THE SECOND PART OF BOOK II ON ANALYTICAL DETERMINATIONS

CHAPTER 1

ON THE SOLUTION OF SIMPLE EQUATIONS IN WHICH MORE THAN ONE UNKNOWN NUMBER IS PRESENT

1.

From the above it can be observed, how an unknown number can be determined by one equation; moreover two unknown numbers by two equations; 3 unknowns by 3 equations; 4 by 4, and so on ; thus so that always just as many equations are required, as there shall be unknown numbers, if the question itself is to be determined.

But if fewer equations can be derived from the question, than the number of unknown numbers assumed, then some remain undetermined and left over to be chosen as we wish ; therefore such questions are to be called indeterminate, and which constitute a proper part of analysis, thus so-called indeterminate analysis.

2.

Since in these cases one or more unknown numbers can be assumed following our discretion, thus to find in that case how many solutions occur.

This condition alone generally will be added, that the numbers sought, whole as well as positive, or at least to be supposed to be rational numbers; whereby all the possible numbers of the possible will be exceedingly limited, thus so that often not just a few but indeed infinitely, but which often cannot be seen, find a place, as well too that not a single one is possible. Therefore this part of analysis often requires to be handled by quite special techniques, and serves not a little to enlighten the mind of the beginner, and brings to the same a greater skill in reckoning.

3.

We will make a start with an easy question, and look for two numbers, for which the sum shall be 10, where it is understood, that these numbers shall be whole and positive.

Now the same numbers are called *x* and *y,* thus so that there shall be $x+y=10$, from which it is found that $x=10-y$, thus so that *y* can be taken as no other than a whole positive number; therefore all the whole numbers can be assumed from 1 to infinity, but since *x* also must be positive, thus *y* cannot be assumed to be greater than 10, as then *x* would be negative ; and if also 0 is not valid , thus 9 is the highest *y* can be put, as otherwise $x=0$; where only the following solutions have a place:

if $y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

thus $x=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$

But of these nine solutions the last four are the same as the first four, therefore in all only five different solutions can be found.

Should three numbers be desired, for which the sum were 10 , thus one must only divide one of the numbers found here into two parts, from which one would obtain a greater number of solutions.

4.

Since this had hardly any difficulty, thus we will proceed to somewhat harder questions.

I. Question: It is required to divide 25 into two parts, of which one can be divided into 2 parts and the other into 3 parts?

Let the one part be $2x$, the other $3y$, thus there must be $2x+3y=25$.
So that $2x=25-3y$. On dividing by 2 thus there becomes $x=\frac{25-3y}{2}$, from which we see at first, that $3y$ must be smaller than 25 and therefore y cannot be greater than 8.
Thus it can be deduced that the first number $25-3y$ can be divided by the denominator 2, thus becoming $x=12-y+\frac{1-y}{2}$; thus either $1-y$ or $y-1$ must be divisible by 2.
Therefore on putting $y-1=2z$ and so $y=2z+1$, thus there becomes
$x=12-2z-1-z=11-3z$; because now y cannot be greater than 8, thus also no other number can be assumed for z as such, so that $2z+1$ cannot be given greater than 8.
Consequently z must be smaller than 4, therefore z cannot be assumed to be greater than 3, from which the solutions follow:

Putting	$z=0,$	$z=1,$	$z=2,$	$z=3,$
thus	$y=1,$	$y=3,$	$y=5,$	$y=7,$
and	$x=11,$	$x=8,$	$x=5,$	$x=2,$

therefore the two parts of 25 sought shall be :

$$\text{I.) } 22+3,\quad \text{II.) } 16+9,\quad \text{III.) } 10+15,\quad \text{IV.) } 4+21.$$

5.

II. Question: How does one divide 100 into two parts, so that the first part can be divided by 7, but the second part can be divided by 11?

Therefore the first part shall be $7x$ and the other part $11y$, thus there must be

$$7x+11y=100\ ;\text{ therefore } x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7},$$

thus there will be $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; also there will be $2-4y$ or $4y-2$ itself given to be divisible by 7 . But if we let $4y-2$ be divisible by 7, thus the half of that, $2y-1$, also must be divisible by 7, therefore we put $2y-1=7z$, or $2y=7z+1$, thus there becomes $x=14-y-2z$; but since there must be $2y=7z+1=6z+z+1$, thus we have $y=3z+\frac{z+1}{2}$. Now putting $z+1=2u$ or $z=2u-1$, thus there becomes $y=3z+u$.
Consequently we can take each whole number for u, for which neither x nor y shall be negative, and as then we come upon: $y=7u-3$ and $x=19-11u$.

According to the first formula $7u$ must be greater than 3, but according to the second $11u$ shall be smaller than 19, or u shall be smaller than $\frac{19}{11}$, thus it follows that u cannot be even 2, now since u cannot possibly be 0, thus there remains only one value left namely $u=1$, from which we arrive at $x=8$ and $y=4$; therefore the parts of 100 sought become I.) 56 and II.) 44.

6.

III. Question: How does one divide 100 into two parts such that, if the first part is divided by 5, then 2 is left over, and if one divides the second part by 7 that 4 is left over?

Since the first part divided by 5 leaves 2 over, thus the same can be put as $5x+2$, and because the second part divided by 7 leaves 4 over, thus the same can be put as $7y+4$; thus there will be

$$5x+7y+6=100 \text{ or } 5x=94-7y=90+4-5y-2y,$$

from which $x=18-y-\frac{2y-4}{5}$; thus there must be $4-2y$, or $2y-4$, or thus the half of which $y-2$ is divisible by 5. Therefore one puts $y-2=5z$ or $y=5z+2$, thus $x=16-7z$; from which it is apparent that $7z$ must be smaller than 16, consequently z must be smaller than $\frac{16}{7}$ and also not greater than 2. Thus we have here three solutions.

I.) $z=0$, gives $x=16$, and $y=2$; from which the two parts of 100 shall be $82+18$.

II.) $z=1$, gives $x=9$, and $y=7$; from which the two parts of 100 shall be $47+53$.

III.) $z=2$, gives $x=2$, and $y=12$; from which the two parts of 100 shall be 12 + 88.

7.

IV. Question: Two peasant women have together 100 eggs, the first says: if I count over my eggs in lots of 8 then 7 remain left over, the other says: if I count over my eggs in lots of 10 then I have 7 left over too; how many eggs did each have ?

Because the number of eggs of the first peasant divided by 8 lets 7 remain, but the number of eggs of the other peasant divided by 10 also lets 7 be left over, thus the number of eggs of the first can be put $8x+7$, but of the other $10y+7$, so that $8x+10y+14=100$, or $8x=86-10y$, or $4x=43-5y=40+3-4y-y$; therefore putting $y-3=4z$, thus there becomes $y=4z+3$ and $x=10-4z-3-z=7-5z$, consequently $5z$ must be smaller than 7 and also z smaller than 2, from which these two solutions arise :

I.) $z=0$, gives $x=7$, and $y=3$; therefore the first peasant woman had 63 eggs, and the other had 37.

II.) $z=1$, gives $x=2$, and $y=7$; therefore the first peasant woman had 23 eggs, and the other 77.

8.

V. Question: A company of men and women have together consumed 1000 Kopeks worth of food at an inn. Each man has consumed 19 Cop. worth and each woman 13 Cop. How many men and women were there ?
The number of men shall be $= x$, and of women $= y$, thus the equation arises $19x + 13y = 1000$. From which there becomes
$13y = 1000 - 19x$ or $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, thus becoming $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$; thus $12 - 6x$ or $6x - 12$ itself, and also the sixth part of that $x - 2$ must be divisible by 13. Thus on putting $x - 2 = 13z$, hence $x = 13z + 2$ and
$y = 76 - 13z - 2 - 6z$ or $y = 74 - 19z$; thus z must be less than $\frac{74}{19}$ and consequently smaller than 4, therefore the four following solutions can be found :

I.) $z = 0$, gives $x = 2$ and $y = 74$. Thus there were 2 men and 74 women; these have consumed 38 Cop. and those 962 Cop. respectively.

II.) $z = 1$, gives the number of men $x = 15$ and the number of women $y = 55$; those have consumed 285 Cop. and these 715 Cop. respectively.

III.) $z = 2$, gives the number of men $x = 28$, and the number of women $y = 36$; those have consumed 532 Cop. and these 468 Cop. respectively.

IV.) $z = 3$, gives the number of men $x = 41$, and the number of women $y = 17$; those have consumed 779 Cop. and these 221 Cop. respectively.

9.

VI. Question: A farm manager buys horses and oxen for 1770 Rthl. altogether; the cost of a horse is 31 Rthl. and for an ox 21 Rthl. ; how many horses and oxen were there?

Let the number of horses be $= x$, and of oxen $= y$, thus there must be:
$31x + 21y = 1770$ or $21y = 1770 - 31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$, and thus
$y = 84 - x + \frac{6-10x}{21}$; therefore $10x - 6$ and thus also the half $5x - 3$ is divisible by 21 ; man thus putting $5x - 3 = 21z$, therefore $5x = 21z + 3$, so that $y = 84 - x - 2z$. Now since $x = \frac{21z+3}{5}$ or $x = 4z + \frac{z+3}{5}$, thus putting $z + 3 = 5u$, there becomes
$z = 5u - 3$, $x = 21u - 12$ and $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$; therefore u must be greater than 0 and still smaller than 4, from which we obtain the three equations :

I.) $u = 1$, gives the number of horses $x = 9$ and of oxen $y = 71$; those have cost 279 Rthl. and these 1491, making altogether 1770 Rthl.

II.) $u = 2$, gives the number of horses $x = 30$ and of oxen $y = 40$; those have cost 930 Rthl. and these 840, making altogether 1770 Rthl.

III.) $u = 3$, gives the number of horses $x = 51$ and of oxen $y = 9$; those have cost 1581 Rthl. and these 189 Rthl., making altogether 1770 Rthl.

10.

The questions hitherto are derived from such an equation $ax + by = c$, where *a, b* and *c* denote whole positive numbers, and also whole positive numbers are required for *x* and *y*.

But if *b* is negative, and the equation gives such a form $ax = by + c$, thus the questions must be of quite a different form, and allow an infinite number of solutions, of which the method is still to be explained in this chapter. The easiest questions of this kind are like this :

If for example two numbers are sought, of which the difference must be 6, thus putting the smaller $= x$, the greater $= y$, and since there shall be $y - x = 6$, consequently $y = 6 + x$. Now here nothing prevents us from taking any desired value for *x*, and that for any single value taken, thus *y* is greater by 6 always . Taking for example $x = 100$ thus there shall be $y = 106$; from which it is quite clear, that infinitely many solutions can be found.

11.

Next the questions follow, where $c = 0$ and *ax* simply must be equal to *by*. Namely a number is sought, that can be divided by 5 as well as by 7, and putting this number $= N$, thus in the first place there is $N = 5x$, because the number *N* must be divisible by 5 ; then also there must be $N = 7y$, because this number also must be allowed to be divisible by 7 ; therefore there arises $5x = 7y$ and thus $x = \frac{7y}{5}$; then since now 7 cannot be divided by 5, thus *y* itself is allowed to be divided by that. Therefore putting $y = 5z$, thus there becomes $x = 7z$, therefore the sought number $N = 35z$, where each whole number can be taken for *z*, thus infinitely many can be given for *N* , which are :

35, 70, 105, 140, 175, 210, etc.

If it should be wished, that the number *N* as well as these shall be divisible by 9, thus in the first place there was $N = 35z$, and in addition also there shall be $N = 9u$, thus $35z = 9u$ and therefore $u = \frac{35z}{9}$; from which it is clear, that *z* must be divisible by 9 . Finally there is $z = 9s$, thus there becomes $u = 35s$ and the number sought $N = 315s$.

12.

It is more difficult if the number *c* is not 0 , as if it were $5x = 7y + 3$, which equation arises, if a number *N* were sought were to be found, which in the first place can be divided by 5 ; but if the same were divided by 7 then 3 would remain left over, then there must be $N = 5x$, but in addition $N = 7y + 3$ and therefore becomes $5x = 7y + 3$ consequently

$$x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}.$$

Putting $2y + 3 = 5z$, thus becoming $x = y + z$; but since $2y + 3 = 5z$, or $2y = 5z - 3$, thus there will be $y = \frac{5z-3}{2}$, or $y = y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Now putting $z - 3 = 2u$ thus there becomes $z = 2u + 3$ and $y = 5u + 6$, and $x = y + z = 7u + 9$; consequently the number sought $N = 35u + 45$, where all whole numbers can be assumed for *u* also thus even negative ones, as long as *N* will be positive, which occurs here if $u = -1$, since then there will be

$N=10$; the following is obtained, if always 35 is added to that, therefore the numbers sought are :

10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, etc.

13.

The solution of such questions depends on the ratio between the two numbers, which are to be divided, and according to the nature itself shall be either shorter or more extensive ; the following question leads to a short solution.

VII. Question: What number is sought, which divided by 6 leaves 2 remaining, but divided by 13 leaves 3 remaining?

This number shall be *N*, thus in the first place there shall be $N=6x+2$, and next $N=13y+3$; thus there becomes $6x+2=13y+3$ and $6x=13y+1$, therefore

$$x=\tfrac{13y+1}{6}=2y+\tfrac{y+1}{6}.$$

Thus on putting $y+1=6z$, there becomes $y=6z-1$ and $x=2y+z=13z-2$; consequently the number sought is $N=78z-10$. Such numbers therefore shall be the following : 68, 146, 224, 302, 380, etc. which advance according to an arithmetical progression, of which the common difference is $78=6\cdot 13$. Thus if one wants to know only one of these numbers, thus all the remainders are themselves found easily, likewise it is necessary only to add or subtract 78 to, or from that, as long as it approaches.

14.

The following shall be an example which may be harder:

VIII. Question: Find a number *N* which divided by 39 leaves 16 remaining, and divided by 56 leaves 27 remaining.

In the first place there shall be $N=39p+16$ and then $N=56q+27$; therefore there becomes $39p+16=56q+27$, or $39p=56q+11$ and $p=\tfrac{56q+11}{39}$, or $p=q+\tfrac{17q+11}{39}=q+r$; so that $r=\tfrac{17q+11}{39}$; therefore there becomes $39r=17q+11$, and $q=\tfrac{39r-11}{17}=2r+\tfrac{5r-11}{17}=2r+s$; so that $s=\tfrac{5r-11}{17}$ or $17s=5r-11$, therefore there becomes $r=\tfrac{17s+11}{5}=3s+\tfrac{2s+11}{5}=3s+t$; so that $t=\tfrac{2s+11}{5}$, or $5t=2s+11$ and thus becomes $s=\tfrac{5t-11}{2}=2t+\tfrac{t-11}{2}=2t+u$; so that $u=\tfrac{t-11}{2}$ and $t=2u+11$.

Now since no more fractions are present, thus *u* can be assumed to be arbitrary and therefore we obtain the following equations determined by working backwards :

$$\begin{aligned}
t&=2u+11\\
s&=2t+u=5u+22\\
r&=3s+t=17u+77\\
q&=2r+s=39u+176\\
p&=q+r=56u+253
\end{aligned}$$

and finally $N = 39 \cdot 56u + 9883.$ In order that the smallest number can be found for *N*, on putting $u = -4$, thus there becomes $N = 1147$; putting $u = x - 4$, thus becoming $N = 2184x - 8736 + 9893,$ or $N = 2184x + 1147.$ These numbers therefore make an arithmetical progression, the first term of which is 1147 and the common difference $= 2184$. These numbers are therefore 1147, 3331, 5515, 7699, 9883, etc.

15.

We will add a few more questions for practice:

IX. Question: A gathering of men and women are in an inn ; a man consumes 25 Cop. worth and a woman 16 Cop. worth and overall it is found that the women have consumed a Cop. more than the men ; how many men and women were there ?

The number or women shall be given $= p$, and of men $= q$, thus the women have consumed 16*p,* whereas the men 25*q;* therefore there must be $16p = 25q + 1$ and there becomes $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r;$ so that $r = \frac{9q+1}{16}$ or $9q = 16r - 1$; there fore there becomes $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, so that $s = \frac{7r-1}{9}$, or $9s = 7r - 1$; therefore we have $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$ so that $t = \frac{2s+1}{7}$ or $7t = 2s + 1$; therefore there becomes $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u,$ so that $u = \frac{\ }{2}$ or $2u = t - 1,$ therefore $t = 2u + 1.$
From this we obtain now backwards :

$$\begin{aligned}
t &= 2u + 1 \\
s &= 3t + u = 7u + 3 \\
r &= s + t = 9u + 4 \\
q &= r + s = 16u + 7 \\
p &= q + r = 25u + 11
\end{aligned}$$

therefore the number of women was $25u + 11$, moreover the number of men $16u + 7$, where for *u* can be taken as wished in whole numbers. The smaller numbers can be put in place together as follows:

Number of women: = 11, 36, 61, 86, 111, etc.
of men: = 7, 23, 39, 55, 71, etc.

According to the first solution the smallest numbers have the women consume 176 Cop. and the men 175; thus the women consume one more Cop. than the men.

16.

IX. Question: Someone buys horses and oxen, he pays 31 Rthl. for a horse and 20 Rthl. for an ox and he finds that the oxen together themselves have cost 7 more than the horses ; how many oxen and horses were there?

Let the number of oxen be $= p$, and the number of horses $= q$, thus there shall be

$20p = 31q + 7,$ therefore $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r,$ therefore

$20r = 11q + 7,$ and $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s,$ therefore

$11s = 9r - 7,$ and $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t,$ therefore

$9t = 2s + 7,$ and $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u,$ therefore

$2u = t - 7,$ and $t = 2u + 7;$

$$s = 4t + u = 9u + 28$$
$$r = s + t = 11u + 35$$
$$q = r + s = 20u + 63 \text{ number of horses}$$
$$p = q + r = 31u + 98 \text{ number of oxen.}$$

From this the smallest positive numbers can be found for *p* and *q,* if one puts $u = -3$; the greater ascend in an arithmetical progression as follows :

Number of oxen $p = 5$, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253, etc.
Number of horses $q = 3$, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, etc.

17.

If now we consider by this example, how the following letters *p* and *q* will be determined, thus it is easy ourselves to see, that such arise from the ratio of the numbers 31 and 20, and indeed for that, after which the greatest common divisor of the two numbers can be used, as becomes apparent from the following :

20	31	1
	20	
11	20	1
	11	
9	11	1
	9	
2	9	4
	8	
1	2	2
	2	
	0	

Then it is clear here, how the quotients of one another arise in the following determination of the numbers *p, q, r, s,* etc. and are to be connected by the first letter from the right hand side, likewise the last always remains to be a prime number; but the last equation first and foremost always brings to light the number 7, and indeed with a *plus* sign, as the last determination is the fifth, but if the number itself were even, than -7 must be put in place. Such is shown thoroughly in the following table, where initially the analysis is shown of the numbers 31 and 20, and therefore the determination of the letters *p, q, r,* etc. arises.

[The origin of the Remainder Theorem?]

$31 = 1 \cdot 20 + 11$	$p = 1 \cdot q + r$
$20 = 1 \cdot 11 + 9$	$q = 1 \cdot r + s$
$11 = 1 \cdot 9 + 2$	$r = 1 \cdot s + t$
$9 = 4 \cdot 2 + 1$	$s = 4 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot 10$	$t = 2 \cdot u + 7$

18.

The previous example in §.14 can be set out in the same manner, as follows:

$56 = 1 \cdot 39 + 17$	$p = 1 \cdot q + r$
$39 = 2 \cdot 17 + 5$	$q = 2 \cdot r + s$
$17 = 3 \cdot 5 + 2$	$r = 3 \cdot s + t$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$	$s = 2 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$	$t = 2 \cdot u + 11$

19.

Such a form shall be in place to solve all suchlike examples in a general manner:
This equation shall be given, namely: $bp = aq + n$, where *a, b* and *n* are known numbers. Here we need only follow the operation in place, as if we wished to find the greatest common denominator between the numbers *a* and *b* , from which thus equally *p* and *q* will be determined by the following numbers, as follows :

Let there be $a = Ab + c$	thus there becomes $p = Aq + r$
$b = Bc + d$	$q = Br + s$
$c = Cd + e$	$r = Cs + t$
$d = De + f$	$s = Dt + u$
$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
$f = Fg + 0$	$u = Fv \pm n$

Here in the last determination $+n$ is assumed, if the number of determinations is odd, but again $-n$, if the same number is even. Such a form now can solve all similar questions fairly quickly, a few examples of which we would like to give .

20.

XI. Question: Let a number be sought, which divided by 11 leaves the remainder 3, but by 19 leaves 5?

This number shall be *N,* therefore in the first place becomes $N = 11p + 3$ also in the second place $N = 19q + 5$ whereby we have $11p + 3 = 19q + 5$ or $11p = 19q + 2$, from which the following table is constructed :

$19 = 1.11 + 8$	$p = 1.q + r$

$$\begin{array}{r|l} 11 = 1.8 + 3 & q = 1.r + s \\ 8 = 2.3 + 2 & r = 2.s + t \\ 3 = 1.2 + 1 & s = 1.t + u \\ 2 = 2.1 + 0 & t = 2.u + 2 \end{array}$$

where u can still be taken as arbitrary, and therefore the foregoing letters taken in the reverse order, as follows :

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ s &= t + u = 3u + 2 \\ r &= 2s + t = 8u + 6 \\ q &= r + s = 11u + 8 \\ p &= q + r = 19u + 14 \end{aligned}$$

from which the number sought arises $N = 209u + 157$, therefore the smallest value for $N = 157$.

21.

XII. Question: A number N is sought which as before divided by 11 leaves the remainder 3, and divided by 19 leaves the remainder 5 ; but if the same is divided by 29, that leaves the remainder 10 ?

After the last operation there must be $N = 29p + 10$, and since the two first operations are worked out already, thus according to the same, there is found as above, $N = 209u + 157$, for which we can write $N = 209q + 157$, therefore we have $29p + 10 = 209q + 157$ or $29p = 209q + 147$; from which the following operation is put in place:

$$\begin{array}{rl} 209 = 7 \cdot 29 + 6; & \text{thus } p = 7q + r \\ 29 = 4 \cdot 6 + 5; & q = 4r + s \\ 6 = 1 \cdot 5 + 1; & r = s + t \\ 5 = 5 \cdot 1 + 0; & s = 5t - 147 \end{array}$$

from whence we reverse the order in the following form :

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147 \\ r &= s + t = 6t - 147 \\ q &= 4r + s = 29t - 735 \\ p &= 7q + r = 209t - 5292 \end{aligned}$$

therefore $N = 6061t - 153458$. The smallest number comes from this, if we put $t = 26$, that is, $N = 4128$.

22.

But it is to be observed here that if such an equation $bp = aq + n$ shall be solved, the two numbers a and b must have no common divisors other than 1, then otherwise the question would be insolvable, unless the number n had not itself the same common divisor.

Then if, for example, there should be $9p = 15q + 2$, where 9 and 15 then have the common divisor 3, whereby 2 itself is not divisible, thus this is an impossible equation to solve, because $9p - 15q$ is always divisible by 3 and thus can never be divided by 2, but in the first place were $n = 3$ or $n = 6$ etc. thus the question would be quite possible, although the equation must be divided by 3, since then there becomes $3p = 5q + 1$ which is solved easily after the above rule. Thus it can be seen clearly, that the two numbers *a* and *b* can have no common factor other than 1, and that the above rule cannot be used anywhere else.

23.

According to this it is equally clear to see, how we can deal with the equation $9p = 15q + 2$ following the natural way. Since now there will be

$$p = \tfrac{15q+2}{9} = q + \tfrac{6q+2}{9} = q + r,$$

so that $9r = 6q + 2$ or $6q = 9r - 2$; therefore

$$q = \tfrac{9r-2}{6} = r + \tfrac{3r-2}{6} = r + s,$$

as $3r - 2 = 6s$ or $3r = 6s + 2;$ therefore $r = \tfrac{6s+2}{3} = 2s + \tfrac{2}{3}$, which clearly never can be a whole number, because *s* necessarily must be a whole number, from which it can be seen at once, that similar questions by their nature are insoluble.

DES ZWEYTEN THEILS ZWEYTER ABSCHNITT VON DER UNBESTIMMTEN ANALYTIC

CAPITEL 1

VON DER AUFLÖSUNG DER EINFACHEN GLEICHUNGEN WORINNEN MEHR ALS EINE UNBEKANNTE ZAHL VORKOMMT

1.

Aus dem obigen ist zu ersehen, wie eine unbekante Zahl durch eine Gleichung; zwey unbekante Zahlen aber durch zwey Gleichungen; 3 durch 3; 4 durch 4 und so fort bestimmt werden können; also daß allezeit eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, wann anders die Frage selbst bestimmt ist.

Wann aber weniger Gleichungen aus der Frage gezogen werden können, als unbekante Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und werden unserer Willkühr überlaßen; dahero solche Fragen unbestimmt genennt werden, und welche einen eigenen Teil der Analytic ausmachen, so die unbestimmte Analytic genannt zu werden pflegt.

2.

Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekante Zahlen nach unserm Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt.

Allein es wird gemeiniglich diese Bedingung hinzu gefügt, daß die gesuchten Zahlen, gantze und so gar positiv, oder zum wenigsten Rational-Zahlen seyn sollen; wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, also daß öfters nur etliche wenige öfters zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Platz finden, bisweilen auch so gar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytic öfters gantz besondere Kunst-Griffe erfordert, und nicht wenig dienet den Verstand der Anfänger aufzuklären, und denselben eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Fragen den Anfang machen, und zwey Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll, wobey es sich versteht, daß diese Zahlen gantz und Positiv seyn sollen.

Dieselben Zahlen seyen nun x und y, also daß seyn soll $x+y=10$, woraus gefunden wird $x=10-y$, also daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine gantze und positive Zahl seyn soll; man könnte dahero für y alle gantze Zahlen, von 1 bis ins unendliche annehmen, da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonsten x negativ seyn würde; und wann auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonsten $x=0$ würde; woher nur die folgenden Auflösungen
Platz haben:

wann $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
so wird

$$x = 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, dahero in allen nur fünf verschiedene Auflösungen statt finden.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen beyden Zahlen noch in zwey Theile zertheilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4.

Da dieses gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir zu etwas schwereren Fragen fortschreiten.

I. Frage: Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2 der andere aber durch 3 theilen laße?

Es sey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x + 3y = 25$.
Also $2x = 25 - 3y$. Man theile durch 2 so kommt $x = \frac{25-3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 und dahero y nicht größer als 8.
Man ziehe so viel gantze daraus als möglich, das ist man theile den Zehler $25 - 3y$ durch den Nenner 2, so wird $x = 12 - y + \frac{1-y}{2}$; also muß sich $1 - y$ oder auch $y - 1$ durch 2 theilen laßen. Man setze dahero $y - 1 = 2z$ und also $y = 2z + 1$, so wird $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$; weil nun y nicht größer sein kann als 8, so können auch für z keine andern Zahlen angenommen werden als solche, die $2z + 1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn als 4, dahero z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man	$z = 0$,	$z = 1$,	$z = 2$,	$z = 3$,
so wird	$y = 1$,	$y = 3$,	$y = 5$,	$y = 7$,
und	$x = 11$,	$x = 8$,	$x = 5$,	$x = 2$,

dahero die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden:

$$\text{I.) } 22 + 3, \quad \text{II.) } 16 + 9, \quad \text{III.) } 10 + 15, \quad \text{IV.) } 4 + 21.$$

5.

II. Frage: Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen laße?

Der erste Theil sey demnach $7x$ der andere aber $11y$, so muß seyn

$$7x + 11y = 100 \text{ ; dahero } x = \frac{100-11y}{7} = \frac{98+2-7y-4y}{7},$$

also wird $x = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$; also muß $2 - 4y$ oder $4y - 2$ sich durch 7 theilen laßen. Läßt sich aber $4y - 2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y - 1$ durch 7 theilen laßen, man setze dahero $2y-1=7z$, oder $2y=7z+1$, so wird $x=14-y-2z$; da aber seyn muß $2y=7z+1=6z+z+1$, so hat man $y=3z+\frac{z+1}{2}$. Nun setze man $z+1=2u$ oder $z=2u-1$, so wird $y=3z+u$. Folglich kann man für u eine jede gantze Zahl nehmen, daraus weder x noch y negativ wird, und alsdann bekommt man: $y=7u-3$ und $x=19-11u$.

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer seyn als 3, nach der andern aber muß $11u$ kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmahl 2 seyn kann, da nun u unmöglich nicht 0 seyn kann, so bleibt nur ein einiger Werth übrig nemlich $u=1$, daraus bekommen wir $x=8$ und $y=4$; dahero die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I.) 56 und II.) 44.

6.

III. Frage: Man theile 100 in zwey solche Theile, wann man den ersten theilt durch 5, daß 2 übrig bleiben, und wann man den zweyten theilt durch 7 daß 4 übrig bleiben?

Da der erste Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x+2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y+4$; also wird

$$5x+7y+6=100 \text{ oder } 5x=94-7y=90+4-5y-2y,$$

hieraus $x=18-y-\frac{2y-4}{5}$; also muß $4-2y$, oder $2y-4$, oder auch die Hälfte davon $y-2$ durch 5 theilbahr seyn. Man setze dahero $y-2=5z$ oder $y=5z+2$, so wird $x=16-7z$; woraus erhellet daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen.

I.) $z=0$, giebt $x=16$, und $y=2$; woraus die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82+18$.

II.) $z=1$, giebt $x=9$, und $y=7$; woraus die beyden Theile seyn werden $47+53$.

III.) $z=2$, giebt $x=2$, und $y=12$; woraus die beyden Theile sind 12 + 88.

7.

IV. Frage: Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht: wann ich die meinigen je zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig, die andere spricht: wann ich die meinigen zu 10 überzähle so bleiben mir auch 7 übrig; wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Zahl der ersten durch 8 dividirt 7 übrig läßt, die Zahl der andern aber durch 10 dividirt auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x+7$, der andern aber $10y+7$, also daß $8x+10y+14=100$, oder $8x=86-10y$, oder $4x=43-5y=40+3-4y-y$; dahero setze man $y-3=4z$, so wird $y=4z+3$ und $x=10-4z-3-z=7-5z$, folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwey Auflösungen entspringen:

I.) $z=0$, giebt $x=7$, und $y=3$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 63 Eyer, die andere aber 37.

II.) $z=1$, giebt $x=2$, und $y=7$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 23 Eyer, die andere aber 77.

8.

V. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen verzehrt 1000 Copeken. Ein Mann hat bezahlt 19 Cop. eine Frau aber 13 Cop. wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Männer sey x, der Weiber aber $= y$, so bekommt man diese Gleichung $19x+13y=1000$. Daraus wird $13y=1000-19x$ oder $13y=988+12-13x-6x$, also wird $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; also muß sich $12-6x$ oder $6x-12$, und auch der sechste Theil davon $x-2$ durch 13 theilen lassen. Man setze also $x-2=13z$, so wird $x=13z+2$ und $y=76-13z-2-6z$ oder $y=74-19z$; also muß z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, dahero folgende vier Auflösungen Platz finden:

I.) $z=0$, giebt $x=2$ und $y=74$. Also waren 2 Männer und 74 Weiber; jene haben bezahlt 38 Cop. diese aber 962 Cop.

II.) $z=1$, giebt die Zahl der Männer $x=15$ und die Zahl der Weiber $y=55$; jene haben verzehrt 285 Cop. diese aber 715 Cop.

III.) $z=2$, giebt die Zahl der Männer $x=28$ und die Zahl der Weiber $y=36$; jene haben verzehrt 532 Cop. diese aber 468 Cop.

IV.) $z=3$, giebt die Zahl der Männer $x=41$, und die Zahl der Weiber $y=17$; jene haben verzehrt 779 Cop. diese aber 221 Cop.

9.

VI. Frage: Ein Amtman kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthl. Zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 21 Rthl. wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die Zahl der Pferde sey $=x$, der Ochsen aber $=y$, so muß seyn: $31x+21y=1770$ oder $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, und also $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$; dahero muß $10x-6$ und also auch die Hälfte $5x-3$ durch 21 theilbahr seyn; man setze also $5x-3=21z$, dahero $5x=21z+3$ also daß $y=84-x-2z$. Da nun $x=\frac{21z+3}{5}$ oder $x=4z+\frac{z+3}{5}$, so setze man $z+3=5u$, so wird $z=5u-3$, $x=21u-12$ und $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$; dahero u größer seyn muß als 0 und doch kleiner als 4, woraus wir diese drey Auflösungen erhalten:

I.) $u=1$, giebt die Zahl der Pferde $x=9$ und der Ochsen $y=71$; jene haben gekost 279 Rthl. diese aber 1491, zusammen 1770 Rthl.

II.) $u=2$, giebt die Zahl der Pferde $x=30$ und der Ochsen $y=40$; jene haben gekost 930 Rthl. diese aber 840, zusammen 1770 Rthl.

III.) $u=3$, giebt die Zahl der Pferde $x=51$ und der Ochsen $y=9$; jene haben gekost 1581 Rthl. diese aber 189 Rthl. zusammen 1770 Rthl.

10.

Die bisherigen Fragen leiten auf eine solche Gleichung $ax+by=c$, wo *a, b* und *c* gantze und positive Zahlen bedeuten, und für *x* und *y* auch gantze und positive Zahlen gefordert werden.

Wann aber *b* negativ ist, und die Gleichung eine solche Form erhält $ax=by+c$, so sind die Fragen von einer gantz andern Art, und laßen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Capitel erkläret werden soll. Die leichtesten Fragen von dieser Art sind dergleichen:

Wann man z. E. zwey Zahlen sucht, deren Differenz seyn soll 6, so setze man die kleinere *x,* die größere $=y$, und da muß seyn $y-x=6$, folglich $y=6+x$. Hier hindert nun nicht, daß nicht vor *x* alle mögliche gantze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer vor eine nimmt, so wird *y* allezeit um 6 größer. Nehme man z. E. $x=100$ so wäre $y=106$; woraus gantz klar ist, daß unendlich viel Auflösungen statt finden.

11.

Hernach folgen die Fragen, wo $c=0$ und *ax* schlecht weg dem *by* gleich seyn soll. Man suche nemlich eine Zahl, die sich so wohl durch 5 als auch durch 7 theilen laße, und setze diese Zahl $=N$, so muß erstlich seyn $N=5x$, weil die Zahl *N* durch 5 theilbahr seyn soll; hernach muß auch seyn $N=7y$, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen laßen; dahero bekommt man $5x=7y$ und also $x=\frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich *y* dadurch theilen laßen. Man setze demnach $y=5z$, so wird $x=7z$, dahero die gesuchte Zahl $N=35z$, wo man für *z* eine jede gantze Zahl annehmen kann, also daß für *N* unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 210, etc.

Wollte man, daß sich die Zahl *N* noch über dieses durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N=35z$, hernach müßte auch seyn $N=9u$ allso $35z=9u$ und daraus $u=\frac{35z}{9}$; woraus klar ist, daß sich *z* durch 9 muß theilen laßen. Es sey demnach $z=9s$, so wird $u=35s$ und die gesuchte Zahl $N=315s$.

12.

Mehr Schwierigkeit hat es, wann die Zahl *c* nicht 0 ist, als wann seyn soll $5x=7y+3$, welche Gleichung, herauskommt, wann eine solche Zahl *N* gefunden werden soll, welche sich erstlich durch 5 theilen laße; wann aber dieselbe durch 7 dividirt wird 3 übrig bleiben, dann alsdann muß seyn $N=5x$, hernach aber $N=7y+3$ und deswegen wird $5x=7y+3$ folglich

$$x=\frac{7y+3}{5}=\frac{5y+2y+3}{5}=y+\frac{2y+3}{5}.$$

Man setze $2y+3=5z$, so wird $x=y+z$; da aber $2y+3=5z$, oder $2y=5z-3$, so wird $y=\frac{5z-3}{2}$, oder $y=y=2z+\frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z-3=2u$ so wird

$z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle gantze Zahlen können angenommen werden auch so gar negative, wann nur N positiv wird, welches hier geschiehet wann $u = -1$, dann da wird $N = 10$; die folgenden erhält man, wann man dazu immer 35 addirt, dahero die gesuchte Zahlen sind

10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, etc.

13.

Die Auflösung solcher Fragen beruhet auf die Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürtzer bald weitläuffiger; folgende Frage leidet eine kurtze Auflösung.

VII. Frage: Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt 2 übrig laße, durch 13 aber dividirt 3 übrig laße?

Diese Zahl sey N, so muß erstlich seyn $N = 6x + 2$ hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$ und $6x = 13y + 1$, daher

$$x = \tfrac{13y+1}{6} = 2y + \tfrac{y+1}{6}.$$

Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$ und $x = 2y + z = 13z - 2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind demnach folgende 68, 146, 224, 302, 380, etc. welche nach einer Arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz ist $78 = 6 \cdot 13$. Wann man also nur eine von diesen Zahlen weis, so laßen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur nöthig hat 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren, so lange es angeht.

14.

Ein Exempel, wo es schwerer wird, mag folgendes seyn.

VIII. Frage: Man suche eine Zahl N welche durch 39 dividirt 16 übrig laße und durch 56 dividirt 27 übrig laße?

Erstlich muß also seyn $N = 39p + 16$ hernach aber $N = 56q + 27$; dahero wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$ und $p = \tfrac{56q+11}{39}$, oder $p = q + \tfrac{17q+11}{39} = q + r$; also daß $r = \tfrac{17q+11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$, und $q = \tfrac{39r-11}{17} = 2r + \tfrac{5r-11}{17} = 2r + s$; also daß $s = \tfrac{5r-11}{17}$ oder $17s = 5r - 11$, daher wird $r = \tfrac{17s+11}{5} = 3s + \tfrac{2s+11}{5} = 3s + t$; also daß $t = \tfrac{2s+11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$ und so wird $s = \tfrac{5t-11}{2} = 2t + \tfrac{t-11}{2} = 2t + u$; also daß $u = \tfrac{t-11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen

$$\begin{aligned}
t &= 2u + 11 \\
s &= 2t + u = 5u + 22 \\
r &= 3s + t = 17u + 77 \\
q &= 2r + s = 39u + 176 \\
p &= q + r = 56u + 253
\end{aligned}$$

und endlich $N = 39 \cdot 56u + 9883.$ Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$; setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9893,$ oder $N = 2184x + 1147.$ Diese Zahlen machen demnach eine Arithmetische Progression, deren erstes Glied ist1147 und die Differenz $= 2184$. Diese Zahlen sind demnach 1147, 3331, 5515, 7699, 9883, etc.

15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Fragen beyfügen:

IX. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshaus; ein Mann verzehrt 25 Cop. ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesammt einen Cop. mehr verzehrt haben, als die Männer; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey gewesen $= p$, der Männer aber $= q$, so haben die Weiber verzehret 16*p,* die Männer aber 25*q;* dahero muß seyn $16p = 25q + 1$ und da wird $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r;$ also daß $r = \frac{9q+1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; dahero wird $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, also daß $s = \frac{7r-1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; dahero wird $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$ also daß $t = \frac{2s+1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; dahero wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u,$ also daß $u = \frac{}{2}$ oder $2u = t - 1,$ dahero $t = 2u + 1.$

Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$\begin{aligned}
t &= 2u + 1 \\
s &= 3t + u = 7u + 3 \\
r &= s + t = 9u + 4 \\
q &= r + s = 16u + 7 \\
p &= q + r = 25u + 11
\end{aligned}$$

dahero war die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in gantzen Zahlen anehmen kann was man will. Die kleinere Zahlen sind demnach nebst den folgenden wie hier stehet:

Anzahl der Weiber: = 11, 36, 61, 86, 111, etc.
der Männer:= 7, 23, 39, 55, 71, etc.

Nach der ersten Auflösung in die kleinste Zahlen haben die Weiber verzehrt 176 Cop. die Männer aber 175; also die Weiber einen Cop. mehr als die Männer.

16.

IX. Frage: Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für ein Ochsen aber 20 Rthl. und es findet sich daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde; wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen $= p$, der Pferde aber $= q$, so muß

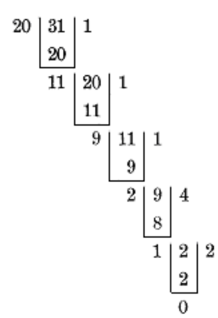
$$\begin{array}{lll}
20p = 31q + 7, & \text{dahero } p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r, & \text{dahero} \\
20r = 11q + 7, & \text{und } q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s, & \text{dahero} \\
11s = 9r - 7, & \text{und } r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t, & \text{dahero} \\
9t = 2s + 7, & \text{und } s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u, & \text{dahero} \\
2u = t - 7, & \text{und } t = 2u + 7 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
s &= 4t + u = 9u + 28 \\
r &= s + t = 11u + 35 \\
q &= r + s = 20u + 63 \ \text{Zahl der Pferde} \\
p &= q + r = 31u + 98 \ \text{Zahl der Ochsen.}
\end{aligned}$$

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für *p* und *q,* wann man setzt $u = -3$; die größeren steigen nach Arithmetischen Progressionen wie folgt:
Zahl der Ochsen $p = 5$, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253, etc.
Zahl der Pferde $q = 3$, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, etc.

17.

Wann wir bey diesem Exempel erwegen, wie die Buchstaben *p* und *q* durch die folgende bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf der Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf derjenigen, nach welcher der größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:



Dann hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben *p, q, r, s,* etc. vorkommen und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt allererst die Zahl 7 zum Vorschein und zwar mit dem Zeichen *plus,* weil die letzte Bestimmung die fünfte ist, wäre aber die Zahl derselben gerad gewesen, so hätte 7 gesetzt werden müßen. Solches wird deutlicher erhellen aus der folgenden Tabelle, wo erstlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben *p, q, r,* etc. vorkommt.

$$
\begin{array}{r|l}
31 = 1\cdot 20 + 11 & p = 1\cdot q + r \\
20 = 1\cdot 11 + 9 & q = 1\cdot r + s \\
11 = 1\cdot 9 + 2 & r = 1\cdot s + t \\
9 = 4\cdot 2 + 1 & s = 4\cdot t + u \\
2 = 2\cdot 10 & t = 2\cdot u + 7
\end{array}
$$

18.

Auf diese Art kann auch das vorhergehende Exempel im 14 ten §. vorgestellt werden, wie folget:

$$
\begin{array}{r|l}
56 = 1\cdot 39 + 17 & p = 1\cdot q + r \\
39 = 2\cdot 17 + 5 & q = 2\cdot r + s \\
17 = 3\cdot 5 + 2 & r = 3\cdot s + t \\
5 = 2\cdot 2 + 1 & s = 2\cdot t + u \\
2 = 2\cdot 1 + 0 & t = 2\cdot u + 11
\end{array}
$$

19.

Solcher Gestalt sind wir im Stande alle dergleichen Exempel auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey nemlich gegeben diese Gleichung $bp = aq + n$, wo *a, b* und *n* bekante Zahlen sind. Hier muß man nur eben die Operation anstellen, als wann man zwischen den Zahlen *a* und *b* den größten gemeinen Theiler suchen wollte, aus welchen so gleich *p* und *q* durch die folgende Buchstaben bestimmt werden, wie folget:

$$
\begin{array}{r|r}
\text{Es sey } a = Ab + c & \text{so wird } p = Aq + r \\
b = Bc + d & q = Br + s \\
c = Cd + e & r = Cs + t \\
d = De + f & s = Dt + u \\
e = Ef + g & t = Eu + v \\
f = Fg + 0 & u = Fv \pm n
\end{array}
$$

Hier wird in der letzten Bestimmung + *n* genommen, wann die Anzahl der Bestimmungen ungerad ist, hingegen aber − *n,* wann dieselbe Zahl gerade ist. Solcher Gestalt können nun alle dergleichen Fragen ziemlich geschwind aufgelöset werden, wovon wir einige Exempel geben wollen.

20.

XI. Frage: Es werde eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3 übrig laße, durch 19 aber 5?

Diese Zahl sey *N,* dahero muß erstlich seyn $N = 11p + 3$ hernach auch $N = 19q + 5$ dahero wird $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$, woraus die folgende Tabelle verfertiget wird:

$$\begin{array}{r|l} 19 = 1 \cdot 11 + 8 & p = q + r \\ 11 = 1 \cdot 8\ + 3 & q = r + s \\ 8 = 2 \cdot 3 + 2 & r = 2s + t \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 & s = t + u \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 & t = 2u + 2 \end{array}$$

wo man *u* nach Belieben annehmen kann, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie folget:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ s &= t + u = 3u + 2 \\ r &= 2s + t = 8u + 6 \\ q &= r + s = 11u + 8 \\ p &= q + r = 19u + 14 \end{aligned}$$

hieraus bekommt man die gesuchte Zahl $N = 209u + 157$, dahero ist die kleinste Zahl für $N = 157$.

21.

XII. Frage: Man suche eine Zahl *N* welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig laße; wann dieselbe aber durch 29 dividirt wird, daß 10 übrig bleiben?

Nach der letzten Bedingung muß seyn $N = 29p + 10$, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben seyn wie oben gefunden worden $N = 209u + 157$, wofür wir schreiben wollen $N = 209q + 157$, dahero wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Operation angestellet wird:

$$\begin{array}{rl} 209 = 7 \cdot 29 + 6; & \text{also } p = 7q + r \\ 29 = 4 \cdot 6 + 5; & q = 4r + s \\ 6 = 1 \cdot 5 + 1; & r = s + t \\ 5 = 5 \cdot 1 + 0; & s = 5t - 147 \end{array}$$

von wannen wir folgender Gestalt zurück gehen

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147 \\ r &= s + t = 6t - 147 \\ q &= 4r + s = 29t - 735 \\ p &= 7q + r = 209t - 5292 \end{aligned}$$

dahero $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wann man setzt $t = 26$, da wird $N = 4128$.

22.

Es ist aber hier wohl zu bemercken daß wann eine solche Gleichung $bp = aq + n$ aufgelößt werden soll, die beyden Zahlen *a* und *b* keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müßen, dann sonsten wäre die Frage unmöglich, wann nicht die Zahl *n* eben denselben gemeinen Theiler hätte.

Dann wann z. E. seyn sollte $9p = 15q + 2$, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich diese Frage aufzulösen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar ist und also niemahls 2 werden kann, wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ etc. so wäre die Frage wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da dann herauskäme $3p = 5q + 1$ welche nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen *a* und *b* keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müßen, und daß die vorgegebene Regel in keinen andern Fällen Platz haben kann.

23.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Weg behandeln. Da wird nun

$$p = \tfrac{15q+2}{9} = q + \tfrac{6q+2}{9} = q + r,$$

also daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; dahero

$$q = \tfrac{9r-2}{6} = r + \tfrac{3r-2}{6} = r + s,$$

also daß $3r - 2 = 6s$ oder $3r = 6s + 2$; dahero

$r = \tfrac{6s+2}{3} = 2s + \tfrac{2}{3}$, welches offenbar niemahls eine gantze Zahl werden kann, weil *s* nothwendig einegantze Zahl seyn muß, woraus offenbar zu ersehen, daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.