## CHAPTER 13

## ON THE SOLUTION OF EQUATIONS OF THE FOURTH DEGREE WHICH CAN BE FOUND FROM BIQUADRATIC EQUATIONS.

189.

If the highest power of the number $x$ rises up to the fourth power, thus such an equation of the fourth degree can also be called a biquadratic, of which therefore the general form will be :

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

from these initially now equations of which the form is $x^4 = f$ can be considered before the general biquadratic equations, from which the root can be found easily if the fourth root of both sides is taken, since then one obtains $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Since $x^4$ is the square of $xx$ thus the calculation can be shown readily, if initially the square root is taken, since then one has $xx = \sqrt{f}$ ; from this the square root is taken again, thus giving $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, thus that $\sqrt[4]{f}$ is none other than the fourth root of $f$.

For example, if we have the equation $x^4 = 2401$ thus initially there is found $xx = 49$ and finally $x = 7$.

191.

But from such a form one finds only one root, and since there was always a need for three cubic roots, thus there is no doubt, that here four roots should have a place, which meanwhile can become known also in this manner. Since then it follows from the last example that not only $xx = 49$ but also $xx = -49$, thus we have from the former these two roots $x = 7,\ x = -7$ but likewise from the latter we have : $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ and $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ which are the four biquadratic roots of 2401. And thus each behaves likewise for all other numbers.

192.

After these pure equations, the order follows after these, in which the second and fourth terms is missing, or which have this form:

$$x^4 + fxx + g = 0,$$

as which can be solved after the rule of quadratic equations. Then on putting $xx = y$ thus there becomes

$$yy + fy + g = 0, \text{ or } yy = -fy - g$$

from which there will be found : $y = -\frac{1}{2} f \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} ff - g\right)} = \frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}$. Now since $xx = y$, thus from that there will be $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}}$, where the double sign $\pm$ indicates all four roots.

193.

But if all four terms arise in the equation, thus the same can be considered always as a product of all four factors. Then these four factors are multiplied by each other : $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, so that the following product is found :

$$x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx$$
$$-(pqr+pqs+prs+qrs)\,x + pqrs,$$

which formula cannot be equal to 0, unless one of the above factors $=0$. This can happen therefore in four ways,

$$\text{I.) if } x = p, \text{ II.) } x = q, \text{ III.) } x = r, \text{ IV.) } x = s,$$

which therefore are the four roots of this equation.

194.

We examine this form a little more generally, thus we find, that in the second term the sum of all the roots appears, which is multiplied by $-x^3$, in the third term the sum of the products of each two roots multiplied by each other is found, which is multiplied by *xx*, in the fourth term the sum of the products of each three roots multiplied by each other is observed, which is multiplied by $-x$, and finally the fifth and last term contains the product of all four roots multiplied by each other.

195.

Since the last term contains the product of all the roots, thus such a biquadratic equation can have no other rational roots, than which also are divisors of the last term, therefore from this reason all rational roots can be found easily, if such can be on hand, if for *x* one after another each of the divisors of the last term is put in place and to note, by which a satisfactory equation occurs; but had only one such root been found, e.g. $x = p$, thus the equation must be divided by $x - p$ after all the terms have been taken to one side, and the quotient put equal to zero, which will give a cubic equation, which can be solved further according to the above rule.

196.

But for this to happen it is necessary without any compromise, that all the terms consist of whole numbers, and that the first stands alone, or to be multiplied by the number one ; therefore the terms arise in fractions, so the same must be first removed, which can happen always, if $y$ is written for $x$ divided by a number, which itself includes all the factors of the fractions :

As if this equation arose :

$$x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{3}xx - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{18} = 0,$$

thus as in the divisors, 2 and 3 are put together with the powers arising

$$x = \tfrac{y}{6}, \text{ thus to become } \frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0,$$

which multiplied by 64 gives $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$. Now it is required to search whether this equation has rational roots, thus for $y$ the divisors of the number 72 must be written one after another in order to see, in which cases the formula actually becomes zero.

197.

But since the roots can be just as well negative as positive, thus two separate trials must be made with each single divisor, while the first itself is positive, the second itself must be taken as negative ; but again it must be observed here, that as often as the two signs are interchanged with each other, the equation has just as many positive roots; but as often as one sign follows the other, it must contain just as many negative roots. Now since in our example 4 interchanges of sign arise, and without any succession of signs, thus all the roots are positive, and so there is no need to take the negative divisors of the last term.

198.

For example, let the equation arise $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$. Now here two changes of sign arise, and also two following occur, from which one can conclude surely, that this equation must have two positive and also two negative roots, which all must be divisors of the number 12. Now since these divisors are 1, 2, 3, 4, 6, 12, thus one must test initially with $x = +1$, thus from which 0 actually arises , to that one root is $x = 1$. Further on putting $x = -1$ thus the following arise $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$ and therefore $x = -1$ does not give a root. Further putting $x = 2$ thus our formula again will be $= 0$ , and thus $x=2$ is a root; however $x=-2$ is not acceptable. Further putting $x=3$ thus $81+54-63-24+12=60$ arises and thus cannot give a root; however, putting $x=-3$ thus $81-54-63+24+12=0$ arises, consequently $x=-3$ is a root; thus all those four roots are rational and thus themselves behave as such :

$$\text{I.)}x=1,\ \text{II.)}\ x=2,\ \text{III.)}\ x=-2,\ \text{IV.)}x=3,$$

of which two are positive and two are negative, as the above rule indicates.

199.

But if there is no rational root, thus nothing can be found in this manner ; therefore one must consider some means, in order that in this case the irrational roots can be expressed. But here we have been fortunate, in that two different ways have been discovered, in order to have an understanding of how to attain such roots, from which the biquadratic equation thus may be resolved as wished.

But before we discuss these general methods, thus it will be useful to resolve some special cases, which often can be applied to great advantage.

200.

If the equation is obtained thus, to that the numbers in that equation occur both backwards as well as forwards, as in this equation :

$$x^4+mx^3+nxx+mx+1=0,$$

which thus can be put in place more generally:

$$x^4+max^3+naaxx+ma^3x+a^4=0,$$

thus such a form can always be seen as a product of two factors which are quadratics, and which can be specified easily: then the following product follows for this equation

$$(xx+pax+aa)(xx+qax+aa)=0,$$

where $p$ and $q$ must be found, so that the above equation emerges.
Moreover that will be found by actual multiplication

$$x^4+\left(p+q\right)ax^3+\left(pq+2\right)aaxx+\left(p+q\right)a^3x+a^4=0;$$

from which this equation thus will be the same as the above equation, as the following two parts require I.) that $p+q=m$, and II.) that $pq+2=n$, consequently $pq=n-2$.

The first squared gives $pp+2pq+qq=mm$, from which four times the second part taken, namely $4pq=4n-8$, leaves

$$pp-2pq+qq=mm-4n+8,$$

of which the square root is : $p-q=\sqrt{(mm-4n+8)}$. Now since $p+q=m$ thus we obtain by addition

$$2p=m+\sqrt{(mm-4n+8)} \text{ or } p=\tfrac{m+\sqrt{(mm-4n+8)}}{2};$$

however by subtraction we obtain :

$$2q=m-\sqrt{(mm-4n+8)} \text{ or } p=\tfrac{m-\sqrt{(mm-4n+8)}}{2}.$$

Now both *p* and *q* have been found, thus each of the factors must be put equal to zero, in order that the value of *x* may be found from these: the first gives $xx+pax+aa=0$ or $xx=-pax-aa$, from which it is found that

$$x=-\tfrac{pa}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{ppaa}{4}-aa\right)} \text{ or } x=-\tfrac{pa}{2}\pm a\sqrt{\left(\tfrac{pp}{4}-1\right)},$$

or in turn $x=-\tfrac{1}{2}pa\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{(pp-4)}$;

but the other factor gives

$$x=-\tfrac{1}{2}qa\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{(qq-4)}$$

and thus the four roots of the given equation are found.

201.

In order to illustrate these, thus this equation is introduced :

$$x^4-4x^3-3xx-4x+1=0.$$

Now here there is $a=1,\ m=-4,\ n=-3,$ therefore $mm-4n+8=36$ and from which the square root $=6$ ; therefore we obtain $p=-\tfrac{4+6}{2}=1$ and $q=\tfrac{-4-6}{2}=-5$, from which the four roots will be :

$$\text{I.) and II.) } x=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}=\tfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

$$\text{and further III.) and IV.) } x=\ \tfrac{5}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{21}=\tfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}:$$

thus the four roots of the given equation follow :

$$\text{I.) } x=\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \text{II.) } x=\tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\text{III.) } x=\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}\quad \text{IV.) } x=\tfrac{5-\sqrt{21}}{2},$$

from which the first two are imaginary or impossible roots, however both the other two roots are possible, because $\sqrt{21}$ can be extracted as exactly as desired, in which the root is expressed as a decimal fraction. Since 21 is the same as 21,00000000 thus the square root can be extracted from that as follows:

| | |
|---|---|
| | 21\|00\|00\|00\|00 (4,5825 |
| | 16 |
| 85 | 5 00 |
| | 4 25 |
| 908 | 75 00 |
| | 72 64 |
| 9162 | 2 36 00 |
| | 1 83 24 |
| 91645 | 52 76 00 |
| | 45 82 25 |
| | 6 93 75 |

Now since $\sqrt{21}=4,5825$ thus the third root is approximately $x=4,7912$, and the fourth root $x=0,2087$, which can be calculated still closer easily.
Because the fourth root can be approximated by $\frac{2}{10}$ or $\frac{1}{5}$, thus this value of the equation can be done also with sufficient accuracy; thus on setting $x=\frac{1}{5}$ there is obtained $\frac{1}{625}-\frac{4}{125}-\frac{3}{25}-\frac{4}{5}+1=\frac{31}{625}$ and this should be $=0$, which is fairly accurate.

202.

The second case, where a similar solution can be found, is with these numbers after the above equality, only that the second and fourth terms have different signs ; therefore such an equation is :

$$x^4+max^3+naaxx-ma^3x+a^4=0$$

which can be presented by the following product :

$$(xx+pax-aa)(xx+qax-aa)=0.$$

Then by multiplication there becomes :

$$x^4+(p+q)ax^3+(pq-2)aaxx-(p+q)a^3x+a^4$$

which will be the same as the above, if in the first place $p+q=m$ and then $pq-2=n$ or $pq=n+2$ ; then the fourth term will be of such a form itself; as before squaring the first equation, thus we have $pp+2pq+qq=mm$, taking from that four times the latter $4pq=4n+8$, thus arising $pp-2pq+qq=mm-4n-8$ from which the square root gives $p-q=\sqrt{(mm-4n-8)}$ , and therefore we have

$$p=\frac{m+\sqrt{(mm-4n-8)}}{2} \text{ and } q=\frac{m-\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}.$$

Now we have found $p$ and $q$, thus the first factor gives these two roots :

$$x=-\tfrac{1}{2}pa\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{(pp+4)}$$

and the second factor gives these :

$$x=-\tfrac{1}{2}qa\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{(qq+4)}$$

and thus we have the four roots of the above equation.

203.

For example, let this equation be given : $x^4-3\cdot 2x^3+3\cdot 8x+16=0,$ now here there is $a=2,\ m=-3$ and $n=0$ , therefore $\sqrt{(mm-4n-8)}=1,$ consequently

$$p=\tfrac{-3+1}{2}=-1 \text{ and } q=\tfrac{-3-1}{2}=-2$$

from which the first two roots shall be $x=\ 1\pm\sqrt{5}$ and the last two $x=2\pm\sqrt{8}$ , so that the four roots sought shall be :

$$\text{I.) } x=1+\sqrt{5},\ \text{II.) } x=1-\sqrt{5},\ \text{III.) } x=2+\sqrt{8},\ \text{IV.) } x=2-\sqrt{8}.$$

From which the four factors of our equation shall become :

$$(x-1-\sqrt{5})\ (x-1+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{8})(x-2+\sqrt{8}),$$

which indeed multiplied by each other must produce our equation. Then the first and second multiplied by each other give $xx-2x-4$, and the two others give $xx-4x-4$, which two products again multiplied by each other give $x^4-6x^3+24x+16$, which is just the above equation.

## CHAPTER 14

## THE SOLUTION OF BIQUADRATIC EQUATIONS ARE OBTAINED FROM CUBICS FOLLOWING BOMBELLI'S RULE

204.

Since above it has been shown already, how cubic equations can be solved with the help of CARDAN's rule, thus it comes about that the main point about solving biquadratic equations , can be obtained from knowing how to bring the same to the solutions of cubic equations. Thus without the aid of cubic equations it is not possible to solve biquadratic equations by a general method: for if a root of that has been found, it enables the remaining roots of a cubic equation to be found. From which it can become known equally, that from the equations of a higher order the solutions of all equations of lesser degree can be obtained from that.

205.

Now herewith, several centuries ago [in 1579], an Italian called BOMBELLI had given a rule, which we are going to establish in this chapter: It shall give, therefore, the general rule for solving biquadratic equations :

$$x^4+ax^3+bxx+cx+d=0,$$

where the letters *a, b, c, d* can all be considered to be real numbers ; now it can be imagined as before, that this equation to be the same as the following

$$\left(xx+\tfrac{1}{2}ax+p\right)^2-(qx+r)^2=0,$$

where it arises thereupon that the letters *p*, *q* and *r* are to be determined thus, so that the given equation arises. Now putting this last equation expanded in order, thus from this there comes :

$$\begin{aligned} x^4+ax^3+\tfrac{1}{4}aaxx &+ apx+pp \\ +2pxx &-2qrx-rr \\ -qqxx & \end{aligned}$$

Now here the first two terms are already the same as with our equation ; for the third term we must put $\frac{1}{4}aa+2p-qq=b$ from which we have $qq=\frac{1}{4}aa+2p-b$, for the fourth term we must put $ap-2qr=c$, from which we have $2qr=ap-c$, but for the last term $pp-rr=d$ , from which there will be $rr=pp-d$ . Now from these three equations the three letters $p, q$ and $r$ must be determined.

206.

In order to perform this in the simplest way, thus we take four times the first equation, which shall become $4qq=aa+8p-4b$, this is multiplied by the last equation $rr=pp-d$ , thus there arises :

$$4qqrr=8p^3+\left(aa-4b\right)pp-8dp-d(aa-4b)$$

now the middle equation is squared :

$$4qqrr=aapp-2acp+cc;$$

we have thus two values for $4qqrr$, which put equal to each other gives this equation:

$$8p^3+\left(aa-4b\right)pp-8dp-d(aa-4b)=aapp-2acp+cc;$$

and all the terms are brought to one side, giving :

$$8p^3-4bpp+\left(2ac-8d\right)p-aad+4bd-cc=0$$

which is a cubic equation, from which in each case the value of $p$ after the above given rule must be specified.

207.

One now has now found from the three given numbers $a, b, c, d$ the three given values of the letter $p$, from which it is enough to have found only one value from that, thus so that the two other letters $q$ and $r$ can be obtained from that equally. Thus from the first equation there will be $q=\sqrt{(\frac{1}{4}aa+2p-b)}$ and from the second one obtains $r=\frac{ap-c}{2q}$. Moreover if these three letters were found for every single case, thus from that all four roots of the given equation of the following form can be determined .

Since we have brought the given equation to this form :

$$(xx+\tfrac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0,$$

thus $(xx+\frac{1}{2}ax+p)=(qx+r)^2$; from which the square root taken will become : $xx+\frac{1}{2}ax+p=qx+r$ , or also $xx+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r$ .

The first gives :

$$xx = (q - \tfrac{1}{2}a)x - p + r$$

from which two roots are found; the remaining two roots are found from the other, which thus :

$$xx = -(q + \tfrac{1}{2}a)x - p - r.$$

208.

In order to illustrate this rule by an example, thus this equation is given :

$$x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0,$$

which compared to our general formula gives :

$$a = -10,\ b = 35,\ c = -50,\ d = 24,$$

from which for the letter $p$ to be determined by the following equation arising $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; which divided by four gives

$$2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0.$$

The divisors of the last number are 1, 5, 7, 11, etc. from which 1 is not to be involved ; on putting $p = 5$ thus there becomes $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, consequently $p = 5$; should also there be put $p = 7$, thus there becomes $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; thus $p = 7$ is the second root. In order to determine the third root thus we divide the equation by 2 thus there arises $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, and since the number in the second term $\frac{35}{2}$ is the sum of the three roots, but the sum of the both the first makes 12, thus the third is $\frac{11}{2}$. Therefore we have all three roots. But is was sufficient to know only one, because the four roots of our biquadratic equation must appear from each one.

209.

As regards showing these, thus in the first place let $p = 5$, as then from that there will be :

$$q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0 \text{ and } r = \tfrac{-50+5}{0} = \tfrac{0}{0}.$$

Now since nothing can be determined from this, thus the third equation is taken $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, and hence $r = 1$: therefore our two quadratic equations shall be:

$$\text{I.) } xx = 5x - 4, \text{ II.) } xx = 5x - 6;$$

now the first gives the two equations $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, thus $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, consequently either $x = 4$, or $x = 1$. But the other equation gives $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, thus $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; from which there will be either $x = 3$, or $x = 2$.

But if we put $p = 7$ thus there becomes :

$$q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2 \text{ and } r = \frac{-70+50}{4} = -5,$$

from which these two quadratic equations emerge :

$$\text{I.) } xx = 7x - 12, \text{ II.) } xx = 3x - 2;$$

from which the first gives $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, thus $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, therefore $x = 4$ and $x = 3$; the other gives these roots $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, thus $x = \frac{3 \pm 1}{4}$ , therefore $x = 2$ and $x = 1$, which now are the four roots, which have been found above already.

And just as the same follow also from the third value $p = \frac{11}{2}$. Since then there will be $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ and $r = \frac{-55+50}{2} = -\frac{5}{2}$, from which the two quadratic equations become

$$\text{I.) } xx = 6x - 8, \text{ II.) } xx = 4x - 3;$$

from the first we arrive at $x = 3 \pm \sqrt{1}$, so that $x = 4$ and $x = 2$; but from the second $x = 2 \pm \sqrt{1}$, hence $x = 3$ and $x = 1$; which are the four roots found already.

210.

Further let this equation be given $x^4 - 16x - 12 = 0$, in which there is $a = 0,\ b = 0,\ c = -16,\ d = -12$; therefore our cubic equation will become $8p^3 + 96p - 256 = 0$, that is $p^3 + 12p - 32 = 0$, which equation is even simpler, if we put $p = 2t$ *;* since namely there will be

$$8t^3 + 24t - 32 = 0 \text{ or } t^3 + 3t - 4 = 0.$$

The divisors of the last term are 1, 2, 4, from which $t = 1$ is a root, and from which $p = 2$, and further $q = \sqrt{4} = 2$, and $r = \frac{16}{4} = 4$. Therefore the two quadratic equations are : $xx = 2x + 2$ and $xx = -2x - 6$, from which the two roots are $x = 1 \pm \sqrt{3}$, and $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

In order to make the previous solution still more apparent, we will thus repeat everything in the following example :
Therefore let this equation be given: $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, which must be contained in this form $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, where in the first part $-3x$ is put in place, because $-3$ is half of the number $-6$ in the second term of the equation. But this form expanded out gives :

$$x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)xx - (6p + 2qr)x + pp - rr = 0,$$

now with this form compared with our equation thus we come upon :

$$\text{I.) } 2p + 9 - qq = 12, \text{ II.) } 6p + 2qr = 12, \text{ III.) } pp - rr = 4;$$

from the first we obtain $qq = 2p - 3$, from the second $2qr = 12 - 6p$ or $qr = 6 - 3p$, from the third $rr = pp - 4$; now on multiplying *rr* and *qq* by each other thus there comes about $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$. But squaring that value of *qr,* thus there becomes $qqrr = 36 - 36p + 9pp$; therefore we obtain this equation:
$2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, or $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, or on dividing by 2 this equation $p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, from which the root is $p = 2$; from that $qq = 1$, $q = 1$ and $qr = r = 0$. Our equation thus becomes : $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, from which the square root is $xx - 3x + 2 = \pm x$; applying the upper sign, thus we have $xx = 4x - 2$ but for the lower sign, $xx = 2x - 2$, from which there is found $x = 2 \pm \sqrt{2}$ and $x = 1 + \sqrt{-1}$.

## CHAPTER 15

## CONCERNING A NEW SOLUTION OF BIQUADRATIC EQUATIONS

212.

We have been able to solve biquadratic equations from the above rule of Bombelli with the help of a cubic equation, thus since there is still another way found to accomplish this, which is completely different from the above and deserves a particular explanation.

[This presentation is adapted from a more general one by Euler to be found in Vol. 6, p.216 of the *Comm.Scient.Imper.Petropol.* 1732 : *De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio*. E 30 : *Concerning the forms of the roots of equations connecting any orders* ; also to be found in Series 1, Vol. 6 of the *Opera Omnia* with an extensive commentary.]

213.

Namely, the roots of a biquadratic equation are considered to have this form

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\ ,$$

where the letters *p, q* and *r* indicate the three roots of such a cubic equation

$$z^3-fzz+gz-h=0,$$

thus these shall become

$$p+q+r=f,\ pq+pr+qr=g\ \text{ and }\ pqr=h;$$

with these in place thus the given form of the root $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ , since from this there arises $xx=p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Now since $p+q+r=f$ thus there becomes $xx-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$ ; now taking the square yet again, thus there becomes

$$x^4-2fxx+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqqr}+8\sqrt{pqrr}\ .$$

Now since $4pq+4pr+4qr=4g$ thus there becomes :

$$x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r});$$

but since $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$ and $pqr=h,$ thus $\sqrt{pqr}=\sqrt{h},$ thus we reach this form of the biquadratic equation :

$$x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0\,,$$

of which the certain given root is $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ ,

and where *p, q* and *r* are the three roots of the above cubic equation :

$$z^3-fzz+gz-h=0.$$

214.

The resolution of biquadratic equations can be regarded generally, though the second term $x^3$ is lacking. Then each complete equation can always be changed into another form, where the second term is missing, as we will show soon:

$$x^4 - axx - bx - c = 0,$$

from which a root must be found. The same is compared with the form found in order that from that the letters *f, g* and *h* can be found.
From which it is required, that I.) $2f = a$ as well as $f = \frac{a}{2}$ , II.) $8\sqrt{h} = b$ and $h = \frac{bb}{64}$,
III.) $ff - 4g = -c$, or $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, or $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, consequently $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

215.

From the previous equation $x^4 - axx - bx - c = 0$ the letters *f, g* and *h* also are determined from that :

$$f = \tfrac{1}{2}a,\ g = \tfrac{1}{16}aa + \tfrac{1}{4}c, \text{und } h = \tfrac{1}{64}bb \text{ oder } \sqrt{h} = \tfrac{1}{8}b;$$

from which the cubic equation itself is formed: $z^3 - fzz + gz - h = 0$, from which the three roots must be determined according to the above rule. The same now become :

$$\text{I.) } z = p,\ \text{II.) } z = q,\ \text{III.) } z = r:$$

from which, if they have been found, a root of our biquadratic equation shall be $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

216.

Indeed it appears that such a form has found only one root of our equation, since each square root sign alone can become negative as well as positive, thus this form contains all four roots.
Should all the changes of signs be allowed to be valid, thus 8 different values for *x* arise from this, yet from this only 4 can be valid. But it is to be observed, that the product of these three terms, namely $\sqrt{pqr}$ must be equal to $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$ ; therefore if $\frac{1}{8}b$ is positive thus so must the product of these parts also be positive, in which case only these four changes are valid.

$$\begin{aligned}
&\text{I.)}\ x = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},\\
&\text{II.)}\ x = \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r},\\
&\text{III.)}\ x = -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},\\
&\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},
\end{aligned}$$

but if $\frac{1}{8}b$ is negative, then the four values of $x$ follow :

$$\begin{aligned}
&\text{I.)}\ x = \sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},\\
&\text{II.)}\ x = \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},\\
&\text{III.)}\ x = -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},\\
&\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}.
\end{aligned}$$

Through the help of this note in any case all four roots can be determined, as is evident from the following example.

217.

There shall be this biquadratic equation given in which the second term is missing :

$$x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0,$$

which compared with the above formula gives $a = 25,\ b = -60$ and $c = 36$,
from which further there is obtained [for the coefficients of the reduced cubic] :

$$f = \tfrac{25}{2},\ g = \tfrac{625}{16} + 9 = \tfrac{769}{16} \text{ and } h = \tfrac{225}{4};$$

thus our cubic equation is :

$$z^3 - \tfrac{25}{2}zz + \tfrac{769}{16}z - \tfrac{225}{4} = 0.$$

Here in order to remove the fractions, we put $z = \frac{u}{4}$, thus becoming :

$$\tfrac{u^3}{64} - \tfrac{25}{2}\cdot\tfrac{uu}{16} + \tfrac{769}{16}\cdot\tfrac{u}{4} - \tfrac{225}{4} = 0,$$

which multiplied by 64 gives :

$$u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0,$$

from which the three roots can be found, which all three are positive, and from which one root is $u = 9$, in order to find the others thus one must divide $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0,$ by $u - 9$, and there the new equation arises $uu - 41u + 400 = 0$ or $uu = 41u - 400$, from which there is found : $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)} = \frac{41 \pm 9}{2};$ thus the three roots are $u = 9,\ u = 16,\ u = 25,$ therefore we obtain :

$$\text{I.) } z = \tfrac{9}{4},\ \text{II.) } z = 4,\ \text{III.) } z = \tfrac{25}{4}.$$

These now are the values of the letters *p, q* and *r,* thus :

$$p = \tfrac{9}{4},\ q = 4,\ r = \tfrac{25}{4};$$

because now $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$ and since this value $= \frac{1}{8}b$ is negative, thus the correct signs of the roots $\sqrt{p},\ \sqrt{q},\ \sqrt{r}$ must be used after that: it must become namely either only one minus or three minus signs present ; since now

$$\sqrt{p} = \tfrac{3}{2},\ \sqrt{q} = 2 \text{ and } \sqrt{r} = \tfrac{5}{2},$$

thus the roots of our given equation will be :

$$\begin{aligned} &\text{I.)} \quad x = \tfrac{3}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = 1, \\ &\text{II.)} \quad x = \tfrac{3}{2} - 2 + \tfrac{5}{2} = 2, \\ &\text{III.)} \ x = -\tfrac{3}{2} + 2 + \tfrac{5}{2} = 3, \\ &\text{IV.)} \ x = -\tfrac{3}{2} - 2 - \tfrac{5}{2} = -6, \end{aligned}$$

from which these four factors of the equation arise

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6) = 0,$$

from which the first two give $xx - 3x + 2$, and the last two $xx + 3x - 18$,
and these two products multiplied by each other just bring us to our equation.

218.

Now it is still necessary to show how a biquadratic equation, in which the second term is present, can be changed into another, in which the second term is missing, for which the following rule serves.

Let this general equation be given $y^4 + ay^3 + byy + cy + d = 0$.
Here a quarter of the number of the second term is added to $y$, namely $\frac{1}{4}a$ and a new letter $x$ is written for that, thus $y + \frac{1}{4}a = x$ following that $y = x - \frac{1}{4}a$; from which there becomes :

$$yy = xx - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{16}aa, \text{further } y^3 = x^3 - \tfrac{3}{4}axx + \tfrac{3}{16}aayx - \tfrac{1}{64}a^3,$$

and from that finally:

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & x^4 - ax^3 + \tfrac{3}{8}aaxx - \tfrac{1}{16}a^3x + \tfrac{1}{256}a^4 \\
+y^3 = & \quad + ax^3 - \tfrac{3}{4}aaxx + \tfrac{3}{16}a^3x - \tfrac{1}{64}a^4 \\
+byy = & \qquad\qquad + bxx - \tfrac{1}{2}abx + \tfrac{1}{16}aab \\
+cy = & \qquad\qquad\qquad\qquad + cx - \tfrac{1}{4}ac \\
+d = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x^4 + 0 - \tfrac{3}{8}aaxx + \tfrac{1}{8}a^3x - \tfrac{3}{256}a^4 \\
\qquad\quad + bxx - \tfrac{1}{2}abx + \tfrac{1}{16}aab \\
\qquad\qquad\qquad + cx - \tfrac{1}{4}ac \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + d
\end{array}\right\} = 0$$

in which equation, as there can be seen, the second term has gone, so that now the given rule from that can be applied, and from that the four roots of $x$ can be determined, from which later the four values of y themselves arise, as $y = x - \frac{1}{4}a$.

219.

This is as far as we have been able to go until now in the solution of algebraic equations arising, namely as to the fourth order, and all efforts to resolve equations of the fifth and higher orders by the same manner, or at least to bring to the lowest order have been fruitless, thus a general rule cannot be given to be put in place, by which the roots of higher order equations can be made known.

All that has been done in this regard, goes only to quite particular cases, where that can be performed, if any one rational root can be found, as which can be obtained from this by trial and error, and as one know, that the same must always be a divisor of the last term; and here it is to be done just as we have done already for equations of the third and fourth orders.

220.

It is still necessary to apply this rule to such an equation also, the roots of which are irrational.

Now this shall be such an equation:

$$y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0.$$

Here before all else the second term must be removed, therefore by adding yet the fourth part of the second term to the root $y$ : namely $y-2 = x$, thus $y = x^2$ and $yy = xx + 4x + 4,$ further $y^3 = x^3 + 6xx + 12x^3$ and

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16 \\
-8y^3 = & \quad\;\; -8x^3 - 48xx - 96x - 64 \\
+14yy = & \qquad\qquad\;\; +14xx + 56x + 56 \\
+4y = & \qquad\qquad\qquad\quad\;\; + \;4x + \;8 \\
- \;\; 8 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; - \;8 \\
\hline
& x^4 + 0 \;\; -10xx \;\; - \;4x \; + \; 8 \; = \; 0,
\end{array}$$

which compared with our general form, gives $a = 10,\ b = 4,\ c = -8$;
from which finally we conclude therefore : $f = 5,\ g = \frac{17}{4}, h = \frac{1}{4}$ and $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. From that we see, that the product $\sqrt{pqr}$ will be positive. The cubic equation therefore will be $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0,$ from which cubic equation the three roots $p, q$ and $r$ must be found.

221.

Now here initially the fractions must be removed, thus putting $z = \frac{u}{2}$ thus there will be $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0,$ multiplying by 8 gives $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0,$ where all the roots are positive. Now since the divisors of the last term are 1 and 2, thus initially $u = 1$ that becomes $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ and thus is not zero 0, but putting $u = 2$ thus there becomes $8 - 40 + 34 - 2 = 0$ which does sufficiently well. Therefore $u = 2$ is a root ; in order to find the other roots thus we divide by $u - 2$ as follows :

$$\begin{array}{l}
u-2)u^3 - 10uu + 17u - 2 \;(uu - 8u + 1 \\
\underline{\qquad\; u^3 - 2uu} \\
\qquad\qquad -8uu + 17u \\
\qquad\qquad \underline{-8uu + 16u} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad u - 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{u - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

and since we come upon $uu-8u+1=0$, or $uu=8u-1$, from which the two remaining roots are $u=4\pm\sqrt{15}$. Now since $z=\frac{1}{2}u$, thus the three roots of the cubic equation shall be :

$$\text{I.) } z=p=1,\ \text{II.) } z=q=\tfrac{4+\sqrt{15}}{2},\ \text{III.) } z=r=\tfrac{4-\sqrt{15}}{2}.$$

222.

Now since we have found *p, q* and *r* , thus their square roots become

$$\sqrt{p}=1,\ \sqrt{q}=\frac{\sqrt{\left(8+2\sqrt{15}\right)}}{2},\ \sqrt{r}=\frac{\sqrt{\left(8-2\sqrt{15}\right)}}{2}.$$

Moreover from those ones as above [§115] it has been seen, that the square root from $\left(a\pm\sqrt{b}\right)$, if $\sqrt{\left(aa-b\right)}=c$, can be expressed thus :

$$\sqrt{\left(a\pm\sqrt{b}\right)}=\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{a-c}{2}},$$

thus for our case there will be $a=8$ and $b=\ 2\sqrt{15}$ consequently $b=60$ and therefore $c=2$, from this we come reach $\sqrt{\left(8+2\sqrt{15}\right)}\ =\sqrt{5}+\sqrt{3},$ and $\sqrt{\left(8-2\sqrt{15}\right)}\ =\sqrt{5}-\sqrt{3}.$ Since we now have found $\sqrt{p}=1,\ \sqrt{q}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{r}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2},$ thus we obtain the four values for *x*, since we know the same positive product must be, to be provided of the following form :

$$\begin{aligned}
&\text{I.) } x= && \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}= && 1+\sqrt{5}\\
&\text{II.) } x= && \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1-\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}= && 1-\sqrt{5}\\
&\text{III.) } x= && -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-1+\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}= && -1+\sqrt{3}\\
&\text{IV.) } x= && -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}=-1-\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}= && -1-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Now since there was for the given equation $y=x+2$, thus the four roots themselves are

$$\begin{aligned}
&\text{I.) } y=3+\sqrt{5},\\
&\text{II.) } y=3-\sqrt{5},\\
&\text{III.) } y=1+\sqrt{3},\\
&\text{IV.) } y=1-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

## CHAPTER 16

## ON THE SOLUTION OF EQUATIONS BY APPROXIMATIONS

223.

If the roots of an equation are not rational, then the same can be expressed now by roots signs if wished, or not as the case may be, as happens for equations of higher order, thus we must be satisfied with the value of the same to be derived by approximations, in such a manner, that we can come closer always to the true value, until the error finally can be regarded as nothing. To this end these roots have been found by various means, the main ones of which we will explain here.

224.

The first means consists of this, that we have already investigated the value of a root quite accurately, so that we know the same to be e.g. greater than 4, and still smaller than 5. Since then the value of the root may be put to be $4+p$, since then $p$ certainly is a fraction to be determined ; but it is also a fraction less than 1, thus the square of $p$, the cube and each higher power is still far smaller, therefore the same can be left out of the calculation, as it still amounts to an approximation only. Further, if the value of this fraction $p$ had been determined only approximately, thus the value of $4+p$ is now even closer; from which an even closer value is found, and such a form is continued thus far, until the accuracy is as near as could be wished.

225.

At first we will illustrate this by an easy example, and determine the root of this equation $xx=20$ by approximating.
Now here we see that $x$ is greater than 4 and yet smaller than 5, therefore we put $x=4+p$, thus there becomes $xx=16+8p+pp=20$; but because $pp$ is very small, thus this term is left out, in order to have this equation $16+8p=20$, or $8p=4$, from which there becomes $p=\frac{1}{2}$ and $x=4\frac{1}{2}$ which already comes far nearer to the true value ; further on putting $x=4\frac{1}{2}+p$ thus we can be sure, that $p$ becomes a still far smaller fraction than before; therefore $pp$ now can be left out with a greater certainty. Thus we have $xx=20\frac{1}{4}+9p=20,$ or $9p=-\frac{1}{4},$ and thus $p=-\frac{1}{36},$ consequently $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}.$ Should we want the accuracy to become still closer, thus we put $x=4\frac{17}{36}+p,$ and thus we find $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20;$ therefore $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$ which multiplied by 36 becomes $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$ and from that there will be $p=-\frac{1}{36\cdot 322}=-\frac{1}{11592},$ consequently $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5473}{11592},$ which value is so near to the true value, that the error can be seen to be almost nothing.

226.

In order to make this more general, thus given this equation $xx=a$

and it is known already that *x* is greater than *n,* but still smaller than $n+1$; thus putting $x=n+p$, so that *p* must be a fraction, and therefore *pp* can be cast away as a very small quantity, from which there is found :

$$xx=nn+2np=a,$$

thus $2np=a-nn$ and $p=\frac{a-nn}{2n}$, consequently $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{nn+a}{2n}$. Now if the true value is already near, then the new value $\frac{nn+a}{2n}$ comes far nearer. Putting the new value in place for *n,* thus the true value can become still closer, and if this new value is put in place for *n* once more, thus the true value will be approached still closer; and such a process can be gone through as far as one wishes.

For example let $a=2$, or it is required to know the square root of 2 : now if a fairly close value had been found already which *n* as given , thus $\frac{nn+2}{2n}$ would give a still nearer value.

The approximations become :

$$\begin{aligned}
&\text{I.)}\quad n=1 \quad \text{thus } x=\tfrac{3}{2},\\
&\text{II.)}\ n=\tfrac{3}{2} \ \text{thus } x=\tfrac{17}{12},\\
&\text{III.)}\ n=\tfrac{17}{12} \ \text{thus } x=\tfrac{577}{408},
\end{aligned}$$

which latter value which already comes close to the square root of $\sqrt{2}$, that this square gives a value for that $=\frac{332929}{166464}$, only greater than 2 by $\frac{1}{166464}$.

227.

One can proceed in the same way when it may be required to find the cube root or a still higher root by approximation.

This cubic equation may be given $x^3=a$ or one is required to find $\sqrt[3]{a}$ ; now the same may be called $=n$ and putting $x=n+p$ ; thus it arises, if *pp* and the higher powers from that are discarded,

$$x^3=n^3+3nnp=a,$$

therefore $3nnp=a-n^3$ and $p=\frac{a-n^3}{3nn}$: consequently $x=\frac{2n^3+a}{3nn}$. Thus as *n* already is close to the $\sqrt[3]{a}$, thus this form comes still closer. Now putting this new value again for *n* thus this form comes yet closer to the true value of the root, and thus one can proceed as far as wished. For example, let $x^3=2$ or it is required to find $\sqrt[3]{2}$, which the number *n* already comes quite near, thus this form $x=\frac{2n^3+2}{3nn}$ comes still closer ; thus on putting :

I.) $n = 1$ thus $x = \frac{4}{3}$

II.) $n = \frac{4}{3}$ thus $x = \frac{91}{72}$

III.) $n = \frac{91}{72}$ thus $x = \frac{1126819}{894348}$.

228.

This method can be brought to bear with equal success in order to find the roots of all equations by approximation. To this end the following general cubic shall be given

$$x^3 + axx + bx + c = 0,$$

where $n$ is known to be already quite close to the root; therefore on putting $x = n - p$ and since $p$ shall be a fraction, thus on allowing $pp$ and the higher powers of that to be omitted; such a form is obtained $xx = nn - 2np$ and $x^3 = n^3 - 3nnp$, from which the equation arises :

$$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0,$$

or

$$n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p:$$

therefore $p = \frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$ and consequently we come upon the following general form for a more precise form for the value of $x$ : $= n - \left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right) = \frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Now putting this new value again for $n$, thus obtaining from that an even closer value to the true value.

229.

For example, let $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, where $a = 2$, $b = 3$ and $c = -50$, therefore if $n$ already comes close to a root, thus a value even closer will be $x = \frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$. But now the value $x = 3$ already comes quite near ; therefore putting $n = 3$ thus we find $x = \frac{61}{21}$. Should this value again be written for $n$, so a new value would arise, which comes still closer to the true value.

230.

We will add this example of an equation of higher dimension :
$x^5 = 6x + 10$ or $x^5 - 6x - 10 = 0$, where it is easy to see, that 1 is too small and 2 is too great. But $x = n$ shall be a close value already and putting $x = n + p$, thus $x^5 = n^5 + 5n^4 p$ and as $n^5 + 5n^4 p = 6n + 6p + 10$, or

$5n^4 p - 6p = 6n + 10 - n^5$ and consequently $p = \frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$ ; and therefore $x = \frac{4n^5+10}{5n^4-6}$ .
Now putting $n = 1$ thus $x = \frac{14}{-1} = -14$, which is a quite unsatisfactory value, so thus it happens that the nearby value *n* is far too small, therefore there will be put $n = 2$ , which already approaches the true value far closer. Should you now take the trouble, and write this fraction $\frac{69}{37}$ for *n*, then again you will reach a far more exact value of the root *x*.

231.

This is now the most established method for finding square roots of equations by approximations, [*i.e.* a variant of Newton's Method for polynomials] which can be applied beneficially in all cases as well.

However we will show another method which deserves our attention because of the ease of calculation. The basis of this method depends on determining a series of numbers for each equation, such as thus *a, b, c,* etc. thus provided, so that each term divided by the preceding shows the value of the root more accurately, the further the series of numbers is extended.

Let us put in place, that we know already the terms *p, q, r, s, t,* etc. so that the root *x* is fairly accurately known, or that $\frac{q}{p}$ shall be almost equal to *x*.

Just as we have also $\frac{r}{q} = x$ , from which we obtain by multiplication $\frac{r}{p} = xx$ . Since further also $\frac{s}{r} = x$ thus likewise $\frac{s}{p} = x^3$ and since further $\frac{t}{s} = x$ thus $\frac{t}{p} = x^4$ and so on.

232.

In order to explain this, we will begin with this small quadratic equation $xx = x + 1$ , and in series of numbers on account of the considered series of numbers these terms now arise for *p, q, r, s, t,* etc. Since now $\frac{q}{p} = x$ and $\frac{r}{p} = xx$ , thus we obtain from that this equation: $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$ or $q + p = r$ . Just as there shall be also $s = r + q$ and $t = s + r$ ; from which we understand, that the sum of each term of our series of numbers is the sum of the two previous numbers, from which we can proceed easily with the series as far as wished, once the two first terms only are had; but these can be taken as it pleases. Therefore for that on putting 0, 1, thus our series becomes from this :
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc. [*i.e.* the Fibonacci sequence] where from the further terms each divided by the preceding term will indicate the value for *x* so much more accurately, as we continue the series further. From the beginning the error is indeed very large, but as we go further it gets smaller. This always comes closer to the true value for *x* therefore as follows:

$$x = \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{144}{89},\ \text{etc.}$$

from which for example, $x = \frac{21}{13}$ gives $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, where the error now becomes only $\frac{1}{169}$, whereby the fractions following always come nearer to the true value.

233.

Let us now consider this equation $xx = 2x + 1$, and because always $x = \frac{q}{p}$ and $xx = \frac{r}{p}$, thus we obtain $xx = \frac{2q}{p} + 1$, or $r = 2q + p$; from which we understand, that each term doubled together with the previous one gives the following term. Thus if we begin with again with 0, 1 thus we arrive at the following series:

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408 \text{ etc.}$$

whereby the sought value of *x* always will be expressed more accurately by the following fractions,

$$x = \frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{29}{12},\ \frac{70}{29},\ \frac{169}{70},\ \frac{408}{169} \text{ etc.}$$

which consequently always come closer to the true value $x = 1 + \sqrt{2}$ . Now we take 1 away thus giving the following fractions always closer to the value of $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169} \text{ etc.}$$

from which $\frac{99}{70}$ has $\frac{9801}{4900}$ for the square, thus now around $\frac{1}{4900}$ greater than 2.

234.

This method likewise finds a place with higher equations, as if the cubic equation were given: $x^3 = xx + 2x + 1$ thus putting $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ and $x^3 = \frac{s}{p}$, and since we have from that $s = r + 2q + p$, from which we see how the following *s* may be found from the three terms *p*, *q* and *r*, where again we can make the beginning as we please, such a series will be from that :

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 6,\ 13,\ 28,\ 60,\ 129 \text{ etc.}$$

from which the following fractions for the value *x* always will be given more accurately:

$$x = \frac{0}{0},\ \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{6}{3},\ \frac{13}{6},\ \frac{28}{13},\ \frac{60}{28},\ \frac{129}{60} \text{ etc.}$$

from which the first fails miserably, but this value $x=\frac{60}{28}=\frac{15}{7}$ in the equation gives $\frac{3375}{343}=\frac{225}{49}+\frac{30}{7}+1=\frac{3388}{343}$ where the error is $\frac{13}{343}$.

235.

But it is to be noted well here, that not all equations can thus be obtained, that can be employed from this method ; in particular where the second term is missing, the same cannot be used. Then for example $xx=2$ and we want to put $x=\frac{q}{p}$ and $xx=\frac{r}{p}$ thus we would find $\frac{r}{p}=2$ or $r=2p$ that is $r=0q+2p$, from which this series of numbers would result:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 etc.

from which nothing can be concluded, because each term is divided by the preceding one, gives either $x=1$ or $x=2$. But this will be aided, if we put $x=y-1$: then we come upon $yy-2y+1=2$, and here we put $y=\frac{q}{p}$ and $yy=\frac{r}{p}$ thus we obtain the approximations given above already.

236.

Just as thus it behaves the same also with this equation $x^3=2$, from which such a series of numbers cannot be found, that indicates the value of $\sqrt[3]{2}$. But one need only put $x=y-1$ in order that this equation arises :

$$y^3-3yy+3y-1=2, \text{ or } y^3=3yy-3y+3.$$

Now for the series of numbers we put $y=\frac{q}{p}$, $yy=\frac{r}{p}$ and $y^3=\frac{s}{p}$; thus there will be $s=3r-3q+3p$; from which we see, how from the three terms the following can be found. Thus we take the first three terms as it pleases, such as for example 0, 0, 1, thus we obtain this series:

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, etc.

from which the two last terms give $y=\frac{324}{144}$ and $x=\frac{5}{4}$, which fraction comes fairly near to the cube root of 2, since the cube of $\frac{5}{4}$ is $\frac{125}{64}$ against 2 , which is $2=\frac{128}{64}$.

237.

It is to be noted further by this method, that if the equation has a rational root, and thus the beginning of the series thus will be assumed, that arises from this root, thus each term of the same also, divided by the preceding term, give the same root exactly.

In order to show this, thus let this equation be given $xx = x + 2$, wherein a root is $x = 2$; now since we have for the series this formula $r = q + 2p$, if we put for the starting numbers 1, 2, thus we obtain this series

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \text{etc.}$$

which is a geometric progression, of which the denominator is $= 2$.

Just as this cubic equation $x^3 = xx + 3x + 9$ illustrates also, of which a root is $x = 3$. Now putting for the beginning the series 1, 3, 9, thus we find from the formula $8\ r + 3q + 9p$ this series :

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \text{etc.}$$

which again is a geometric progression, of which the denominator is $= 3$.

238.

But should the beginning of the series differ from this root, thus it does not follow from that, that we can always approximate closer to the same root: for if the equation has more roots, then this series approximates only to the largest root, and cannot contain any smaller, as after the beginning the root will always be just the same. This will become clear by an example. Let the equation be $xx = 4x - 3$, the two roots of which are $x = 1$ and $x = 3$. Now the formula for the series of numbers is $r = 4q - 3p$ and putting 1, 1 for the beginning itself, namely for the smaller root, thus the whole series becomes 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc. But putting the beginning to be 1, 3, which contains the greater root, thus the series will be 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. where all the terms express exactly the root 3. But now assuming a different root, as we can, only that from that the smaller root is not contained exactly, thus the series itself always approximates to the larger root 3, as can be seen from the following example:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| beginning shall be : | 0, | 1, | 4, | 13, | 40, | 121, | 364, | etc. | | |
| further: | 1, | 2, | 5, | 14, | 41, | 122, | 365, | etc. | | |
| further: | 2, | 3, | 6, | 15, | 42, | 123, | 366, | 1095, | etc. | |
| further: | 2, | 1, | $-2$, | $-11$, | $-38$, | $-119$, | $-362$, | $-1091$, | $-3278$, | etc., |

where the last terms divided by the previous ones always come closer to the greater root l 3 , but never to the lesser one.

239.

This method can be used even for equations that are continued into the infinite, this equation serves as an example :

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{ etc.}$$

for which the series of numbers thus must be obtained, that each one must be equal to the sum of all the preceding ones, from which this series arises

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \text{etc.}$$

from which it can be seen, that the greatest root of this equation shall be $x = 2$, quite accurately; which can be shown also in this way. Dividing the equation by $x^{\infty}$, thus we find $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ etc. which is a geometric progression, from which the sum found will be $= \frac{1}{x-1}$ so that $1 = \frac{1}{x-1}$; multiply by $x-1$, thus $x-1=1$ and $x = 2$.

240.

As well as these two methods for finding the roots of equations by approximations, here and there we come across still other methods, but which either are too cumbersome or which are not general enough. But above all else these presented here serve to make clear the foremost way, as which from all the ways can be used with the desired success, on the other hand the others often require a known way of being prepared, without which the same cannot be applied at all, as we have done here by various examples.

END OF THE FIRST SECTION ON ALGEBRAIC EQUATIONS AND THEIR SOLUTIONS.

## CAPITEL 13

## VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DES VIERTEN GRADES WELCHE AUCH BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN GENENNT WERDEN

189.

Wann die höchste Potestät der Zahl *x* zum vierten Grad hinauf steiget, so werden solche Gleichungen vom vierten Grad auch Biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird:

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor die so genanten reinen Biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man so gleich die Wurzel findet wann man beyderseits die Wurzel vom vierten Grad auszieht, da man dann erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Da $x^4$ das Quadrat ist von $xx$ so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wann man erstlich nur die Quadrat-Wurzel ausziehet, da man dann bekommt $xx = \sqrt{f}$; hernach zieht man nochmahls die Quadrat-Wurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, also daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadrat-Wurzel aus der Quadrat-Wurzel von *f*.

Hätte man z. E. diese Gleichung $x^4 = 2401$ so findet man daraus erstlich $xx = 49$ und ferner $x = 7$.

191.

Solcher gestalt aber findet man nur eine Wurzel, und da immer drey Cubische Wurzeln statt finden, so ist kein Zweifel, daß hier nicht vier Wurzel solten Platz haben, welche inzwischen auch auf diese Art herausgebracht werden können. Dann da aus dem letzten Exempel nicht nur folget $xx = 49$ sondern auch $xx = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwey Wurzeln $x = 7,\ x = -7$ aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ welches die vier Biquadratische Wurzeln sind aus 2401. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192.

Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweyte und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben:

$$x^4 + fxx + g = 0,$$

als welche nach der Regel der Quadratischen Gleichungen aufgelößt werden können. Dann setzt man $xx = y$ so hat man

$$yy + fy + g = 0, \text{ oder } yy = -fy - g$$

woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}ff - g\right)} = \frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}$. Da nun $xx = y$, so wird daraus $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}}$ wo die zweydeutigen Zeichen ± alle vier Wurzeln angeben.

193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, so kann man dieselbe immer als ein Product aus vier Factoren ansehen. Dann multiplizirt man diese vier Factores mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ so findet man folgendes Product:

$$x^4-(p+q+r+s)x^3+(pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx$$
$$-(pqr+pqs+prs+qrs)\,x+pqrs,$$

welche Formel nicht anders gleich 0 werden kann, als wann einer von obigen vier Factoren $=0$ ist. Dieses kann demnach auf viererley Art geschehen,

I.) wann $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, IV.) $x=s$,

welches demnach die vier Wurzeln dieser Gleichung sind.

194.

Betrachten wir diese Form etwas genauer, so finden wir, daß in dem zweyten Glied die Summe aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Glied findet sich die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $xx$ multiplicirt ist, im vierten Glied sicht man die Summe der Producte aus je drey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $-x$ multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche Biquadratische Gleichung keine andere Rational-Wurzeln haben, als welche zugleich Theiler des letzten Glieds sind, dahero man aus diesem Grund alle Rational-Wurzeln, wann dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wann man für $x$ nach und nach einen jeden Theiler des letzten Glieds setzt und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe; hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. E. $x=p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x-p$ dividiren und den Quotienten gleich 0 setzen, welche eine Cubische Gleichung geben wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelößt werden kann.

196.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus gantzen Zahlen bestehen, und daß das erste blas da stehe, oder nur mit 1 multiplicirt sey; kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, so müßen dieselben vorher weggeschaft werden, welches jederzeit geschehen kann, wann man für $x$ schreibt $y$ getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt:

Als wann diese Gleichung vorkäme

$$x^4-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{3}xx-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{18}=0,$$

so setze man weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potestäten vorkommen

$$x = \frac{y}{6}, \text{ so wird } \frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0,$$

welche mit 64 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0.$ Wollte man nun suchen ob diese Gleichung Rational-Wurzeln habe, so müßte man für $y$ nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben um zu sehen, in welchen Fällen die Formel würcklich 0 werde.

197.

Da aber die Wurzeln so wohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anstellen, die erste indem derselbe positiv, die andere indem derselbe negativ genommen würde; man hat aber auch hier wiederum zu bemercken, daß so oft die zwey Zeichen und - mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müßen. Da nun in unserm Exempel 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.

198.

Es sey z. E. diese Gleichung vorgegeben $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0.$ Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln haben müße, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müßen. Da nun diese Theiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, so probire man erstlich mit $x = +1$ so kommt würcklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$ so kommt folgendes $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$ und dahero giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$ so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; aber $x = -2$ geht auch an. Setzt man weiter $x = 3$ so kommt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$ geht also nicht an; man setze aber $x = -3$ so kommt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, folglich ist $x = -3$ eine Wurzel; also daß alle vier Wurzeln Rational sind und sich also verhalten

$$\text{I.)}\, x = 1, \ \text{II.)}\ x = 2, \ \text{III.)}\ x = -2, \ \text{IV.)}\, x = 3,$$

von welchen zwey positiv und zwey negativ sind, wie die obige Regel anzeigt.

199.

Wann aber keine Wurzel Rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden; dahero man auf solche Mittel bedacht gewesen, um in diesen Fällen die Irrational-

Wurzeln ausdrücken zu können. Hierin ist man auch so glücklich gewesen, daß man zweyerley verschiedene Wege entdeckt habe, um zur Erkentniß solcher Wurzeln zu gelangen, die Biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Wege erörtern, so wird es dienlich seyn einige besondere Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

200.

Wann die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschiehet:

$$x^4+mx^3+nxx+mx+1=0,$$

welche noch etwas allgemeiner also vorgestellt werden kann:

$$x^4+max^3+naaxx+ma^3x+a^4=0,$$

so kann eine solche Form allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Formeln sind, angesehen werden und die sich leicht bestimmen laßen: dann man setze für diese Gleichung folgendes Product

$$(xx+pax+aa)(xx+qax+aa)=0,$$

wo $p$ und $q$ gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung herauskomme.
Es wird aber durch die würckliche Multiplication gefunden

$$x^4+(p+q)ax^3+(pq+2)aaxx+(p+q)a^3x+a^4=0;$$

damit also diese Gleichung mit der vorgegebenen einerley sey, so werden folgende zwey Stücke erfordert I.) daß $p+q=m$, und II.) daß $pq+2=n$, folglich $pq=n-2$.

Die erstere quadrirt giebt $pp+2pq+qq=mm$, davon die andere viermal genommen, nemlich $4pq=4n-8$, subtrahirt bleibt über

$$pp-2pq+qq=mm-4n+8,$$

davon die Quadrat-Wurzel ist: $p-q=\sqrt{(mm-4n+8)}$. Da nun $p+q=m$ so erhalten wir durch die Addition

$$2p=m+\sqrt{(mm-4n+8)} \text{ oder } p=\tfrac{m+\sqrt{(mm-4n+8)}}{2};$$

durch die Subtraction aber bekommen wir

$$2q = m - \sqrt{(mm - 4n + 8)} \text{ oder } p = \frac{m - \sqrt{(mm-4n+8)}}{2}.$$

Hat man nun $p$ und $q$ gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren 0 setzen, um daraus die Werthe von $x$ zu finden: der erste giebt $xx + pax + aa = 0$ oder $xx = -pax - aa$, woraus man findet

$$x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ppaa}{4} - aa\right)} \text{ oder } x = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{\left(\frac{pp}{4} - 1\right)}$$

$$\text{oder } x = -\tfrac{1}{2}pa \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{(pp-4)};$$

der andere Factor giebt aber

$$x = -\tfrac{1}{2}qa \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{(qq-4)}$$

und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

201.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben

$$x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$$

.

Hier ist nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, dahero $mm - 4n + 8 = 36$ und die Quadrat-Wurzel daraus $= 6$; dahero bekommen wir $p = -\frac{4+6}{2} = 1$ und$q = \frac{-4-6}{2} = -5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.) und II.) } x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = \tfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

$$\text{und ferner III.) und IV.) } x = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{21} = \tfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}:$$

also sind die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung folgende

$$\text{I.) } x = \tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \text{ II.) } x = \tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\text{III.) } x = \tfrac{5+\sqrt{21}}{2} \quad \text{IV.) } x = \tfrac{5-\sqrt{21}}{2},$$

wovon die zwey ersten imaginär oder unmöglich sind, die beyden andem aber möglich, weil man $\sqrt{21}$ so genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimal-Brüche ausdrückt. Dann da 21 so viel ist als 21,00000000 so ziehe man daraus die Quadrat-Wurzel wie folget:

```
      21|00|00|00|00 (4,5825
      16|
85      |5 00
        |4 25
908      |75 00
         |72 64
9162      |2 36 00
          |1 83 24
91645      |52 76 00
           |45 82 25
              6 93 75
```

Da nun $\sqrt{21} = 4,5825$ so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4,7912$, und die vierte $x = 0,2087$ welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.
Weil die vierte Wurzel dem $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$ so bekommt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$ und deises sollte $= 0$ seyn, welches ziemlich genau eintrift.

202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben; eine solche Gleichung ist demnach:

$$x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$$

welche durch folgendes Product kann vorgestellet werden

$$(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0.$$

Dann durch die Multiplication bekommt man

$$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)aaxx - (p+q)a^3x + a^4$$

welche mit der vorgegebenen einerley wird, wann erstlich $p + q = m$ und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; dann solchergestalt wird das vierte Glied von selbsten einerley; man quadrire wie vor die erste Gleichung, so hat man $pp + 2pq + qq = mm$, davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$ woraus die Quadrat-Wurzel giebt $p - q = \sqrt{(mm - 4n - 8)}$, und daher erhalten wir

$$p = \frac{m + \sqrt{(mm-4n-8)}}{2} \text{ und } q = \frac{m - \sqrt{(mm-4n-8)}}{2}.$$

Hat man nun $p$ und $q$ gefunden so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln

$$x = -\tfrac{1}{2}pa \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{(pp+4)}$$

und der zweyte Factor giebt diese

$$x = -\tfrac{1}{2}qa \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{(qq+4)}$$

und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

203.

Es sey z. E. diese Gleichung gegeben $x^4 - 3\cdot 2x^3 + 3\cdot 8x + 16 = 0,$ hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$, dahero $\sqrt{(mm-4n-8)} = 1,$ folglich

$$p = \tfrac{-3+1}{2} = -1 \text{ und } q = \tfrac{-3-1}{2} = -2$$

woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$ und die zwey letztem $x = 2 \pm \sqrt{8}$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.) } x = 1+\sqrt{5}, \text{ II.) } x = 1-\sqrt{5}, \text{ III.) } x = 2+\sqrt{8}, \text{ IV.) } x = 2-\sqrt{8}.$$

Woraus die vier Factoren unserer Gleichung seyn werden

$$(x-1-\sqrt{5})\left(x-1+\sqrt{5}\right)(x-2-\sqrt{8})(x-2+\sqrt{8}),$$

welche würcklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müßen. Dann der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx-2x-4$ und die beiden andern geben $xx-4x-4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

## CAPITEL 14

## VON DES BOMBELLI REGEL DIE AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN AUF CUBISCHE ZU BRINGEN

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die Cubische Gleichungen durch Hülfe des CARDANI Regel aufgelößt werden können, so kommt die HauptSache bey den Biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf Cubische

Gleichungen zu bringen wiße. Dann ohne Hülfe der Cubischen Gleichungen ist nicht möglich die Biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: dann wann man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine Cubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Nahmens BOMBELLI, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen: Es sey demnach die allgemeine Biquadratische Gleichung gegeben

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

wo die Buchstaben *a, b, c, d* alle nur ersinliche Zahlen bedeuten können; nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey

$$\left(xx + \tfrac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

wo es nur darauf ankommt die Buchstaben *p* und *q* und *r* so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx &+ apx + pp \\ + 2pxx &- 2qrx - rr \\ - qqxx & \end{aligned}$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$ woraus man hat $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, für das vierte Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$, woraus man hat $2qr = ap - c$, für das letzte Glied aber $pp - rr = d$, woraus wird $rr = pp - d$. Aus diesen drey Gleichungen müßen nun die drey Buchstaben *p, q* und *r* bestimmt werden.

206.

Um dieses auf die leichteste Art zu verrichten, so nehme man die erste viermal, welche seyn wird $4qq = aa + 8p - 4b$, diese multiplicire man mit der letzten $rr = pp - d$, so bekommt man

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$$

nun quadrire man die mittlere Gleichung

$$4qqrr = aapp - 2acp + cc;$$

wir haben also zweyerley Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich gesetzt diese Gleichung geben

$$8p^3+(aa-4b)pp-8dp-d(aa-4b)=aapp-2acp+cc;$$

und alle Glieder auf eine Seite gebracht, geben

$$8p^3-4bpp+(2ac-8d)p-aad+4bd-cc=0$$

welches eine Cubische Gleichung ist, daraus in einem jeden Fall der Werth von $p$ nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen $a, b, c, d$ die drey Werthe des Buchstaben $p$ gefunden, worzu es genug ist nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus so gleich die beyden andern Buchstaben $q$ und $r$. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn $q=\sqrt{(\frac{1}{4}aa+2p-b)}$ und aus der zweyten erhält man $r=\frac{ap-c}{2q}$. Wann aber diese drey Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgender Gestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben

$$(xx+\tfrac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0,$$

so ist $(xx+\frac{1}{2}ax+p)=(qx+r)^2$; daraus die Quadrat-Wurzel gezogen wird $xx+\frac{1}{2}ax+p=qx+r$, oder auch $xx+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r$.

Die erstere giebt

$$xx=(q-\tfrac{1}{2}a)x-p+r$$

woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht

$$xx=-(q+\tfrac{1}{2}a)x-p-r.$$

208.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben

$$x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0,$$

welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt

$$a = -10,\ b = 35,\ c = -50,\ d = 24,$$

aus welchen für den Buchstaben $p$ zu bestimmen folgende Gleichung erwächst $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche durch vier dividirt giebt

$$2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0.$$

Die Theiler der letzten Zahl sind 1, 5, 7, 11, etc. von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$ so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$; will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden so dividire man die Gleichung durch 2 so kommt $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Glied $\frac{35}{2}$; die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen so muß die dritte seyn $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genung nur eine zu wißen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer Biquadratischen Gleichung herauskommen müßen.

209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdann

$$q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0 \text{ und } r = \tfrac{-50+5}{0} = \tfrac{0}{0}.$$

Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: dahero unsere beyde Quadrat-Gleichungen seyn werden:

$$\text{I.) } xx = 5x - 4,\ \text{ II.) } xx = 5x - 6;$$

die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5\pm3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$. Die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5\pm1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$ so wird

$$q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2 \text{ und } r = \tfrac{-70+50}{4} = -5$$

woraus diese zwey Quadrat-Gleichungen entstehen

$$\text{I.) } xx = 7x - 12, \ \text{II.) } xx = 3x - 2;$$

deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$ dahero $x = 4$ und $x = 3$; die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{4}$ , dahero $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden.

Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$. Dann da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden Quadratischen Gleichungen seyn werden

$$\text{I.) } xx = 6x - 8, \ \text{II.) } xx = 4x - 3;$$

aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$; welche die schon gefundene vier Wurzeln sind.

210.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher ist $a = 0, \ b = 0, \ c = -16, \ d = -12$; dahero unsere Cubische Gleichung seyn wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wann man setzt $p = 2t$ *;* da wird nemlich

$$8t^3 + 24t - 32 = 0 \text{ oder } t^3 + 3t - 4 = 0.$$

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4.$ Dahero sind die beyden Quadrat-Gleichungen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$, daher die Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bey dem folgenden Exempel gantz wiederhohlen :

Es sey demnach diese Gleichung gegeben $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil $-3$ die Hälfte ist der Zahl $-6$ im zweyten Glied der Gleichung. Diese Form aber entwickelt giebt

$$x^4-6x^3+(2p+9-qq)xx-(6p+2qr)x+pp-rr=0,$$

mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung so bekommt man:

$$\text{I.) } 2p+9-qq=12, \text{ II.) } 6p+2qr=12, \text{ III.) } pp-rr=4;$$

aus der ersten erhalten wir $qq=2p-3$, aus der zweyten $2qr=12-6p$ oder $qr=6-3p$, aus der dritten $rr=pp-4$; nun multiplicire man $rr$ und $qq$ mit einander so bekommt man $qqrr=2p^3-3pp-8p+12$. Quadrirt man aber den Werth von $qr$, so kommt $qqrr=36-36p+9pp$; dahero erhalten wir diese Gleichung: $2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36$, oder $2p^3-12pp+28p-24=0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3-6pp+14p-12=0$, wovon die Wurzel ist $p=2$; daraus wird $qq=1$, $q=1$ und $qr=r=0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx-3x+2)^2=xx$, daraus die Quadrat-Wurtzel $xx-3x+2=\pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $xx=4x-2$ für das untere Zeichen aber $xx=2x-2$, woraus funden werden $x=2\pm\sqrt{2}$ und $x=1+\sqrt{-1}$.

## CAPITEL 15

## VON EINER NEUEN AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

### 212.

Wie durch die obige Regel des BOMBELLI die Biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer Cubischen aufgelöst werden, so ist seit dem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welcher von dem vorigen gänzlich unterschieden ist und eine besondere Erklärung verdienet.

### 213.

Man setze nemlich, die Wurzel einer Biquadratischen Gleichung habe diese Form

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$

wo die Buchstaben *p, q* und *r* die drey Wurzeln einer solchen Cubischen Gleichung andeuten

$$z^3-fzz+gz-h=0,$$

also daß seyn wird

$$p+q+r=f,\ pq+pr+qr=g \text{ und } pqr=h;$$

dieses voraus gesetzt so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, da kommt heraus $xx=p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Da nun $p+q+r=f$ so wird $xx-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird

$$x^4-2fxx+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqqr}+8\sqrt{pqrr}.$$

Da nun $4pq+4pr+4qr=4g$ so wird

$$x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r});$$

da aber $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$ und $pqr=h$, also $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser Biquadratischen Gleichung

$$x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0$$

wovon die Wurzel gewis ist

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$

und wo *p, q* und *r* die drey Wurzeln sind der obigen Cubischen Gleichung

$$z^3-fzz+gz-h=0.$$

214.

Die herausgebrachte Biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied $x^3$ darin mangelt. Dann man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es sey demnach diese Biquadratische Gleichung gegeben:

$$x^4-axx-bx-c=0,$$

wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe dahero mit der gefundenen Form um dadurch die Buchstaben *f, g* und *h* zu bestimmen.
Darzu wird erfordert, daß I.) $2f=a$ also $f=\frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h}=b$ allso $h=\frac{bb}{64}$,
III.) $ff-4g=-c$, oder $\frac{aa}{4}-4g+c=0$, oder $\frac{1}{4}aa+c=4g$, folglich $g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c$.

215.

Aus der vorgegebenen Gleichung $x^4-axx-bx-c=0$ findet man demnach die Buchstaben *f, g* und *h* also bestimmt

$$f = \tfrac{1}{2}a,\ g = \tfrac{1}{16}aa + \tfrac{1}{4}c, \text{und } h = \tfrac{1}{64}bb \text{ oder } \sqrt{h} = \tfrac{1}{8}b;$$

daraus formire man diese Cubische Gleichung: $z^3 - fzz + gz - h = 0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Dieselben seyen nun

$$\text{I.) } z = p, \text{ II.) } z = q, \text{ III.) } z = r:$$

aus welchen, wann sie gefunden worden, eine Wurzel unserer Biquadratischen Gleichung seyn wird $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

216.

Solcher Gestalt scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden werde, allein da ein jedes Quadrat-Wurzel-Zeichen so wohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form so gar alle vier Wurzeln.

Wollte man zwar alle Veränderungen der Zeichen gelten laßen, so kämen 8 verschiedene Werthe für $x$ heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemercken, daß das Product dieser drey Glieder, nemlich $\sqrt{pqr}$ gleich seyn müße dem $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$ ; dahero wann $\frac{1}{8}b$ positiv ist so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Fall nur diese vier Aenderungen gelten.

$$\begin{aligned}
\text{I.) } x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\
\text{II.) } x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\
\text{III.) } x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\
\text{IV.) } x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r},
\end{aligned}$$

ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von $x$ folgende:

$$\begin{aligned}
\text{I.) } x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\
\text{II.) } x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\
\text{III.) } x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\
\text{IV.) } x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}.
\end{aligned}$$

Durch Hülfe dieser Anmerckung können in jeglichem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

217.

Es sey diese Biquadratische Gleichung vorgegeben in welcher das zweyte

Glied fehlt

$$x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0,$$

welche mit der obigen Formel verglichen giebt $a = 25,\ b = -60$ und $c = 36$, woraus man ferner erhält

$$f = \tfrac{25}{2},\ g = \tfrac{625}{16} + 9 = \tfrac{769}{16} \text{ und } h = \tfrac{225}{4};$$

also ist unsere Cubische Gleichung

$$z^3 - \tfrac{25}{2}zz + \tfrac{769}{16}z - \tfrac{225}{4} = 0.$$

Um hier die Brüche weg zu bringen, so setze man $z = \frac{u}{4}$, so wird

$$\tfrac{u^3}{64} - \tfrac{25}{2}\cdot\tfrac{uu}{16} + \tfrac{769}{16}\cdot\tfrac{u}{4} - \tfrac{225}{4} = 0,$$

welche mit 64 multiplicirt giebt

$$u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0,$$

wovon die drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wurzel ist $u = 9$, um die andere zu finden so theile man $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0,$ durch $u - 9$, und da kommt diese neue Gleichung $uu - 41u + 400 = 0$ oder $uu = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)} = \frac{41 \pm 9}{2}$; also sind die drey Wurzeln $u = 9,\ u = 16,\ u = 25,$ dahero wir erhalten:

$$\text{I.) } z = \tfrac{9}{4},\ \text{II.) } z = 4,\ \text{III.) } z = \tfrac{25}{4}.$$

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben *p, q* und *r,* also daß

$$p = \tfrac{9}{4},\ q = 4,\ r = \tfrac{25}{4};$$

weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$ und dieser Werth $= \frac{1}{8}b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p},\ \sqrt{q},\ \sqrt{r}$ darnach richten: es muß nemlich entweder nur ein *minus* oder drey *minus* vorhanden seyn; da nun

$$\sqrt{p} = \tfrac{3}{2},\ \sqrt{q} = 2 \text{ und } \sqrt{r} = \tfrac{5}{2},$$

so werden die vier Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.)} & x = \tfrac{3}{2}+2-\tfrac{5}{2} = 1, \\
\text{II.)} & x = \tfrac{3}{2}-2+\tfrac{5}{2} = 2, \\
\text{III.)} & x = -\tfrac{3}{2}+2+\tfrac{5}{2} = 3, \\
\text{IV.)} & x = -\tfrac{3}{2}-2-\tfrac{5}{2} = -6,
\end{array}$$

aus welchen diese vier Factoren der Gleichung entstehen

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0,$$

wovon die beyden ersten geben $xx-3x+2$, die beyden letztern aber $xx+3x-18$, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt bringen just unsere Gleichung hervor.

218.

Nun ist noch übrig zu zeigen wie eine Biquadratische Gleichung, in der das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darin das zweyte Glied fehlt, worzu folgende Regel dienet.

Es sey diese allgemeine Gleichung gegeben $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Hier setze man zu $y$ den vierten Theil der Zahl des andern Glieds, nemlich $\frac{1}{4}a$ und schreibe dafür einen neuen Buchstaben $x$, also daß $y+\frac{1}{4}a=x$ folglich $y=x-\frac{1}{4}a$; daraus wird

$$yy = xx-\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{16}aa, \text{ferner } y^3 = x^3-\tfrac{3}{4}axx+\tfrac{3}{16}aayx-\tfrac{1}{64}a^3,$$

und daraus endlich:

$$\begin{array}{rcl}
y^4 &=& x^4-ax^3+\tfrac{3}{8}aaxx-\tfrac{1}{16}a^3x+\tfrac{1}{256}a^4 \\
+y^3 &=& +ax^3-\tfrac{3}{4}aaxx+\tfrac{3}{16}a^3x-\tfrac{1}{64}a^4 \\
+byy &=& +bxx-\tfrac{1}{2}abx+\tfrac{1}{16}aab \\
+cy &=& +cx-\tfrac{1}{4}ac \\
+d &=& +d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x^4+0-\tfrac{3}{8}aaxx+\tfrac{1}{8}a^3x-\tfrac{3}{256}a^4 \\
\qquad +bxx-\tfrac{1}{2}abx+\tfrac{1}{16}aab \\
\qquad\qquad +cx-\tfrac{1}{4}ac \\
\qquad\qquad\qquad +d
\end{array}\right\}=0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, also daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden und daraus die vier Wurzeln von $x$ bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y von selbsten sich ergeben, weil $y = x - \frac{1}{4}a$.

219.

So weit ist man bisher in Auflösung der Algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen von fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen sind fruchtloß gewesen, also daß man nicht im Stand ist allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles was darinnen geleistet worden, geht nur auf gantz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wann irgend eine Rational-Wurzel statt findet, als welche durch Probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Glieds seyn muß; und hier mit ist es eben so beschaffen wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grad gelehret haben.

220.

Es wird doch noch nöthig seyn diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind.

Eine solche Gleichung sey nun diese

$$y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0.$$

Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen, dahero setze man zu der Wurzel $y$ noch den vierten Theil der Zahl des zweyten Glieds nemlich $y - 2 = x$, so wird

$y = x^2$ und $yy = xx + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6xx + 12x^3$

und

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16 \\
-8y^3 = & \quad\;\; - 8x^3 - 48xx - 96x - 64 \\
+14yy = & \qquad\qquad\; + 14xx + 56x + 56 \\
+4y = & \qquad\qquad\qquad\qquad + 4x + 8 \\
-8 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 8 \\
\hline
& x^4 + 0 - 10xx - 4x + 8 = 0,
\end{array}$$

welche mit unserer allgemeinen Form verglichen, gibt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$;

woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}, h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das Product $\sqrt{pqr}$ positiv seyn wird. Die Cubische Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher Cubischen Gleichung die drey Wurzeln *p, q* und *r* gesucht werden müßen.

221.

Hier müßen nun erstlich die Brüche weggeschaft werden, des wegen setze man $z = \frac{u}{2}$ so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Glieds sind 1 und 2, so sey erstlich $u = 1$ da wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ und also nicht 0, setzt man aber $u = 2$ so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$ welches ein Genüge leistet. Dahero ist eine Wurzel $u = 2$; um die andere zu finden so theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$
\begin{array}{l}
u-2)u^3 - 10uu + 17u - 2 \;(uu - 8u + 1 \\
\underline{\quad\;\; u^3 - 2uu \quad} \\
\qquad\quad -8uu + 17u \\
\qquad\quad \underline{-8uu + 16u} \\
\qquad\qquad\qquad u - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{u - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

und da bekommt man $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Da nun $z = \frac{1}{2}u$, so sind die drey Wurzeln der Cubischen Gleichung:'

$$\text{I.) } z = p = 1,\ \text{II.) } z = q = \frac{4+\sqrt{15}}{2},\ \text{III.) } z = r = \frac{4-\sqrt{15}}{2}.$$

222.

Da wir nun *p, q* und *r* gefunden, so werden ihre Quadrat-Wurzeln seyn

$$\sqrt{p} = 1,\ \sqrt{q} = \frac{\sqrt{\left(8+2\sqrt{15}\right)}}{2},\ \sqrt{r} = \frac{\sqrt{\left(8-2\sqrt{15}\right)}}{2}.$$

Aus demjenigen aber was oben [§115] ist gezeigt worden, da die Quadrat-Wurzel aus $\left(a \pm \sqrt{b}\right)$, wann $\sqrt{(aa - b)} = c$, also ausgedrückt worden

$$\sqrt{\left(a \pm \sqrt{b}\right)} = \sqrt{\tfrac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{a-c}{2}},$$

so ist für unsern Fall $a = 8$ und $b = 2\sqrt{15}$ folglich $b = 60$ dahero $c = 2$, hieraus bekommen wir $\sqrt{\left(8+2\sqrt{15}\right)} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$, und $\sqrt{\left(8-2\sqrt{15}\right)} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Da wir nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für *x*, da wir wißen daß derselben Product positiv seyn muß, folgender Gestalt beschaffen seyn:

$$\text{I.)}\ x = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r} = 1+\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{5}$$
$$\text{II.)}\ x = \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r} = 1-\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{5}$$
$$\text{III.)}\ x = -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r} = -1+\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3}$$
$$\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r} = -1-\tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3}$$

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x+2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

$$\text{I.)}\ y = 3+\sqrt{5},$$
$$\text{II.)}\ y = 3-\sqrt{5},$$
$$\text{III.)}\ y = 1+\sqrt{3},$$
$$\text{IV.)}\ y = 1-\sqrt{3}.$$

## CAPITEL 16

## VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DURCH DIE NÄHERUNG

### 223.

Wann die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzel-Zeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschiehet, so muß man sich begnügen den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, dergestalt, daß man dem wahren Werth derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich vor nichts zu achten. Es sind zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmsten hier erklären wollen.

### 224.

Das erste Mittel besteht darinn, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, also daß man wiße daß derselbe z. E. größer sey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdann setze man den Werth der Wurzel $4+p$, da dann *p* gewis einen Bruch bedeuten wird; ist aber *p* ein Bruch und also kleiner als 1, so ist das Quadrat von *p,* der Cubus und eine jegliche höhere Potestät noch weit kleiner, dahero man dieselbe aus der Rechnung weglaßen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch $p$ nur beynahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel $4+p$ schon genauer; hieraus erforscht man gleicher gestalt einen noch genauern Werth, und geht solchergestalt so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen als man wünschet.

225.

Wir wollen dieses zuerst durch ein leichtes Exempel erläutern, und die Wurzel dieser Gleichung $xx=20$ durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun daß $x$ größer ist als 4 und doch kleiner als 5, dahero setze man $x=4+p$, so wird $xx=16+8p+pp=20$; weil aber $pp$ sehr klein ist, so laße man dieses Glied weg, um diese Gleichung zu haben $16+8p=20$, oder $8p=4$, daraus wird $p=\frac{1}{2}$ und $x=4\frac{1}{2}$ welches der Wahrheit schon weit näher kommt; man setze dahero ferner $x=4\frac{1}{2}+p$ so ist man gewis, daß $p$ ein noch weit kleinerer Bruch seyn werde, als vorher; dahero $pp$ jetzt mit größerm Recht weggelaßen werden könne. Man wird also haben $xx=20\frac{1}{4}+9p=20,$ oder $9p=-\frac{1}{4},$ und also $p=-\frac{1}{36},$ folglich $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}.$ Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man $x=4\frac{17}{36}+p,$ so bekommt man $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20;$ dahero $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$ mit 36 multiplicirt kommt $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$ und daraus wird $p=-\frac{1}{36\cdot 322}=-\frac{1}{11592},$ folglich $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5473}{11592},$ welcher Werth der Wahrheit so nahe kommt, daß der Fehler sicher als nichts angesehen werden kann.

226.

Um dieses allgemeiner zu machen, so sey gegeben diese Gleichung $xx=a$ und man wiße schon daß $x$ größer ist als $n$, doch aber kleiner als $n+1$; man setze allso $x=n+p$, also daß $p$ ein Bruch seyn muß, und dahero $pp$ als sehr klein verworfen werden kann, daraus bekommt man

$$xx=nn+2np=a,$$

also $2np=a-nn$ und $p=\frac{a-nn}{2n},$ folglich $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{nn+a}{2n}.$ Kam nun $n$ der Wahrheit schon nahe, so kommt dieser neue Werth $\frac{nn+a}{2n}$ der Wahrheit noch weit näher. Diesen setze man von neuem für $n$, so wird man der Wahrheit noch näher kommen, und wann man diesen neuern Werth nochmahl für $n$ setzet, so wird man noch näher zutreffen; und solchergestalt kann man fortgehen so weit man will.

Es sey z. E. $a=2$, oder man verlangt die Quadrat-Wurzel aus 2 zu wißen: hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden welcher $n$ gesetzt werde, so wird $\frac{nn+2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben.
Es sey dahero

$$\text{I.)}\quad n=1 \quad \text{so wird } x=\tfrac{3}{2},$$
$$\text{II.)}\quad n=\tfrac{3}{2} \quad \text{so wird } x=\tfrac{17}{12},$$
$$\text{III.)}\quad n=\tfrac{17}{12} \quad \text{so wird } x=\tfrac{577}{408},$$

welcher letztere Werth dem $\sqrt{2}$ schon so nahe kommt, daß das Quadrat davon $=\frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

227.

Eben so kan man verfahren, wann die Cubic-Wurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sey gegeben diese Cubische Gleichung $x^3=a$ oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden; dieselbe sey nun bey nahem $=n$ und man setze $x=n+p$; so wird, wann man $pp$ und die höhern Potestäten davon wegläßt,

$$x^3=n^3+3nnp=a,$$

dahero $3nnp=a-n^3$ und $p=\frac{a-n^3}{3nn}$: folglich $x=\frac{2n^3+a}{3nn}$. Kommt also $n$ dem $\sqrt[3]{a}$ schon nahe, so kommt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für $n$ so wird diese Formel der Wahrheit noch weit näher kommen, und so kann man fortgehen so weit als man will. Es sei z. E. $x^3=2$ oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welchem die Zahl $n$ schon ziemlich nahe komme, so wird diese Formel $x=\frac{2n^3+2}{3nn}$ noch näher kommen; also setze man:

$$\text{I.)}\quad n=1 \quad \text{so wird } x=\tfrac{4}{3}$$
$$\text{II.)}\quad n=\tfrac{4}{3} \quad \text{so wird } x=\tfrac{91}{72}$$
$$\text{III.)}\quad n=\tfrac{91}{72} \quad \text{so wird } x=\tfrac{1126819}{894348}$$

228.

Diese Methode kann mit gleichem Fortgang gebraucht werden um die Wurzel aus allen Gleichungen durch Näherungen zu finden. Es sey zu diesem Ende die folgende allgemeine Cubische Gleichung gegeben

$$x^3 + axx + bx + c = 0,$$

wo *n* einer Wurzel derselben schon ziemlich nahe kommt; man setze daher $x = n - p$ und da *p* ein Bruch seyn wird, so laße man *pp* und die höhern Potestäten davon weg; solcher gestalt bekommt man $xx = nn - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3nnp$, woraus diese Gleichung entsteht:

$$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0,$$

oder

$$n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)\,p:$$

dahero $p = \frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$ und folglich bekommen wir für *x* folgenden genaueren Werth $x = n - \left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right) = \frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für *n,* so erhält man dadurch einen, der der Wahrheit noch näher kommt.

229.

Es sey z. E. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, dahero wann *n* einer Wurzel schon nahe kommt, so wird ein noch näherer Werth seyn $x = \frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$. Nun aber kommt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; dahero setze man $n = 3$ so bekommt man $x = \frac{61}{21}$. Wollte man nun diesen Werth wiederum für *n* schreiben, so Würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

230.

Von höheren Gleichungen wollen wir nur dieses Exempel beyfügen $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß sey. Es sey aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4 p$ und also $n^5 + 5n^4 p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4 p - 6p = 6n + 10 - n^5$ und folglich $p = \frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$ und dahero $x = \frac{4n^5+10}{5n^4-6}$.
Man setze nun $n = 1$ so wird $x = \frac{14}{-1} = -14$, welcher Werth gantz ungeschickt ist, so daher rührt daß der nahe Werth *n* gar zu klein war, man setze dahero $n = 2$ so wird , welcher der Wahrheit schon weit näher kommt. Wollte man sich nun die Mühe geben, und für *n* diesen Bruch $\frac{69}{37}$ schreiben, so würde man zu einem noch weit genauern Werth der Wurzel *x* gelangen.

231.

Dieses ist nun die bekanteste Art die Wurzeln der Gleichung durch Näherungen zu finden, welche auch in allen Fällen mit Nutzen kann angebracht werden.

Jedoch wollen wir noch eine andere Art anzeigen welche wegen der Leichtigkeit der Rechnung unsere Aufmercksamkeit verdienet. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von Zahlen suche, als *a, b, c,* etc. die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt den Werth der Wurzel um so viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzet.

Laßt uns setzen, wir seyen damit schon gekommen bis zu den Gliedern *p, q, r, s, t,* etc. so muß die Wurzel $x$ schon ziemlich genau anzeigen, oder $\frac{q}{p}$ es wird seyn $\frac{q}{p}=x$ beyläufig.

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q}=x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p}=xx$. Da ferner auch $\frac{s}{r}=x$ so wird ebenfals $\frac{s}{p}=x^3$ und da weiter $\frac{t}{s}=x$ so wird ; $\frac{t}{p}=x^4$ und so weiter.

232.

Um dieses zu erläutern, wollen wir mit dieser Quadratischen Gleichung anfangen $xx=x+1$, und in der obgedachten Reihe von Zahlen kämen nun diese Glieder vor *p, q, r, s, t,* etc. Da nun $\frac{q}{p}=x$ und $\frac{r}{p}=xx$, so erhalten wir daraus diese Gleichung: $\frac{r}{p}=\frac{q}{p}+1$ oder $q+p=r$. Eben so wird auch seyn $s=r+q$ und $t=s+r$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied unserer Reihe Zahlen die Summe ist der beyden vorhergehenden, wodurch die Reihe so weit man will leicht kann fortgesetzt werden, wann man nur einmahl die zwey ersten Glieder hat; dieselben aber kann man nach Belieben annehmen. Dahero setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also herauskommen: $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,$ etc. wo von den entfernteren Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt den Werth für $x$ so viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgesetzt. Von Anfang ist zwar der Fehler sehr groß, wird aber je weiter man geht geringer. Diese der Wahrheit immer näher kommende Werthe für $x$ gehen demnach fort wie folget:

$$x=\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{144}{89},\ \text{etc.}$$

wovon z. E. $x=\frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169}=\frac{21}{13}+1=\frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt, die folgende Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

233.

Laßt uns nun auch diese Gleichung betrachten $xx=2x+1$, und weil allezeit $x=\frac{q}{p}$ und $xx=\frac{r}{p}$, so erhalten wir $xx=\frac{2q}{p}+1$, oder $r=2q+p$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied doppelt genommen nebst dem vorhergehenden das folgende giebt. Wann wir also wiederum mit 0, 1 anfangen so bekommen wir die folgende Reihe:

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408 \text{ etc.}$$

daher der gesuchte Werth von $x$ immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird,

$$x = \tfrac{1}{0},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{12}{5},\ \tfrac{29}{12},\ \tfrac{70}{29},\ \tfrac{169}{70},\ \tfrac{408}{169} \text{ etc.}$$

welche folglich dem wahren Werth $x = 1+\sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer

$$\tfrac{1}{0},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{7}{5},\ \tfrac{17}{12},\ \tfrac{41}{29},\ \tfrac{99}{70},\ \tfrac{239}{169} \text{ etc.}$$

von welchen $\tfrac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\tfrac{9801}{4900}$, so nur um $\tfrac{1}{4900}$ größer ist als 2.

234.

Bey höhern Gleichungen findet diese Methode ebenfalls statt, als wann diese Cubische Gleichung gegeben wäre: $x^3 = xx + 2x + 1$ so setze man $x = \tfrac{q}{p}$, $xx = \tfrac{r}{p}$ und $x^3 = \tfrac{s}{p}$, und da bekommt man $s = r + 2q + p$, woraus man sieht wie man aus drey Gliedern $p$, $q$ und $r$ das folgende $s$ finden soll, wo man wiederum den Anfang nach Belieben machen kann, eine solche Reihe wird demnach seyn

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 6,\ 13,\ 28,\ 60,\ 129 \text{ etc.}$$

woraus folgende Brüche den Werth für $x$ immer genauer geben werden

$$x = \tfrac{0}{0},\ \tfrac{1}{0},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{3}{1},\ \tfrac{6}{3},\ \tfrac{13}{6},\ \tfrac{28}{13},\ \tfrac{60}{28},\ \tfrac{129}{60} \text{ etc.}$$

wovon die ersten gräulich fehlen, dieser aber $x = \tfrac{60}{28} = \tfrac{15}{7}$ in der Gleichung giebt $\tfrac{3375}{343} = \tfrac{225}{49} + \tfrac{30}{7} + 1 = \tfrac{3388}{343}$ wo der Fehler $\tfrac{13}{343}$ ist.

235.

Es ist aber hier wohl zu bemercken, daß nicht alle Gleichungen so beschaffen sind, daß man darauf diese Methode anwenden könne; insonderheit wo das zweyte Glied fehlt, kann dieselbe nicht gebraucht werden. Dann es sey z. E. $xx = 2$ und man wollte setzen $x=\frac{q}{p}$ und $xx=\frac{r}{p}$ so würde man bekommen $\frac{r}{p}=2$ oder $r=2p$ das ist $r=0q+2p$, woraus diese Reihe Zahlen entstünde:

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 8,\ 16,\ 16,\ 32,\ 32 \text{ etc.}$$

daraus nichts geschloßen werden kann, indem ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, entweder $x=1$ oder $x=2$ giebt. Es kann aber diesem geholfen werden, wann man setzt $x=y-1$: dann bekommt man $yy-2y+1=2$, und wann man hier setzt $y=\frac{q}{p}$ und $yy=\frac{r}{p}$ so erhält man die schon oben gegebene Näherung.

236.

Eben so verhält es sich auch mit dieser Gleichung $x^3=2$, aus welcher eine solche Reihe Zahlen nicht gefunden wird, die uns den Werth von $\sqrt[3]{2}$ anzeigte. Man darf aber nur setzen $x=y-1$ um diese Gleichung zu bekommen

$$y^3-3yy+3y-1=2, \text{ oder } y^3=3yy-3y+3.$$

Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y=\frac{q}{p}$, $yy=\frac{r}{p}$ und $y^3=\frac{s}{p}$; so wird seyn $s=3r-3q+3p$; woraus man sieht, wie aus drey Gliedern das folgende zu bestimmen. Man nimmt also die drey ersten Glieder nach Belieben an, als z. E. 0, 0, 1, so bekommt man diese Reihe:

$$0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 12,\ 27,\ 63,\ 144,\ 324, \text{ etc.}$$

wovon die zwey letzten Glieder geben $y=\frac{324}{144}$ und $x=\frac{5}{4}$, welcher Bruch auch der Cubic-Wurzel aus 2 ziemlich nahe kommt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$ dagegen ist $2=\frac{128}{64}$.

237.

Bey dieser Methode ist noch ferner zu bemercken, daß wann die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, und der Anfang der Reihe also angenommen wird, daß daraus diese Wurzel herauskomme, so wird auch ein jegliches Glied derselben, durch das Vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, so sey diese Gleichung gegeben $xx=x+2$, worinn eine Wurzel ist $x=2$; da man nun für die Reihe diese Formel hat $r=q+2p$, wann man den Anfang setzt 1, 2, so erhält man diese Reihe

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \text{ etc.}$$

welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= 2$.

Eben dieses erhellet auch aus dieser Cubischen Gleichung $x^3 = xx + 3x + 9$, wovon eine Wurzel ist $x = 3$. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $8\,r + 3q + 9p$ diese Reihe

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ \text{etc.}$$

welches wieder eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= 3$.

238.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde: dann wann die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten Wurzel, und die kleinere erhält man nicht anders, als wann just der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein Exempel deutlich werden. Es sey die Gleichung $xx = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln sind $x = 1$ und $x = 3$. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$ und setzt man für den Anfang derselben 1, 1, nemlich für die kleinere Wurzel, so wird die gantze Reihe 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worinn die größere Wurzel enthalten, so wird die Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, wie man will, nur daß darin die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie aus folgenden Reihen zu sehen:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| der Anfang sey | 0, | 1, | 4, | 13, | 40, | 121, | 364, | etc. | | |
| ferner | 1, | 2, | 5, | 14, | 41, | 122, | 365, | etc. | | |
| ferner | 2, | 3, | 6, | 15, | 42, | 123, | 366, | 1095, | etc. | |
| ferner | 2, | 1, | $-2$, | $-11$, | $-38$, | $-119$, | $-362$, | $-1091$, | $-3278$, | etc. |

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt immer der größern Wurzel 3 näher kommen, niemals aber der kleinem.

239.

Diese Methode kann auch so gar auf Gleichungen, die in das unendliche fortlaufen, angewendet werden, zum Exempel diene diese Gleichung

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{ etc.}$$

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen seyn muß, daß eine jede gleich sey der Summe aller vorhergehenden, woraus diese Reihe entsteht

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \text{etc.}$$

woraus man sieht, daß die größte Wurzel dieser Gleichung sey $x = 2$, gantz genau; welches auch auf diese Art gezeigt werden kann. Man theile die Gleichung durch $x^\infty$, so bekommt man $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ etc. welches eine Geometrische Progression ist, davon die Summe gefunden wird $= \frac{1}{x-1}$ also daß $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicire mit $x-1$, so wird $x-1=1$ und $x = 2$.

240.

Außer diesen zwey Methoden die Wurzel der Gleichung durch Näherung zu finden, trift man hin und wieder noch andere an, welche aber entweder zu mühsam, oder nicht allgemein sind. Vor allen aber verdienet die hier zuerst erklärte Methode den Vorzug, als welche auf alle Arten von Gleichungen mit erwünschtem Erfolg kann angewendet werden, dahingegen die andere öfters eine gewisse Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieselbe nicht einmahl gebraucht werden kann, wie wir hier bey verschiedenen Exempeln dargethan haben.

ENDE DES ERSTEN ABSCHNITTS
VON DEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN
UND DERSELBEN AUFLÖSUNG