CHAPTER 5

ON THE SOLUTION OF PURE QUADRATIC EQUATIONS.

61.

An equation is known to be quadratic, if the square or the second power of that arises, but only if no higher power of that can be found therein. For if the third power of that should arise then such an equation at once will be considered to be a cubic, the solution of which requires special rules.

62.

Only three terms arise in a quadratic equation :

The unknown number is not contained in the first such term, or which alone can be taken from all the known numbers together.

The second such term, in which only the first power of the unknown arises.

And the third such term, in which the square of the unknown number is contained.

Thus if x indicates the unknown number, and moreover the letters *a, b, c, d* etc. put in place the known numbers, then the terms of the first kind have the form *a,* the terms of the second kind have the form *bx,* and the terms of the third kind have the form *cxx.*

63.

The usefulness has been seen already, that two or more terms of a single kind can be contracted together into one, or treated as a single term.

Thus this form $axx-bxx+cxx$ can be seen as a single term, and thus on setting $(a-b+c)xx$, because $a-b+c$ can be expressed as a single number.

Also if such terms should be found on both sides of the sign = , as it has been seen already, as the same has been taken to one side, and can be considered as one :

Thus if this equation arises

$$2xx-3x+4=5xx-8x+11;$$

then on firstly subtracting 2*xx,* thus becoming $-3x+4=3xx-8x+11$; afterwards adding 8*x,* thus one has $5x+4=3xx+11$, and subtracting 11 gives $3xx=5x-7$.

64.

Also all the terms can be brought to one side of = sign, so that 0 can be put on the other side ; whereby it is to be observed, that if a term is to be taken from one side to the other, its sign must be changed.

Thus this form arises in the above equation $3xx-5x+7=0$ and so also in general any one quadratic equation can be turned into this form

$$axx\pm bx\pm c=0$$

where the sign $\pm$ will be called plus or minus, in order to indicate that each term can be either positive or negative.

65.

It may be that a quadratic equation can adopt any form at the start, but the same yet can still be reduced to three terms only; For example, if one has been given this equation :

$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ex+f}{gx+h}$, before all else the fractions must be removed. Thus on multiplying by $cx+d$ thus there is found $ax+b=\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, multiplying by $gx+h$, gives

$$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd$$

which is a quadratic equation, and which can be brought to the three following terms, if all were put to one side, and which thus one is accustomed to write under each other :

$$\begin{array}{l} 0=agxx+bgx+bh \\ \quad -cexx+ahx-fd \\ \qquad\quad -cfx \\ \qquad\quad -edx \end{array}$$

or in order still to put the same clearly in place

$$0=(ag-ce)xx+(bg+ah-cf-ed)x+bh-fd\,.$$

66.

Suchlike quadratic equations in which all three terms shall be present, are understood to be complete, and the solution of the same is also undertaken with greater difficulty, therefore initially we will consider such equations, in which one of the three terms is missing. Now the term *xx* cannot be lacking, or the equation would not be a quadratic and belongs to the above kind ; but should that term be missing, which contains known numbers, thus the equation hence would appear $axx\pm bx=0$, where one can divide through by *x* and from that the equation arises $ax\pm b=0$, which is again a simple equation and does not belong here.

67.

But if the middle term, thus containing only the first power of *x* is missing, hence the equation adopts this form $axx\pm c=0$, or $axx=\mp c$, it is now necessary that *c* has the sign + or −.

Such an equation is known as a pure quadratic, because its solution is undertaken with little difficulty. Then one must divide by *a*, hence having $xx=\frac{c}{a}$; and the square root of both sided are taken, thus one has $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$; whereby the equation is resolved.

68.

Here there are now three cases to consider. The first, if $\frac{c}{a}$ is a square number, of which the root can actually be shown ; then the value of *x* is obtained being expressed by a rational number, the same may be whole or fractional.

Thus from this equation $xx=144$ there arises $x=12$, and from this

$xx = \frac{9}{16}$ on obtains $x = \frac{3}{4}$.

The second case is, if $\frac{c}{a}$ is not a square number, since then each must be content with the square root sign $\surd$.

Thus if $xx = 12$ then there will be $x = \sqrt{12}$, from which the value can be taken by an approximation, as we have seen already seen. But it is the third : even a negative number, thus the value of x will be indicated to be completely impossible or imaginary, that the question shown from such an equation is itself to be impossible.

69.

Before we go any further it is still worth noting that whenever the square root of a number must be taken, that the same always contains a double value and thus can be taken as having a positive as well as a negative value, as we have already seen above.

Thus if you come upon this equation $xx = 49$, then the value of x is not only + 7 but also −7 and it is customary thus to be indicated by $x = \pm 7$, from which it is apparent, that all these questions are allowed a double value, but in may cases as for example where the question depends on a number of men, the negative case − has no meaning.

70.

Also from the preceding case, where the constant value is missing, the equation $axx = bx$ does not allow two values for x to be found, but only one is found easily if the equation is divided by x. Then if e.g. the equation arising were $xx = 3x$ where one such value for x shall be given, which makes xx equal to $3x$, then this happens, if one puts $x = 3$, which value arises here, if one divides through by x, but there is yet another value which is equally satisfactory, that is, $x = 0$; since then there will be $xx = 0$ and $3x = 0$. It is to be noted that for all quadratic equations two solutions are to be found, while no more than one solution can be found in equations of the first degree.

We will now clarify these quadratic equations by some examples.

71.

I. Question: It is required to find a number, half of which multiplied by its $\frac{1}{3}$ rd part gives 24 ?

Let this number be $= x$, thus $\frac{1}{2}x$ multiplied by $\frac{1}{3}x$ becomes 24 , from which this equation arises $\frac{1}{6}xx = 24$.

Multiplied by 6 the equation becomes $xx = 144$ and the square root taken gives $x = \pm 12$.

Then if $x = +12$, thus $\frac{1}{2}x = 6$ and $\frac{1}{3}x = 4$, from which the product is 24.

Likewise if $x = -12$ thus $\frac{1}{2}x = -6$ and $\frac{1}{3}x = -4$ and the product from that also is 24.

72.

II. Question: It is required to find a number, if initially to the same 5 is added and then 5 taken away, and the sum multiplied by the difference, from which 96 arises ?

Let the number be x , thus $x+5$ multiplied by $x-5$ must give 96, from which the equation arises $xx-25=96$.

Adding 25 thus there becomes $xx=121$ and taking the square root, $x=11$, then there will be $x+5=16$ and $x-5=6$. Moreover now $6\cdot 16 \;=96$.

73.

III. Question: It is required to find a number, that if in the first place 10 be added to it, , then also 10 may be taken away, that sum multiplied by that difference gives 51 ?

The number shall be x so that $10+x$ multiplied by $10-x$ must give 51, from which this equation arises $100-xx=51$.

On adding xx and subtracting 51, thus there becomes $xx=49$, from which the square root indicates $x=7$.

74.

IV. Question: Three people have money between them [perhaps winnings in a card game, etc.]; thus as often as the first person has 7 Rthl., the second has 3 Rthl., and as often as the second person has 17 Rthl., the third person has 5 Rthl., so that I multiply the money of the first by the money of the second, and the money of the second with the money of the third, and finally the money of the third with the money of the first : then these three products are added together, so that the sum is $3830\frac{2}{3}$. How much money did each person have ?

Putting the first to have x Rthl. and since it is said, that as often as the first has 7 Rthl. , thus the second has 3 Rthl. thus it can also be said, that the money of the first to the money of the second, to be in the ratio 7:3. Thus putting $7:3=x$ to the money of the other, which shall be as $\frac{3}{7}x$. Further since the money of the second to the money of the third shall be as 17: 5, thus putting $17:5=\frac{3}{7}x$ to the money of the third, which becomes $\frac{15}{119}x$. Now multiplying the money of the first x with the money of the second $\frac{3}{7}x$ thus the product becomes $=\frac{3}{7}xx$.

Further the money of the second $\frac{3}{7}x$ multiplied by the money of the third $\frac{15}{119}x$ gives $\frac{45}{833}xx$.

And finally the money of the third $\frac{15}{119}x$ multiplied by the money of the first x gives $\frac{45}{833}xx$. These three products added together make

$$\frac{3}{7}xx+\frac{45}{833}xx+\frac{15}{119}xx$$

which brought under one denominator, gives $\frac{507}{833}xx$, to which the number $3830\frac{2}{3}$ must be set equal.

Thus one has $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{2}{3}$, multiplied by 3 so that one has $\frac{1521}{833}xx = 11492$, further multiplied by 833 gives $1521xx = 9572836$ and divided through by 1521, becomes $xx = \frac{9572836}{1521}$ from which with the square root taken, gives $x = \frac{3094}{39}$, which fraction can be reduced on dividing by 13 and that becomes $x = \frac{238}{3}$, or $x = 79\frac{1}{3}$; therefore further one obtains $x = \frac{238}{3}$ and $\frac{15}{119}x = 10$.

Answer : Thus the first had $79\frac{1}{3}$ Rthl., the second 34 Rthl. and the third 10 Rthl.

To be noted: this calculation can be established more easily, if the numbers arising are resolved into their factors, and whereby especially into their noted squares :

Thus there is $507 = 3 \cdot 169$, where 169 is the square of 13 ; further $833 = 7 \cdot 119$ and $119 = 7 \cdot 17$ since now one has $\frac{3}{17} \cdot \frac{169}{49}xx = 3830\frac{2}{3}$ thus multiplying by 3, there arises $\frac{9}{17} \cdot \frac{169}{49}xx = 11492$. This number can be split up into its three factors, of which the first 4 can be seen at once, thus so that $11492 = 4 \cdot 2873$; further 2873 can be divided by 17 and becomes $2873 = 17 \cdot 169$, therefore our equation thus can be seen: $\frac{9}{17} \cdot \frac{169}{49}xx = 4 \cdot 17 \cdot 169$, which divided by 169 becomes : $\frac{9}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17$; further multiplied by $17 \cdot 49$ and divided by 9 gives $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, where all the factors are square and thus the root will be $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$ as above.

75.

V. Question: Several businessmen have hired a factor, sending him to Archangel to maintain a business, and each has expended ten times as many Rthl. as the number of businessmen for the trade they have in mind. The factor's profit in Rthl. shall be fixed at twice the number of businessmen as a percent. Then if the $\frac{1}{100}^{\text{th}}$ part of the whole profit is multiplied by $2\frac{2}{9}$ then the number of associates arises. How many were there of them?

The number of associates shall be $= x$ and since each one has contributed $10x$ Rthl., thus the whole capital $= 10xx$ Rthl. Now the profit of the factor for each 100 Rthl. shall be $2x$ Rthl. consequently he profits by $\frac{1}{5}x^3$ from the whole capital of $10xx$. The $\frac{1}{100}^{\text{th}}$ of these profits is therefore $\frac{1}{500}x^3$, which multiplied by $2\frac{2}{9}$, that is by $\frac{20}{9}$, gives $\frac{20}{4500}x^3$, or $\frac{1}{225}x^3$ which must be equal to the number of partners x.

Thus this equation is had $\frac{1}{225}x^3 = x$, or $x^3 = 225x$, which is seen to be a cubic, but since it can be divided by x , thus this quadratic arises from this: $xx = 225$ and $x = 15$.

Answer: Therefore in all there were 15 partners and each one laid out 150 Rthl.

CHAPTER 6

ON THE RESOLUTION OF MIXED QUADRATIC EQUATIONS

76.

A quadratic equation is known as mixed, if within itself three terms occur, namely such as which contains the unknown square of the unknown number itself, as axx; then also such as in which the unknown number itself occurs, as bx, and finally such a term, which shall be composed from known numbers. Now since two or more terms of one kind can be taken together, and all can be brought to one side of the sign = , hence the form of the equation thus will be provided:

$$axx \mp bx \mp c = 0 .$$

Now in this chapter we should be able to find the value of x from such equations, to which end two ways are followed.

77.

Such an equation thus can be arranged by division, so that the first term alone simply contains the square of the unknown number xx ; then the second term is allowed to stay on the same side as xx , but the known term is taken to the other side. Our equation now adopts such a form to become $xx \pm px = \pm q$, where p and q indicate known numbers, either positive or negative ; and everything arises from that at once, as the true value of x may be found. Whereby it is to be noted initially, that if $xx + px$ were actually a perfect square, the solution would be had without any trouble, as it is only needed to take the square root of both sides.

78.

But it is clear, that $xx + px$ cannot be a square, as we have seen above, that if the root consists of two terms, e.g. $x + n$, the square from that contains three terms, namely the square of each part, as well as twice the product of both parts, thus so that the square of $x + n$ shall be $xx + 2nx + nn$. Since we now have on one side already $xx + px$ thus we know xx is seen to be the square of the root, and that px must be twice the product of the first part of the root x with that second part ; therefore the second part must be $\frac{1}{2}p$, as then in that amount the square of $x + \frac{1}{2}p$ is found to be $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Now since $xx + px + \frac{1}{4}pp$ is a real square, from which the root is $x + \frac{1}{2}p$, so we must add $\frac{1}{4}pp$ to both sides of our equation $xx + px = q$ and then we have

$xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp,$ were on the first side there is a real square, but on the other side only known numbers are found. Therefore if we take the square roots of both sides , thus we obtain $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; now taking $\frac{1}{2}p$, thus there is obtained $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; und since each square root thus can be taken both positive and negative, thus two values are found for *x*, which thus accustomed to be expressed in this form:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$$

80.

Now the rules are obtained in this form, after which all quadratic equations can be solved, and with that there is no need to put in place the above operation anew, thus it is necessary, that the contents of this formula are well impressed in the memory. Thus the equation can be so ordered, so that the square itself *xx* can be standing on one side, whereby the above equation adopts this form :

$$xx=-px+q$$

from which the value of x can be written in the form :

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}\,.$$

81.

Hence this general rule will be used to solve the equation

$$xx=-px+q\,.$$

Namely it can be seen, that the unknown number *x* will be equal to half the number, by which *x* on the other side is multiplied, and in addition to that still + or − the square root made from the sum of the square of the number that has just been written, and of the third constant term of the equation.

Therefore if this equation arose, $xx=6x+7$, thus one has at once $x=3\pm\sqrt{(9+7)}=3\pm4$: consequently the two values of *x* will be :

$$\text{I.)}x=7,\ \text{and}\ \ \text{II.)}\ \ x=-1\,.$$

If this was the equation : $xx=10x-9,$ thus $x=5\pm\sqrt{(25-9)}$, which $=5\pm4$; therefore the two values solutions are $x=9$ und $x=1$.

82.

In order to give further understanding of this rule, the following cases can be undertaken:

I.) if p is an even number, II.) if p is an odd number, and III.) if p is a fractional number.

I.) Let p be an even number and the equation thus becomes: $xx = 2px + q$, thus giving $x = p \pm \sqrt{(pp + q)}$.

II.) Let p be an odd number and the equation becomes $xx = px + q$, since then, the solution becomes

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + q)}$$

since now $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, but from the denominator 4 the square root can be taken, thus the solution becomes

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp+4q)}}{2}, \text{ or } x = \frac{p \pm \sqrt{(pp+4q)}}{2}.$$

III.) But if p may be a fraction, then the solution can be seen to have the following form. Let the quadratic equation be :

$$axx = x + c, \text{or } xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

thus following the rule :

$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}\right)}$. But now since $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb+4ac}{4aa}$

and since here the denominator is a square, thus the solution is $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb+4ac)}}{2a}$.

83.

The other way which also leads to this solution, consists in changing the quadratic equation , namely :

$$xx = px + q$$

by a pure transformation, which happens, if instead of the unknown number x another y is introduced into the calculation, thus so that $x = y + \frac{1}{2}p$; since then, if y were found, thus equally the value of x is obtained.

Now writing $y + \frac{1}{2}p$ in place of x, thus $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ and $px = py + \frac{1}{2}pp$ *:* from which our equation thus becomes :

$$yy + py + \tfrac{1}{4}pp = py + \tfrac{1}{2}pp + q;$$

initially subtracting py, giving $yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$, further taking away $\frac{1}{4}pp$, gives $yy = \frac{1}{4}pp + q$, which is a pure quadratic equation, from which there is obtained at once $y = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$.

Now since $x = y + \frac{1}{2}p$, thus there becomes $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$, as we have found already above. There is nothing left than to give some examples to illustrate this rule.

84.

I. Question: I have two numbers ; the first is greater than the other by 6 and their product makes 91, what are these numbers? The smaller number shall be *x,* so that the greater is $x+6$ and their product is :

$$xx + 6x = 91.$$

Taking away 6*x,* thus one has $xx = -6x + 91$, and according to the rule

$$x = -\,3 \pm \sqrt{(9+91)} = -\,3 \pm 10,$$

therefore one has either $x = 7$ or $x = -13$.
Answer: the question has two solutions: according to the first, the smaller number $x = 7$ and the greater is $x + 6 = 13$. But according to the second, the smaller is $x = -13$ and the greater is $x + 6 = -7$.

85.

II. Question: Find a number that if I take 9 from its square, that equally remains just as much greater than 100 as my number again is less than 23; what is the number?
The number shall be *x,* so that $xx - 9$ is over 100 by $xx - 109$. But the number sought *x* is less than 23 by $23 - x$*;* from which this equation arises

$$xx - 109 = 23 - x.$$

Adding 109 thus $xx = -x + 132$ following the rule

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} + 132\right)} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{529}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{23}{2}.$$

Thus the number is either $x = 11$, or $x = -12$.
Answer: Now if a positive answer were required, thus the number sought is 11 of which the square less 9 makes 112, thus greater than 100 by 12 , and the number found is less than 23 by just the same 23.

86.

III. Question: Find a number which if I multiply its half by its third and add half the number to be found to the product, so that 30 arises?
Let *x* be this number, from which its half multiplied by its third gives $\frac{1}{6}xx$; also there must be $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30$; multiplying 6, $xx + 3x = 180$, or $xx = -3x + 180$, from which there is found

$$x=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{9}{4}+180\right)}=-\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{27}{2}.$$

Therefore there is either $x=12$ or $x=-15$.

87.

IV. Question: Find two numbers in the proportion two to one, which give 90 if I add their sum to their product ?

Let the number be *x*, thus the greater will be 2*x*, and their product 2*xx,* to that their sum 3*x* added must give 90. Also $2xx+3x=90$, and taking away 3*x*,

$$2xx=-3x+90$$

which divided by 2 gives $xx=-\tfrac{3}{2}x+45;$ from which, according to the rule, there becomes

$$x=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\left(\tfrac{9}{4}+45\right)}=-\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{27}{4}.$$

Therefore either $x=6$ or $x=-7\tfrac{1}{2}$.

88.

V. Question: Someone buys a horse for so many Rthl. again sells the same for 119 Rthl. and the percentage of his gain is as much as the horse cost, the question is, how expensive was the horse to buy?

The horse had cost *x* Rthl. and because from that he profited by *x* per cent, thus to be considered: from 100 he gains *x,* how much does he gain from *x?* The answer : $\tfrac{xx}{100}$.
Since he now has gained by $\tfrac{xx}{100}$, but the purchase price had been *x*, thus he must have sold the same for $x+\tfrac{xx}{100}$. Therefore $x+\tfrac{xx}{100}=119$.

Subtracting *x,* thus there becomes $x=-\tfrac{xx}{100}+119$ and multiplying by 100, giving $xx=-100x+11900$, from which following the rule there will be found:

$$x=-50\pm\sqrt{\left(2500+11900\right)}=-50\pm\sqrt{14400}=-50\pm 120.$$

Answer: Thus the horse had cost 70 Rthl. because he now had made from that 70 percent, thus the gain was 49 Rthl., and thus he must have sold the same for $70+49$, that is for 119 Rthl., as actually happened.

89.

VI. Question: Someone bought a certain number of pieces of cloth: the first for 2 Rthl., the second for 4 Rthl., the third for 6 Rthl., and always 2 Rthl. more for the following, paying 110 Rthl. for all the pieces. How many pieces of cloth were there ?

Let there be x pieces of cloth, and how much he paid for each is shown in the following table:

for the	1.	2.	3.	4.	5. . . .	x.
cost him	2,	4,	6,	8,	10 ...	$2x$ Rthl.

Thus this arithmetic progression which consists of x terms $2+4+6+8+10+\cdots 2x$ must be added up, in order to find the cost of all the pieces of cloth taken together.

Thus according to the rule given above, the first and last terms must be added together, so that $2x+2$ is found. This is multiplied by the number of terms x, thus twice the sum is arrived at $2xx+2x$. Therefore the sum itself will be $xx+x$, which must be equal to 110, or $xx+x=110$.

Taking away x, thus giving $xx=-x+110$ consequently

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+110\right)}=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{441}{4}}$$

or

$$x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{21}{2}=10.$$

Answer: 10 pieces of cloth were bought.

90.

VII. Question : Someone buys some pieces of cloth for 180 Rthl. ; were there 3 more pieces for that amount of money, then the cost per piece would have been 3 Rthl. cheaper. How many pieces were there ?

Suppose there are x pieces, so that the cost per piece is $\frac{180}{x}$ Rthl. But had he got $x+3$ pieces for 180 Rthl., then the cost per piece would have been $\frac{180}{x+3}$ Rthl., which price is smaller by 3 Rthl., than the actual price, from which this equation is obtained:

$$\tfrac{180}{x+3}=\tfrac{180}{x}-3.$$

Multiply by x, thus there arises $\frac{180x}{x+3}=180-3x$, divide by 3, giving $\frac{60x}{x+3}=60-x$, multiply by $x+3$, there will be $60x=180+57x-xx$, adding xx, thus becoming $xx+60x=180+57x$. Taking away $60x$, thus finding $xx=-3x+180$. From this according to the rule :

$$x=-\tfrac{3}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{9}{4}+180\right)},\ \text{or}\ x=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{27}{2}=12.$$

Answer: Thus 12 pieces have been bought for 180 Rthl., therefore one cost 15 Rthl. But had one bought 3 more pieces, namely receiving 15 pieces for 180 Rthl., thus one piece has a cost of 12 Rthl., consequently 3 Rthl. less than in that case.

91.

VIII. Question: Two businessmen have formed a partnership, outlaying together 100 Rthl., the first lays out his money for a time of 3 months, but the other is in place for 2 months, and each one has drawn 99 Rthl. in capital and profits : how much did each outlay ?

The first had outlaid x Rthl. and thus the other $100-x$; now since the first got back 99 Rthl., thus his profit is $99-x$, which has been acquired in 3 months with the capital x, since the other also has a return of 99 Rthl., thus his gain was $x-1$, which has been in acquired in two months with the capital $100-x$; with just the same capital $100-x$ thus in three months his profit would have been $\frac{3x-3}{2}$. Now these profits shall be proportional to their capitals, namely that capital is itself in proportion to that profit, as this capital to this profit; thus

$$x : 99-x = 100-x : \tfrac{3x-3}{2}.$$

Setting the product of the outers equal to the product of the inners, thus one has $\frac{3xx-3x}{2} = 9900-199x+xx$ and multiplying by 2

$$3xx-3x = 19800-398x+2xx;$$

taking away $2xx$ thus coming to $xx-3x = 19800-398x$ and $3x$ added :

$$xx = -\,395x+19800.$$

Therefore following the rule :

$$x = -\tfrac{395}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{156025}{4} + \tfrac{79200}{4}\right)} \quad \text{that is} \quad x = -\tfrac{395}{2} + \tfrac{485}{2} = \tfrac{90}{2} = 45.$$

Answer: Thus the first had outlaid 45 Rthl. and the second 55 Rthl., with which 45 Rthl. the first in 3 months had a return of 54 Rthl. would therefore have a return of 18 Rthl. in a month. But the other with 55 Rthl. in 2 months gained 44 Rthl. would thus have gained by 22 Rthl. in a month which also agrees with that ; for if 45 Rthl. gained 18 in a month, then 55 in the same time would gain 22 Rthl.

92.

IX. Question: Two peasant ladies take 100 eggs altogether to the market, but one has more than the other, and yet both get the same amount of money. Says the first to the other: if I'd had your eggs to sell, than I would have got 15 Kreuzer [a small unit of currency] ; to which answered the other: if I'd had your eggs to sell, then I would have got $6\frac{2}{3}$ Kreutzer ; how many eggs did each one have ?

Assume the first had x eggs and the other $100-x$.

Thus since now the first would have sold $100-x$ eggs for 15 Kreuzer , thus putting in place this rule of three :

$$100-x:15 = x \text{ to } \ldots. \text{ Answer } \tfrac{15x}{100-x} \text{ Kreuzer.}$$

Just as for the other who would have sold x eggs for $6\frac{2}{3}$, it can be found how much she made from selling her $100-x$ eggs,

$$x:\tfrac{20}{3} = 100-x \text{ to } \ldots. \text{ Answer } \tfrac{2000-20x}{3x}.$$

Since now both the peasant had gained an equal amount of money, thus we find this equation:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x},$$

multiplying by $3x$, gives $2000-20x = \frac{45xx}{100-x}$, then by $100-x$, giving $45xx = 200000-4000x+20xx$, taking away $20xx$, $25xx = 200000-4000x$, dividing by 25 gives $xx = -160x+8000$, therefore according to the rule

$$x = -80+\sqrt{(6400+8000)} = -80 \ +120 = 40.$$

Answer: the first peasant thus had 40 eggs, and the other 60 eggs and each had profited by 10 Kreuzer.

93.

X. Question: Two merchants sell some yards of cloth, the second 3 yards more than the first, and together they realize 35 Rthl. Says the first to the second: from your amount I would have made 24 Rthl. ; answered the second: thus from yours I would have made $12\frac{1}{2}$ Rthl. : how many yards did each have ?

The first had originally had x yards, consequently the other had $x+3$ yards. Since now the first would have profited by 24 Rthl. from $x+3$ yards, thus he must have sold his x yards for $\frac{24x}{x+3}$ Rthl., and since the other would have sold his x yards for $12\frac{1}{2}$ Rthl., thus he would have sold his $x+3$ yards for $\frac{25x+75}{2x}$ and thus both had made the same profit $\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x} = 35$ Rthl. Thus,

$$\frac{48xx}{x+3}+25x+75 = 70x \text{ or } \frac{48xx}{x+3} = 45x-75,$$

multiplied by $x+3$ becomes $48xx = 45xx + 60x - 225$, taking 45*xx,* thus there remains $3xx = 60x - 225$ or $xx = 20x - 75$.

Therefore

$$x = 10 \pm \sqrt{(100-75)} = 10 \pm \sqrt{25}, \text{ thus } x = 10 \pm 5.$$

Answer: Therefore there are two solutions. According to the first solution, the first merchant has 15 yards, and the second 18 yards; because now the first had sold 18 yards for 24 Rthl., thus instead he would have sold 15 for a return of 20 Rthl. But the other had made $12\frac{1}{2}$ Rthl. from 15 yards, thus he would have made 15 Rthl. from his 18 yards, thus together they profit by 35 Rthl.

According to the other solution the first merchant had 5 yards, consequently the other thus had 8 yards, and as the first had sold 8 yards for 24 Rthl. and thus he had made a profit of 15 Rthl. from his 5 yards. The second had sold 5 yards for $12\frac{1}{2}$ Rthl. and thus he would have made a profit of 20 Rthl. from his 8 yards, consequently both again had made 35 Rthl.

CAPITAL 7

THE EXTRACTION OF THE ROOTS OF POLYGONAL NUMBERS

We have shown above [I, § 425-439], how polygonal numbers may be found; but what we have called there a side may also be called a root. Now if the root may be indicated by *x*, thus the polygonal numbers of the following form be able to be found.

The 3-gon, or the triangular no., which is	$\frac{xx+x}{2}$
" 4-gon, " " " " " "	xx
" 5-gon, " " " " " "	$\frac{3xx-x}{2}$
" 6-gon, " " " " " "	$2xx-x$
" 7-gon, " " " " " "	$\frac{5xx-3x}{2}$
" 8-gon, " " " " " "	$3xx-2x$
" 9-gon, " " " " " "	$\frac{7xx-5x}{2}$
" 10-gon, " " " " " "	$4xx-3x$
" n-gon, " " " " " "	$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$.

[Note: in modern terms, if *s* is the number of sides in a polygon, the formula for the n^{th} *s*-gonal number $P(s,n)$ is

$$P(s,n)=\frac{n^2(s-2)-n(s-4)}{2}.]$$

95.

Through the help of these formulas it is now easy to find, for any given side or root, a desired polygonal number to be like as great as the number of sides, as has been shown well enough above already. But, if conversely, a polygonal number of a given number of sides is given, thus it is generally more difficult to find the root or the side of that, and for that the solution of quadratic equations is required, therefore this matter deserves to be examined here separately. We will therefore follow the order beginning with triangular numbers, and progress to more sided figures.

96.

Accordingly, 91 shall be the given triangular number, from which the side or root shall be sought.

Now putting this root $=x$ thus $\frac{xx+x}{2}$ must be equal to 91 : multiplying by 2 thus obtaining $xx+x=182$, from which there becomes $xx=-x+182$ and thus

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{(\tfrac{1}{4}+182)} \text{ consequently } x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{729}{4}}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{27}{2}=13\ ;$$

therefore the required triangular root $=13$, then the triangular number of 13 is 91.

97.

But if the given triangular number shall be of a general kind a, from which the square root must be found.

Putting the same $=x$ thus $\frac{xx+x}{2}=a$, or $xx+x=2a$, and finally $xx=-x+2a$, from which there is found $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+2a)}$, or $x=\frac{-1+\sqrt{(8a+1)}}{2}$.

From which this rule arises. The given triangular number is multiplied by 8 and 1 is added to that product, the square root is extracted from this sum, and from the same 1 is subtracted; divide the remainder by 2, so that the sought triangular root arises.

98.

From which it can be seen that all triangular numbers have this property, that if the same is multiplied by 8 and 1 added to that , a square number must always emerge from that, as can be seen in the following table,

III. Side.	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, etc.
$\times 8 + 1$:	9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, etc.

Now if the given number a cannot thus be procured, thus it is a number that itself cannot actually be a triangular number, or the root of that cannot be said to be rational.

99.

Following this rule, the triangular root can be sought of the number 210, thus $a = 210$ and $8a + 1 = 1681$ from which the square root is 41, from which it is seen, that the number 210 really is a triangular number, from which the side $= \frac{41-1}{2} = 20$.

But if the number 4 were given as a triangular number, from which the root were sought, thus the same would be $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ and thus is irrational. But it follows that actually from this root, namely $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, that a triangular number is found as follows :

Since $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ thus $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; to that x is added, to become $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, and consequently the triangular number is $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Since the quadrangular numbers are made entirely from squares, that can be done without difficulty. Then putting the given quadrangular number $= a$ and its square root $= x$, thus $xx = a$ and thus $x = \sqrt{a}$. Thus so that the square root and the quadrangular root are both the same.

101.

We will therefore proceed to the pentagonal numbers.

Now 22 is a pentagonal number and the root of the same $= x$, thus there must be $\frac{3xx-x}{2} = 22$, $3xx - x = 44$, or $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; from which it is found $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{44}{3}\right)}$, that is $x = \frac{1+\sqrt{529}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$. Thus 4 is the sought pentagonal root of the number 22.

102.

Now this question shall be proposed : if the given pentagonal number $= a$, how can the root be found from that ?

Putting the root sought $= x$, thus one arrives at this equation $\frac{3xx-x}{2} = a$, or $3xx - x = 2a$, or $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; from which it is found that $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)}$, that is

$$x = \frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}.$$

Therefore if a is an actual pentagonal number, then always $24a+1$ must be a square number. That is , e.g. if 330 is given pentagonal number, thus the root of that shall be $x = \frac{1+\sqrt{7921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15.$

103.

Now a shall be a given hexagonal number, of which the root shall be sought.
Putting this root $= x$ thus there will be $2xx - x = a$, or $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, therefore there will be found $x = \frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a\right)} = \frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}$. Thus if a is a real hexagonal number, thus $8a+1$ must be a square, from which it is seen that all hexagonal numbers can be expressed in terms of triangular numbers ; but the roots are procured otherwise. For example, let there be the hexagonal number 1225, thus the root from that shall be $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+99}{4} = 25.$

104.

Further a shall be a given heptagonal number, for which the side or root shall be sought.
Putting the root $= x$ thus one has $\frac{5xx-3x}{2} = a$, or $5xx - 3x = 2a$, thus $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$, from which there is found :

$$x = \frac{3}{10} + \sqrt{\left(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a\right)} = \frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}.$$

Therefore the roots of all heptagonal numbers are obtained thus, if these be multiplied by 40 and 9 added to the product, then sum will always be a square number.
For example if the heptagonal number 2059 be given, then the root of that is found to be $x = \frac{3+\sqrt{82369}}{10} = \frac{3+287}{10} = 29.$

105.

Now let a be a given octagonal number of which the root x must be found. Therefore one has $3xx - 2x = a$, or $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, from which it is found:

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{a}{3}\right)} = \frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}.$$

All octagonal numbers are hence thus obtained, if these be multiplied by 3 and 1 to be added, then the sum is always a square number.
For example 3816 is an octagonal number, so that the root of that will be $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{3+107}{3} = 36.$

106.

Finally let a be a given n –gon number, from which the root x shall be sought, thus on has this equation $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}=a$, or $(n-2)xx-(n-4)x=2a$, thus

$xx=\frac{(n-4)x}{n-2}+\frac{2a}{n-2}$, from which there is found $x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{2a}{n-2}\right)}$, or

$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)}$, and consequently, $x=\frac{n-4+\sqrt{\left(8(n-2)a+(n-4)^2\right)}}{2(n-2)}$.

Which formula contains a general rule according to which the roots from all given polygonal numbers can be found easily.

To enlighten these with an example, thus the 24 –gon number 3009 shall be given; since now here $a=3009$ and $n=24$, consequently $n-2=22$ and $n-4=20$ thus the root arises

$$x=\frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44}=\frac{20+728}{44}=17.$$

CHAPTER 8

THE EXTRACTION OF SQUARE ROOTS FROM BINOMIALS.

107.

A binomial in algebra is composed of two part number, either one or both of which contain the square root sign.

[This is a more specific use of the term binomial than is now the case.]

Thus $3+\sqrt{5}$ is a binomial, $\sqrt{8}+\sqrt{3}$ is the same, and it also the case if both parts are connected by + or − signs. Whereby $3-\sqrt{5}$ will be just as much a binomial as $3+\sqrt{5}$.

108.

These binomials therefore are particularly noteworthy, because one always arrives at the solution of quadratic equations such forms, whenever the solutions cannot occur [*i.e.* by factorization].

Thus for example, if this equation arose $xx=6x-4$, so that then $x=3+\sqrt{5}$. For now this situation will arise very often in algebraic reckoning, and we have already shown above, how with that the usual operations of addition, subtraction, multiplication and division must be employed. But now we will show the circumstances, how the square roots can be taken from such formulas, namely how far such extractions can occur, in that failing which only a roots sign can still be put in place, namely the square root of $3+\sqrt{2}$ is $\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)}$.

109.

Therefore in the first place it must be noted, that the square of such a binomial will be equal again to suchlike a binomial, in which thus no more than a part is rational.
Then on looking for the square of $a+\sqrt{b}$, thus the same will be $(aa+b)+2a\sqrt{b}$. Thus if from this formula $(aa+b)+2a\sqrt{b}$ moreover the square root was required, thus the same would be $a+\sqrt{b}$, which is clearly more understandable without any difficulty, than if the square root sign √ were put before each formula. Even so, if the square of this formula $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ is taken, thus the same will be $(a+b)+2\sqrt{ab}$, from which also conversely, the square root of this formula $(a+b)+2\sqrt{ab}$ will be $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ which again is more understandable, than if the $\surd$ sign were put in place.

110.

Therefore it arises from that, as a symbol is to be found, whereby in every single case it can be evaluated, if such a square root can be put in place or not. We will initially make use of an easy formula to do this, so that from this binomial $5+2\sqrt{6}$ such a form of the square root can be found.
Thus putting this root to be $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, from which the square is $(x+y)+2\sqrt{xy}$, also this square must be equal to that formula $5+2\sqrt{6}$; consequently the rational part $x+y$ must be equal to 5 and the irrational part $2\sqrt{xy}$ must be equal to $2\sqrt{6}$; therefore it is known that $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$ and the square taken $xy=6$. Now since $x+y=5$, thus from this $y=5-x$ which value of the equation $xy=6$ put in place gives $5x-xx=6$ or $xx=5x-6$, therefore $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3;$ therefore $x=3$ and $y=2$, consequently from $5+2\sqrt{6}$ the square root is $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

111.

Since here we have obtained both these equations

$$\text{I.) } x+y=5 \text{ and II.) } xy=6,$$

thus here we will show a special way, in order to find x and y from that, as follows.
Since $x+y=5$ thus taking the square $xx+2xy+yy=25$. Now it is to be observed, that $xx-2xy+yy$ is the square of $x-y$; now subtracting from that equation, namely from

$xx+2xy+yy=25$, this amount $xy=6$ taken four times or $4xy=24$, thus there is obtained $xx-2xy+yy=1$ and from this the square root $x-y=1$, thus there becomes, as $x+y=5$, there is found $x=3$ and $y=2$. Therefore the sought square root of $5+2\sqrt{6}$ shall be $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

112.

Let us consider the general binomial $a+\sqrt{b}$ and the square root of that put to be $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, thus we obtain this equation $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$, so that $x+y=a$ and $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$ or $4xy=b$ from that the square is $xx+2xy+yy=aa$, and from which $4xy=b$ is subtracted, giving $xx-2xy+yy=aa-b$, and the square root of that is $x-y=\sqrt{(aa-b)}$. Now since $x+y=a$, thus we find

$$x=\tfrac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2} \text{ and } y=\tfrac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$$

therefore the square root sought from $a+\sqrt{b}$ shall be :

$$\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}.$$

113.

This formula is of course more complicated, than if one had put the root sign $\surd$ in front of the given binomial $a+\sqrt{b}$ the hard way, namely $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. All these formulas can be made far easier, if the numbers *a* and *b* can be procured, so that $aa-b$ is a square, since then the $\surd$ within the $\surd$ disappears. From which it is known, that only in such cases of the binomial $a+\sqrt{b}$ the square root can be extracted easily if $aa-b=cc$, as then the square root sought is

$$\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-c}{2}};$$

but if $aa-b$ is not a square number, then the square root itself cannot be assigned more conveniently, than by putting in place the root sign $\surd$.

114.

Therefore we obtain this rule about expressing the square root of a binomial $a+\sqrt{b}$ in an easier way. Namely hence it is necessary that $aa-b$ shall be a square number ; now the same shall be $=cc$, thus the required square number shall be $\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-c}{2}}$; whereby it is still to be observed, that the square root of $a-\sqrt{b}$ will be $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$;. Then if the square of this formula is taken, then that will be $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$ *;* since now $cc=aa-b$, thus we have $aa-cc=b$; therefore this square becomes

$$a-2\sqrt{\tfrac{b}{4}}=a-\tfrac{2\sqrt{b}}{2}=a-\sqrt{b}.$$

115.

Thus if the square root were to be taken from such a binomial $a\pm\sqrt{b}$, thus the square of the irrational part *b* is taken from the square of the rational part *aa* ; the square root of the remainder is taken, which is $=c$, thus the square root sought is

$$\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{a-c}{2}}.$$

116.

If the square root of $2+\sqrt{3}$ is sought, thus $a=2$ and $b=3$; since $aa-b=cc=1$ and thus $c=1$: whereby the required equation is

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ .$$

Further if this binomial shall be given, $11+6\sqrt{2}$, the square root of which shall be found. Now in this case $a=11$ and $\sqrt{b}=6\sqrt{2};$ therefore $b=36\cdot 2=72$ and $aa-b=49$ consequently $c=7$. From which the square root of $11+6\sqrt{2}$ shall be $\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}.$

Seeking the square root of $11-2\sqrt{30}$. Here $a=11$ and $b=230$, therefore $b=4\cdot 30=120$, $aa-b=1$, and $c=1$: consequently the square root sought $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

117.

This rule also remains, thus even if imaginary or impossible numbers arise.

Thus if this binomial is given $1+4\sqrt{-3}$, thus $a=1$ and $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$; whereby $b=-48$ and $aa-b=49$. Therefore $c=7$ consequently the square root sought is $\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Further let there be given $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Here there is $a=1,$ $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ and $b=\frac{1}{4}\cdot -3=-\frac{3}{4}$ form which $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ and $c=1$: consequently the square root sought is :

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}}+\sqrt{-\tfrac{3}{4}}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{-3}}{2} \text{ or } \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

This example again is worthy of note , where the square root of $2\sqrt{-1}$ is sought. Because here there is no rational part, thus $a=0$ and $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$ whereby $b=-4$ and $aa-b=4,$ thus $c=2$, from which the square root sought is $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, and from which the square is $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}.$

118.

Should such an equation as $xx=a\pm\sqrt{b}$ occur to be solved, and there were $aa-b=cc$, thus this value would be obtained for x :
$x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ which can be of use in many cases. For example $xx=17+12\sqrt{2},$ thus the becomes $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

119.

This finds a place particularly in the solution of some equations of the fourth degree, such as $x^4=2axx+d$. Then putting $xx=y$ here so that $x^4=yy$, whereby the equation becomes $yy=2ay+d$, from which there is found $y=a\pm\sqrt{(aa+d)}$: whereby for the first equation there shall be $xx=a\pm\sqrt{(aa+d)}$, from which consequently the square root still must be taken. Now since here,
$\sqrt{b}=\sqrt{(aa+d)}$ thus $b=aa+d,$ thus there will be $aa-b=-d.$ Now if $-d$ were a square, namely cc or $d=-cc$, thus the square root can be taken ; if now $d=cc,$ or this equation of the fourth degree were given $x^4=2axx-cc$, thus from that the value of x can be expressed thus :

$$x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

120.

We will illustrate this by some examples;
I. In the first place can two numbers be sought whose product is 105, and if their squares are added, thus the sum shall be $=274$?
Putting the two numbers to be x and y, thus these two equations are found at once :

$$\text{I.) } xy=105 \text{ and II.) } xx+yy=274.$$

From the first there is found $y = \frac{105}{x}$ which value is put into the second equation for *y*, giving $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Multiplying by *xx* to become $x^4 + 105^2 = 274xx$, or $x^4 = 274xx - 105^2$.

Comparing these two equations with that above, thus $2a = 274$ and $-cc = -105^2$; whereby $c = 105$ and $a = 137$. Thus we find :

$$x = \sqrt{\tfrac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{137-105}{2}} = 11 \pm 4:$$

consequently either $x = 15$, or $x = 7$. In the first case $y = 7$, while in the second $y = 15$. Therefore the two number sought are 15 and 7.

121.

But it is beneficial to note that the calculation here can be made much clearer. Since there both $xx + 2xy + yy$, and also $xx - 2xy + yy$ are squares, but we know as well both $xx + yy$ and xy, thus we need only to double the second term, as well as to add to or subtract from the first term, to see that we have here : $xx + yy = 274$. In the first place $2xy = 210$ added gives $xx + 2xy + yy = 484$ and $x + y = 22$; then $2xy$ subtracted gives $xx - 2xy + yy = 64$ and $x - y = 8$.

Thus $2x = 30$ and $2y = 14$, from which it is clear that $x = 15$ and $y = 7$. From questions of this kind this general question also can be resolved:

II. Two numbers are sought, of which the product $= m$, and the sum of their squares n $= n$?

The numbers sought shall be *x* and *y*, thus one has the two following equations

$$\text{I.) } xy = m, \ \text{II.) } xx + yy = n.$$

Moreover there is now $2xy = 2m$, whereby on adding $2xy$ to II in the first place, $xx + 2xy + yy = n + 2m$ and $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$, then on taking away $2xy$ from II, giving $xx - 2xy + yy = n - 2m$ and $x - y = \sqrt{(n - 2m)}$; thus:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n+2m)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(n-2m)} \text{ and } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n+2m)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(n-2m)}.$$

122.

III. Further, this question is proposed: can two numbers be sought, whose product $= 35$ and the difference of their squares $= 24$?

Let *x* be the greater number, and *y* the smaller number, thus one has these two equations $xy = 35$ and $xx - yy = 24$; Now since here the above advantage is not present, thus we must proceed in the usual manner, and that gives initially $y=\frac{35}{x}$, which value substituted for y in the second equation, gives $xx-\frac{1225}{xx}=24$, multiplied by xx, thus on has $x^4-1225=24xx$ and $x^4=24xx+1225$. Since here the last term has the *plus* sign, thus the above equation $x^4=2axx-cc$ cannot be applied, namely because $cc=-1225$, and thus c would be imaginary.

Therefore putting $xx=z$, thus one has $zz=24z+1225$ from which it is found that $z=12\pm\sqrt{(144+1225)}$ or $z=12\pm37$, & therefore $xx=12\pm37$, that is, either $xx=49$ or $xx=-25$. According to the first value, $x=7$ and $y=5$.

But according to the second, there becomes

$$x=\sqrt{-25} \text{ and } y=\frac{35}{\sqrt{-25}}, \text{ or } y=\sqrt{\frac{1225}{-25}}=\sqrt{-49}.$$

123.

We would like finally to add this question to the end of this chapter :

IV. Can two numbers be found, whose sum, product, and difference of their squares, are equal to each other ?

The greater number shall be x, the smaller y, thus the three formulas must be equal to each other: I.) Sum $x+y$, II.) Product xy, III.) Difference of squares $xx-yy$. Comparing the first with the second, thus one has $x+y=xy$ and from that x is sought. Thus giving $y=xy-x$ or $y=x(y-1)$ and from that $x=\frac{y}{y-1}$; therefore there becomes $x+y=\frac{yy}{y-1}$ and $xy=\frac{yy}{y-1}$, and thus the sum and the product are equal already. But this still must be equal to the difference of the squares: but this shall be

$$xx-yy=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$$

which must be equal to the above value $\frac{yy}{y-1}$; therefore one finds $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; dividing by yy gives $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$ further multiplying by $y-1$ gives $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$, and again multiplying by $y-1$ gives

$$y-1=-yy+2y, \text{ consequently } yy=y+1.$$

From which we find:

$$y=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+1\right)}=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}} \text{ or } y=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

and therefore we obtain $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Here in order to remove the irrationality of the denominator, hence multiplying above and below by $\sqrt{5}+1$, thus there becomes $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Answer: Thus the greater number found $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, and the smaller $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [*i.e.* the golden ratio τ .].

Their sum is thus $x+y=2+\sqrt{5}$, further the product $xy=2+\sqrt{5}$, and since $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ and $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, thus the difference of the squares is $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

124.

Because this solution was a little troublesome, thus the same can be found in an easier way; first putting the sum equal to $x+y$, and the difference equal to $xx-yy$, thus one has $x+y=xx-yy$. Here we can divide by $x+y$ because $xx-yy=(x+y)(x-y)$, and there it is found that $1=x-y$ from which $x=y+1$; therefore $x+y=2y+1$ and $xx-yy=2y+1$; and this must still be equal to the product $xy=yy+y$. Man hat also $yy+y=2y+1$, or $yy=y+1$, from which we found above $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

125.

V. This leads us again to the following question : Can two numbers be found, whose sum, product, and the sum of their squares be equal to each other ? The numbers sought will be x and y, thus the three formulas equal to each other will be :

$$\text{I.) } x+y\text{, II.) } xy\text{, and III.) } xx+yy.$$

Putting the first equal to the second $x+y=xy$, thus one finds from that $x=\frac{y}{y-1}$ and $x+y=\frac{yy}{y-1}$, which also is equal to xy. Moreover from this there will be $xx+yy=\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$, which is put equal to that $\frac{yy}{y-1}$: Multiplying by $yy-2y+1$ thus one comes upon $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$ or $y^4=3y^3-3yy$, and dividing by yy becomes $yy=3y-3$; whereby $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-3\right)}$, thus $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ from which $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, consequently $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Multiplying above and below by $1-\sqrt{-3}$, thus $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ or $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Answer: thus the two numbers sought are

$$x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2} \text{ and } y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2},$$

their sum is $x+y=3$, the product $xy=3$, and that finally $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ and $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, so that $xx+yy=3$.

126.

This calculation can be made a lot easier by a certain artifice, which can be used in other cases. Whereby the same consists therein that the numbers sought are not expressed by single letters, but by the sum and difference of two other letters.

Thus for the above problems we put one of the numbers sought equal to $p+q$ and the other equal to $p-q$, thus the sum itself becomes $2p$, their product $pp-qq$ and the sum of their squares $2pp+2qq$ which three parts must be equal to each other. Putting the first equal to the second there will be $2p=pp-qq$ and from that $qq=pp-2p$. This value is put into the third formula for qq, so that the same becomes $4pp-4p$. Which set equal to the first gives $2p=4pp-4p$. Adding $4p$ thus we have $6p=4pp$, dividing by p, $6=4p$ and thus $p=\frac{3}{2}$.

From this $qq=-\frac{3}{4}$ and $q=\frac{\sqrt{-3}}{2}$; consequently our numbers sought shall be $p+q=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ and the other $p-q=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ which we found formerly as well .

CHAPTER 9

THE NATURE OF QUADRATIC EQUATIONS

127.

From the foregoing it has been seen well enough, that quadratic equations are to be solved in a twofold manner, which property indeed deserves to be examined in all circumstances, because through that the nature of higher equations will be enlightened not by a small amount. We will therefore investigate generally, how this property arises, that each individual quadratic equation is allowed two solutions, because within that without any difficulty, an essential property of these equations is enclosed.

128.

We have indeed seen already, that this twofold solution proceeds from that reason, because the square root of every single number can be taken to be either positive or negative : but this basic rule alone would not let itself be applied very well to higher equations, therefore it would be a good basis by which yet another way could be examined carefully. Therefore it is useful to clarify how it comes about that a quadratic equation as e.g. $xx=12x-35$ can be resolved in a twofold manner, or that two values can be drawn for x, which the solution achieves a sufficiency, as how in this example both 5 as well as 7 can be put in place for *x*, so that in both cases xx and $12x-35$ are equal to each other.

129.

In order to set out carefully the basis of this, thus it is useful to bring all the terms to one side, so that 0 comes to stand on the other side. Therefore the above equation shall be $xx-12x+35=0$, whereby from that it arises, that such a number can be found, which if it were to put in place of *x*, the formula $xx-12x+35$ actually will change into nothing ; and then also the reason must be shown why such can occur in two ways.

130.

Now everything here depends on the fact, as one can clearly see, that such a formula as $xx-12x+35$ can be considered as a product from two factors, as then this formula actually consists of these two factors $(x-5)\cdot(x-7)$. Therefore if that formula shall become 0, then also the product must become $(x-5)\cdot(x-7)=0$. But a product, the same as may consist of any number of factors, may always be put equal to 0, only if one of its factors becomes 0. Then the product is just as great as the number of factors left may be, if the same factors still be multiplied by 0, and thus 0 always arises, which basic rule is to be noted well for the higher equations.

131.

From this it can be understood quite clearly, that this product $(x-5)\cdot(x-7)$ can become 0 in a twofold way: one way namely if the first factor becomes $x-5=0$, and then also, if the other factor were $x-7=0$. The first occurs if $x=5$, but the other if $x=7$. From this one understands thus that the real reason why an equation such as $xx-12x+35=0$ has a twofold solution, or two values can be found for *x*, which are both sufficient to satisfy the equation.

The rule namely consists of this, that a formula such as $xx-12x+35$ can itself be represented by two factors.

132.

Just as this circumstance is found for all quadratic equations. Then if all the terms were taken to one side, thus one obtains always a formula such as $xx-ax+b=0$; and this formula can always be regarded as a product from two factors, thus which we will represent by $(x-p)(x-q)$ without troubling ourselves with these, what kind of numbers *p* and *q* may become. Now since our equation requires, that this product must be equal to 0, thus it is evident that such can be done in two ways: if in the first case if $x=p$, and secondly if $x=q$, which shall be the two values for *x* needed to satisfy the equation.

133.

Let us now see, how these two factors must be provided, so that the same product produces our $xx-ax+b$: truly the same then must be multiplied, so that one obtains $xx-(p+q)x+pq$ which, since it should be as one with $xx-ax+b$, thus it is clear that there must be $p+q=a$ and $pq=b$, from which we learn about this splendid property, that, that of any such equation $xx-ax+b=0$, two values for x thus are to be found, that in the first place their sum to be equal to the number a and their product to the number b. Therefore thus whenever one has a known value, thus it is easy to find the other value also.

134.

This was the case, if both values were for positive x, since then in the equation the second has the − sign, but the third has the + sign. We want to consider also the cases where either one or both the signs for the values of x become negative. The one happens if the two factors of the equation are arranged thus : $(x-p)(x+q)$; from which these two values for x arise, in the first place $x=p$ and secondly $x=-q$. But the equation itself is then $xx+(q-p)\,x-pq=0$, where the second term has the + sign only if q is greater than p; but if q were smaller than p thus it has the − sign, but the third term is always negative here.
But if both factors $(x+p)(x+q)$ thus had both values negative for x, namely $x=-p$ and $x=-q$ and the equation itself would be $xx+(p+q)x+pq=0$, where both the second as well as the third term have + signs.

135.

From this we know now the nature of the roots of any quadratic equation from the signs of the second and third terms. The equation shall be $xx\cdots ax\cdots b=0$; now if the second and third terms have a + sign, thus both the roots are negative ; if the second term is −, but the third is +, thus both the roots are positive ; but if the third term is negative, then one root is positive. But always the second term contains the sum of the two roots, and the third term their product.

136.

After what has been said, it is quite easy to form a quadratic equation, which contain two given values as we wish : for example, such an equation is required, where the first value for x shall be 7, and moreover the other value shall be -3. From these the simple equations are made $x=7$ and $x=-3$; from these further $x-7=0$ and $x+3=0$, which shall be the factors of the required equation; thus so that the equation shall be : $xx-4x-21=0$, whereby also according to the above rule just these two values for x are found. Since then $xx = 4x+21$, thus there becomes $x = 2 \pm \sqrt{25}$, and thus $x = 2 \pm 5$, that is finally, $x = 7$ or $x = -3$.

137.

It can also happen, that both values for x are equal to each other ; namely one searches for an equation where both values for x shall be $x = 5$; the two factors thus will be $(x-5)(x-5)$ and the equation thus obtained is $xx-10x+25=0$, which is shown to have only one value, as $x = 5$ will be doubled in this manner, as also the required solution shows. Then since $xx = 10x-25$, thus $x = 5 \pm \sqrt{0}$, or $x = 5 \pm 0$ and therefore $x = 5$ and $x = 5$.

138.

It is to be noted here in particular, that sometimes both values for x are imaginary or impossible, in which cases it is completely impossible to assign a value for x which satisfies the equation, as, e.g. may happen, if the number 10 may be split into two such parts, of which the product shall be 30 : then let one part be x and thus the other part will be $10-x$, and thus their product $10x-xx=30$, consequently $xx = 10x-30$ and $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, which is an imaginary or impossible number and gives to be understood, that the question is impossible.

139.

It is therefore very important to find a characteristic identity, whereby it can be known at once, whether a quadratic equation shall be possible or not to be solved. Therefore let this general equation be given:

$xx-ax+b=0$, thus becoming $xx = ax-b$ and $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa-b\right)}$;

from which it is clear, that if the number b is greater than $\frac{1}{4}aa$, or $4b$ is greater than aa, the two values are impossible, because the square root of a negative number must be extracted. But however, as long as b is smaller than $\frac{1}{4}aa$, or also even less than 0, that is negative, thus both values will thus always be possible. Meanwhile whether the same terms may be possible or impossible, thus they can still be expressed always in this manner, and, also have this property always, that their sum is $=a$ and their product $=b$, as can be seen in this example $xx-6x+10=0$, where the sum of both values for x must be $=6$ and the product $=10$. But from these both the values found are :

$$\text{I.) } x = 3+\sqrt{-1} \text{ and II.) } x = 3-\sqrt{-1},$$

for which the sum is 6 and their product is 10.

140.

A characteristic identity of a general kind can be expressed, that it can be applied to such a formula $fxx \pm gx + h = 0$: then from this form one has $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$, whereby

$$x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}\right)}, \text{ or } x = \frac{\mp g \pm \sqrt{(gg - 4fh)}}{2f},$$

from which it is clear, that both values are imaginary or the equation is impossible, if $4fh$ is greater than gg, or if in this equation $fxx \pm gx + h = 0$ the fourfold product from the first and last terms is greater than the square of the second term. Then the fourfold product of the first and last term is $4fhxx$, but the square of the middle term is $ggxx$: now if $4fhxx$ is greater than $ggxx$, thus also $4fh$ is greater than gg and thus the equation is imaginary [*i.e.* impossible] ; but in all the remaining cases the equation is real [*i.e.* possible] and both the values for x can actually be stated, if the same are equal or often irrational, in which cases one can always approximately as closely as wished, as was noted above; however for imaginary expressions such as $\sqrt{-5}$ no approximate expressions can be found, in that 100 is just as far from being the root of that number as 1 or any other number.

141.

Hereby it is still to be remembered, that any such formula from the second order $xx \pm ax \pm b$ necessarily at all times can be resolved into two such factors

$$(x \pm p)(x \pm q).$$

Then if one wanted to take three such factors, thus an equation of the third degree would be found, and with one alone would not reach as far as the second degree. Therefore it is a foregone conclusion, that each single equation of the second degree necessarily contains two values for x, and that the same can contain neither more nor less.

142.

It has been seen already, that if both these factors can be found, from that both the values of x can be assigned; since each factor, if it were put equal to 0, specifies a value for x. Conversely it is found also, that once a value is found for x, from that also a factor of the quadratic equation will be known. Then if $x = p$ is a value for x in a quadratic equation, thus also $x - p$ is the same factor: or the equation, if all the terms be taken to one side, itself is divided by $x - p$, then the quotient gives the other factor.

143.

In order to illustrate this, thus this equation is given:

$$xx + 4x - 21 = 0,$$

from which we know, that $x = 3$ is to be a value for x, since

$$3\cdot 3+4\cdot 3-21=0,$$

and from that we can safely conclude, that $x-3$ is a factor of this equation, or that $xx+4x-21$ can be divided by $x-3$, as is apparent from this division

$$\begin{array}{lll} x-3) & xx+4x-21 & (x+7 \\ & \underline{xx-3x} & \\ & \quad\;\; 7x-21 & \\ & \quad\;\; \underline{7x-21} & \\ & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Thus the other factor is $x+7$ and our equation is established from this product $(x-3)(x+7)=0$ from which both values for x at once are apparent, namely since from the first factor $x=3$, while from the other $x=-7$.

CAPITEL 5

VON DER AUFLÖSUNG DER REINEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

61.

Eine Gleichung wird Quadratisch genennt, wann darin das Quadrat oder die zweyte Potestät der unbekanten Zahl vorkommt, wann sich nur keine höhere Potestäten davon darinn befinden. Dann sollte darin auch die dritte Potestät vorkommen so wird eine solche Gleichung schon zu den Cubischen gerechnet, wovon die Auflösung besondere Regeln erfordert.

62.

In einer Quadratischen Gleichung kommen also nur dreyerley Glieder vor:

Zum ersten solche Glieder worinnen die unbekante Zahl gar nicht enthalten ist, oder welche blos allein aus bekanten Zahlen zusammen gesetzt sind.

Zweytens solche Glieder, in welchen nur die erste Potestät der unbekanten Zahl vorkommt. ·

Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten ist.

Also wann x die unbekante Zahl andeutet, die Buchstaben a, b, c, d etc. aber bekante Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a, von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cxx.

63.

Man hat schon zur Gnüge gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art, in ein einiges zusammen gezogen, oder als ein einiges Glied betrachtet werden können.

Also kann diese Form $axx-bxx+cxx$ als ein einziges Glied angesehen, und also vorgestellet werden $(a-b+c)xx$ weil in der That $a-b+c$ eine bekante Zahl ausdrückt.

Wann sich auch solche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens = befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eines zusammen gezogen werden können:

Also wann diese Gleichung vorkommt

$$2xx-3x+4=5xx-8x+11;$$

so subtrahirt man erstlich $2xx$, so kommt $-3x+4=3xx-8x+11$; hernach addire man $8x$, so hat man $5x+4=3xx+11$, und 11 subtrahirt giebt $3xx=5x-7$.

64.

Man kann auch alle Glieder auf einer Seite des Zeichens = bringen, so daß auf der anderen Seite 0 zu stehen kommt; wobey zu bemercken daß wann Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müßen.

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen $3xx-5x+7=0$ und so wird auch insgemein eine jegliche Quadratische Gleichung durch diese Form vorgestellt werden können

$$axx \pm bx \pm c=0$$

wo das Zeichen $\pm$ durch *plus oder minus* ausgesprochen wird, um anzuzeigen, daß solche Glieder bald Positiv bald Negativ seyn können.

65.

Es mag eine Quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf diese Form, welche nur aus drey Gliedern bestehet, gebracht werden; wann man z. E. auf diese Gleichung gekommen wäre: $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ex+f}{gx+h}$ so müsten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden. Also multiplicire man mit $cx+d$ so bekommt man $ax+b=\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$ hier mit $gx+h$ multiplicirt, giebt

$$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd$$

welches eine Quadratische Gleichung ist, und auf folgende drey Glieder gebracht werden kann, wann alle auf eine Seite gesetzt werden, und welche man also unter einander zu schreiben pfleget:

$$\begin{aligned}0=agxx&+bgx+bh\\ -cexx&+ahx-fd\\ &-cfx\\ &-edx\end{aligned}$$

oder um dieselbe noch deutlicher vorzustellen

$$0=(ag-ce)xx+(bg+ah-cf-ed)x+bh-fd\,.$$

66.

Dergleichen Quadratische Gleichungen worin von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genennt, und die Auflösung derselben ist auch mehr Schwierigkeiten unterworffen, daher wir erstlich solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von diesen dreyen Gliedern mangelt. Sollte nun das Glied *xx* gar nicht vorhanden seyn, so wäre die Gleichung nicht einmahl Quadratisch und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, so blos bekante Zahlen enthält, mangeln, so würde die Gleichung also aussehen $axx\pm bx=0$, wo man durch *x* theilen kann und daher zu dieser Gleichung kommt $ax\pm b=0$, welche wieder eine einfache Gleichung ist und nicht hieher gehört.

67.

Wann aber das mittlere Glied, so nur die erste Potestät des *x* enthält, mangelt, so bekommt die Gleichung diese Form: $axx\pm c=0$, oder $axx=c$, es mag nun *c* das Zeichen + oder − haben.

Eine solche Gleichung wird eine reine Quadratische genennt, weil ihre Auflösung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Dann man darf nur durch *a* theilen, so bekommt man $xx=\frac{c}{a}$; und beyderseits die Quadrat-Wurzel genommen, so hat man $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelößt worden.

68.

Hier sind nun drey Fälle zu erwegen. Der erste, wann $\frac{c}{a}$ eine QuadratZahl ist, davon sich die Wurzel würcklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rational-Zahl ausgedrückt, dieselbe mag gantz oder gebrochen seyn.

Also aus dieser Gleichung $xx = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist, wann $\frac{c}{a}$ keine Quadrat-Zahl ist, da man sich dann mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Also wann $xx = 12$ so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben. ist aber drittens : gar eine Negativ-Zahl, so wird der Werth von x gantz und gar unmöglich oder Imaginär und zeiget an, daß die Frage welche auf eine solche Gleichung geführet, an sich unmöglich sey.

69.

Ehe wir weiter gehen ist noch zu bemercken, daß so oft aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte und so wohl Positiv als Negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wann man auf diese Gleichung kommt $xx =$ 49 so ist der Werth von x nicht nur + 7 sondern auch −7 und pflegt dahero also angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulaßen, in vielen Fällen aber wo etwann von einer Anzahl Menschen die Frage ist fält der Negativ−Werth von selbsten weg.

70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl mangelt, laßen die Gleichungen $axx = bx$ immer zweyerleyWerthe vor x zu, ob gleich nur einer gefunden wird, wann man durch x dividirt. Dann wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 3x$ wo ein solcher Wert für x gegeben werden soll, daß xx dem $3x$ gleich werde, so geschieht dieses, wann man setzt $x = 3$ welcher Werth heraus kommt, wann man durch x dividirt, allein außer diesem leistet auch der Werth $x = 0$ ein genügen; dann da wird $xx = 0$ und $3x = 0$. Dieses ist bey allen Quadratischen Gleichungen zu mercken daß immer zwey Auflösungen statt finden, dahingegen bey den einfachen Gleichungen nie mehr als eine Platz hat.

Wir wollen nun diese reine Quadratische Gleichungen durch einige Exempel erläutern.

71.

I. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihren $\frac{1}{3}$ multiplicirt 24 gebe?

Es sey diese Zahl $= x$ so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt $\frac{1}{6}xx = 24$.

Mit 6 multiplicirt wird $xx = 144$ und Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = \pm 12$.

Dann wann $x = +\ 12$, so ist $\frac{1}{2}x = 6$ und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 ist.

Ebenfals wann $x = -12$ so ist $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$ und das Product davon auch 24.

72.

II. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, wann zu derselben erstlich 5 addirt und hernach auch 5 subtrahirt und die Summe mit dem Rest multiplicirt wird, 96 herauskomme?

Es sey diese Zahl x so muß $x+5$ mit $x-5$ multiplicirt 96 geben, woraus diese Gleichung entspringt $xx-25=96$.

Man addire 25 so wird $xx=121$ und die Quadrat-Wurzel ausgezogen $x=11$, dann da wird $x+5=16$ und $x-5=6$. Nun aber ist $6\cdot 16 \;=96$.

73.

III. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, daß wann dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt 51 gebe?

Es sey die Zahl x so muß $10+x$ mit $10-x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht $100-xx=51$.

Man addire xx und subtrahire 51, so kommt $xx=49$, wovon die QuadratWurzel anzeigt $x=7$.

74.

IV. Frage: Es haben drey Personen Geld, so oft der erste hat 7 Rthl. hat der andere 3 Rthl. und so oft der andere hat 17 Rthl. hat der dritte 5 Rthl., so ich aber das Geld des ersten mit dem Geld des andern, und das Geld des andern mit dem Geld des dritten und auch endlich das Geld des dritten mit dem Geld des ersten multiplicire, hernach diese drey Producte zusammen addire, so wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ seyn. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man setze, der erste habe gehabt x Rthl. und da gesagt wird, daß so oft der erste 7 Rthl. habe, so habe der andere 3 Rthl. so will dieses so viel sagen, daß das Geld des ersten sich zum Geld des andern verhalte wie 7:3. Man setze also wie $7:3=x$ zum Geld des andern, welches seyn wird $\frac{3}{7}x$. Da ferner das Geld des andern sich verhält zum Geld des dritten, wie 17: 5, so setze man wie $17:5=\frac{3}{7}x$ zum Geld des dritten, welches seyn wird $\frac{15}{119}x$. Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Geld des andern $\frac{3}{7}x$ so wird das Product $=\frac{3}{7}xx$.

Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}x$ mit dem Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ multiplicirit, giebt $\frac{45}{833}xx$.

Und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ mit dem Geld des ersten x multiplicirit giebt $\frac{45}{833}xx$. Diese drey Producte zusammen machen

$$\tfrac{3}{7}xx+\tfrac{45}{833}xx+\tfrac{15}{119}xx$$

welche unter einen Nenner gebracht, geben $\frac{507}{833}xx$, so der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß.

Also hat man $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{2}{3}$, mit 3 multiplicirt, so bekommt man $\frac{1521}{833}xx = 11492$, ferner mit 833 multiplicirt, giebt $1521xx = 9572836$ und durch 1521 dividirt, wird $xx = \frac{9572836}{1521}$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt und da kommt $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$; dahero erhält man ferner $x = \frac{238}{3}$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Antwort: Also hat der erste $79\frac{1}{3}$ Rthl. der zweyte 34 Rthl. und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Anmerckung: diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wann man die darinn vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflößt, und dabey insonderheit ihre Quadrate bemerckt:

Also ist $507 = 3\cdot 169$, wo 169 das Quadrat von 13 ist; hernach ist $833 = 7\cdot 119$ und $119 = 7\cdot 17$ da man nun hat $\frac{3}{17}\cdot\frac{169}{49}xx = 3830\frac{2}{3}$ so multiplicire man mit 3, da kommt $\frac{9}{17}\cdot\frac{169}{49}xx = 11492$. Diese Zahl löse man auch in ihre Factores auf, wovon der erste 4 so gleich in die Augen fällt, also daß $11492 = 4\cdot 2873$; ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird $2873 = 17\cdot 169$, dahero unsere Gleichung also aussieht: $\frac{9}{17}\cdot\frac{169}{49}xx = 4\cdot 17\cdot 169$, welche durch 169 dividirt, wird: $\frac{9}{17\cdot 49}xx = 4\cdot 17$; ferner mit $17\cdot 49$ multiplicirt und durch 9 dividirt giebt $xx = \frac{4\cdot 289\cdot 49}{9}$, wo alle Factores Quadrate sind und also die Wurzel seyn wird $x = \frac{2\cdot 17\cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben.

75.

V. Frage: Etliche Kaufleute bestellen einen Factor, schicken ihn nach Archangel zu halten einen Handel, haben eingelegt jeder zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind. Gewinnt der Factor je mit 100 Rthl. zweymal so viel als der Personen sind. Wann man dann $\frac{1}{100}$ Theil des gantzen Gewinst multiplicirt mit $2\frac{2}{9}$ so kommt die Zahl der Gesellen heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sey $= x$ und da ein jeder $10x$ Rthl. eingelegt hat, so war das gantze Capital $= 10xx$ Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl. $2x$ Rthl. folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem gantzen Capital $10xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Gesellen x gleich seyn muß.

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: es sind dahero in allen 15 Gesellen gewesen und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

CAPITEL 6

VON DER AUFLÖSUNG DER VERMISCHTEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wann in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nemlich solche, welche das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten, wie *axx;* hernach auch solche, worinn die unbekante Zahl selbst vorkommt, als *bx,* und endlich solche Glieder, welche blos aus bekanten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens = gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$$axx \mp bx \mp c = 0\,.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von *x* gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied blos allein das reine Quadrat der unbekanten Zahl *xx* enthalte; hernach laße man das zweyte Glied auf eben der Seite wo *xx* steht, das bekante Glied aber bringe man auf die andere Seite. Solcher Gestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx \pm px = \pm q$, wo *p* und *q* bekante Zahlen, sowohl positive als negative andeuten; und jetzo kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von *x* gefunden werden soll. Hierbey ist zuerst zu bemercken, daß wann $xx + px$ ein würckliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte beyderseits die Quadrat-Wurzel zu nehmen.

78.

Es ist aber klar, daß $xx + px$ kein Quadrat seyn kann, weil wir oben gesehen, daß wann die Wurzel aus zwey Gliedern besteht, z. E. $x + n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nemlich außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, also daß das Quadrat von $x + n$ seyn wird $xx + 2nx + nn$. Da wir nun auf einer Seite schon haben $xx + px$ so können wir *xx* als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß *px* das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel *x* mit dem andern Theil seyn; dahero der andere Theil $\frac{1}{2}p$ seyn muß, wie dann auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ gefunden wird $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Da nun $xx+px+\frac{1}{4}pp$ ein würckliches Quadrat ist, wovon die Wurzel $x+\frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx+px=q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren und da bekommen wir $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein würckliches Quadrat, auf der andern aber blos bekante Zahlen befindlich sind. Wann wir dahero beyderseits die Quadrat-Wurzel nehmen, so erhalten wir $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; und da eine jede Quadrat-Wurzel so wohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für *x* zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen:

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+q}$$

80.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadrat Gleichungen aufgelößt werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genung, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtniß wohl einpräge. Man kann demnach die Gleichung so anordnen, daß das bloße Quadrat *xx* auf einer Seite zu stehen komme, daher die obige Gleichung diese Form erhalten wird:

$$xx=-px+q$$

wovon der Werth von *x* so gleich also hingeschrieben werden kann:

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+q}\,.$$

81.

Hieraus wird nun diese allgemeine Regel gezogen um die Gleichung

$$xx=-px+q$$

aufzulösen.

Man sieht nemlich, daß die unbekante Zahl *x* gleich seyn werde der Hälfte der Zahl, womit *x* auf der andern Seite multiplicirt ist, und über das noch + oder der Quadrat − Wurzel aus dem Quadrat der Zahl, so eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl so das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wann dahero diese Gleichung vorkäme $xx=6x+7$, so würde man so gleich haben $x=3\pm\sqrt{(9+7)}=3\pm4$: folglich sind die beyden Werthe von *x*

$$\text{I.)}\,x=7,\ \text{und}\ \ \text{II.)}\ x=-1.$$

Hätte man diese Gleichung $xx=10x-9$, so wird $x=5\pm\sqrt{(25-9)}$, welches $=5\pm4$; dahero die beydenWerthe seyn werden $x=9$ und $x=1$.

82.

Zu mehrerer Erläuterung dieser Regel können folgende Fälle unterschieden werden, I.) wann p eine gerade Zahl ist, II.) wann p eine ungerade Zahl ist, und III.) wann p eine gebrochene Zahl ist.

Es sey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen: $xx = 2px + q$, so bekommt man $x = p \pm \sqrt{(pp+q)}$.

Es sey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $xx = px + q$, da dann, seyn wird

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + q)}$$

da nun $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadrat-Wurzel gezogen werden kann, so bekommt man

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp+q)}}{2}, \text{ oder } x = \frac{p \pm \sqrt{(pp+q)}}{2}.$$

Wird aber III.) p ein Bruch, so kann die Auflösung folgender Gestalt geschehen. Es sey die Quadratische Gleichung

$$axx = x + c, \text{oder } xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

so wird nach der Regel

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}\right)}.$$ Da nun aber $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb+4ac}{4aa}$

und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb+4ac)}}{2a}$.

83.

Der andere Weg welcher auch zu dieser Auflösung führet, bestehet darinn, daß man eine solche vermischte Quadratische Gleichung nemlich:

$$xx = px + q$$

in eine reine verwandele, welches geschiehet, wann man anstatt der unbekanten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, also daß $x = y + \frac{1}{2}p$; da man dann, wann y gefunden worden, auch so gleich den Werth vor x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ und $px = py + \frac{1}{2}pp$: hieraus wird unsere Gleichung also zu stehen kommen:

$$yy + py + \tfrac{1}{4}pp = py + \tfrac{1}{2}pp + q;$$

subtrahirt man hier erstlich *py,* so hat man $yy+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{2}pp+q$, ferner $\frac{1}{4}pp$ subtrahirt, giebt $yy=\frac{1}{4}pp+q$, welches eine reine Quadratische Gleichung ist, woraus man so gleich erhält $y=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp+q\right)}$.

Da nun $x=y+\frac{1}{2}p$, so wird $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp+q\right)}$, wie wir schon oben gefunden haben. Es ist also nichts mehr übrig als diese Regel mit Exempeln zu erläutern.

84.

I. Frage: Ich habe zwey Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere und ihr Produkt macht 91, welches sind diese Zahlen? Die kleinere Zahl sey *x,* so ist die größere $x+6$ und ihr Product

$$xx+6x=91.$$

Man subtrahire 6*x,* so hat man $xx=-6x+91$, und nach der Regel

$$x=-3\pm\sqrt{(9+91)}=-3\pm10,$$

dahero hat man entweder $x=7$ oder $x=-13$.
Antwort: die Frage hat also zwey Auflösungen: nach der ersten ist die kleinere Zahl $x=7$ die größere $x+6=13$. Nach der andern aber ist die kleinere $x=-13$ und die größere $x+6=-7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl wann ich von ihrem Quadrat subtrahire 9, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?
Es sey die Zahl *x,* so ist $xx-9$ über 100 um $xx-109$. Die gesuchte Zahl *x* aber ist unter 23 um $23-x$; woraus diese Gleichung entsteht

$$xx-109=23-x.$$

Man addire 109 so wird $xx=-x+132$ folglich nach der Regel

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+132\right)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}.$$

Also ist entweder $x=11$, oder $x=-12$.
Antwort: Wann nur eine positive Antwort verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl wann ich ihre Hälffte mit ihrem Drittel multiplicire und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen?

Es sey diese Zahl *x*, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}xx$ giebt; allso soll $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$ seyn; mit 6 multiplicirt, wird $xx+3x=180$, oder $xx=-3x+180$, woraus man findet

$$x=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{9}{4}+180\right)}=-\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{27}{2}.$$

Dahero ist entweder $x=12$ oder $x=-15$.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Dupla, wann ich ihre Summe zu ihrem Product addire, daß 90 komme?

Es sey die Zahl *x*, so ist die größere 2*x*, ihr Product 2*xx*, dazu ihre Summe 3*x* addirt soll geben 90. Also $2xx+3x=90$, und 3*x* subtrahirt,

$$2xx=-3x+90$$

durch 2 dividirt, giebt $xx=-\frac{3}{2}x+45;$ woraus nach der Regel gefunden wird

$$x=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\left(\tfrac{9}{4}+45\right)}=-\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{27}{4}.$$

Dahero ist entweder $x=6$ oder $x=-7\frac{1}{2}$.

88.

V. Frage: Einer kauft ein Pferd für etliche Rthl. verkauft dasselbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran von 100 so viel Rthl. als das Pferd gekostet, ist die Frage wie thener daßelbe eingekauft worden?

Das Pferd habe gekostet *x* Rthl. weil er nun darauf *x* Proc. gewonnen, so setze man: mit 100 gewinnt man *x*, wie viel mit *x* ? Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber *x* gewesen, so muß er dasselbe für $x+\frac{xx}{100}$ verkauft haben. Dahero wird $x+\frac{xx}{100}=119$.

Man subtrahire *x*, so kommt $x=-\frac{xx}{100}+119$ und mit 100 multiplicirt, wird $xx=-100x+11900$, woraus nach der Regel gefunden wird

$$x=-50\pm\sqrt{(2500+11900)}=-50\pm\sqrt{14400}=-50\pm120.$$

Antwort: das Pferd hat also gekostet 70 Rthl. weil er nun darauf 70 Procent gewonnen, so war der Gewinst 49 Rthl. er muß also dasselbe verkauft haben vor $70+49$, das ist für 119 Rthl. wie würcklich geschehen.

89.

VI. Frage: Einer kauft eine gewiße Anzahl Tücher: das erste für 2 Rthl. das zweyte für 4 Rthl. das dritte für 6 Rthl. und immer 2 Rthl. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthl. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, und wie viel er für jedes bezahlt hat, zeiget die folgende Vorstellung an:

$$\begin{array}{l} \text{für das } 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ 5.\ldots x. \\ \text{zahlt er } 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\ \ldots 2x\ \text{ Rthl.} \end{array}$$

Man muß also diese Arithmetische Progression $2+4+6+8+10+\cdots 2x$ welche aus x Gliedern besteht summiren, um den Preis aller Tücher zusammen zu finden.

Nach der oben gegebenen Regel also addire man das erste und letzte Glied zusammen, so bekommt man $2x+2$. Dieses multiplicire man mit der Anzahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe $2xx+2x$. Dahero die Summe selbst seyn wird $xx+x$, welche dem 110 gleich seyn muß, oder $xx+x=110$.

Man subtrahire x, so wird $xx=-x+110$ folglich

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+110\right)}=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{441}{4}},$$

oder

$$x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{21}{2}=10.$$

Antwort: Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90.

VII. Frage: Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthl. wären der Tücher 3 mehr gewesen vor eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Rthl. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, so hat das Stück würcklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthl. Hätte er aber $x+3$ Stück für 180 Rthl. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthl. welcher Preis um 3 Rthl. weniger ist, als der würckliche, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3.$

Man multiplicire mit x, so kommt $\frac{180x}{x+3}=180-3x,$ durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3}=60-x,$ mit $x+3$ multiplicirt, wird $60x=180+57x-xx,$ man addire xx, so kommt

$xx+60x=180+57x$. Man subtrahire $60x$, so kommt $xx=-3x+180$. Hieraus nach der Regel

$$x=-\tfrac{3}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{9}{4}+180\right)},\ \text{oder}\ x=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{27}{2}=12.$$

Antwort: Also sind 12 Tücher für 180 Rthl. gekauft worden, dahero eines gekostet 15 Rthl. Hätte man aber 3 Stück mehr nemlich 15 Stück für 180 Rthl. bekommen, so wird 1 Stück gekostet haben 12 Rthl., folglich 3 Rthl. weniger als in der That.

91.

VIII. Frage: Zwey haben eine Gesellschaft, legen zusammen 100 Rthl. ein, der erste läßt sein Geld 3 Monath lang, der andere aber 2 Monath lang stehen, und zieht ein jeder mit Capital und Gewinst 99 Rthl. wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe eingelegt x Rthl. und also der andere $100-x$; da nun der erste 99 Rthl. zurück zieht, so ist sein Gewinn $99-x$, welcher in 3 Monathen mit dem Capital x ist erworben worden, da der andere auch 99 Rthl. zurück zieht, so war sein Gewinn $x-1$, welcher in zwey Monathen mit dem Capital $100-x$ erworben worden; mit eben diesem Capital $100-x$ würden also in drey Monathen gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$. Nun sind diese Gewinste denen Capitalen proportional, nemlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinst, wie dieses Capital zu diesem Gewinst; also

$$x:99-x=100-x:\tfrac{3x-3}{2}.$$

Man setze das Product der äußern gleich dem Product der mittlern, so hat man $\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+xx$ und mit 2 multiplicirt

$$3xx-3x=19800-398x+2xx;$$

man subtrahire $2xx$ so kommt $xx-3x=19800-398x$ und $3x$ addirt

$$xx=-395x+19800.$$

Dahero nach der Regel

$$x=-\tfrac{395}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{156025}{4}+\tfrac{79200}{4}\right)}\quad \text{das ist}\ x=-\tfrac{395}{2}+\tfrac{485}{2}=\tfrac{90}{2}=45.$$

Antwort: der erste hat also eingelegt 45 Rthl. und der andere 55 Rthl. mit den 45 Rthl. hat der erste in 3 Monath gewonnen 54 Rthl. würde demnach in einem Monath gewonnen haben 18 Rthl. Der andere aber gewinnt mit 55 Rthl. in 2 Monath 44 Rthl. würde also in einem Monath gewonnen haben 22 Rthl. welches auch mit jenem übereinstimmt; dann wann mit 45 Rthl. gewonnen werden 18 in einem Monath, so werden mit 55 in gleicher Zeit gewonnen 22 Rthl.

92.

IX. Frage: Zwey Bäurinnen tragen zusammen 100 Eyer auf den Marckt, eine mehr als die andere, und lösen doch beyde gleich viel Geld. Spricht die erste zu der andern: hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelößt; darauf antwortet die andere: hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreutzer gelößt; wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe gehabt x Eyer und also die andere $100-x$.

Also da nun die erste $100-x$ Eyer für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regeldetri

$$100-x:15=x \text{ zu } \ldots\text{. Antwort } \tfrac{15x}{100-x} \text{ Kreuzer.}$$

Eben so bey der andern welche x Eyer für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, findet man wie viel sie aus ihren $100-x$ Eyer gelöset,

$$x:\tfrac{20}{3}=100-x \text{ zu } \ldots\text{. Antwort } \tfrac{2000-20x}{3x}.$$

Da nun die beyden Bäurinnen gleich viel gelöset haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\tfrac{15x}{100-x}=\tfrac{2000-20x}{3x},$$

mit $3x$ multiplicirt, kommt $2000-20x=\frac{45xx}{100-x}$, mit $100-x$ multiplicirt, $45xx=200000-4000x+20xx$, $20xx$ subtrahirt, $25xx=200000-4000x$, durch 25 dividirt $xx=-160x+8000$, dahero nach der Regel

$$x=-80+\sqrt{(6400+8000)}=-80+120=40.$$

Antwort: die erste Bäurin hat also gehabt 40 Eyer, die andere 60 Eyer und hat eine jede 10 Kreuzer gelöset.

93.

X. Frage: Zwey verkauffen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthl. Spricht der erste zum andern: aus deinem Zeug wollt ich gelöset haben 24 Rthl. antwortet der andere: so hätte ich aus deinem gelößet $12\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel hat jeder Ellen gehabt?

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der andere $x+3$ Ellen. Da nun der erste aus $x+3$ El. 24 Rthl. gelöst hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben vor $\frac{24x}{x+3}$ Rthl. und da der andere x Ellen verkauft hätte für $12\frac{1}{2}$ Rthl. so hatte er seine $x+3$ Ellen verkauft vor $\frac{25x+75}{2x}$ und so haben beyde zusammen gelöst $+\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x}=35$ Rthl. Allso

$$\frac{48xx}{x+3}+25x+75=70x \text{ oder } \frac{48xx}{x+3}=45x-75,$$

mit $x+3$ multiplicirt wird $48xx=45xx+60x-225$ man subtrahirt $45xx$,so hat man $3xx=60x-225$ oder $xx=20x-75$.

Hieraus wird

$$x=10\pm\sqrt{(100-75)}=10\pm\sqrt{25}, \text{ also } x= \ 10\pm 5.$$

Antwort: Es giebt daher zwey Auflößungen. Nach der ersten hat der erste 15 Ellen, und der andere 18 Ellen; weil nun der erste 18 Ellen verkauft hätte vor 24 Rthl. so hat er aus seinen 15 Ellen gelöst 20 Rthl. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthl also beyde zusammen 35 Rthl.

Nach der andern Auflösung hat der erste gehabt 5 Ellen, folglich allso der andere 8 Ellen, allso der erste hätte verkauft 8 Ellen für 24 Rthl. und hat also aus seinen 5 Ellen gelöst 15 Rthl. Der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 8 Ellen gelöst 20 Rthl. folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthl.

CAPITEL 7

VON DER AUSZEIHUNG DER WURZELN AUS DEN VIELECKIGTEN ZAHLEN

Wir haben oben [I, § 425-439] gezeigt, wie die vieleckigten Zahlen gefunden werden sollen; was wir aber daselbst eine Seite genennt haben wird auch eine Wurzel genannt. Wann nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigten Zahlen folgender Gestalt gefunden.

Das 3eck ist $\frac{xx+x}{2}$
" 4eck " xx
" 5eck " $\frac{3xx-x}{2}$
" 6eck " $2xx-x$
" 7eck " $\frac{5xx-3x}{2}$
" 8eck " $3xx-2x$
" 9eck " $\frac{7xx-5x}{2}$
" 10eck " $4xx-3x$
" $n$eck " $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

95.

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht für eine jede gegebene Seite, oder Wurzel, eine verlangte vieleckigte Zahl so groß auch die Zahl der Ecke seyn mag zu finden, wie schon oben genungsam gezeigt worden. Wann aber umgekehrt eine vieleckigte Zahl von einer gewißen Anzahl Seite gegeben ist, so ist es weit schwerer die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung Quadratischer Gleichungen erfordert, dahero diese Sache allhier besonders verdienet abgehandelt zu werden. Wir wollen hiebey der Ordnung nach von den dreyeckigten Zahlen anfangen, und zu den mehreckigten fortschreiten.

96.

Es sey demnach 91 die gegebene dreyeckigte Zahl, ·wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $=x$ so muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn: man multiplicire mit 2 so hat man $xx+x=182$, woraus gefunden wird $xx=-x+182$ und also

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{(\tfrac{1}{4}+182)} \text{ folglich } x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{729}{4}}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{27}{2}=13\ ;$$

dahero ist die verlangte Dreyecks-Wurzel $=13$, dann das Dreyeck von 13 ist 91.

97.

Es sey aber auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $=x$ so wird $\frac{xx+x}{2}=a$, oder $xx+x=2a$, oder ferner $xx=-x+2a$, woraus gefunden wird $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+2a)}$, oder $x=\frac{-1+\sqrt{(8a+1)}}{2}$.

Hieraus entspringt diese Regel. Man multiplicire die gegebene dreyeckigte Zahl mit 8 und zum Product addire 1, aus der Summ ziehe man die Quadrat-Wurzel, von derselben subtrahire 1; den Rest dividire durch 2, so kommt die gesuchte Dreyecks-Wurzel heraus.

98.

Hieraus sieht man daß alle dreyeckigte Zahlen diese Eigenschaft haben, daß wann man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt immer eine Quadrat-Zahl herauskommen müße, wie aus folgendem Täfelgen zu ersehen,

III. Eck.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,	66, etc.
8mahl + 1:	9,	25,	49,	81,	121,	169,	225,	289,	361,	441,	529, etc.

ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine würckliche dreyeckigte Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyecks-Wurzel aus der Zahl 210, so ist $a = 210$ und $8a+1 = 1681$ wovon die Quadrat-Wurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 würcklich eine dreyeckigte Zahl ist, wovon die Wurzel $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und also irrational. Es wird aber auch würcklich von dieser Wurzel, nemlich $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreyeck gefunden wie folget:

Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ so ist $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; darzu x addirt, wird $xx + x = \frac{16}{2} = 8,$ und folglich die dreyeckigte Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4.$

100.

Da die viereckigten Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Dann setzt man die gegebene viereckigte Zahl $= a$ und ihre Virecks-Wurzel $= x,$ so wird $xx = a$ und also $x = \sqrt{a}$. Also daß die Quadrat-Wurzel und Vierecks-Wurzel einerley sind.

101.

Wir wollen demnach zu den fünfeckigten Zahlen fortschreiten.

Es sey nun 22 eine fünfeckigte Zahl und die Wurzel derselben $= x$, so muß seyn $\frac{3xx-x}{2} =$ 22, oder $3xx - x = 44,$ oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3};$ woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{44}{3}\right)}$, das ist $x = \frac{1+\sqrt{529}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4.$ Also ist 4 die gesuchte Fünfecks-Wurzel aus der Zahl 22.

102.

Es sey nun vorgelegt diese Frage: wann das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man diese gesuchte Wurzel $= x$, so kommt man auf diese Gleichung $\frac{3xx-x}{2} = a,$ oder $3xx - x = 2a,$ oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3};$ woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)},$ das ist

$$x = \frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}.$$

Wann dahero a ein würckliches Fünfeck ist, so muß $24a+1$ immer eine Quadrat-Zahl seyn. Es sey z. E. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon seyn $x=\frac{1+\sqrt{7921}}{6}=\frac{1+89}{6}=15.$

103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckigte Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll. Setzt man diese Wurzel $=x$ so wird $2xx-x=a,$ oder $xx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a,$ dahero gefunden wird $x=\frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a\right)}=\frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}.$ Wann also a ein würckliches Sechseck ist, so muß $8a+1$ ein Quadrat werden, woraus man sieht daß alle sechseckigte Zahlen unter den dreyeckigten begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen. Es sey z. E. die sechseckigte Zahl 1225 so wird die Wurzel davon seyn $x=\frac{1+\sqrt{9801}}{4}=\frac{1+99}{4}=25.$

104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $=x$ so hat man $\frac{5xx-3x}{2}=a,$, oder $5xx-3x=2a$, allso $xx=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}a$, woraus gefunden wird

$$x=\frac{3}{10}+\sqrt{\left(\frac{9}{100}+\frac{2}{5}a\right)}=\frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}.$$

Alle siebeneckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summe immer Quadrat-Zahlen werden.

Es sey z. E. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x=\frac{3+\sqrt{82369}}{10}=\frac{3+287}{10}=29.$

105.

Es sey nun a eine gegebene achteckigte Zahl wovon die Wurzel x gefunden werden soll. Man hat dahero $3xx-2x=a,$ oder $xx=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird

$$x=\frac{1}{3}+\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{a}{3}\right)}=\frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}.$$

Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt die Summe immer eine Quadrat-Zahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn $x=\frac{1+\sqrt{11449}}{3}=\frac{3+107}{3}=36.$

106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll,· so hat man diese Gleichung $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}=a$, oder $(n-2)xx-(n-4)x=2a$, , allso $xx=\frac{(n-4)x}{n-2}+\frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird $x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{2a}{n-2}\right)}$, oder $x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)}$ und folglich $x=\frac{n-4+\sqrt{\left(8(n-2)a+(n-4)^2\right)}}{2(n-2)}$.

Weiche Formel eine allgemeine Regel enthält um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24 eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a=3009$ und $n=24$, folglich $n-2=22$ und $n-4=20$ so bekommen wir die Wurzel

$$x=\frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44}=\frac{20+728}{44}=17.$$

CAPITEL 8

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZELN AUS BINOMIEN

107.

Ein Binomium wird in der Algebra genennt eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das Quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3+\sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, und es ist gleich viel ob diese beyden Theile mit dem Zeichen + oder − verbunden sind. Dahero wird $3-\sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt als $3+\sqrt{5}$.

108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merckwürdig, weil man bey Auflösung der Quadratischen Gleichungen jedesmahl auf solche Formeln kommt, so offt die Auflösung nicht geschehen kann.

Also wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx=6x-4$, so wird dann $x=3+\sqrt{5}$. Um dieser Ursache willen kommen nun solche Formeln in den Algebraischen Rechnungen sehr häuffig vor, und wir haben auch schon oben gezeiget, wie damit die gewöhnliche Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Nun aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadrat-Wurzeln ausgezogen werden können, wofern nemlich eine solche Ausziehung statt findet, indem wiedrigenfals nur noch ein Wurzelzeichen vorgesetzt wird, nemlich von $3+\sqrt{2}$ ist die Quadrat-Wurzel $\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)}$.

109.

Man hat demnach zuförderst zu bemercken, daß die Quadrate von solchen Binomien wiederum dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Dann sucht man das Quadrat von $a+\sqrt{b}$, so wird dasselbe $\left(aa+b\right)+2a\sqrt{b}$. Wann also von dieser Formel $\left(aa+b\right)+2a\sqrt{b}$ hinwiederum die QuadratWurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a+\sqrt{b}$, welche ohnstreitig deutlicher zu begreiffen ist, als wann man vor jene Formel noch das *V* Zeichen setzen wollte. Eben so, wann man von dieser Formel $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $\left(a+b\right)+2\sqrt{ab}$, dahero auch umgekehrt von dieser Formel $\left(a+b\right)+2\sqrt{ab}$ die Quadrat-Wurzel seyn wird $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ welche wiederum verständlicher ist, als wann man vor jene noch das $\surd$ Zeichen setzen wollte.

110.

Es kommt dahero darauf an, wie ein Kennzeichen zu erfinden sey, woraus in einem jeglichen Fall beurtheilet werden kann, ob eine solche QuadratWurzel statt finde oder nicht. Wir wollen zu diesem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen und sehen, ob man aus diesem Binomio $5+2\sqrt{6}$ solcher Gestalt die Quadrat-Wurzel finden könne.

Man setze also diese Wurzel sey $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, wovon das Quadrat $\left(x+y\right)+2\sqrt{xy}$ ist, allso muß dieses Quadrat jener Formel $5+2\sqrt{6}$ gleich seyn; folglich der rationale Theil $x+y$ muß gleich seyn 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich seyn $2\sqrt{6}$; dahero bekommt man $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$ und die Quadrate genommen $xy=6$. Da nun $x+y=5$, so wird hieraus $y=5-x$ welcher Werthin der Gleichung $xy=6$ gesetzt giebt $5x-xx=6$ oder $xx=5x-6,$ dahero $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3;$ also $x=3$ und $y=2$, folglich wird aus $5+2\sqrt{6}$ die Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

111.

Da wir hier diese beyde Gleichungen erhalten haben

$$\text{I.) } x+y=5 \text{ und II.) } xy=6,$$

so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus *x* und *y* zu finden, welcher darinn besteht:

Da $x+y=5$ so nehme man die Quadraten $xx+2xy+yy=25$. Nun bemercke man, daß $xx-2xy+yy$ das Quadrat von $x-y$ ist; man subtrahire dahero von jener Gleichung nemlich von $xx+2xy+yy=25$, diese $xy=6$ vier mal genommen oder $4xy=24$, so erhält man $xx-2xy+yy=1$ und hieraus die Quadrat-Wurzel $x-y=1$, so wird, weil $x+y=5$ ist, gefunden $x=3$ und $y=2$. Dahero die gesuchte Quadrat-Wurzel von $5+2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

112.

Laßt uns dieses allgemeine Binomium $a+\sqrt{b}$ betrachten und die QuadratWurzel davon $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$, also $x+y=a$ und $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$ oder $4xy=b$ von jener ist das Quadrat $xx+2xy+yy=aa$ wovon diese $4xy=b$ subtrahirt, giebt $xx-2xy+yy=aa-b$, und wovon die Quadrat-Wurzel ist $x-y=\sqrt{(aa-b)}$. Da nun $x+y=a$, so finden wir

$$x=\tfrac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2} \text{ und } y=\tfrac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$$

dahero die verlangte Quadrat-Wurzel aus $a+\sqrt{b}$ seyn wird:

$$\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}.$$

113.

Diese Formel ist allerdings verwirrter, als wann man vor das gegebene Binomium $a+\sqrt{b}$ schlecht weg das Wurzel-Zeichen $\surd$ gesetzt hätte, nemlich $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wann die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $aa-b$ ein Quadrat wird, weil alsdann das $\surd$ hinter dem $\surd$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel bequem ausziehen könne, wann $aa-b=cc$, dann alsdenn wird die gesuchte Quadrat-Wurzel seyn

$$\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-c}{2}};$$

wann aber $aa-b$ keine Quadrat-Zahl ist, so läßt sich die Quadrat-Wurzel nicht füglieber anzeigen, als durch Vorsetzung des $\surd$ Zeichens.

114.

Dahero erhalten wir diese Regel um aus einem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel auf eine bequemere Art auszudrücken. Hierzu wird nemlich erfodert daß $aa-b$ eine

Quadrat-Zahl sey; ist nun dieselbe $= cc$, so wird die verlangte Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wobey noch anzumercken, daß von $a-\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel seyn werde $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$;. Dann nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$ *;* da nun $cc = aa-b$, so ist $aa-cc=b$; dahero dieses Quadrat

$$a-2\sqrt{\tfrac{b}{4}} = a-\tfrac{2\sqrt{b}}{2} = a-\sqrt{b}.$$

115.

Wann also aus einem solchen Binomio $a\pm\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils *aa* das Quadrat des irrationalen Theils *b;* aus dem Rest ziehe man die Quadrat-Wurzel, welche $= c$ sey, so ist die verlangte Quadrat-Wurzel

$$\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{a-c}{2}}.$$

116.

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $2+\sqrt{3}$ so ist $a=2$ und $b=3$; dahero $aa-b=cc=1$ und allso $c=1$: dahero die verlangte Quadrat-Wurzel ist

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.$$

Es sey ferner dieses Binomium gegeben $11+6\sqrt{2}$, woraus die QuadratWurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a=11$ und $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$; dahero $b=36\cdot 2=72$ und $aa-b=49$ folglich $c=7$. Dahero die Quadrat-Wurzel aus $11+6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}.$

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $11-2\sqrt{30}$. Hier ist $a=11$ und $b=230$, dahero $b=4\cdot 30=120$ und $aa-b=1$ und $c=1$: folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

117.

Diese Regel findet auch statt, wann so gar imaginäre, oder unmögliche Zahlen, vorkommen.

Wann also gegeben ist dieses Binomium $1+4\sqrt{-3}$, so ist $a=1$ und $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$; dahero $b=-48$ und $aa-b=49$. Dahero $c=7$ folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a=1$, $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b=\frac{1}{4}\cdot -3=-\frac{3}{4}$ dahero $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ und $c=1$: folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}}+\sqrt{-\tfrac{3}{4}}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{-3}}{2} \text{ oder } \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Noch ist merckwürdig dieses Exempel, wo aus $2\sqrt{-1}$ die QuadratWurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a=0$ und $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$ dahero $b=-4$ und $aa-b=4$, also $c=2$, woraus die gesuchte Quadrat-Wurzel ist $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$ wovon das Quadrat ist $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

118.

Sollte auch eine solche Gleichung aufzulösen vorfallen wie $xx=a\pm\sqrt{b}$ und es wäre $aa-b=cc$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten
$x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ welches in vielen Fällen Nutzen haben kann. Es sey z. E. $xx=17+12\sqrt{2}$, so wird $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

119.

Dieses findet insonderheit statt bey Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grad, als $x^4=2axx+d$. Dann setzt man hier $xx=y$ so wird $x^4=yy$, dahero unsere Gleichung $yy=2ay+d$, woraus gefunden wird $y=a\pm\sqrt{(aa+d)}$: dahero für die erste Gleichung seyn wird $xx=a\pm\sqrt{(aa+d)}$, woraus folglich noch die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß. Da nun hier $\sqrt{b}=\sqrt{(aa+d)}$ also $b=aa+d$, so wird $aa-b=-d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat nemlich cc oder $d=-cc$, so kann die Wurzel angezeigt werden; es sey demnach $d=cc$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grad vorgegeben $x^4=2axx-cc$, so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt

$$x=\sqrt{\tfrac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{a-c}{2}}.$$

120.

Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern;

I. Erstlich suche man zwey Zahlen deren Product sey 105, und wann man ihre Quadraten zusammen addirt, so sey die Summe = 274?

Man setze diese Zahlen seyen x und y, so hat man sogleich diese zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ xy = 105 \ \text{ und II.)}\ xx + yy = 274.$$

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$ welcher Werth in der andern vor y gesetzt, giebt $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Mit xx multiplicirt wird $x^4 + 105^2 = 274xx$, oder $x^4 = 274xx - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; dahero $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4:$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Fall wird $y = 7$, im letzteren aber $y = 15$. Dahero die beyden gesuchten Zahlen sind 15 und 7.

121.

Es ist hier aber gut zu bemercken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Dann da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein Quadrat ist, wir aber wißen was so wohl $xx + yy$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genommen, so wohl zu dem ersten addiren, als auch davon subtrahiren, wie hier zu sehen: $xx + yy = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt giebt $xx + 2xy + yy = 484$ und $x + y = 22$; darnach $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = 64$ und $x - y = 8$.

Allso $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellet daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf diese Art kann auch diese allgemeine Frage aufgelößt werden:

II. Man suche zwey Zahlen, davon das Product $= m$, und die Summ ihrer Quadraten $= n$?

Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so hat man die beyden folgenden Gleichungen

$$\text{I.)}\, xy = m,\ \text{ II.)}\ xx + yy = n.$$

Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich $2xy$ addirt wird $xx + 2xy + yy = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{(n+2m)}$ hierauf $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{(n-2m)}$ also

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n+2m)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(n-2m)} \text{ und } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n+2m)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(n-2m)}.$$

122.

III. Es sey ferner diese Frage vorgelegt: man suche zwey Zahlen, deren Product $=35$ und die Differenz ihrer Quadraten $=24$?

Es sey x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beyde Gleichungen $xy=35$ und $xx-yy=24$; da nun hier die vorigen Vortheile nicht statt finden, so verfahre man nach der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y=\frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, giebt $xx-\frac{1225}{xx}=24$, mit xx multiplicirt, so hat man $x^4-1225=24xx$ und $x^4=24xx+1225$. Weil hier das letzte Glied das Zeichen *plus* hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nehmlich $cc=-1225$, und also c imaginär würde.

Man setze dahero $xx=z$, so hat man $zz=24z+1225$ woraus gefunden wird $z=12\pm\sqrt{(144+1225)}$ oder $z=12\pm 37$ dahero $xx=\ 12\pm 37$, das ist entweder $xx=49$ oder $xx=25$. Nach dem ersten Werth wird $x=7$ und $y=5$.

Nach dem andern aber wird

$$x=\sqrt{-25} \text{ und } y=\frac{35}{\sqrt{-25}}\text{ , oder } y=\sqrt{\frac{1225}{-25}}\text{, oder } y=\sqrt{-49}.$$

123.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch diese Frage beyfügen:

IV. Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Product, und die Differenz ihrer Quadraten einander gleich seyen?

Die größere Zahl sey x, die kleinere y, so müßen diese drey Formeln einander gleich seyn: I.) Summe $x+y$, II.) Product xy, III.) Differenz der Quadraten $xx-yy$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x+y=xy$ und daraus suche man x. Man wird allso haben $y=xy-x$ oder $y=x(y-1)$ und daraus wird $x=\frac{y}{y-1}$; dahero wird $x+y=\frac{yy}{y-1}$ und $xy=\frac{yy}{y-1}$ und also ist die Summe dem Product schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadraten gleich seyn: es wird aber

$$xx-yy=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$$

welches dem obigen Werth $\frac{yy}{y-1}$ gleich seyn muß; dahero bekommt man $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; durch yy dividirt wird $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$ ferner mit $y-1$ multiplicirt wird $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$ nochmahls mit $y-1$ multiplicirt giebt

$$y-1=-yy+2y\text{, folglich } yy=y+1.$$

Hieraus findet man

$$y=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+1\right)}=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{5}{4}} \text{ oder } y=\tfrac{1+\sqrt{5}}{2};$$

und dahero erhalten wir $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicirt man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bekommt man $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Antwort: Also ist die größere der gesuchten Zahlen $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ihre Summe ist also $x+y=2+\sqrt{5}$, ferner das Product $xy=2+\sqrt{5}$, und da $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ so wird die Differenz der Quadraten $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

124.

Weil diese Auflösung ziemlich mühsam war, so kann dieselbe leichter gefunden werden; man setze erstlich die Summe $x+y$ der Differenz der Quadraten $xx-yy$ gleich, so hat man $x+y=xx-yy$. Hier kann man durch $x+y$ dividiren weil $xx-yy=(x+y)(x-y)$, und da erhält man $1=x-y$ woraus $x=y+1$; dahero $x+y=2y+1$ und $xx-yy=2y+1$; und diesem muß noch gleich seyn das Product $xy=yy+y$. Man hat also $yy+y=2y+1$, oder $yy=y+1$, woraus wie oben gefunden wird $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Frage: Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und die Summe ihrer Quadraten einander gleich seyn? Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so müßen diese drey Formeln einander gleich seyn

I.) $x+y$, II.) xy, und III.) $xx+yy$.

Setzt man die erste der zweyten gleich $x+y=xy$, so findet man daraus $x=\frac{y}{y-1}$ und $x+y=\frac{yy}{y-1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $xx+yy=\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$, welches dem $\frac{yy}{y-1}$ gleich zu setzen: Man multiplicire mit $yy-2y+1$ so bekommt man $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$ oder $y^4=3y^3-3yy$, und durch yy dividirt $yy=3y-3$; dahero $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-3\right)}$, also $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ dahero $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, folglich $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1-\sqrt{-3}$, so wird $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Antwort: also sind die beyden gesuchten Zahlen

$$x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2} \text{ und } y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2},$$

ihre Summe ist $x+y=3$, das Product $xy=3$, und da endlich $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ und $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $xx+yy=3$.

126.

Diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welches noch in andern Fällen statt findet. Derselbe bestehet darin, daß man die gesuchte Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p+q$ und die andere $p-q$, so wird die Summe derselben seyn $2p$, ihr Product $pp-qq$ und die Summe ihrer Quadraten $2pp+2qq$ welche drey Stück einander gleich seyn müßen. Man setze das erste gleich dem zweyten so wird $2p=pp-qq$ und daraus $qq=pp-2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird dasselbe $4pp-4p$. Welches dem ersten gleich gesetzt giebt $2p=4pp-4p$. Man addire $4p$ so wird $6p=4pp$, durch p dividirt $6=4p$ und also $p=\frac{3}{2}$.

Heraus $qq=-\frac{3}{4}$ und $q=\frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p+q=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p-q=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.

CAPITEL 9

VON DER NATUR DER QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Genüge ersehen, daß die Quadratische Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen dahero genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede Quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulaße, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl so wohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden laßen, dahero wird es gut seyn den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären woher es komme daß eine Quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgeläset werden, oder daß vor x zweyerleyWerthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x so wohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern 0 zu stehen kommt. Dahero die obige Gleichung seyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wohey es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche wann sie vor x gesetzt wird, die Formel $xx - 12x + 35$ würcklich in nichts verwandelt werde; und hernach muß auch die Ursach gezeigt werden warum solches auf zweyerley Art geschehen könne.

130.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deutlich zeige, daß eine solche Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden könne, wie dann diese Formel würcklich aus diesen zwey Factoren besteht $(x-5)\cdot(x-7)$. Wann dahero jene Formel soll 0 werden, so muß auch dieses Product $(x-5)\cdot(x-7) = 0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit 0, wann nur einer von seinen Factoren 0 wird. Dann so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wann dasselbe noch mit 0 multiplicirt wird, so kommt immer 0 heraus, welcher Grund-Satz für die höhern Gleichungen wohl zu bemercken ist.

131.

Hieraus begreift man nun gantz deutlich, daß dieses Product $(x-5)\cdot(x-7)$ auf eine doppelte Art 0 werden könne: einmahl nemlich wann der erste Factor $x - 5 = 0$ wird, und hernach auch, wann der andere Factor $x - 7 = 0$ wird. Das erstere geschiehet wann $x = 5$, das andere aber wann $x = 7$. Hieraus versteht man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung $xx - 12x + 35 = 0$ zweyerley Auflösungen zuläßt, oder für x zwey Werthe gefunden werden . können, welche beyde der Gleichung ein Genügen leisten.

Der Grund besteht nemlich darinn, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren vorstellen läßt.

132.

Eben dieser Umstand findet bey allen Quadratischen Gleichungen statt. Dann wann alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Formel $xx-ax+b=0$; und diese Formel kann ebenfals als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen $(x-p)(x-q)$ ohne uns darum zu bekümmern, was p und q vor Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product gleich 0 werde, so ist offenbar, daß solches auf zweyerley Art geschehen könne: erstlich wann $x=p$, und zweytens wann $x=q$, welches die beyden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

133.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwey Factoren beschaffen seyn müßen, daß derselben Product just unsere Formel $xx-ax+b$ hervorbringe: man multiplicire demnach dieselben würcklich, so erhält man $xx-(p+q)x+pq$ welches, da es einerley seyn soll mit $xx-ax+b$, so ist klar daß seyn muß $p+q=a$ und $pq=b$, woraus wir diese herrliche Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx-ax+b=0$ die beyden Werthe für x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a und ihr Product der Zahl b. Dahero so bald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht der andere zu finden.

134.

Dieses war der Fall, wann beyde Werthe für x Positiv sind, da dann in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen −, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen dahero auch die Fälle erwegen, worinnen einer von den beyden Werthen für x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geschiehet wann die beyden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x-p)(x+q)$; woher diese zweyWerthe für x entspringen, erstlich $x=p$ und zweytens $x=-q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdann $xx+(q-p)\,x-pq=0$, wo das zweyte Glied das Zeichen + hat wann nemlich q größer ist als p; wäre aber q kleiner als p so hätte es das Zeichen −, das dritte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beyden Factoren $(x+p)(x+q)$ so wären beydeWerthe für x negativ, nemlich $x=-p$ und $x=-q$ und die Gleichung selbst würde seyn $xx+(p+q)x+pq=0$, wo sowohl das zweyte als das dritte Glied das Zeichen + haben.

135.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeglichen Quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx\cdots ax\cdots b=0$; wann nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beydeWerthe negativ; ist das zweyte Glied −, das dritte aber +, so sind beydeWerthe positiv; ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das zweyte Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

136.

Anjetzo ist es gantz leicht solche Quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebeneWerthe in sich enthalten: man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber 3. Man mache daraus diese einfache Gleichungen $x = 7$ und $x = -3$; hieraus ferner diese $x - 7 = 0$ und $x + 3 = 0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden; also daß die Gleichung seyn wird: $xx - 4x - 21 = 0$, woraus auch nach der obigen Regel eben diese beydeWerthe für x gefunden werden. Dann da $xx = 4x + 21$, so wird $x = 2 \pm \sqrt{25}$, also $x = 2 \pm 5$, also entweder $x = 7$ oder $x = -3$.

137.

Es kann auch geschehen, daß beyde Werthe für x einander gleich werden; man suche nemlich eine Gleichung wo beydeWerthe für x sind $x = 5$; die beyde Factoren werden also seyn $(x-5)(x-5)$ und die Gleichung ist also beschaffen $xx - 10x + 25 = 0$, welche scheinet nur einen Werth zu haben, weil auf eine doppelte Art wird $x = 5$, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Dann da $xx = 10x - 25$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{0}$, oder $x = 5 \pm 0$ und daher wird $x = 5$ und $x = 5$.

138.

Insonderheit ist hier noch zu mercken, daß bisweilen beyde Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es gantz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen welcher der Gleichung ein Genüge leistet, wie z. E. geschiehet, wann die Zahl 10 in zwey solchen Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey: dann es sey ein Theil x so wird der andere seyn $10 - x$ und also ihr Product $10x - xx = 30$, folglich $xx = 10x - 30$ und $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist und zu erkennen giebt, daß die Frage unmöglich sey.

139.

Es ist demnach sehr wichtig ein Kennzeichen auszufinden, woraus man sogleich erkennen kann, ob eine Quadratische Gleichung möglich sey oder nicht. Es sey dahero diese allgemeine Gleichung gegeben:

$xx - ax + b = 0$, so wird $xx = ax - b$ und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)}$;

woraus erhellet, daß wann die Zahl b größer ist als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ größer als aa, die beydenWerthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beyde Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder unmöglich, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und, haben auch immer diese Eigenschaft, daß ihre Summe ist $=a$ und ihr Product $=b$, wie in diesem Exempel zu ersehen $xx-6x+10=0$, wo die Summe der beyden Werthe für x seyn muß $=6$ und das Product $=10$. Man findet aber diese beydenWerthe: I.) $x=3+\sqrt{-1}$ und II.) $x=3-\sqrt{-1}$, deren Summe 6 und ihr Product 10 ist.

140.

Man kann dieses Kennzeichen auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auch auf solche Gleichungen angewant werden kann $fxx\pm gx+h=0$: dann hieraus hat man $xx=\mp\frac{gx}{f}-\frac{h}{f}$ dahero

$$x=\mp\frac{g}{2f}\pm\sqrt{\left(\frac{gg}{4ff}-\frac{h}{f}\right)},\ \text{oder } x=\frac{\mp g\pm\sqrt{(gg-4fh)}}{2f},$$

woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär oder die Gleichung unmöglich werde, wann $4fh$ größer ist als gg, oder wann in dieser Gleichung $fxx\pm gx+h=0$ das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied größer ist, als das Quadrat des zweyten Glieds. Dann das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied ist $4fhxx$, das Quadrat aber des mittlern Glieds ist $ggxx$: wann nun $4fhxx$ größer als $ggxx$, so ist auch $4fh$ größer als gg und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beydenWerthe für x können würcklich angegeben werden, wann dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werth gelangen kann, wie oben bemercket worden; dahingegen bey imaginären Ausdrücken als $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141.

Hierbey ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweyten Grad $xx\pm ax\pm b$ nothwendig allezeit in zwey solche Factores

$$(x\pm p)(x\pm q)$$

aufgelöst werden kann. Dann wann man drey solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grad kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grad ansteigen. Dahero es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grad nothwendig zwey Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr, noch weniger, seyn können.

142.

Man hat schon gesehen, daß wann diese beyden Factores gefunden worden, man daraus auch die beydenWerthe für x anzeigen kann; indem ein jeder Factor, wann er gleich 0 gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß so bald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der Quadratischen Gleichung erkannt werde. Dann wann $x = p$ ein Werth für x in einer Quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben: oder die Gleichung, wann alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143.

Um dieses zu erläutern so sey diese Gleichung gegeben:

$$xx + 4x - 21 = 0,$$

von welcher wir wißen, daß $x = 3$ ein Werth für x sey, indem

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$$

ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x - 3$ ein Factor dieser Gleichung sey, oder daß sich $xx + 4x - 21$ durch $x - 3$ theilen laße, wie aus dieser Division zu ersehen

$$\begin{array}{lll} x-3) & xx+4x-21 & (x+7 \\ & \underline{xx-3x} & \\ & \quad 7x-21 & \\ & \quad \underline{7x-21} & \\ & \qquad 0 & \end{array}$$

Also ist der andere Factor $x + 7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt $(x - 3)(x + 7) = 0$ woraus die beydenWerthe für x sogleich erhellen, da nemlich aus dem ersten Factor $x = 3$ aus dem andern aber $x = -7$ wird.