partners shall be $=x$, so that each one advances 40*x* Rthl. more to the capital of 8240 Rthl. thus altogether to advance to that 40*xx* Rthl., so that the whole sum was equal to $40xx+8240$, with this profit itself being *x* per cent Rthl. therefore the whole profit is : $\frac{40x^3}{100}+\ \frac{8240x}{100}=\frac{4}{10}x^3+\frac{824}{10}x=\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x.$ From this each one takes 10*x* Rthl. and thus altogether 10*xx* Rthl. and that still leaves 224 Rthl. remaining, from which it is clear that the profit was : $10xx+224$ from which this equation comes about $\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x=10xx+224$ which multiplied by 5 and divided by 2 becomes

$$x^3+206x=25xx+560 \text{ or } x^3-25xx+206x-560=0.$$

But in order to prove that the first form is more convenient; since now the divisors of the last term are : 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, etc. which must be taken positive, because in the last equation three changes of sign occur, from which it can be concluded, that all three roots are positive. Now testing with $x=1$ or $x=2$ thus it is evident, that the first fraction as well as the second are too small. We will test with the following : if $x=4$, thus there will be $64+824=400+560$ which do not meet ; if $x=5$, thus $125+1030=625+560$ still does not agree ; if $x=7$, thus $343+1442=1225+560$ do agree: therefore $x=7$ is a root of our equation. In order to find the two other roots, thus the last form is divided by $x-7$ as follows :

$$\begin{array}{l} x-7)\; x^3-25xx+206x-560 \;\; (xx-18x+80 \\ \quad\quad \underline{x^3 \;-\; 7xx \quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad\quad\quad -18xx+206x \\ \quad\quad\quad \underline{-18xx+126x\quad} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 80x-560 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{80x-560} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Thus setting the quotient equal to 0, thus we have

$$xx-18x+80=0 \text{ or } xx=18x-80$$

therefore $x=9+1$, thus the two other roots are $x=8$ and $x=10$.

Answer: from this question thus three answers arise: after the first the number of merchants was 7, after the second 8, after the third 10, as from all the trials shown attached here

	I.	II.	III.
The number of merchants	7	8	10
Each advances $40x$	280	320	400
thus together they advance $40xx$	1960	2560	4000
the greater capital was	8240	8240	8240
the whole capital is $40xx+8240$	10200	10800	12240
from the same the earnings will be as much percent as the number of partners	714	864	1224
from which each takes away $10x$	70	80	100
thus altogether $10xx$	490	640	1000
thus there remains	224	224	224

CHAPTER 12

OF CARDAN'S RULE, OR OF SCIPIONI FERRO.

172.

If a cubic equation applies to whole numbers, as has been observed above, and no divisor of the last term is a root of the equation, thus this is a certain indication, that the equation has no roots consisting of whole numbers, nor does such an equation find a place in terms of fractions, which is indicated thus:

It shall be the equation $ax^3 - axx + bx - c = 0$ where *a, b* and *c* are whole numbers, then for example, there may be put $x = \frac{3}{2}$ thus becoming $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, now here the first term only has 8 for the denominator. The remaining terms are divided by 4 and 2 or are whole numbers, which thus with the first cannot become 0, and this is true also for all other fractions.

173.

Now since in this case the roots of the equation are neither whole numbers nor fractions, thus the same are irrational and often to be imaginary as well. How the same shall be expressed and what kind of root sign arises, is a matter of the greatest importance, the discovery of which had been written about some hundreds of years ago [Cardan's 10th volume of his collected works, devoted to cubic equations, appeared in 1545] by Cardan or much more than had been written by Scipioni Ferro, which therefore deserves to be explained here with all diligence.

174.

To this end, we must now regard with serious deliberation the nature of a cubic, whose root is a binomial :

Therefore the root shall be $a+b$, so that its cube is $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ which in the first place consists of the cube of each part, and also the same contains as well the two middle terms, namely $3aab + 3abb$, which both have the factor $3ab$, and the other factor is $a+b$. Then $3ab$ multiplied by $a+b$ gives $3aab + 3abb$. These two terms thus contain three times the product of both parts *a* and *b* multiplied by their sum.

175.

Now putting $x = a+b$ and taking the cubes of both sides, thus $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Now since $a+b = x$, thus we have this cubic equation $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$ or $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$ from which we know, that $x = a+b$ is a root. Thus such an equation often arises that we can assign a root to that.

For example, let $a = 2$ and $b = 3$ thus this equation arises $x^3 = 18x + 35$ from which we know, that $x = 5$ is a root.

176.

Now further on putting $a^3 = p$ and $b^3 = q$, thus there becomes $a = \sqrt[3]{p}$ and $b = \sqrt[3]{q}$, consequently $ab = \sqrt[3]{pq}$; therefore if this equation arises,

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$$

thus a root of that is $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

But p and q can always be determined in such a way, that both $\sqrt[3]{pq}$ as well as $p+q$ will be equal to a single given number, which can be put in place to resolve each cubic equation of this kind.

177.

Therefore this general cubic equation can be given $x^3 = fx + g$.
Thus here f must be compared with $3\sqrt[3]{pq}$, and g with $p+q$; or p and q must be determined thus, so that $3\sqrt[3]{pq}$ is equal to the number f, and $p+q$ is equal to the number g, and as then we know, that $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ is then a root of our equation.

178.

Thus we have these two equations to be solved :

$$\text{I.) } 3\sqrt[3]{pq} = f \quad \text{and II.) } p + q = g.$$

From the first we have $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ and $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ and $4pq = \frac{4}{27}f^3$; the other equation is to be squared, thus becoming $pp + 2pq + qq = gg$; from that we subtract $4pq = \frac{4}{27}f^3$, thus $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$, from which the square root taken gives $p - q = \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$. Now since $p + q = g$, thus there becomes $2p = g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ and $2q = g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$, therefore we obtain

$$p = \frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2} \text{ and } q = \frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}.$$

179.

Thus if such a cubic equation arises $x^3 = fx + g$, however the numbers f and g may be obtained, thus a root of the same is always :

$$x = \sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}$$

from which it is evident that this irrationality contains not only the square root sign, but also the cube root sign summarized thus, and this formula is accustomed to be called Cardan's Rule.

180.

We will illustrate this by some examples.
Let $x^3 = 6x + 9$ thus here $f = 6$ and $g = 9$, also $gg = 81$, $f^3 = 216$ and $\frac{4}{27}f^3 = 32$.
Therefore $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$ and $\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)} = 7$; a root of the given equation is $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, that is $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ or $x = 2 + 1 = 3$. Thus $x = 3$ is a root of the given equation.

181.

Further, let this equation be given $x^3 = 3x + 2$, thus $f = 3$ and $g = 2$, also $gg = 4$, $f^3 = 27$ and $\frac{4}{27}f^3 = 4$; consequently the square root of $gg - \frac{4}{27}f^3 = 0$; therefore a root shall be $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

182.

But if equally such an equation has a rational root, thus it still often happens that the same cannot be found by this rule although it is equally contained within.

Let this equation be given $x^3 = 6x + 40$, where $x = 4$ is a root.
Now here there is $f = 6$ and $g = 40$ further $gg = 1600$ and $\frac{4}{27}f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ und $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4\cdot 4\cdot 49\cdot 2} = 28\sqrt{2}$; consequently one root is
$x = \sqrt[3]{\frac{40+28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40-28\sqrt{2}}{2}}$ or $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
which formula is actually 4, without such being evident to be equal.

Since the cube of $2+\sqrt{2}$ is $20+14\sqrt{2}$, thus on inverting the cube root of $20+14\sqrt{2}$ is equal to $2+\sqrt{2}$, and just as also $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2},$ from which our root is $x=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

183.

It can be objected to this rule, that the same does not apply to all cubic equations, because within these the square of *x* does not arise, or because in these the second term is missing. But it is to be observed, that such a complete equation always can be changed into another, in which the second term is missing, and to which consequently this rule can be applied. In order to show this, thus let this complete cubic equation be given $x^3-6xx+11x-6=0$. Since now the third part of the number 6 is taken and on setting $x-2=y$ it is turned into another equation *;* thus there will be $x=y+2$, and the rest of the calculation will be as follows :

since $x=y+2,\ \ xx=yy+4y+4$ and $x^3=y^3+6yy+12y+8$, thus there shall be

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3+6yy+12y+\ \ 8 \\ -6xx = & \qquad -6yy-24y-24 \\ +11x = & \qquad\qquad\quad +11y+22 \\ -6 = & \qquad\qquad\qquad\qquad -6 \\ \hline 6x^3-6xx+11x-6 & = y^3-y. \end{array}$$

Therefore we have this equation $y^3-y=0$, the solution of which is apparent at once : as then we have the factors

$$y(yy-1)=y(y+1)\left(y-1\right)=0;$$

now each factor is put equal to 0 thus becoming :

$$\text{I.}\begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases}\ \text{II.}\begin{cases} y=-1, \\ x=\ \ 1, \end{cases}\ \text{III.}\begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

which are the three roots found above already [§ 158].

184.

Now let the general cubic equation be given:

$$x^3+axx+bx+c=0\,,$$

the second term of which must be taken away.

To this end, one takes a third of the coefficient of the second term with its sign and adds it to *x* and writes for that a new symbol, for example, *y*, and we will have the following rule $x+\frac{1}{3}a=y$ and thus $x=y-\frac{1}{3}a$, from which the following calculation arises :

$$x=y-\tfrac{1}{3}a,\ xx=yy-\tfrac{2}{3}ay+\tfrac{1}{9}aa \text{ further } x^3=y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3; \text{thus}$$

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3 \\ axx = & \quad +ayy-\tfrac{2}{3}aay+\tfrac{1}{9}a^3 \\ bx = & \qquad\qquad by-\tfrac{1}{3}ab \\ c = & \qquad\qquad\quad +c \\ \hline \end{array}$$

$$y^3-\left(\tfrac{1}{3}aa-b\right)y+\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c=0,$$

in which the second term is missing.

185.

Now this rule can be applied easily to the case of Cardan's rule.
Then since we had the above equation $x^3=fx+g$ or $x^3-fx-g=0$, thus in our case $f=\frac{1}{3}aa-b$, and $g=-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{3}ab-c$. From which, for the letters *f* and *g* as found above, we obtain the values:

$$y=\sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}$$

and as such a form was found for *y*, thus we have for the given equation

$$x=y-\tfrac{1}{3}a.$$

186.

With the aid of this transformation we are now in a position to find the roots of all cubic equations, which we will show by the following examples. Therefore let the following equation be given :

$$x^3-6xx+13x-12=0.$$

Since here the second term is taken away, thus by putting $x-2=y$, thus there becomes: $x=y+2,\ xx=yy+4y+4$, further $x^3=y^3+6yy+12y+8$, thus

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3+6yy+12y+\ \ 8 \\ -6xx = & \quad\ -6yy-24y-24 \\ +13x = & \qquad\qquad +\ 13y+26 \\ 12 = & \qquad\qquad\qquad -12 \\ \hline & y^3+y-2=0 \end{array}$$

or $y^3=-y+2$, which compared with the formula $x^3=fx+g$ gives $f=-1$, $g=2$; thus $gg=4$, and $\frac{4}{27}f^3=-\frac{4}{27}$. Thus $gg-\frac{4}{27}f^3=4+\frac{4}{27}=\frac{112}{27}=4$; therefore we obtain $\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}=\sqrt{\frac{112}{27}}=\frac{4\sqrt{21}}{9}$ from which it follows:

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{2+\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{2-\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} \text{ or}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(1+\tfrac{2\sqrt{21}}{9}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\tfrac{2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ or } y=\sqrt[3]{\left(\tfrac{9+2\sqrt{21}}{9}\right)}+\sqrt[3]{\left(\tfrac{9-2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ or}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(\tfrac{27+6\sqrt{21}}{27}\right)}+\sqrt[3]{\left(\tfrac{27-6\sqrt{21}}{27}\right)}, \text{ or } y=\tfrac{1}{3}\left(27+6\sqrt{21}\right)+\tfrac{1}{3}\left(27-6\sqrt{21}\right);$$

and from that we have $x=y+2$.

187.

In the solution of these equations we have met a double irrationality, equally one must not conclude from that, that the root becomes harder with irrational things, in that it can show a more fortunate way, in that the binomials $27\pm6\sqrt{21}$ are actually cubes. This arises here, since then the cube of $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, as we have the equation $\frac{216+48\sqrt{21}}{8}=27+6\sqrt{21}$, thus the cube root of $27+6\sqrt{21}$ is equal to $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, and the cube root of $27-6\sqrt{21}$ equals $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. From this too the above value for y to be $y=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Now as $y=1$ thus we obtain $x=3$, which is a root of the given equation. In order to find the other roots, the equation must be divided by $x-3$, as follows:

$$
\begin{array}{lll}
x-3) & x^3-6xx+13x-12 & (xx-3x+4 \\
 & \underline{x^3-3xx} & \\
 & \quad -3xx+13x & \\
 & \quad \underline{-3xx+\ 9x} & \\
 & \qquad\quad +4x-12 & \\
 & \qquad\quad \underline{+4x-12} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

and this quotient arises $xx-3x+4=0$, thus so that $xx=3x-4$ and $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right)}=3\pm\sqrt{-\frac{7}{4}}$ that is $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right)}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$. These are the two other roots, both of which are imaginary.

188.

But it was sheer luck that the cube root could actually be taken from the binomial, which only happens in these cases, where the equation has a rational root, which therefore can be found far easier following the rules of the above chapters, as the same also can be found in no other way in a shorter way than by the method expressed according to Cardan's rule, as for example in this equation arising $x^3=6x+4$, where $f=6$ and $g=4$. Therefore there is found

$$x=\sqrt[3]{\left(2+2\sqrt{-1}\right)}+\sqrt[3]{\left(2-2\sqrt{-1}\right)},$$

which cannot be expressed otherwise.

[From de Moivre's theorem, we see that in this case the root is real.]

CAPITEL 10

VON DER AUFlÖSUNG DER REINEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

144.

Eine reine Cubische Gleichung wird genennt wann der Cubus der unbekanten Zahl einer bekanten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekanten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt.

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbahr, indem man nur nöthig hat beyderseits die Cubic Wurzel auszuziehen. Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Wann man dahero nur gelernet hat die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solcher Gestalt erhält man aber nur einen Werth für x, da nun eine jegliche Quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine Cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müße, dahero wird es der Muhe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, dieselben auch ausfündig zu machen.

147.

Wir wollen z. E. diese Gleichung betrachten $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 sey, da nun eine solche Zahl ahnstreitig $x = 2$ ist, so muß nach dem vorigen Capitul die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen laßen; wir wollen also diese Theilung verrichten wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3-8 \quad (xx+2x+4 \\
\quad\ \underline{x^3-2xx} \\
\qquad\quad 2xx-8 \\
\qquad\quad \underline{2xx-4x} \\
\qquad\qquad\quad 4x-8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x-8} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3-8=0$ durch diese Factores vorstellen

$$(x-2)(xx+2x+4)=0.$$

148.

Da nun die Frage ist was für eine Zahl für *x* angenommen werden müße, daß $x^3=8$ werde, oder daß $x^3-8=0$ werde, so ist klar, daß dieses geschehe, wann das gefundene Product gleich 0 werde; dasselbe wird aber 0, nicht nur wann der erste Factor $x-2=0$ wird, woraus entspringt $x=2$, sondern auch, wann der andere Factor $xx+2x+4=0$ werde. Man setze also $xx+2x+4=0$, so hat man $xx=-2x-4$ und dahero wird $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

149.

Außer dem Fall also $x=2$ in welchem die Gleichung $x^3=8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey andere Werthe für *x*, deren Cubi ebenfals 8 sind, und welche also beschaffen sind:

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$ und II.) $x=-1-\sqrt{-3}$

welches außer Zweifel gesetzt wird, wann man die Cubi davon nimmt, wie folget:

$$
\begin{array}{rcr}
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
-1-\sqrt{-3} & & 1+\sqrt{-3} \\
\underline{\quad -\sqrt{-3}-3} & & \underline{\quad +\sqrt{-3}-3} \\
-2-2\sqrt{-3} & \text{Quadrat} & -2+2\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\ \sqrt{-3}} & & \underline{-1-\ \sqrt{-3}} \\
2+2\sqrt{-3} & & 2-2\sqrt{-3} \\
\underline{\quad -2\sqrt{-3}+6} & & \underline{\quad +2\sqrt{-3}+6} \\
8 & \text{Cubus} & 8
\end{array}
$$

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger bemercket zu werden.

150.

Dieses findet auch insgemein statt für eine jegliche dergleiche Cubische Gleichung $x^3 = a$, wo außer dem Werth $x = \sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfals statt finden. Man setze um der Kürtze willen $\sqrt[3]{a} = c$ also daß $a = c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme, $x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$\begin{array}{l} x-c)\ x^3 - c^3 \quad (xx+cx+cc \\ \underline{x^3 - cxx} \\ \quad cxx - c^3 \\ \quad \underline{cxx - ccx} \\ \qquad ccx - c^3 \\ \qquad \underline{ccx - c^3} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

dahero wird unsere Gleichung durch dieses Product vorgestellt

$$(x-c)(xx+cx+cc) = 0,$$

welches würcklich gleich 0 wird, nicht nur wann $x - c = 0$ oder $x = c$, sondern auch wann $xx + cx + cc = 0$, daraus aber wird $xx = -cx - cc$ und dahero

$$x = -\tfrac{c}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{cc}{4} - cc)}, \text{ oder } x = \tfrac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2},$$

das ist

$$x = \tfrac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c,$$

in welcher Formel noch zwey Werthe für *x* enthalten sind.

151.

Da nun *c* anstatt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir daher diesen Schluß, daß von einer jeden Cubischen Gleichung von dieser Form $x^3 = a$ dreyerley Werthe für *x* gefunden werden können, welche also ausgedrückt werden:

$$\text{I.) I.) } x = \sqrt[3]{a}, \quad \text{II.) } x = \tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a} \quad \text{III.) } x = \tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a},$$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubic-Wurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich, die beyden andern aber unmöglich sind, welches deswegen hier wohl zu bemercken, weil wir schon oben gesehen, daß eine jede Quadratische zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grad vier verschiedene Werthe, vom fünften Grad fünf dergleichen und so weiter habe.

Bey gemeinen Rechnungen, wird zwar nur der erste von diesen 3 Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

152.

I. Frage: Suche eine Zahl, daß derselben Quadrat mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt 432 hervorbringe?

Diese Zahl sey *x*, so muß *xx* mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt der Zahl 432 gleich werden: dahero wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$ mit 4 multiplicirt wird $x^3 = 1728$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 12 dann ihr Quadrat ist 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153.

II. Frage: Suche eine Zahl, deren vierte Potestät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde?

Die Zahl sey *x*, so ist ihre vierte Potestät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, giebt $2x^3$, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt soll 100 machen; also hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $x^3 = \frac{343}{8}$, durch 2 dividirt, und die Cubic-Wurzel ausgezogen erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Frage: Einige Hauptleute liegen zu Felde, jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter, und 20 mal so viel Fußgänger als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monaths-Sold gleich so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als der Hauptleute sind, und beträgt der monathliche Sold in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen?

Es seyen *x* Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich gehabt 3*x* Reuter und 20*x* Fußgänger. Also die Zahl aller Reuter war 3*xx* und der Fußgänger 20*xx*. Da nun ein Reuter *x* Fl. bekommt, ein Fußknecht aber $\frac{1}{2}x$ Fl. so ist der monathliche Sold der Reuter

$3x^3$ Fl. der Fußknechte aber $10x^3$ Fl. insgesammt also bekommen sie $13x^3$ Fl. so der Zahl 13000 gleich seyn muß: da also $13x^3 = 13000$ so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$. So viel sind der Hauptleute gewesen.

155.

IV. Frage: Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100 mal so viel ein als ihrer sind, schicken damit einen Factoren nach Venedig, der gewinnt je mit 100 Fl. zweymal so viel Fl. als ihrer sind, kommt wieder zurück, und der Gewinst beträgt 2662 Fl. Ist die Frage wie viel der Kaufleute sind?

Es seyen x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt 100 x Fl. und das gantze Capital war 100 xx Fl. Da nun mit 100 Fl. $2x$ Fl. gewonnen worden, so war der Gewinst $2x^3$ so der Zahl 2662 gleich seyn soll: also $2x^3 = 2662$, dahero $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11$, so viel sind es Kaufleute gewesen.

156.

V. Frage: Eine Bäuerin vertauscht Käse gegen Hüner, giebt je 2 Käse für 3 Hüner: die Hüner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hüner sind, mit denselben geht sie auf den Marckt, giebt je 9 Eyer für so viel Pfennig als ein Huhn hat Eyer gelegt, löset 72 Pfennig: wie viel hat die Bäurin Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hüner vertauscht worden; da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}xx$. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}x$ Pf. also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}x^3$, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}x^3 = 72$ folglich $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$ oder $x^3 = 8 \cdot 8 \cdot 27$ folglich $x = 12$, und so viel Käse hat die Bäuerin gehabt, welche gegen 18 Hüner vertauscht worden.

CAPITEL 11

VON DER AUFlÖSUNG DER VOLLSTÄNDIGEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

157.

Eine vollständige Cubische Gleichung wird genennt, wann darinn außer dem Cubo der unbekanten Zahl, noch diese unbekante Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, dahero die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

wann nemlich alle Glieder auf eine Seite sind gebracht worden. Wie nun aus einer solchen Gleichung die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden; dann man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung, immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads ist gezeiget worden.

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten:

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

und da eine Quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese Cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

als welche mit einander muuiplicirt die obige Gleichung hervorbringen. Dann $(x-1)\cdot(x-2)$ giebt $xx-3x+2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt giebt $x^3-6xx-11x-6$ welches die obige Form ist, so $=0$ seyn soll. Dieses geschiehet demnach, wann dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ nichts wird, welches eintrifft wann nur einer von den drey Factoren $=0$ wird, und also in drey Fällen erstlich wann $x-1=0$ oder $x=1$, zweytens wann $x-2=0$ oder $x=2$, und drittens wann $x-3=0$ oder $x=3$.

Man sieht auch so gleich, daß wann für x eine jegliche andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Dahero unsere Gleichung keine andern Wurzeln hat als diese 3.

159.

Könnte man in einem jeglichen andern Fall die drey Factores einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man so gleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche seyn sollen $x-p,\ x-q,\ x-r$*;* man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt giebt so giebt

$$xx-(p+q)x+pq,$$

dieses Product noch mit $x-r$ multiplicirt folgende Formel

$$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr.$$

Soll nun diese Formel gleich 0 seyn , so geschieht dieses in drey Fällen; erstlich wann $x-p=0$ oder $x=p$, zweytens wann $x-q=0$ oder $x=q$ und drittens wann $x-r=0$ oder $x=r$.

160.

Es sey nun diese Gleichung folgender Gestalt ausgedrückt

$$x^3 - axx + bx - c = 0,$$

und wann die Wurzeln derselben sind

$$\text{I.) } x = p,\ \text{II.) } x = q,\ \text{III.) } x = r,$$

so muß seyn erstlich $a = p + q + r$, und hernach zweytens $b = pq + pr + qr$ und drittens $c = pqr$, woraus wir sehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln mit einander multiplicirt.

Diese letzte Eigenschaft verschaft uns so gleich diesen wichtigen Vortheil, daß eine Cubische Gleichung gewiß keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt: dann da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen laßen. Man weis dahero so gleich, wann man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anstellen soll.

Dieses zu erläutern wollen wir diese Gleichung betrachten $x^3 = x + 6$, oder $x^3 - x - 6 = 0$. Da nun dieselbe keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, dadurch sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit diesen Zahlen die Probe anzustellen 1, 2, 3, 6, welche Proben also zu stehen kommen:

$$\begin{aligned} &\text{I.) wann } x = 1 \text{ so kommt } && 1 - 1 - 6 = -6. \\ &\text{II.) wann } x = 2 \text{ so kommt } && 8 - 2 - 6 = 0. \\ &\text{III.) wann } x = 3 \text{ so kommt } && 27 - 3 - 6 = 18. \\ &\text{IV.) wann } x = 6 \text{ so kommt } && 216 - 6 - 6 = 204. \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Dann da $x = 2$ eine Wurzel ist, so ist $x = 2$ ein Factor der Gleichung, man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschiehet

$$
\begin{array}{l}
x-2)x^3-x-6(xx+2x+3 \\
\underline{x^3-2xx\qquad\qquad} \\
\quad 2xx-\ x-6 \\
\quad \underline{2xx-4x\qquad} \\
\qquad\quad 3x-6 \\
\qquad\quad \underline{3x-6\quad} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product vorgestellet wird

$$(x-2)(xx+2x+3)$$

so wird dieselbe 0, nicht nur wann $x-2=0$, sondern auch wann

$$xx+2x+3=0.$$

Hieraus aber bekommen wir $xx=-2x-3$ und daher $x=-1\pm\sqrt{-2}$,
welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die wie man sieht unmöglich oder imaginär sind.

161.

Dieses findet aber nur statt, wann das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wann aber darinn Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyt ist, da dann die vorige Probe kann angestellet werden.
Dann es sey diese Gleichung gegeben $x^3-3xx+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0;$ weil hier nun Viertel vorkommen, so setze man $x=\frac{y}{2}$, da bekommt man

$$\frac{y^3}{8}-\frac{3yy}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0,$$

welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3-6yy+11y-6=0$, wovon die Wurzeln sind wie wir oben gesehen $y=1,\ y=2,\ y=3$, dahero ist für unsere Gleichung

$$\text{I.) } x=\tfrac{1}{2},\ \text{II.) } x=1,\ \text{III.) } x=\tfrac{3}{2}.$$

162.

Wann nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, als wie in dieser Gleichung $6x^3-11xx+6x-1=0,$ woraus durch 6 dividirt diese entspringt

$x^3-\frac{11}{6}xx+x-\frac{1}{6}=0,$ welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden könnte, indem man setzt $x=\frac{y}{6}$; dann da erhält man $\frac{y^3}{216}-\frac{11yy}{216}+\frac{y}{6}-\frac{1}{6}=0,$ und diese mit 216 multiplicirt wird

$$y^3-11yy+36y-36=0.$$

Hier würde es mühsam seyn die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen; weil aber in unserer erstern Gleichung das letzte Glied 1 ist, so setze man $x=\frac{1}{z}$ so wird $6-11z+6z^2-z^3=0$ welche mit z^3 multiplicirt giebt $6-11z+6z^2-z^3=0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3-6z^2+11z-6=0$, deren Wurzeln sind $z=1,\ z=2, z=3;$ dahero wir für unsere Gleichung erhalten $x=1,\ x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{3}$.

163.

Aus dem obigen erkennt man, daß wann alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen *plus* und *minus* mit einander abwechseln müssen, allso daß die Gleichung eine solche Gestalt bekommt: $x^3-axx+bx-c=0$, wo drey Abwechselungen vorkommen, nemlich eben so viel als positive Wurzeln vorhanden. Wären aber alle drey Wurzeln negativ gewesen und man hätte diese drey Factores mit einander multiplicirt $x+p,\ x+q,\ x+r$ so würden alle Glieder das Zeichen *plus,* und die Gleichung diese Form bekommen haben $x^3+axx+bx+c=0$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe, welche Anmerckung allhier von großer Wichtigkeit ist, damit man wiße ob man die Theiler des letzten Glieds, damit man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.

164.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir diese Gleichung betrachten:

$$x^3+xx-34x+56=0,$$

in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schliessen daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler seyn müßen des letzten Glieds 56 und also unter diesen Zahlen ±1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 begriffen sind.

Setzt man nun $x=2$ so wird 8 4-68 +56= 0, woraus wir sehen daß $x=2$ eine Positive Wurzel, und also $x-2$ ein Theiler unserer Gleichung sey, woraus die beyden übrigen

Wurzeln leicht gefunden werden können, wann man nur die Gleichung durch $x-2$ theilet wie folget

$$\begin{array}{lll} x-2) & x^3+xx-34x+56 & (xx+3x-28 \\ & \underline{x^3-2xx} & \\ & \quad 3xx-34x+56 & \\ & \quad \underline{3xx-6x} & \\ & \qquad -28x+56 & \\ & \qquad \underline{-28x+56} & \\ & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Man setze also diesen Quotienten $xx+3x-28=0$ so wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche seyn werden $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, dahero die beyden übrigen Wurzeln sind $x=4$ und $x=-7$ wozu die obige $x=2$ zu nehmen.

Woraus erhellet daß würcklich zwey positive und nur eine negative Wurzel vorhanden; dieses wollen wir noch durch folgende Exempel erläutern.

165.

I. Frage: Es sind zwey Zahlen, ihre Differenz ist 12, wann man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, so kommen 14560, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere sey x so ist die größere $x+12$, ihr Product ist $xx+12x$ so mit ihrer Summe $2x+12$ multiplicirt giebt $2x^3+36xx+144x=14560$ durch 2 dividirt wird $x^3+18xx+72x=7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist als daß die Probe mit allen seinen Theilern könnte angestellet werden, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x=2y$ da dann kommt: $8y^3+72yy+144y=7280$ welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3+9yy+18y=910$, und jetzo darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 probiren welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13 etc. nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbahr zu klein, nimmt man aber $y=7$ so bekommt
man 343 + 441 + 126 just = 910; also ist eine Wurzel $y = 7$, folglich $x = 14$; will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wißen so dividire man
$y^3+9yy+18y=910$ durch y- 7 wie folget:

$$
\begin{array}{l}
y-7)\ y^3+9yy+\ 18y-910\ \ (yy+16y+130 \\
\qquad \underline{y^3-7yy\qquad\qquad} \\
\qquad\quad 16yy+\ 18y-910 \\
\qquad\quad \underline{16yy-112y\quad} \\
\qquad\qquad\quad 130y-910 \\
\qquad\qquad\quad \underline{130y-910} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Setzt man nun diesen Quotient $yy+16y+130=0$, so bekommt man $yy=16y-130$ und daher $y=-8+\sqrt{-66}$, also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort: die beyden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt giebt 14560.

166.

II. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 18, wann man die Differenz ihrer Cuborum mit der Summe der Zahlen multiplicirt, daß 275184 heraus komme, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey *x*, so ist die größere $x+18$, der Cubus der kleinem aber x^3 und der Cubus der größern $=x^3+54xx+972x+5832$, also die Differenz derselben $54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x+18=2(x+9)$ multiplicirt werden soll; das Product ist aber $108\left(x^3+27xx+270x+972\right)=275184;$ man dividire durch 108 so kommt $x^3+27xx+270x+972=2548$ oder $x^3+27xx+270x=1576$. Die Theiler der Zahl1576 sind 1, 2, 4, 8 etc. wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für *x* gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet; wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x-4$ theilen wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x-4)\ x^3+27xx+270x-1576\ (xx+31x+394 \\
\qquad \underline{x^3-\ \ 4xx\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad 31xx+270x \\
\qquad\quad \underline{31xx-124x\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 394x-1576 \\
\qquad\qquad\quad \underline{394x-1576} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Aus dem Quotienten erhält man dahero $xx=-31x-394$ und daraus wird

$x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$ welche beyde Wurzelm imaginär oder unmöglich sind.
Antwort: also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167.

III. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 720 ; so ich die Quadrat-Wurzel der größern Zahl multiplieire mit der kleinern Zahl so kommt 20736. Weiche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere $= x$ so ist die größere $x + 720$ und soll seyn

$$x\sqrt{(x+720)} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81.$$

Nun nehme man beyderseits die Quadrate so wird

$$xx(x+720) = x^3 + 720xx = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$$

man setze $x = 8y$, so wird $8^3 y^3 + 720 \cdot 8^2 y^2 = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, durch 8^3 dividirt wird $y^3 + 90y^2 = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$; es sey nun $y = 2z$, so wird $8z^3 + 4 \cdot 90zz = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, durch 8 dividirt wird $z^3 + 45zz = 4^2 \cdot 81^2$. Man setze ferner $z = 9u$, so wird $9^3u^3 + 45 \cdot 9^2 uu = 4^2 \cdot 9^4$, durch 93 dividirt wird $u^3 + 5uu = 4^2 \cdot 9$ oder $uu(u+5) = 16 \cdot 9 = 144$. Hier sieht man offenbahr, daß $u = 4$: dann da wird $uu = 16$ und $u + 5 = 9$; da nun $u = 4$ so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war, die größere aber 1296, wovon die QuadratWurzel 36 welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt giebt 20736.

168.

Anmerckung: Diese Frage kann bequemer folgender Gestalt aufgelöset werden: weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte, so sey die größere Zahl *xx*, die kleinere also $xx - 720$ welche mit der Quadrat Wurzel jener, das ist mit *x* multiplicirt, giebt $x^3 - 720x = 20736 = 64 \cdot 27 \cdot 12$; man setze $x = 4y$ so wird $64y^3 - 720 \cdot 4y = 64 \cdot 27 \cdot 12$, durch 64 dividirt wird $y^3 - 45y = 27 \cdot 12$; man setze ferner $y = 3z$, so wird $27z^3 - 135z = 27 \cdot 12$, durch 27 dividirt wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$.
Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, davon sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$ so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; dahero ist $z = 3, y = 9$ und $x = 36$; dahero ist die größere Zahl $xx = 1296$ und die kleinere xx-720 = 576 wie oben.

169.

IV. Frage: Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. So man nun diese Differenz multipliein mit der Summe ihrer Cuborum, so kommen 102144: welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere x so ist die größere $x+12$, der Cubus der ersteren ist x^3, der andern aber $x^3+36xx+432x+1728$, die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt

$$12\left(2x^3+36xx+432x+1728\right)=102144;$$

durch 12 dividirt wird $2x^3+36xx+432x+1728=8512$, durch 2 dividirt giebt $x^3+18xx+216x+864=4256$ oder $x^3+18xx+216x=3392=8\cdot8\cdot53$. Man setze $x=2y$ und dividire sogleich durch 8 so wird $y^3+9yy+54y=8\cdot53=424$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, 8, 53, etc. wovon 1 und 2 zu klein sind; setzt man aber $y=4$ so kommt $64+144+216=424$. Also ist $y=4$ und $x=8$; dahero sind die beyden Zahlen 8 und 20.

170.

V. Frage: Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Fl. einlegt, als der Personen sind, gewinnen je mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind. Nun findet sich daß der Gewinst zusammen betrage 392 Fl wie viel sind der Gesellen gewesen?
Man setze es seyen x Gesellen gewesen, so legt einer $10x$ Fl. ein, alle aber legen $10xx$ Fl. ein und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie $x+6$ Fl. und mit dem gantzen Capital gewinnen sie $\frac{x^3+6xx}{10}=392$. Mit 10 multiplicirt kommt $x^3+6xx=3920$. Setzt man nun $x=2y$, so erhält man $8y^3+24yy=3920$, welches durch 8 dividirt giebt $y^3+3yy=490$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 5, 7, 10, etc. wovon 1, 2 und 5 zu klein sind. Setzt man aber $y=7$ so kommt $343+147=490$ also ist $y=7$ und $x=14$.

Antwort: Es sind 14 Gesellen gewesen, und hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

171.

VI. Frage: Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthl. dazu legt ein jeder noch 40mal so viel Rthl. als der Gesellen sind. Mit dieser gantzen Summe gewinnen sie so viel Pr. C. als der Gesellen sind; hierauf theilen sie den Gewinnst und da findet es sich, daß nachdem ein jeder zehn mal so viel Rthl. genommen hat als der Gesellen sind, so bleiben noch 224 Rthl. übrig. Wie viel sind es Gesellen gewesen?
Die Zahl der Gesellen sey $=x$ so legt einjeder noch $40x$ Rthl. zu dem Capital von 8240 Rthl. alle zusammen legen also dazu noch $40xx$ Rthl. also war die gantze Summe $40xx+8240$, mit dieser gewinnen sie von 100 x Rthl. dahero wird der gantze Gewinnst seyn: $\frac{40x^3}{100}+\frac{8240x}{100}=\frac{4}{10}x^3+\frac{824}{10}x=\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x.$ Hiervon nimmt nun ein jeder $10x$ Rthl. und also alle zusammen $10xx$ Rthl. und da bleiben noch 224 Rthl. übrig, woraus erhellet

daß der Gewinnst gewesen sey: $10xx+224$ woraus diese Gleichung entsteht $\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x=10xx+224$ welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt wird

$$x^3+206x=25xx+560 \text{ oder } x^3-25xx+206x-560=0.$$

Doch um zu probiren wird die erste Form bequemer seyn; da nun die Theiler des letzten Glieds sind: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, etc. welche Positiv genommen werden müßen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind. Probirt man nun mit $x=1$ oder $x=2$ so ist offenbahr, daß der erste Theil viel kleiner werde als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren: wann $x=4$, so wird $64+824=400+560$ trift nicht zu; wann $x=5$, so wird $125+1030=625+560$ trift nicht zu; wann $x=7$, so wird $343+1442=1225+560$ trift zu: dahero ist $x=7$ eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch $x-7$ wie folget:

$$\begin{array}{l}
x-7)\; x^3-25xx+206x-560\;\;(xx-18x+80\\
\qquad\quad \underline{x^3-7xx\qquad\qquad\qquad}\\
\qquad\qquad -18xx+206x\\
\qquad\qquad \underline{-18xx+126x\quad}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 80x-560\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{80x-560}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Man setze also den Quotienten gleich 0, so hat man

$$xx-18x+80=0 \text{ oder } xx=18x-80$$

dahero $x=9+1$, also sind die beyden andern Wurzeln $x=8$ und $x=10$.

Antwort: auf diese Frage finden also drey Antworten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beigefügte Probe anzeigt

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein $40x$	280	320	400
also alle zusammen legen ein $40xx$	1960	2560	4000
das alte Capital war	8240	8240	8240
das gantze Capital ist $40xx+8240$	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. C. als der Gesellen sind	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg $10x$	70	80	100
also alle zusammen $10xx$	490	640	1000
bleibt also noch übrig	224	224	224

CAPITEL 12

VON DER REGEL DES CARDANI ODER DES SCIPIONIS FERREI

172.

Wann eine Cubische Gleichung auf gantze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Glieds eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in gantzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $ax^3 - axx + bx - c = 0$ wo *a, b* und *c* gantze Zahlen sind, dann wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$ so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt oder gantze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können 0 werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzeln der Gleichung weder gantze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben Irrational und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darinn für Wurzel-Zeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem CARDANO oder viel mehr dem SCIPIONI FERREO zugeschrieben worden, welche deswegen verdient, hier mit allem Fleiß erklärt zu werden.

174.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Cubi, deßen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey demnach die Wurzel $a + b$, so ist der Cubus davon $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ welche erstlich aus dem Cubo eines jeden Theils besteht und außer denselben noch die zwey Mittel-Glieder enthält, nemlich $3aab + 3abb$, welche beyde *3ab* zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a + b$. Dann *3ab* mit $a + b$ multiplicirt giebt $3aab + 3abb$. Diese zwey Glieder enthalten also das dreyfache Product der beyden Theile *a* und *b* mit ihrer Summe multiplicirt.

175.

Man setze nun es sey $x = a + b$ und nehme beyderseits die Cubi, so wird $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Da nun $a + b = x$ ist, so hat man diese Cubische Gleichung $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$ oder $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$ von welcher wir wißen, daß eine Wurzel sey $x = a + b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a = 2$ und $b = 3$ so bekommt man diese Gleichung $x^3 = 18x + 35$ von welcher wir gewis wißen, daß $x = 5$ eine Wurzel ist.

176.

Man setze nun ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so wird $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$, folglich $ab = \sqrt[3]{pq}$; wann dahero diese Cubische Gleichung vorkommt

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$$

so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß so wohl $\sqrt[3]{pq}$ als $p + q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man im Stand gesetzt wird, eine jede Cubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

177.

Es sey dahero diese allgemeine Cubische Gleichung vorgegeben $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p + q$ der Zahl g gleich werde, und alsdann wißen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

178.

Man hat also diese zwey Gleichungen aufzulösen

$$\text{I.)}\ 3\sqrt[3]{pq} = f \quad \text{und II.)}\ p + q = g.$$

Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ und $4pq = \frac{4}{27}f^3$ die andere Gleichung quadrire man, so kommt $pp + 2pq + qq = gg$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}f^3$, so wird $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$. Da nun $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ und $2q = g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ dahero erhalten wir

$$p = \frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2} \text{ und } q = \frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}.$$

179.

Wann also eine solche Cubische Gleichung vorkommt $x^3 = fx + g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit

$$x = \sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}$$

woraus erhellet daß diese Irrationalität nicht nur das Quadrat-Wurzel-Zeichen sondern auch das Cubische in sich faße, und diese Formel ist dasjenige was die Regel des CARDANI genennt zu werden pflegt.

180.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern.
Es sey $x^3 = 6x + 9$ so ist hier $f = 6$ und $g = 9$, allso $gg = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$. Dahero $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$ und $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = 7$;von der vorgegebenen Gleichung eine Wurzel seyn $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Allso ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

181.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, allso $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27}f^3 = 4$; folglich die Quadrat-Wurzel aus $gg - \frac{4}{27}f^3 = 0$; dahero eine Wurzel seyn wird

$$x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

182.

Wann aber gleich eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch öfters, daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird ob sie gleich darinnen steckt.

Es sey gegeben diese Gleichung $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$ ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ und $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel

$x = \sqrt[3]{\frac{40+28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40-28\sqrt{2}}{2}}$ oder $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

welche Formel würcklich 4 ist, ohngeacht solches nicht sogleich daraus erhellet.

Dann da der Cubus von $2+\sqrt{2}$ ist $20+14\sqrt{2}$, so ist umgekehrt die Cubic-Wurzel aus $20+14\sqrt{2}$ gleich $2+\sqrt{2}$, und eben so auch $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$, hieraus wird unsere Wurzel $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$.

183.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle Cubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darin das zweyte Glied fehlt. Es ist aber zu mercken, daß eine jede vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige Cubische Gleichung vorgegeben $x^3-6xx+11x-6=0$. Da nehme man nun den dritten Theil der Zahl 6 im andern Glied und setze $x-2=y$; so wird $x=y+2$, und die übrige Rechnung wie folget:

da $x=y+2$, $xx=yy+4y+4$ und $x^3=y^3+6yy+12y+8$, so ist

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3+6yy+12y+8 \\ -6xx = & \quad\;\, -6yy-24y-24 \\ +11x = & \qquad\qquad\; +11y+22 \\ -6 = & \qquad\qquad\qquad\quad -6 \\ \hline 6x^3-6xx+11x-6 = & y^3-y. \end{array}$$

Dahero erhalten wir diese Gleichung $y^3-y=0$ deren Auflösung so gleich in die Augen fällt: dann nach den Factoren hat man

$$y(yy-1) = y(y+1)(y-1) = 0;$$

setzt man nun einen jeden Factor gleich 0 so bekommt man:

$$\text{I.} \begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases} \text{II.} \begin{cases} y=-1, \\ x=\;\;1, \end{cases} \text{III.} \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

welches die drey schon oben [§ 158] gefundenen Wurzeln sind.

184.

Es sey nun diese allgemeine Cubische Gleichung gegeben:

$$x^3+axx+bx+c=0$$

aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden soll.
Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweyten Glieds mit ihrem Zeichen und schreibe dafür einen neuen Buchstaben z. E. y, dieser Regel zufolge werden wir haben $x+\frac{1}{3}a=y$ und also $x=y-\frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung entsteht:

$$x=y-\tfrac{1}{3}a,\ xx=yy-\tfrac{2}{3}ay+\tfrac{1}{9}aa \text{ ferner } x^3=y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3;\text{ also}$$

$$\begin{array}{rl}
x^3= & y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3\\
axx= & \quad +ayy-\tfrac{2}{3}aay+\tfrac{1}{9}a^3\\
bx= & \qquad\qquad by-\tfrac{1}{3}ab\\
c= & \qquad\qquad\quad +c\\
\hline
\multicolumn{2}{l}{y^3-\left(\tfrac{1}{3}aa-b\right)y+\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c=0}
\end{array}$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

185.

Nun kann man auch des CARDANI Regel leicht auf diesen Fall anwenden.
Dann da wir oben die Gleichung hatten $x^3=fx+g$ oder $x^3-fx-g=0,$ so wird für unsern Fall $f=\frac{1}{3}aa-b,$ und $g=-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{3}ab-c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y=\sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{\left(gg-\frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}$$

und da solcher Gestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x=y-\frac{1}{3}a$.

186.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande die Wurzeln von allen Cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende

$$x^3-6xx+13x-12=0.$$

Um hier das zweyte Glied wegzubringen, so setze man $x-2=y$, so wird:
$x=y+2,\ xx=yy+4y+4$, ferner $x^3=y^3+6yy+12y+8$, also

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & -6yy - 24y - 24 \\ +13x = & +13y + 26 \\ 12 = & -12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = 0 \end{array}$$

oder $y^3 = -y + 2$, welche mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen giebt $f = -1,\ g = 2$; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27} f^3 = -\frac{4}{27}$. Also $gg - \frac{4}{27} f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27} = 4$; dahero erhalten wir $\sqrt{gg - \frac{4}{27} f^3} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$ woraus folget

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2+\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2-\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} \text{ oder}$$

$y = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}$, oder $y = \sqrt[3]{\left(\frac{9+2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9-2\sqrt{21}}{9}\right)}$, oder $y = \sqrt[3]{\left(\frac{27+6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27-6\sqrt{21}}{27}\right)}$, oder $y = \frac{1}{3}\left(27 + 6\sqrt{21}\right) + \frac{1}{3}\left(27 - 6\sqrt{21}\right)$;
und hernach bekommt man $x = y + 2$.

187.

Bey Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen, gleich wohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechter Dinges Irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$ würckliche Cubi wären. Dieses trift auch hier zu, dann da der Cubus von $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist, so ist die Cubic-Wurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ und die Cubic-Wurzel aus $27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für *y* seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$ so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auch finden so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren, wie folget

$$
\begin{array}{l}
x-3)\quad x^3-6xx+13x-12\quad (xx-3x+4 \\
\qquad\quad \underline{x^3-3xx} \\
\qquad\qquad -3xx+13x \\
\qquad\qquad \underline{-3xx+\ 9x} \\
\qquad\qquad\qquad +4x-12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+4x-12} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

und diesen Quotienten $xx-3x+4=0$ setzen, also daß $xx=3x-4$ und $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right)}=3\pm\sqrt{-\frac{7}{4}}$ das ist $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right)}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$. Diese sind die beyden andern Wurzeln welche beyde imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien würcklich die Cubic-Wurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, die dahero weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können; wann aber keine Rational-Wurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art nach des CARDANI Regel ausgedruckt werden so daß alsdann keine weitere Abkürtzung Platz findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet $x^3=6x+4$, wo $f=6$ und $g=4$. Dahero gefunden wird $x=\sqrt[3]{\left(2+2\sqrt{-1}\right)}+\sqrt[3]{\left(2-2\sqrt{-1}\right)}$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.