CHAPTER 10

ON THE WAYS IN WHICH THIS IRRATIONAL FORMULA $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ CAN BE MADE RATIONAL.

147.

Thus in this case, such a value is required for *x*, so that this formula $a+bx+cxx+dx^3$ will become a cubic number, and thus from which the cube root can be extracted. Here it should be recalled, that the third power should not be exceeded in this formula, because otherwise the solution of that could not be hoped for. Should the formula go only as far as to the second power and the term dx^3 omitted, thus the solution would not become easier: but if the last two terms should be missing, thus so that this formula $a + bx$ must become a cube, there is thus hardly any difficulty in the matter, as in that there must be only $a+bx = p^3$, and at once from that there is found to be $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148.

Here again before everything else it is to be considered, that if neither the first nor the last term is a cube, the problem is to be considered to be without a solution, provided there is no case on hand already, in which the formula is known to be a cube, where the same may be seen at once, or must be found by trial.

Now the first case happens, if initially the first term is a cube and the formula is $f^3+bx+cxx+dx^3$, where the known case is $x=0$; secondly, also if the last term is a cube, and the formula thus obtained is $a+bx+cxx+g^3x^3$; from both these cases the third arises where both the first term as well as the last term is a cube, which three cases we are going to consider here.

149.

I[st] case. Let the above formula be $f^3+bx+cxx+dx^3$, which must become a cube.

Therefore putting the root of that to be $f + px$, thus so that our formula should be equal to the cube $f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3$; now since the first term itself vanishes, thus p is determined in such a manner so that also the second term vanishes, which happens if $b=3ffp$, or $p=\frac{b}{3ff}$; since then the remaining terms divided by *xx* give this equation $c+dx=3fpp+p^3x$, from which there is found $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Were the final term dx^3 zero initially, thus the cube root can be given simply $= f$, since then it would be known that $f^3 = f^3+bx+cxx$: or $b+cx=0$ and from that $x=-\frac{b}{c}$, but from which nothing further can be obtained.

150.

II[nd] Case. The above formula has now secondly this form $a+bx+cxx+g^3x^3$, putting the cube root to be $p+gx$, of which the cube is $p^3+3gppx+3ggpxx+g^3x^3$, since that then cancels out the last of the terms; now so that *p* also removes the last but one of the terms, which happens if $c=3ggp$ or $p=\frac{c}{3gg}$: since then the first two terms give this equation $a+bx=p^3+3gppx$, from which there is found $x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}$.

Were that first term *a* absent initially, then the cube root can be put without difficulty $=gx$, since then $g^3x^3=bx+cxx+g^3x^3$ or $0=b+cx$, consequently $x=-\frac{b}{c}$; but which serves no useful purpose.

151.

III[rd] Case. Finally there shall be the given formula $f^3+bx+cxx+g^3x^3$, in which the first term as well as the last term is a cube ; therefore the same can be treated by both the above methods and thus two values can be established for x.

But besides for these the root can still be put $f+gx$, thus so that our formula must be equal to this cube $f^3+3ffx+3fggcxx+g^3x^3$, since then the first and last terms cancel each other out, moreover the remainder divided by *x* gives this equation $b+cx=3ffg+3fggx$, and from that $x=\frac{b-3fgg}{3fgg-c}$.

152.

But if the given formula falls into none of these three cases, these there is nothing else to be done, other than to search for a value by trial and error, so that the same will be a cube: had such a value been found which shall be $x=h$, thus so that $a+bh+chh+dh^3=k^3$, thus on putting $x=h+y$, since then our formula adopts this form :

$$\begin{array}{l}
a \\
bh+by \\
chh+2chy+cyy \\
dh^3+3dhhy+3dhyy+dy^3 \\
\hline
k^3+(b+2ch+3dhh)y+(c+3dh)yy+dy^3
\end{array}$$

which belongs to the first method, and thus a value can be found for *y*, from which a new value can be obtained for *x* , from which proceeding in the same manner still more values can be found.

153.

We will now illustrate this method by an example and initially consider this formula $1+x+xx$, which must be a cube, and pertains to the first method. The cube root could at once be put $=1$, from which there would be found $x+xx=0$, that is $x(1+x)=0$; consequently either $x=0$ or $x=1$, but from which nothing further follows. Therefore on putting the cube root to be $1+px$, of which the cube is $1+3px+3ppxx+p^3x^3$, and makes $1=3p$ or $p=\frac{1}{3}$, thus the remaining terms divided by xx give $1=3pp+p^3x$, or $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; now since $p=\frac{1}{3}$ thus there will be $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, and therefore our formula becomes $1+18+324=343$, of which the cube root is $1+px=7$. Further should we put $x=18+y$, thus our formula would adopt this form $343+37y+yy$, from which according to the first rule the cube root to be put in place would be $7+py$, the cube of which is

$$343+147py+21ppyy+p^3y^3;$$

now putting $37=147p$, or $p=\frac{37}{147}$, thus the remaining terms give this equation $1=21pp+p^3y$, so that

$$y=\frac{1-21pp}{p^3}, \text{ that is } y=-\frac{340\cdot 21\cdot 147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653},$$

from which still further new values can be found.

154.

Further let this formula be given $2+xx$, which must become a cube. Now here before all else a case must be guessed that provides this cube, which is $x=5$; therefore putting thus $x=5+y$, thus one comes upon $27+10y+yy$; of which the cube root shall be $3+py$, and thus the formula itself becomes equal to this cube $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; making $10=27p$, or $p=\frac{10}{27}$ thus there becomes $1=9pp+p^3y$, and from that $y=\frac{1-pp}{p^3}$, that is $y=-\frac{19\cdot 9\cdot 27}{1000}$ or $y=-\frac{4617}{1000}$, and $x=\frac{383}{1000}$: from which our formula becomes $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, of which the cube root must be $3+py=\frac{129}{100}\cdot$

155.

This formula $1+x^3$ further is considered, to see if the same can become a cube, other than the two cases revealed $x=0$ and $x=1$? Now if equally this formula shall belong to the third case, then the root $1+x$ does not help, because its cube $1+3x+3xx+x^3$ put equal to the formula gives at once $3x+3xx=0$ or $x(1+x)=0$, that is either $x=0$ or $x=-1$.

Further we may put $x=-1+y$, thus obtaining this formula $3y-3yy+y^3$, which shall be a cube and belong to the second kind: therefore putting the cube root of this to be $p+y$, of which the cube is

$$p^3+3ppy+3pyy+y^3$$

and making $-3=3p$ or $p=-1$, thus the remaining terms give

$$3y=p^3+3ppy=-1+3y,$$

consequently $y=\frac{1}{0}$ which is infinite ; from which thus nothing is found. Thus it is all too much trouble in vain to find another value for *x*, because it can be seen from other basis that this formula $1+x^3$ apart from the mentioned cases, can never be a cube ; then as it has been shown that the sum of two cubes such as t^3+x^3 can never become a cube, therefore it is not possible in the case $t=1$.

156.

It can be maintained also, that $2+x^3$ can never become a cube other than in the case $x=-1$; although this formula belongs to the second case, but it employs nothing from that rule because the middle terms are missing. But on putting $x=-1+y$, thus this formula is obtained $1+3y-3yy+y^3$, which can be treated according to all three cases. After putting the first root to be $1+y$, of which the cube is $1+3y+3yy+y^3$, thus there becomes $-3yy=3yy$, which happens only if $y=0$. According to the second case, the root is put $-1+y$, of which the cube is $-1+3y-3yy+y^3$, thus there becomes $1+3y=-1+3y$ and $y=\frac{2}{0}$, which is infinite. According to the third way, the root must be put equal to $1+y$ which is clear at once.

157.

Let this formula be given $3+3x^3$ which must become a cube ; now this occurs initially in the case $x=-1$, but from which nothing can be concluded in this case, but following this, in the case $x=2$: therefore putting $x=2+y$, thus the formula arises from this : $27+36y+18yy+3y^3$, which belongs to the first case, therefore the root shall be $3+py$, the cube of which shall be $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; so that there becomes $36=27p$ or $p=\frac{4}{3}$, thus the remaining terms divided by *yy* give,
$18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, or $\frac{17}{27}y=-2$, therefore $y=-\frac{54}{17}$, consequently $x=-\frac{20}{17}$; from which our formula becomes $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, the cube root of which is $3+py=-\frac{21}{17}$; and from this value more values can be found as desired.

158.

Further, we will consider finally this formula $4+xx$, which becomes a cube in two known cases, namely if $x=2$ and $x=11$. Now initially we put $x=2+y$, so that this formula shall become a cube $8+4y+yy$, of which the cube root shall be required to be $2+\frac{1}{3}y$, and thus the formula $=8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, from which we obtain $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$, therefore $y=9$ and $x=11$, which is the other known case.

Now further putting $x=11+y$, thus we obtain $125+22y+yy$, so that which put equal to the cube of $5+py$, that is $125+75py+15ppyy+p^3y^3$, and taking $p=\frac{22}{75}$, gives $1=15pp+p^3y$ or $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$; therefore $y=-\frac{122625}{10648}$, and thus $x=-\frac{5497}{10648}$.

Because x can be negative as well as positive thus on putting $x=\frac{2+2y}{1-y}$, our formula becomes $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, which must be a cube; thus multiplying above and below by $1-y$, from that the denominator becomes a cube and since there $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$ is obtained, where thus only the numerator $8-8y+8yy-8y^3$ still remains, or the same divided by 8, namely $1-y+yy-y^3$ which must be made into a cube, which formula pertains to all three cases.

Now according to the first case, the root $=1-\frac{1}{3}y$, the cube of which is $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$, thus giving $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, or $27-27y=9-y$, therefore $y=\frac{9}{13}$, consequently $1+y=\frac{22}{13}$ and $1-y=\frac{4}{13}$, consequently $x=11$, as before.

Following the second class, if we put the root wished to be $\frac{1}{3}-y$, just the same is found.

According to the third class, if we put the root to be $1-y$, of which the cube is $1-3y+3yy-y^3$, we obtain $-1+y=-3+3y$, and thus $y=1$, consequently $x=\frac{4}{0}$, which is infinite; therefore nothing new has been found in this class.

159.

But because we know already two cases $x=2$ and $x=11$, thus we can put $x=\frac{2+11y}{1\pm y}$; then if $y=0$ thus $x=2$, but if y is infinitely large then $x=\pm 11$.

Therefore initially let $x=\frac{2+11y}{1+y}$, thus our formula becomes

$$4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy} \text{ or } \frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2},$$

multiplying above and below by $1+y$, so that the denominator becomes a cube, and only the numerator remains now which shall be $8+60y+177yy+125y^3$, which must be made into a cube.

Therefore initially we put the root $=2+5y$, on account of which not only the first two terms vanish, but also the last, and thus nothing new can be found.

Therefore according to the second case, we put the root $p+5y$, of which the cube is $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$ and make $177=75p$, or $p=\frac{59}{25}$, thus there becomes $8+60y=p^3+15ppy$, therefore $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{15625}$ and $y=-\frac{80379}{367875}$, from which x can be found.

But we can also put $x=\frac{2+11y}{1-y}$, and because our formula becomes

$$4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2},$$

from which the denominator multiplied by $1-y$ becomes a cube. Thus also must $8+28y+89yy-125y^3$ become a cube.

According to the first case, we put the root here $=2+\frac{7}{3}y$, of which the cube is $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^3$, there becomes $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, or $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, and thus $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$, consequently $x=11$, which is the case known already.

Further, according to the third case, we put the root to be $2-5y$, of which the cube is $8-60y+150yy-125y^3$, so that we obtain $28+89y=-60+150y$, consequently $y=\frac{88}{61}$, from which we find that $x=-\frac{1090}{27}$, and our formula becomes $\frac{1191016}{729}$, which is the cube of $\frac{106}{9}$.

160.

Now these are the known methods until now by which such a formula can be made into either a square or a cube, only if in the former case the highest power of the undetermined number does not exceed the fourth power, and in the latter the third power.

Yet one could still add the case that a given formula could be made into a fourth power number, in which the highest power must not exceed the second. But if such a formula $a+bx+cxx$ shall be a biquadratic number thus the same, before all else, must be able to be made into a square, since then not only is the root of this square left, but also the root is made from the square of another number, according to the rule given above already. Thus if for example $xx+7=y^2$; must be a biquadratic [i.e. fourth power] number, thus the same initially can be made into a square which occurs if $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$ or also $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; since then our formula is equal to this square

$$\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq}$$

of which the root is $\frac{7pp+qq}{2pq}$, which still must be made into a square : on multiplying above and below by $2pq$, so that the denominator becomes a square, and since then the numerator must become a square $2pq(7pp+qq)$, which cannot be seen otherwise than by having already guessed a case. To this end, one can put $q=pz$, so that this formula $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$ and thus also dividing by p^4, namely this formula shall become a square $2z(7+zz)$. Now here the known case is $z=1$, therefore we put $z=1+y$, so that we obtain

$$(2+2y)(8+2yy)=16+20y+6yy+2y^3,$$

the root of which shall be $4+\frac{5}{2}y$, and the square of which is $16+20y+\frac{25}{4}yy$, and our formula is seen at once to give $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$ and $z=\frac{9}{8}$; since now $z=\frac{p}{q}$, thus $q=9$ and $p=8$, therefore $x=\frac{367}{144}$, from which our formula $7+xx=\frac{279841}{20736}$, from which in the first place the square root is $\frac{529}{144}$, and from which further the square root is $\frac{23}{12}$, of which thus our formula is the fourth power.
[The simple solution $x=3$, gives $2^4=16$.]

161.

Finally in this chapter it is to be remembered, that it gives a few formulas which are of a general nature for making a cube : then if , for example, cxx must be a cube, thus putting its root $=px$, and since there will be $cxx=p^3x^3$ or $c=p^3x$, therefore $x=\frac{c}{p^3}$; writing $\frac{1}{q}$ instead of p, thus there becomes $x=cq^3$.

The basis of this is clear because the formula contains a square, therefore also all similar formulae $a(b+cx)^2$ or $abb+2abcx+accxx$ can be made into a cube quite easily; for on putting the cube root of that $=\frac{b+cx}{q}$ thus we have $a(b+cx)^2=\frac{(b+cx)^3}{q^3}$, which divided by $(b+cx)^2$ gives $a=\frac{b+cx}{q^3}$, from which $x=\frac{aq^3-b}{c}$, where q can be determined at will.

Hence it is clear that the greatest use is to be the resolution of the above formulas into their factors, whenever that can be seen; and for this material to be treated more widely in the following chapter.

CHAPTER 11

ON THE RESOLUTION OF THIS FORMULA $axx+bxy+cyy$ INTO FACTORS.

162.

Here the letters x and y denote whole numbers only, and we have also seen from the preceding, where one must suffice with fractions, how the question can be accommodated always by whole numbers. Then if for example the sought number x is a fraction, we need only put $x=\frac{t}{u}$, since then t and u can always be given in whole numbers, and because this fraction can be expressed in the smallest form, thus both the letters t and u can be viewed as such, that they have no common factors between themselves.

In the given formulas thus x and y are whole numbers only, and before we can show how the same can become a square, or a cube, or that still some higher power can be constructed, thus it is enough to examine, what values must be given to the letters x and y, so that this formula contains three or more factors.

163.

Now here three cases arise to be examined : the first is, if this formula actually allows itself be resolved into two factors, which happens, as we have shown above already, if $bb-4ac$ shall be a square number.

The second case is, if both these factors are equal to each other, in which the formula itself comprises an actual square.

The third case is, if the formula itself cannot be resolved into anything other than irrational factors, the same may be simply irrational or even imaginary; the former occurs if $bb-4ac$ is a positive number but not a square, while the latter occurs if $bb-4ac$ shall be negative. These are the three cases which we have to consider here.

164.

Let our formula itself be resolved into two rational factors, so that the same can be presented thus $(fx+gy)(hx+ky)$, which thus already infers its nature by the two factors within itself. But so that the same may infer more factors of a general nature, thus it is only required to put $fx+gy=pq$ and $hx+ky=rs$, since then our formula will be equal to the product $pqrs$, and therefore it contains four factors, which number can be increased as desired : but from which we will obtain a two-fold value for x, namely $x=\frac{pq-gy}{f}$, and $x=\frac{rs-ky}{h}$, from which there will be found $hpq-hgy=frs-fky$, and thus $y=\frac{frs-hpq}{fk-hg}$ and $x=\frac{kpq-grs}{fk-hg}$; now so that x and y may be expressed in whole numbers, thus the letters p, q, r, s thus must be assumed, so that the numerator really can be divided by the denominator, which infers that either p and r or q and s can be divided by that.

165.

In order to illustrate this thus let the formula be given $xx-yy$, which arises from these factors $(x+y)(x-y)$: now should the same have still more factors, thus we put $x+y=pq$ and $x-y=rs$, thus obtaining $x=\frac{pq+rs}{2}$ and $y=\frac{pq-rs}{2}$; so that now these can become whole numbers, thus both the double numbers pq and rs must both be equal to even or to odd numbers.

For example, let $p=7$, $q=5$, $r=3$ and $s=1$, thus $pq=35$ and $rs=3$, consequently $x=19$ and $y=16$: therefore $xx-yy=105$ arises, which number actually consists of the factors $7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$; thus this case has presented not the slightest difficulty.

166.

The second case presents less difficulty, where the formula includes two equal factors within itself and therefore can be represented by $(fx+gy)^2$, which square can have no other factors such as arise from the root *fxgy*, therefore we put $fx+gy=pqr$, thus our formula will become *ppqqrr* and thus can have as many factors as wished.

Here only one of the two numbers *x* und *y* need be determined, and the other put in place freely at our discretion, so that we obtain $x=\frac{pqr-gy}{f}$, where *y* can thus be assumed easily so that the fraction vanishes. The easiest formula of this kind is *xx,* where we put $x = pqr$, so that the square *xx* includes three quadratic factors within itself, namely *pp, qq* and *rr*.

167.

But the third case has far more difficulty, where our formula cannot itself be resolved into two rational factors, and there it requires special stratagems to find such values for *x* and *y*, from which the formula contains two or more factors within itself. In order that this undertaking may be made easier thus it is to be noted, that our formula can be changed into another form readily, where the middle term is lacking, namely by putting $x=\frac{z-by}{2a}$, since then this formula will be obtained from that [*i.e.* from $axx+bxy+cyy$]:

$$\frac{zz-2byz+bbyy}{4a}+\frac{2byz-bbyy}{2a}+cyy=\frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}.$$

Therefore we can remove the middle term at once, and this formula $axx+cyy$ is to be considered ,whereby it arises from that, how the letters *x* and *y* must be attributed values, so that this formula contains these factors. It is easy to see that such depend on the nature of the numbers *a* and *c*, and therefore we will make a beginning with a specific formula of this kind.

168.

Therefore initially let this formula be given $xx+yy$, in which it is understood that all the numbers are thus the sum of two squares, and here we will present the smallest as far as 50 :

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

among which several prime numbers are found which have no divisors, thus 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; but the rest have divisors, from which the question clearly will be, how the values must be given to the letters *x* and *y*, so that the formula $xx+yy$ has divisors or factors and indeed one wants before anything else, so that all the cases are excluded where *x* and *y* have a common divisor between themselves, since then $xx+yy$ itself also would have the same divisor, and indeed would divide the same square ; thus if there were, for example, $x=7p$ and $y=7q$ then the sum of their squares $49pp+49qq=49(pp+qq)$ itself indeed can be divided by 49. Therefore the question is, do such formulas apply only for such formula where *x* and *y* have no common divisors, or to be relatively prime. The difficulty here appears at once, that if one sees similarly, so that if both the numbers x and y shall be odd, since then the formula $xx+yy$ becomes an even number and thus becomes divisible by 2 ; but if one is even and the other odd, thus the formula will be odd, but whether or not there shall be other divisors, the answer is not so easy to see. But both numbers x and y cannot be even, because they must have a common divisor between themselves.

169.

Therefore the two numbers x and y shall be relatively prime, and nevertheless the formula $xx+yy$ shall itself contain two or more factors. Now here the above method cannot be used, because this formula cannot be expressed in terms of two rational factors; only by the irrational factors, into which this formula is resolved and presented by this product $\left(x+y\sqrt{-1}\right)\cdot(x-y\sqrt{-1})$, can we perform just the same function; then if the formula $xx+yy$ has real factors, then the irrational factors must have further factors, so that if these factors had no further divisors, neither also can their product have any. But since these irrational factors are indeed imaginary, and also the numbers x and y must have no common factors, thus the same can have no rational functions, but thus must be irrational and thus indeed to be imaginary of a similarly kind.

170.

Thus we want this formula $xx+yy$ to have two rational factors, thus we give both the irrational factors also as two factors, and put initially $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, since then because $\sqrt{-1}$ can be taken both negative as well as positive the same shall become $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, thus so that the product of these, that shall be come our formula, that is our formula shall be $xx+yy=\left(pp+qq\right)\left(rr+ss\right)$ and the same consequently contain the two rational functions, namely $pp+qq$ and $rr+ss$. But here the value of x and y still remains to be determined, as which also must be rational.
If now those irrational factors are multiplied by each other, thus we obtain

$$x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$$

and

$$x-y\sqrt{-1}=pr-qs-ps\sqrt{-1}-qr\sqrt{-1},$$

these formulas can be added, thus there becomes $x=pr-qs$; the same can be subtracted from each other, thus there becomes $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, or $y=ps+qr$.

Therefore we can take $x=pr-qs$ and $y=ps+qr$, so that our formula $xx+yy$ surely contains two factors, as far as from this there arises

$$xx+yy=\left(pp+qq\right)\left(rr+ss\right).$$

If more factors are required, so that one is assumed only to acquire those of the kind p and q, so that $pp+qq$ would have two factors, and since then there would then be in all three factors, of which the number can be increased in the same way as desired.

171.

Now since here the squares of p, q, r and s occur, thus these letters may be taken to be negative also : for example, taking q negative, thus $x+qs$ und $y=ps-qr$, from which the sum of the squares is just the same as before ; from which we see, that if a number is equal to such a product $(pp+qq)(rr+ss)$, the same can be decomposed into two squares in two ways, as was found initially

$$x=pr-qs \text{ and } y=ps+qr,$$

and then also as

$$x=pr+qs \text{ and } y=ps-qr.$$

For example, let $p=3,\ q=2,\ r=2$ and $s=1$, thus so that this product would come from this : $13\cdot 5=65=xx+yy$, since then there shall be either $x=4$ and $y=7$, or $x=8$ and $y=1$; but in both cases there is $xx+yy=65$. More numbers of a similar kind can be multiplied by each other, thus also the product becomes a sum of more kinds of squares of two numbers. For example, one can multiply $2^2+1^2=5,\ 3^2+2^2=13,$ and $4^2+1^2=17$ by each other, and thus 1105 is obtained, which number can be decomposed into two squares in the following ways :

$$\text{I.) } 33^2+4^2, \text{II.) } 32^2+9^2, \text{III.) } 31^2+12^2, \text{IV.) } 24^2+23^2.$$

172.

Among these numbers which are contained in the form $xx+yy$, these initially are to be found such that they are composed from two or more similar numbers multiplied together ; but secondly also there are such numbers that are not of such a form multiplied together : these latter numbers we will take to be simple factors of the form $xx+yy$, while these former numbers we will call composite; therefore the simple numbers will be of this kind:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 etc.

Two kinds of numbers arise in which series, namely prime numbers which truly have no divisors, such as 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 and which all, apart from 2, are provided thus, so that if 1 is taken away from that number, the remainder can be divided by 4, or all of which are contained in this form $4n+1$; secondly, there are also square numbers present such as 9, 49 etc. of which the roots are 3, 7 etc., not present in the series; whereby it is to be observed, that these roots 3, 7 etc. are to be contained in this form $4n-1$. Moreover it is also evident that no number of this form $4n-1$ can be a sum of two squares, then since these numbers are odd, thus one of the two squares must be even and the other odd ; but we have seen, that all even squares are divisible by 4, and moreover the odd numbers are contained in the form $4n+1$; therefore if one adds together an even and an odd square , thus the sum is found always to be this form $4n+1$, but never of this form $4n-1$. Moreover, it is well known that all prime numbers of the form $4n+1$ are the sum of two squares, but that is not so easy to prove [See E241, Series I, Vol. 2, *Opera Omnia*].

173.

We would like to go further, and to consider the formula $xx+2yy$, in order to see what values *x* and *y* must have so that they contain the same factors. Now since this formula may be represented by these two imaginary factors

$$\left(x+y\sqrt{-2}\right)\left(x-y\sqrt{-2}\right),$$

thus it is evident as before, that if our formula has factors, also their imaginary factors must have factors; therefore initially one puts

$$x+y\sqrt{-2}=\left(p+q\sqrt{-2}\right)(r+s\sqrt{-2}),$$

thus it follows from the same that also forthwith our formula must be

$$xx+2yy=\left(pp+2qq\right)\left(rr+2ss\right),$$

and that also the two factors ; so that moreover these sought thus must pertain to the values to be found *x* and *y*, which can adopt the following forms. Since

$$x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2}$$

and

$$x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2}$$

thus the sum is $2x=2pr-4qs,$ and consequently $x=pr-2qs$; following this the difference gives
$2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2}$, therefore $y=qr+ps$. So that if our formula $xx+2yy$ has such factors, the same will always be obtained thus in the same way, so that the one shall become $pp+2qq$ and the other $rr+2ss$, or so that both numbers shall be of the same form as $xx+2yy$; and these can be arranged so that further *x* and *y* can be determined in two ways, because *q* can be taken negative as well as positive. Namely one has, in the first place $x=pr-2qs$ and $y=ps+qr$, and secondly also $x=pr+2qs$ and $y=ps-qr$.

174.

This formula $xx+2yy$ thus contains all these numbers within itself, which consist of a square and twice another square, and which we set out here as far as 50: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 48, 49, 50; that further as before we can separate out into simple and composite numbers ; then since the simple numbers, which are not from the previous composite numbers, shall be the following 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49 which all, apart from the squares 25 and 49, are prime numbers, but the squares of which are not to be found. It can be noted also that here all the prime numbers which are contained in our formula, pertain either to this form $8n+1$ or to that $8n+3$, whereas those remaining either belong to this form $8n+5$ or to that $8n+7$, as no other form can be composed from a square and twice another square: moreover it is known also that all prime numbers, which are contained in either of the first two forms $8n+1$ and $8n+3$, always can be solved in terms of a square and a square doubled.

175.

Let us proceed in a similar manner to this general formula $xx+cyy$, and see what values must be given for *x* and *y*, so that the formula may contain these factors.

Now since the same is represented by this product

$$(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c}),$$

thus each one of these factors again is given two factors of a similar kind : namely on putting

$$x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c}),$$

and

$$x-y\sqrt{-c}=\left(p-q\sqrt{-c}\right)\left(r-s\sqrt{-c}\right);$$

and then our formula becomes

$$xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css),$$

from which it as clear that the factors again shall be of the same form as the formula itself, but the values of *x* and *y* themselves adopt the following form :
$x=pr-cqs$ and $y=qr+ps$, or $x=pr+cqs$ and $y=ps-qr$, and from this it is easy to see how our formula can contain still more factors.

176.

Now it is also easy to find the factors of this formula $xx-cyy$, because we are required only to write $-c$ instead of $+c$; meanwhile the same thus can be found at once ; since our formula is equal to this product $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, thus on putting $x+y\sqrt{c}=\left(p+q\sqrt{c}\right)(r+s\sqrt{c})$ and $x-y\sqrt{c}=\left(p-q\sqrt{c}\right)(r-s\sqrt{c})$, from which these factors can be produced at once $xx-cyy \;=\left(pp-cqq\right)\left(rr-css\right)$, which further are of the same kind as our formula itself ; moreover the values of x and *y* again let themselves be determined in a twofold manner, namely at first $x=pr+cqs$, $y=qr+ps$, and then also $x=pr-cqs$ and $y=ps-qr$. The proof should be found if such a form arises from the product found, thus the first value is tried, since that shall be
$xx=pprr+2cpqrs+ccqqss$ and $yy=ppss+2pqrs+qqrr$, and
$cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$, from which there is obtained :

$$xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr$$

which agrees with the product found above $\left(pp-cqq\right)\left(rr-css\right)$.

177.

Up until now we have merely considered the first term, now we would like put the same term multiplied by a letter, and search for what factors there may be contained in the formula $axx+cyy$.

Now here it is clear that our formula shall be equal to this product

$$(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}),$$

by which factors again therefore the factors must be given.
But here a difficulty arises, that if it is wished to follow the above method

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac},$$

and

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac},$$

from which there is obtained

$$2x\sqrt{a}=2apr-2cqs,\text{ and } 2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}+2qr\sqrt{-ac},$$

thus irrational values would be obtained for both x and y, which in no way can find a place here.

178.

But this difficulty can be removed if we put :

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c},$$

and

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}-aps\sqrt{-c};$$

from which the following rational values can now be found for x und y :
$x=pr-cqs$ and $y=qr+aps$, since then moreover our formula obtains the following factors

$$axx+cyy=(app+cqq)(rr+acss),$$

from which our formula has only the one term of the same form, but the other is of a wholly different kind.

179.

Meanwhile, these two formulas still stand in a very precise relationship with one another, in that all numbers thus are contained in the first form, for if they shall be multiplied by another number of the second form, again they lie in the first form. We have seen already, that two numbers of the second kind $xx+acyy$, which agree with the above $xx+cyy$, multiplied by each other further give a number of the second form.

Thus it still remains to be investigated, if two numbers of the first form $xx+acyy$ are to be multiplied by each other, then to which form does the product belong.

Let us therefore multiply these two formulas of the first form by one another :

$$(app+cqq)(arr+css),$$

and since it is easy to see that their product thus can be presented thus :

$$(apr+cqs)^2+ac(ps-qr)^2 .$$

Now here we put $apr+cqs=x$ and $ps-qr=y$, thus we obtain this formula $xx+acyy$ which is of the latter kind; therefore then two numbers of the first kind $axx+cyy$ multiplied by each other give a number of the second kind, which can be shown in a shorthand manner : the numbers of the first kind we will denote by I, these of the second kind to be indicated by II, and thus I·I gives II ; I·II gives I ; II·II gives II, from which further also it is apparent, which must come about from this, if more such numbers be multiplied by each other: as I·II gives I ; I·I·II gives II ; I·II·II gives I ; II·II·II gives II.

180.

In order to illustrate these thus let $a=2$ and $c=3$ from which the two kinds of numbers arise, the first is present in the form $2xx+3yy$, but the second in the form $xx+6yy$. Now the numbers of the first form as far as 50 are as follows:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

The numbers present in the second form as far as 50 are as follows :

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Now let us multiply a number of the first kind, for example 35, by one of the second kind 31, so that the product is 1085, which number certainly is contained in the form $2xx+3yy$, or such a number can be found for y so that $1085-3yy$ will be twice a square, namely $2xx$; now initially this happens if $y=3$, then there becomes $x=23$; next after this if $y=11$, then there becomes $x=19$; still again also thirdly if $y=13$, since then there becomes $x=17$, and finally for the fourth time if $y=19$, then there becomes $x=1$.

Again one can separate both these kinds of numbers into simple and composite, in which these are composite which can be constructed from smaller numbers of one or the other kind: so that the following simple numbers are of the first kind : 2, 3, 5, 11, 29, but these are composite 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. But of the second kind these are simple 1, 7, 31, all the rest are composite, namely 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CHAPTER 12

ON TRANSFORMING THIS FORMULA $axx+cyy$ INTO SQUARES OR ALSO INTO HIGHER POWERS

181.

We have seen above already, that numbers of this form $axx+cyy$ can often be impossible to be made square : but quite often it is easy, thus this form can be changed into another in which $a=1$. For example this form $2pp-qq$ can become a square, if it is allowed to adopt such a form : $(2p+q)^2-2(p+q)^2$. Now putting $2p+q=x$ and $p+q=y$, thus the formula is produced $xx-2yy$, where $a=1$ and $c=-2$. Now such a transformation also finds a place, whenever it is possible to make a similar formula into a square.

Therefore if this formula $axx+cyy$ shall be able to be made into a square or to a higher even power, then surely we can put $a=1$, and the remaining cases are considered impossible.

182.

Therefore this formula is considered $xx+cyy$, which is required to be made square. Since now the same is composed from these factors

$$\left(x+y\sqrt{-c}\right)\left(x-y\sqrt{-c}\right),$$

thus the same factors must either be squares, or with all the numbers to be multiplied by a square. Then if the product of two numbers should be a square, as for example, pq, thus it is necessary, either that $p=rr$ and $q=ss$, that is so that each single factor for such is itself a square, or so that $p=mrr$ and $q=mss$, that is so that the square factors are to be multiplied by another number, therefore we put $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})^2$, so that from the same $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, therefore we obtain $xx+cyy=mm(pp+cqq)^2$, and thus is a square. But in order to determine *x* and *y*, thus we have this equation :

$$x+y\sqrt{-c}=mpp+2mpq\sqrt{-c}\ -mcqq$$

and

$$x-y\sqrt{-c}=mpp-2mpq\sqrt{-c}\ -mcqq,$$

where it is clear that *x* must be equal to the rational part, but $y\sqrt{-c}$ to the irrational part ; therefore becoming $x=mpp-mcqq$ and $y\sqrt{-c}=2mpq\sqrt{-c}$ or $y=2mpq$.

Thus on putting $x=mpp-mcqq$ and $y=2mpq$, our formula $xx+cyy$ is a square, namely $mm(pp+cqq)^2$, of which the root is $mpp+mcqq$.

183.

Should the two numbers *x* and *y* be undividable between themselves, or having no common divisor, thus we must put $m=1$. Hence if $xx+cyy$ should be a square, thus we need only take $x=pp-cqq$ and $y=2pq$, since this formula is equal to the square of $pp+cqq$. So that instead of putting $x=pp-cqq$, thus one can put also $x=cqq-pp$, because both sides become the one square *xx*. Now these are the same formulas, that we have already found above from different principles, whereby the accuracy of the method used here is confirmed.

Then according to the previous method, if $xx+cyy$ shall be a square, thus the root is put $=x+\frac{py}{q}$, and then we obtain $xx+cyy=xx+\frac{2pxy}{q}+\frac{ppyy}{qq}$, from which *xx* itself vanishes and the remaining terms divided by *y* and multiplied by *qq* gives $cqqy=2pqx+ppy$, or $cqqy-ppy=2pqx$; now on dividing by 2*pq* and by *y*, there becomes $\frac{x}{y}=\frac{cqq-pp}{2pq}$. But since *x* and *y* shall have no common factors, just as *p* and *q* are similar, thus *x* must be equal to the numerator and *y* to the denominator, consequently $x=cqq-pp$ and $y=2pq$, as before.

184.

This solution is valid, whether the number *c* may be positive or negative ; moreover the same has the same factors, for if the above formula were $xx+acyy$ which must be a square, then not only is the above solution in place, which gives $x=acqq-pp$ and $y=2pq$, but also $x=cqq-app$ and $y=2pq$; then since sometimes there will be

$$xx+acyy=ccq^4+2acppqq+aap^4=(cqq+app)^2,$$

which also happens, if one takes $x=app-cqq$, because the square *xx* arises in both cases.
This new solution will be found also by the method used here. Putting

$$x+y\sqrt{-ac}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^2 \text{ and } x-y\sqrt{-ac}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^2,$$

from that there becomes $xx+acyy=(app+cqq)^2$, and thus equally a square ;
but since there becomes

$$x+y\sqrt{-ac}=app+2pq\sqrt{-ac}-cqq$$

and

$$x-y\sqrt{-ac}=app-2pq\sqrt{-ac}-cqq,$$

from which it follows

$$x=app-cqq \text{ and } y=2pq.$$

Thus, if the number *ac* may be allowed to be divided up into two factors in more ways, then also more solutions can be found.

185.

We will illustrate these through some determined formulas, and initially this formula $xx+yy$ is to be considered, which shall be a square. Now since here $ac=1$, thus we take $x=pp-qq$ and $y=2pq$, thus there becomes

$$xx+yy=(pp+qq)^2.$$

Secondly should this formula $xx-yy$ become a square, thus $ac=-1$; thus we take

$x = pp + qq$ and $y = 2pq$, since then $xx - yy = (pp - qq)^2$.

Thirdly should this formula $xx + 2yy$ become a square, where $ac = 2$, thus we take $x = pp - 2qq$, or $x = 2pp - qq$ and $y = 2pq$, and then there becomes

$$xx + 2yy = (pp + 2qq), \text{or } xx + 2yy = (2pp + qq)^2.$$

Fourthly, should this formula $xx - 2yy$ become a square where $ac = -2$, thus we take $x = pp + 2qq$ and $y = 2pq$, since then there becomes

$$xx - 2yy = (pp - 2qq)^2.$$

Fifthly, should this formula $xx + 6yy$ become a square where $ac = 6$, and thus whether $a = 1$ and $c = 6$, or $a = 2$ and $c = 3$; thus initially we can put $x = pp - 6qq$ and $y = 2pq$, since then

$$xx + 2yy = (pp + 2qq)^2$$

Finally we can also put $x = 2pp - 3qq$ and $y = 2pq$, since then

$$xx + 6yy = (2pp + 3qq)^2.$$

186.

But should this formula $axx + cyy$ be made into a square, as it is already to be remembered, that this cannot happen unless a case is known already, in which this formula actually is a square. This known case therefore will be, if $x = f$ and $y = g$, thus so that $aff + cgg = hh$; and since then our formula can be changed into another of this kind $tt + acuu$, if we put

$$t = \frac{afx + cgy}{h} \text{ and } u = \frac{gx - fy}{h};$$

since that becomes

$$tt = \frac{aaffxx + 2acfgxy + ccggyy}{hh} \text{ and } uu = \frac{ggxx - 2fgxy + ffyy}{hh},$$

from which follows

$$tt + acuu = \frac{aaffxx + ccggyy + acggxx + acffyy}{hh} = \frac{axx(aff + cgg) + cyy(aff + cgg)}{hh};$$

now since $aff + cgg = hh$, thus there becomes $tt + acuu = axx + cyy$; and the form presented in such a manner $axx + cyy$ becomes this form $tt + acuu$, which according to the rules given here, can easily be made into a square.

187.

Now we will progress further and consider how this formula $axx + cyy$, where x and y cannot be divided by one another, can be made into a cube ; for which the above rules are by no means adequate, but here the indicated method can be applied with the best outcome: whereby these are still to be noted in particular, that this formula can always produce a cube, the numbers a und c may be taken as desired, which cannot act with squares, unless a case were known ; which also applies to all the other even powers ; but with the odd powers, such as the third, fifth, seventh etc., the solution is always possible.

188.

Therefore if this formula $axx+cyy$ shall be made into a cube, thus in the same manner as before we put

$$x\sqrt{a}+ y\sqrt{-c}=\left(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}\right)^3 \text{ and } x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=\left(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c}\right)^3,$$

then from this the product is $axx+cyy=(app+cqq)^3$, and thus our formula is a cube : but this is obtained from that only if here both *x* and *y* can be determined to be rational : which in a fortunate manner may be the case; then if the appointed cube really can be formed, then we obtain these two equations

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}+3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}-cq^3\sqrt{-c},$$

and

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}-3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}+cq^3\sqrt{-c},$$

from which it clearly follows, that

$$x=ap^3-3cpqq \text{ and } y=3appq-cq^3.$$

We look, for example, for two squares xx und yy, of which the sum $xx+yy$ amounts to a cube: because now here $a=1$ and $c=1$, thus we obtain

$$x=p^3-3pqq \text{ and } y=3ppq-q^3,$$

and as then there becomes $xx+yy=(pp+qq)^3$. Now let $p=2$ and $q=1$, thus there becomes $x=2$ and $y=11$; from which $xx+yy=125=5^3$.

189.

We would like again to consider this formula $xx+3yy$, which is required to be made into a cube : because now here, $a=1$ and $c=3$, thus there becomes

$$x=p^3-9pqq \text{ and } y=3ppq-3q^3,$$

and since $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Because this formula arises often, we will set out the easier cases here .

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64=4^3$
2	1	10	9	$343=7^3$
1	2	35	18	$2197=13^3$
3	1	0	24	$1728=12^3$
1	3	80	72	$21952=28^3$
3	2	81	30	$9261=21^3$
2	3	154	45	$29791=31^3$

190.

Were the condition not prescribed, that the two numbers x and y should not be divisible between themselves, then the question poses hardly any difficulty: then if $axx+cyy$ must be a cube, then we put $x=tz$ and $y=uz$, so that our formula becomes $attzz+cuuzz$ which is put equal to the cube $\frac{z^3}{v^3}$, from which it is found at once that $z=v^3\left(att+cuu\right)$; consequently the values sought for x and y shall be,
$x=tv^3\left(att+cuu\right)$ and $y=uv^3\left(att+cuu\right)$, which other than the cube v^3 still has the common divisor $att+cuu$: this solution thus gives at once

$$axx+cyy=v^6\left(att+cuu\right)^2(att+cuu)=v^6(att+cuu)^3,$$

which evidently is the cube of $v^2\left(att+cuu\right)$.

191.

Here the method used is actually the more remarkable, since we have found such solutions with the help of irrational and thus indeed of imaginary formulas, where just some rational and indeed whole numbers were required. But it is even more remarkable, that in these cases where the irrationality disappeared, our method could no longer be used: then if , for example, $xx+cyy$ should become a cube, thus one can also conclude that also both the irrational factors of that, namely $x+y\sqrt{-c}$ and $x-y\sqrt{-c}$, must also be cubes; because the same cannot divide into each other so that the numbers x and y have no common divisors. But were the irrational $\sqrt{-c}$ to fall away, as if, for example we put $c=-1$, then this principle would no longer find a place, because then both the factors namely $x+y$ and $x-y$, of course then could have a common divisor, without x and y having any such thing, as for example, if both the numbers were odd.

Therefore if $xx-yy$ is to be a cube, thus it is not necessary that $x+y$ and $x-y$ as well shall themselves be cubes, but rather one could well put $x+y=2p^3$ and $x-y=4q^3$, since then $xx-yy$ without any trouble would be a cube, namely $8p^3q^3$, of which the cube root is $2pq$; but as then $x=p^3+2q^3$, and $y=p^3-2q^3$. But if the formula $axx+cyy$ itself cannot be divided into two rational factors, then no other solution will be found, other than these given here.

192.

We will illustrate this discussion with a few noteworthy questions:

Question I : We require a square xx in whole numbers so that if 4 may be added, then a cube arises ; such as occurs with the numbers 4 and 121, but the question here is, if more similar numbers can be given ?

Since 4 is a square, thus we look initially for the cases in which $xx+yy$ is a cube, which is made clear from what happens above, if $x=p^3-3pqq$ and $y=3ppq-q^3$; since now here $yy=4$, thus there is $y=\pm 2$, consequently there must be $3ppq-q^3=+2$ or $3ppq-q^3=-2$: in the first case thus $q(3pp-qq)=2$, consequently q is a divisors of 2. Therefore there shall be in the first place $q=1$, thus there becomes $3pp-1=2$, consequently $p=1$ and thus $x=2$ and $xx=4$.

Now putting $q=2$, thus $6pp-8=\pm 2$; the positive sign is valid, thus $6pp=10$ and $pp=\frac{5}{3}$, from which the value of p would be irrational, and thus cannot be used here; but the negative sign is valid, thus we have $6pp=6$ and $p=1$, consequently $x=11$. There are no more cases, and thus only two numbers are given, namely 4 and 121, which if 4 be added to that will become a cube.

193.

Question II: Such a square is required in whole numbers, which if 2 were added to that it would become a cube, as happens for the square 25 : the question asked here is, if there shall be still more similar cases ?

Thus since $xx+2$ should be a cube, and 2 is twice a square, thus in the first place we look for the cases, in which the formula $xx+2yy$ becomes a cube, which happens in the above article 188, when $a=1$ and $c=2$, if $x=p^3-6pqq$ and $y=3ppq-2q^3$ *;* now since here $y=\pm 1$ thus must become $3ppq-2q^3=q(3pp-2qq)=\pm 1$, and thus q is a divisor of 1; therefore $q=1$, thus there becomes $3pp-2=\pm 1$; which is valid for the upper sign, thus $3pp=3$ and $p=1$, consequently $x=5$; moreover the other sign gives an irrational value for p, which cannot be used here ; from which it follows that only the square 25 has the desired property in whole numbers.

194.

Question III : Such a fivefold square is sought, so that if 7 were added, a cube would be found: or that $5xx+7$ may be a cube?

In the first place we examine these cases where $5xx+7$ will be a cube, which occur accordance with the article 188, where $a=5$ and $c=7$, if $x=5p^3-21pqq$ and $y=15ppq-7q^3$; because here there shall be now $y=\pm 1$, thus there becomes $15ppq-7q^3=q(15pp-7qq)=\pm 1$, since then q must be a divisor of 1, consequently $q=1$*;* thus there becomes $15pp-7=\pm 1$, where both cases for p give some irrational numbers, from which moreover still nothing can be concluded, so that this question indeed shall not be possible, because p and q should be such fractions, that $y=1$

and x would still be a whole number ; such happens actually if $p=\frac{1}{2}$ and $q=\frac{1}{2}$, then there becomes $y=1$ and $x=2$; but the matter cannot be resolved with other fractions.

195.

Question IV: Such a square is looked for in whole numbers, which doubled and if 5 is taken away from that gives rise to a cube ; or $2xx-5$ shall become a cube.

Initially we examine these cases $2xx-5yy$ that become a cube, which according to the 188th article, happen if $a=2$ and $c=-5$, if $x=2p^3+15pqq$ and $y=6ppq+5q^3$. But here there must be $y=\pm 1$, and consequently

$$6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm 1,$$

which never can never happen with whole numbers, and also not even once with fractions ; therefore this case is quite remarkable, since nevertheless a solution can be found, if namely $x=4$, then there becomes $2xx-5=27$, which is the cube of 3; and hence it is of the greatest importance to investigate the basis of this.

196.

Thus it is possible, that $2xx-5yy$ may be a cube whose root indeed has the form $2pp-5qq$, namely if $x=4,\ y=1$ and $p=2,\ q=1$, and therefore we have a case where $2xx-5yy=\left(2pp-5qq\right)^3$, in spite of the fact that both the factors of $2xx-5yy$, namely $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ and $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, are not cubes, since the same still ought to be cubes of $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ and $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$ according to this method, as in our case $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, whereas $\left(p\sqrt{2}+q\sqrt{5}\right)^3=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, which in no way agrees with $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

But it is to be observed, that this formula $rr-10ss$ can be 1 or -1 in an infinite number of cases; namely if $r=3$ and $s=1$, further if $r=19$ and $s=6$, which multiplied by this form $2pp-5qq$ further gives a number of the last kind.

Therefore let there be $ff-10gg=1$, and instead of that we have put in place above $2xx-5yy=\left(2pp-5qq\right)^3$, thus we can now also of a more general kind put $2xx-5yy=\left(ff-10gg\right)\left(2pp-5qq\right)^3$, and the factors of that taken give $x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})\left(p\sqrt{2}\ \pm q\sqrt{5}\right)^3$. But there is

$$\left(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5}\right)^3=\left(2p^3+15pqq\right)\sqrt{2}\pm\left(6ppq+5q^3\right)\sqrt{5},$$

which for brevity we write as $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$, which multiplied by $f+g\sqrt{10}$ gives $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$, which must be equal to that $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$, from which there arises

$$x=Af+5Bg \text{ and } y=Bf+2Ag\,;$$

since now there must be $y = \pm 1$, thus it is not absolutely necessary that $6ppq + 5q^3 = 1$, but it is sufficient if only the formula $Bf + 2Ag$, that is

$$f\left(6ppq + 5q^3\right) + 2g\left(2p^3 + 15pqq\right)$$

were equal to ± 1, where f and g can have several values. For example, let $f = 3$ and $g = 1$, thus the formula $18ppq + 15q^3 + 4p^3 + 30pqq$ must be equal to ± 1, or there must be $4p^3 + 18ppq + 30pqq + 15q^3 = \pm 1$.

197.

But this difficulty in bringing out all the possible similar cases themselves is found only then, if the number c in the formula $axx + cyy$ is negative, because then this formula $axx + cyy$ or this one $xx + acyy$, thus can become 1, which can be established by a known transformation, but which can never be done if c is a positive number, because $axx + cyy$ or $xx + acyy$ always gives a greater number, the greater x and y are given. Therefore the previous method examined here can be used only in such cases with benefit, if both the numbers a and c have been taken positive.

198.

Thus we come to the fourth power and it is to be noted in the first place, that if the formula $axx + cyy$ shall become a biquadratic, the number $a = 1$; then if the same were not a square, thus it would either not be possible to make this formula into a square, or if it were possible thus the same also could be changed into this form $tt + acuu$, therefore we restrict the question only to the latter form, with which the above $xx + cyy$ agrees, if $a = 1$. Now thus it is assumed from that, how the values of x and y must be obtained, so that this formulae $axx + cyy$ becomes a biquadratic. Now since the same consists of these two factors $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, thus each one must be the same kind, therefore we must put

$$x + y\sqrt{-c} = \left(p + q\sqrt{-c}\right)^4 \text{ and } x - y\sqrt{-c} = \left(p - q\sqrt{-c}\right)^4$$

from which our formula will be equal to this biquadratic $\left(pp + cqq\right)^4$, but the letters x and y themselves can be determined easily from the development of this formula, as follows:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq - 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$
$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq + 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

consequently

$$x = p^4 - 6cppqq + ccq^4 \text{ and } y = 4p^3q - 4cpq^3.$$

199.

Thus if $xx+yy$ shall be a biquadratic, because here $c=1$, thus we have these values $x=p^4-6ppqq+q^4$ and $y=4p^3q-4pq^3$ and then there will be $xx+yy=(pp+qq)^4$. Let us, for example, put $p=2$ and $q=1$, thus we obtain $x=7$ and $y=24$; from which there becomes $xx+yy=625=5^4$.
Further taking $p=3$ and $q=2$, thus we obtain $x=119$ and $y=120$, from which there becomes $xx+yy=13^4$.

200.

Concerning all even powers for which the formula $axx+cyy$ may be used to put in place, it is absolutely necessary likewise that the formula may be made into a square, to which end it is sufficient that one knows a single case where this occurs; and then this formula as we have seen above, can be changed into this form $tt+acuu$, where the first term is multiplied by 1 only, and thus since in this the form $xx+cyy$ can be seen, which thereupon in a similar manner, can be made to the sixth power as well as to another still higher even power.

201.

As this condition is not useful for the odd powers, but the numbers *a* and *c* can be chosen at will, so that the formula $axx+cyy$ can always be made into a similar odd power. Then, for example, so that it can be changed into the fifth power, then we need only put $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=\left(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}\right)^5$, and $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=\left(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c}\right)^5$, so that then clearly there becomes $axx+cyy=(app+cqq)^5$. Because now the fifth power of $p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}$ is
$aap^5\sqrt{a}+5aap^4q\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acppq^3\sqrt{-c}+5ccpq^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$,
from which it can be concluded at once, that

$$x=aap^5-10acp^3qq+5ccpq^4 \text{ and } y=5aap^4q-10acppq^3+ccq^5.$$

Thus, if a sum of two squares is required $xx+yy$, to be immediately to the fifth power, thus there is $a=1$ and $c=1$; consequently

$$x=p^5-10p^3qq+5pq^4 \text{ and } y=5p^4q-10ppq^3+q^5$$

Now taking $p=2$ and $q=1$, thus there becomes $x=38$ and $y=41$, and

$$xx+yy=3125=5^5.$$

CHAPTER 13

CONCERNING SOME FORMULAS OF THIS KIND ax^4+by^4 WHICH CANNOT BE MADE INTO SQUARES

202.

Formerly so much effort had been put in to find biquadratics, whose sum or difference would become a square number ; but all the effort was in vain, and at last indeed a proof was found, that neither this formula $x^4 + y^4$ nor this one $x^4 - y^4$ can ever become a square, and only two cases to be excluded, namely in the first place either $x = 0$ or $y = 0$, but for the second where either $y = 0$ or $y = x$, and in which cases the outcome can be seen at once. But that in all the remaining cases the condition should be impossible, is thus so much more remarkable, because if the talk is only about squares that cannot be used, an indefinite number of solutions can be found.

203.

In order to extend everything relevant to this proof, it is to be noted before everything else, that both the numbers *x* and *y* must be assumed to have no common factors between themselves ; then if the same should have a common factor, for example, to have d , thus one could put $x = dp$ and $y = dq$, thus our formulas would become $d^4 p^4 + d^4 q^4$ and $d^4 p^4 - d^4 q^4$ which if they were squares, also could be divided by the square d^4, with squares being left, thus so that this formula $p^4 + q^4$ and $p^4 - q^4$ should be squares left , where now the numbers *p* and *q* have no further common factors; it is therefore sufficient to know, that these formulas in the case that *x* and *y* have no common factors between themselves, could have no common squares, and as then the proof itself can advance from the same to all cases, since then both *x* and *y* can have common factors [which can be removed.]

204.

We want this formula, namely $x^4 + y^4$, to be made the starting point, that is, of the sum of two biquadratics of this form, and where we can assume *x* and *y* to be without common factors. Now in order to show that $x^4 + y^4$, other than the cases mentioned, can have no squares, a proof along the following lines is followed thus.

If someone wants to deny the proposition, thus he must assert that such values were possible for *x* and *y*, by means of which $x^4 + y^4$ would be a square, the same would be possible also with numbers as great as could be wished, because in terms of small numbers, none are present.

But it can be shown thoroughly, also that if in the largest numbers such values for *x* and *y* were at hand, from the same it could be concluded now also for similar smaller values, and from these further to still smaller values and so on. But since now in small numbers no such values are available, apart from the two notified but which can lead to other small values, thus it can certainly be concluded, that also with the large numbers, even thus indeed the very largest numbers, no such values for *x* and *y* may be present. And now also in just such a manner will the matter of the difference between two biquadratics $x^4 - y^4$ be proven, as we are thus about to show.

205.

Initially in order to show that $x^4 + y^4$ cannot be a square other than with the two cases for which it is evident, thus the following cases are to be noted well.

I. We accept that the numbers x and y have no divisors between themselves, or have no common factors; thus they shall be either both odd, or one is even and the other is odd.

II. But both cannot be odd, because the sum of two odd squares can never be a square; then one is odd and always to be present in the form $4n+1$, and thus the sum of two odd numbers would have this form $4n+2$, which is allowed to be divided by 2 but not by 4, and thus cannot be a square. Moreover this is valid also of two odd biquadratics.

III. Therefore if $x^4 + y^4$ were a square, thus one must be even but the other odd. But we have seen above, that if the sum of two squares shall be a square, the root of one will be expressed by $pp-qq$, but the root of the other by $2pq$; from which it follows that there must be $xx = pp-qq$ and $yy = 2pq$ and that would become $x^4 + y^4 = (pp+qq)^2$.

IV. Thus here y would be even, but x odd: since now $xx = pp-qq$, thus also for the two numbers p and q one is even, but the other is odd; but the first p cannot be even, because since $pp-qq$ becomes a number of this form $4n-1$ or $4n+3$, at no time can it become a square. Consequently p is odd and q is even, where it is understood that the same must not be divisible between themselves.

V. Since now $pp-qq$ must be a square, namely that equals xx, thus this happens as we have seen above, if $p = rr+ss$ and $q = 2rs$: then since there will be $xx = \left(rr-ss\right)^2$, and thus $x = rr-ss$.

VI. yy must be as square on its own ; since we now have $yy = 2pq$, thus at once $yy = 4rs\left(rr+ss\right)$, which formula thus must be a square : consequently also $rs\left(rr+ss\right)$ must be a square, where r and s are numbers indivisible by each other, thus so that here also three factors r, s and $rr+ss$ are to be located, having no common divisors between themselves.

VII. But if a product shall be a square made from more factors, that between themselves are indivisible, thus each single factor by itself must be a square, thus if we put $r = tt$ and $s = uu$: thus also $t^4 + u^4$ must be a square. Thus if $x^4 + y^4$ were a square, thus also $t^4 + u^4$ the sum of two biquadratics, would be a square as well. Whereby to be noted that because here $xx = \left(t^4 - u^4\right)^2$ and $yy = 4ttuu\left(t^4 + u^4\right)$, the numbers t and u evidently shall become far smaller than x and y, in that x and y thus indeed are to be determined by the fourth powers of t and u, and thus without question must become far greater.

VIII. Therefore if two biquadratics such as x^4 and y^4 also should be present in the greatest numbers, the sum of which were a square, thus one can derive from that a sum of two far smaller biquadratics, which also were a square ; and from these yet still more times a smaller similar sum can be included and so on, until finally a very small number arose : but since now such a sum is not possible in small numbers, thus it follows from that, clearly that such a sum cannot be given in the similar largest numbers.

IX. Here indeed it could be argued that it has been noted already that small numbers really give such a sum, namely since there is the zero biquadratic; only in this case we cannot prove if such a form always returns from the largest to the smallest numbers. Then if the smallest sum were t^4+u^4 either $t=0$ or $u=0$, thus also necessarily $yy=0$ for the greater sum; which case does not arise in any derivation.

206.

Now we come to the other proposition, so that also the difference between two biquadratics x^4-y^4 shall never become a square, apart from the cases $y=0$ and $y=x$; for the proof of which the following points are to be observed.

I. The numbers x and y are assumed to have no common divisors, and thus either both shall be odd or the one even and the other odd. Since now in both cases the difference of the two squares further can be a square, thus these two cases must be considered separately.

II. Thus initially there shall be two odd numbers x and y, and putting $x=p+q$ and $y=p-q$; thus it must be observed that one of these numbers is p and q is odd but the other even. Now there becomes $xx-yy=4pq$ and $xx+yy=2pp+2qq$, consequently our formula $x^4-y^4=4pq(2pp+2qq)$,which must be a square, and thus also the fourth part of that $pq(2pp+2qq)=2pq(pp+qq)$, of which the factors are relatively prime: consequently each one of these factors $2p$, q and $pp+qq$ itself must be a square, namely because the one number p is even, but the other q is odd. Therefore we put in order that the first two become squares, making $2p=4rr$ or $p=2rr$, and $q=ss$, where s must be odd, thus the third factor $4r^4+s^4$ must also be a square.

III. Now since s^4+4r^4 is a sum of two squares, of which s^4 is odd, but $4r^4$ is even, thus we put the root of the first term to be $ss=tt-uu$, where t is odd and u is even; but the root of the last is $2rr=2tu$ or $rr=tu$, where t and u are relatively odd.

IV. Because now $tu=rr$ must be a square, thus t as well as u must be a square ; therefore we put $t=mm$ and $u=nn$, where m is odd and n is even, thus there becomes $ss=m^4-n^4$ so that further the difference of two biquadratics namely m^4-n^4 must be a square. But it is clear that these numbers would be far smaller than x and y, because r and s evidently are smaller than x and y, and however m and n are smaller than r and s; thus if the situation were possible in terms of large numbers and x^4-y^4 were a square, thus the same would be still possible in terms of far smaller numbers, and thus always continuing until finally the smallest numbers were reached, where the proposition was possible.

V. But the smallest numbers where this is possible, are if that is a biquadratic equal to 0 or is equal to the other part : were the former to be the case then $n=0$, consequently $u=0$, further $r=0$ and $p=0$, and $x^4-y^4=0$, or $x^4=y^4$; nothing is to be said here about such a case. But were $n=m$, thus there would be $t=u$, further $s=0$, $q=0$ and finally also $x=y$, which does not concern us here.

207.

One can argue here, that since m is odd and n is even, the final difference is no longer to be similar to the first, and thus from that nothing further can be concluded about smaller numbers. But is sufficient that one can assume the first difference for the other, and we will show that the current $x^4 - y^4$ cannot be a square, if one biquadratic is even and the other is odd.

I. Were the first x^4 even and y^4 odd, thus the proposition by itself would not be possible, because one number of the form $4n+3$ arises from this that cannot be a square. Therefore if there shall be x odd and y even, thus there shall be $xx = pp + qq$ and $y = 2pq$, thus then there becomes

$$x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2,$$

where of p and q, one must be even and the other must be odd.

II. Since now $pp + qq = xx$ must be a square, thus $p = rr - ss$ and $q = 2rs$; consequently $x = rr + ss$. But from this there becomes $yy = 2(rr - ss)\cdot 2rs$ or $yy = 4rs(rr - ss)$, which must be a square, and thus also the fourth part of that must be a square, namely $rs(rr - ss)$, of which the factors cannot divide each other.

III. Therefore on putting $r = tt$ and $s = uu$, thus the third factor $rr - ss = t^4 - u^4$ which likewise must be a square; now since the same also is a difference of two biquadratics, which in turn is much smaller than the first, thus thereby the previous proof contains its full strength, thus so that if also with these large numbers the difference between two biquadratics were a square, from which ever smaller differences of a similar form were able to be found, without nevertheless coming back the two evident cases first mentioned : thus also such certainty even with the largest numbers is not possible.

208.

Since in the first part of this proof both the numbers x and y were assumed to be odd, the following can be a shortened form. If $x^4 - y^4$ were a square, thus there must be $xx = pp + qq$ and $yy = pp - qq$, where from the letters p and q the one would be even but the other odd : but since there would be $xxyy = p^4 - q^4$, consequently $p^4 - q^4$ also must become a square, which is the difference of two such biquadratics, of which the former is even but the latter odd: but so that these are impossible, has been shown in the second part of the proof.

209.

We have thus proven these two propositions, that neither the sum nor the difference of two biquadratics can ever be a square number, except for a few obvious cases.

Therefore if there are other formulas which should be made into squares also, thus taking place in the proof, that either the sum or the difference of two biquadratics must become a square, these are impossible. These occur in the following formulas, which we will summarize here.

I. It is not possible that this formula x^4+4y^4 shall be a square : then since this formula is a sum or difference of two squares, thus there must be $xx=pp-qq$ and $2yy=2pq$ or $yy=pq$*;* now since p and q are themselves relatively prime, thus each one must be a square. Therefore putting $p=rr$ and $q=ss$*,* there becomes $xx=r^4-s^4$: thus the difference of two biquadratics must be a square, which is not possible.

II. Also it is not possible that this formula x^4-4y^4 shall become a square: since then there must be $xx=pp+qq$ and $2yy=2pq$, because from this there would come $x^4-4y^4=(pp-qq)^2$*;* now since $yy=pq$, the p and q each must be a square; now putting $p=rr$ and $q=ss$,thus $xx=r^4+s^4$*;* which consequently must be a sum of two biquadratics, which is not possible.

III. Also, it is not possible that this form $4x^4-y^4$ can be a square, because then necessarily y must be an even number. Now putting $y=2z$, thus there would be $4x^4-16z^4$ and consequently also the fourth part of that x^4-4z^4 must be a square, which from the above proposition is not possible.

IV. Also, it is not possible that this formula $2x^4+2y^4$ can be a square; since then the same must be even, and consequently $2x^4+2y^4=4zz$, thus there would become $x^4+y^4=2zz$, and therefore

$$2zz+2xxyy=x^4+2xxyy+y^4,$$

and thus is a square. Thus now there would be

$$2zz-2xxyy=x^4-2xxyy+y^4$$

and thus also to be a square. Now since both

$$2zz+2xxyy \text{ and } 2zz-2xxyy$$

must be square, so also their product $4z^4-4x^4y^4$, and thus also the fourth part of that shall be as square. But this fourth part is $z^4-x^4=y^4$ and thus is the difference of two biquadratics, which is not possible.

V. Finally also, neither can this formula $2x^4-2y^4$ be a square; since then neither of the numbers x und y shall be even, because otherwise they would have a common factor, and also not with the one even and the other odd, because otherwise one part would be divisible by 4 but the other part would be divisible only by 2, and thus the formula itself would only be divisible by 2: thus both parts must be odd. Now on putting $x=p+q$ and $y=p-q$*,* so that one part from the numbers p and q is even and the other part odd, and since $2x^4-2y^4=2(xx+yy)(xx-yy)$, thus we find $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$ and $xx-yy=4pq$*;* thus our formula becomes $16pq(pp+qq)$, of which the sixteenth part, namely $pq(pp+qq)$, consequently also must be a square. Now since the factors shall be mutually indivisible, thus each part must be a square. Now putting $p=rr$ and $q=ss$ for the first and second parts, thus the third part becomes r^4+s^4, which also must be a square: but this is not possible.

210.

It can also be proven in the same manner, that this formula x^4+2y^4 cannot be a square ; the proof of which is presented as follows.

I. Now *x* cannot be odd, because otherwise *y* must be odd, and the formula would only be divisible by 2 but not by 4 : therefore *x* must be odd.

II. Therefore the square root of our formula is put $=xx+\frac{2pyy}{q}$, so that the same will be odd ; thus there becomes

$$x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{q}+\frac{4ppy^4}{qq},$$

where the term x^4 vanishes, and moreover the remaining terms divided by *yy* and multiplied by *qq* , give

$$4pqxx+4ppyy=2qqyy,\text{oder } 4pqxx=2qqyy-4ppyy,$$

from which $\frac{xx}{yy}=\frac{qq-2pp}{2pq}$; from which it follows:

$$xx=qq-2pp \text{ and } yy=2pq,$$

which now are the formulas that we have given above already.

III. Further, $qq-2pp$ must be a square, which cannot be seen otherwise than by putting $q=rr+2ss$ and $p=2rs$; since then there would be $xx=(rr-2ss)^2$; but therefore there would be $4rs(rr+2ss)=yy$, and thus the fourth part $rs(rr+2ss)$ must be a square, and consequently *r* and *s* each in addition. Now putting $r=tt$ and $s=uu$, thus the third factor $rr+2ss=t^4+2u^4$, which must be a square also.

IV. Therefore if x^4+2y^4 were a square, thus also t^4+2u^4 would be a square, where the numbers *t* and *u* would be far smaller than *x* and *y*; and smaller numbers of such a form could arise always. Now since these numbers cannot be squares in small numbers, as it can be proven easily, thus neither can the same with the largest numbers be squares.

211.

Whereas whatever relates to this formula x^4-2y^4, thus nothing can be proven from the same, that they cannot become a square, and if in a similar way on puts the reasoning in place, thus indeed so many cases can be found, where the same actually is a square.

Then if x^4-2y^4 were a square, thus as was shown above, that there will be $xx=pp+2qq$ and $yy=2pq$, because it is known then, that $x^4-2y^4=\left(pp-2qq\right)^2$. Since now also $pp+2qq$ must be a square, thus this happens if

$p = rr - 2ss$ and $q = 2rs$; since then there becomes $xx = (rr + 2ss)^2$. Only here it is to be observed well, that this also must happen, if one assumes $p = 2ss - rr$ and $q = 2rs$, therefore two cases are to be taken into consideration.

I. Initially let $p = rr - 2ss$ and $q = 2rs$, thus $x = rr + 2ss$; and because $yy = 2pq$, thus there shall be now $yy = 4rs(rr - 2ss)$; and thus *r* and *s* must be squares. Therefore we put $r = tt$ and $s = uu$, thus $yy = 4ttuu\left(t^4 - 2u^4\right)$; hence

$$y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)} \text{ and } x = t^4 + 2u^4 ;$$

therefore if $t^4 - 2u^4$ is a square, thus also $x^4 - 2y^4$ is a square; but if *t* and *u* are equal to numbers smaller than *x* and *y*, then one can still as before not conclude, that $x^4 - 2y^4$ cannot be a square, therefore because one can arrive at a similar formula in smaller numbers; then $x^4 - 2y^4$ can be a square without coming from this form $t^4 - 2u^4$, because this can still arise from another way, namely in that other case, that we still have to examine.

II. Thus there shall be $p = 2ss - rr$ and $q = 2rs$, thus there will be just as before $x = rr + 2ss$, only for *y* there is obtained $yy = 2pq = 4rs(2ss - rr)$. Now on putting $r = tt$ and $s = uu$, thus it is obtained from that shown, that our formula $x^4 - 2y^4$ could also be a square, if this $2u^4 - t^4$ were a square. Moreover this clearly happens, if $t = 1$ and $u = 1$; and therefore we obtain $x = 3$ and $y = 2$, from which our formula $x^4 - 2y^4$ becomes $81 - 2 \cdot 16 = 49$.

III. We have also seen above, that $2u^4 - t^4$ becomes a square, if $u = 13$ and $t = 1$, because then $\sqrt{\left(2u^4 - t^4\right)} = 239$. Now we put these values for *t* and *u*, thus we obtain a new case for our formula, namely

$$x = 1 + 2 \cdot 13^4 = 57123 \text{ and } y = 2 \cdot 13 \cdot 239 = 6214.$$

IV. Thus finally moreover the values are found for *x* and *y* , thus the same values can be written in the first formula no. I for *t* and *u*, since than further new values for *x* and *y* will be obtained.

Since we have now found $x = 3$ and $y = 2$, thus let us put the given values into the formula no. I, $t = 3$ and $u = 2$, since then $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$, thus we obtain the following new values $x = 81 + 2 \cdot 16 = 113$ and $y = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 84$.

From this we obtain $xx = 12769$, and $x^4 = 163047361$; further $yy = 7056$ and $y^4 = 49787136$, therefore $x^4 - 2y^4 = 63473089$ of which the square root is 7967, which also agrees perfectly with the initial put in place $pp - 2qq$. Since then $t = 3$ and $u = 2$, thus $r = 9$ and $s = 4$, therefore $p = 81 - 32 = 49$ and $g = 72$, from which $pp - 2qq = 2401 - 10368 = -7967$.

CAPITEL 10

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ RATIONAL ZU MACHEN

147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert daß diese Formel $a+bx+cxx+dx^3$ eine Cubic-Zahl werde, und daraus also die Cubic-Wurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müße, weil sonsten die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a + bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur setzen dürfte $a+bx=p^3$, und daraus so gleich gefunden wurde $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148.

Hier ist wiederum vor allen Dingen zu mercken daß wann weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu gedencken sey, wofern nicht schon ein Fall, darin die Formel ein Cubus wird, bekannt ist, derselbe mag nun so gleich in die Augen fallen, oder erst durch probiren gefunden werden müßen.

Das erstere geschieht nun, erstlich wann das erste Glied ein Cubus ist und die Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, wo der bekannte Fall ist $x=0$; hernach auch wann das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist $a+bx+cxx+g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entspringt der dritte wo so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier erwegen wollen.

149.

I. Fall. Es sey die vorgegebene Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze demnach die Wurzel davon $f+px$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich seyn soll $f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3$; da nun die ersten Glieder von selbsten wegfallen, so bestimme man p dergestalt daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wann $b=3ffp$, oder $p=\frac{b}{3ff}$; alsdann geben die übrigen Glieder durch xx dividirt diese Gleichung $c+dx=3fpp+p^3x$, woraus gefunden wird $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubic-Wurzel schlecht weg setzen $= f$, da man dann bekommen würde $f^3 = f^3 + bx + cxx$: oder $b + cx = 0$ und daraus $x = -\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschloßen werden könnte.

150.

II. Fall. Die vorgegebene Formel habe nun zweytens diese Gestallt $a + bx + cxx + g^3x^3$, man setze die Cubic-Wurzel $p + gx$, davon der Cubus ist $p^3 + 3gppx + 3ggpxx + g^3x^3$, da sich dann die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man *p* also daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geschieht wann $c = 3ggp$ oder $p = \frac{c}{3gg}$: alsdann geben die zwey ersten diese Gleichung $a + bx = p^3 + 3gppx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$.
Wäre das erste Glied *a* nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubic-Wurzel auch schlechtweg setzen können $= gx$, da denn $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$ oder $0 = b + cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

151.

III. Fall. Es sey endlich drittens die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + g^3x^3$, worinn so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; dahero dieselbe auf beyde vorhergehende Arten tractiert und also zwey Werthe für *x* heraus gebracht werden können.
Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel setzen $f + gx$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich werden soll $f^3 + 3ffx + 3fggcxx + g^3x^3$, da dann die erste und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch *x* dividirt diese Gleichung geben $b + cx = 3ffg + 3fggx$, und daraus $x = \frac{b - 3fgg}{3fgg - c}$.

152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man suche einen Werth zu errathen, da dieselbe ein Cubus wird: hat man einen solchen gefunden welcher sey $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 = k^3$, so setze man $x = h + y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird :

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ chh + 2chy + cyy \\ dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \\ \hline k^3 + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3 \end{array}$$

welche zu der ersten Art gehört, und also für *y* ein Werth gefunden werden kann, woraus man dann einen neuen Werth für *x* erhält, aus welchem nachgehens auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153.

Wir wollen nun diese Methode durch einige Exempel erläutern und erstlich diese Formel $1+x+xx$ vornehmen, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehöret. Man könnte also sogleich die Cubic-Wurzel $=1$ setzen, daraus gefunden würde $x+xx=0$, das ist $x(1+x)=0$; folglich entweder $x=0$ oder $x=1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze dahero die Cubic-Wurzel $1+px$, wovon der Cubus ist $1+3px+3ppxx+p^3x^3$, und mache $1=3p$ oder $p=\frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch xx dividirt $1=3pp+p^3x$, oder $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; da nun $p=1$ so wird $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, und dahero unsere Formel $1+18+324=343$, wovon die Cubic-Wurzel ist $1+px=7$. Wollte man nun weiter setzen $x=18+y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen $343+37y+yy$, wovon nach der ersten Regel die Cubic-Wurzel zu setzen wäre $7+py$, wovon der Cubus ist

$$343+147py+21ppyy+p^3y^3;$$

nun setze man $37=147p$, oder $p=\frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung $1=21pp+p^3y$, also

$$y=\frac{1-21pp}{p^3}, \text{ das ist } y=-\frac{340\cdot 21\cdot 147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653}$$

woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154.

Es sey ferner diese Formel gegeben $2+xx$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden da dieses geschieht, welcher ist $x=5$; man setze demnach so gleich $x=5+y$, so bekommt man $27+10y+yy$; davon sey die Cubic-Wurzel $3+py$, und also die Formel selbst diesem Cubo $27+27py+9ppyy+p^3y^3$ gleich; man mache $10=27p$, oder $p=\frac{10}{27}$ so bekommt man $1=9pp+p^3y$, und daraus $y=\frac{1-pp}{p^3}$, das ist $y=-\frac{19\cdot 9\cdot 27}{1000}$ oder $y=-\frac{4617}{1000}$, und $x=\frac{383}{1000}$: heraus wird unsere Formel $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubic-Wurzel seyn muß $3+py=\frac{129}{100}$ ·

155.

Man betrachte ferner diese Formel $1+x^3$, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbahren Fällen $x=0$ und $x=-1$? Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehöret, so hilft uns doch die Wurzel $1+x$ nichts, weil der Cubus davon $1+3x+3xx+x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x+3xx=0$ oder $x(1+x)=0$ giebt, das ist entweder $x=0$ oder $x=-1$.

Will man ferner setzen $x=-1+y$, so bekommen wir diese Formel $3y-3yy+y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehöret: setzt man daher die Cubic-Wurzel $p+y$ wovon der Cubus ist

$$p^3+3ppy+3pyy+y^3$$

und macht $-3=3p$ oder $p=-1$, so geben die übrigen

$$3y=p^3+3ppy=-1+3y,$$

folglich $y=\frac{1}{0}$ das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergebens um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann daß diese Formel $1+x^3$ außer den gemeldten Fällen, nimmer ein Cubus werden kann; dann man hat gezeiget daß die Summ von zweyen Cubis als t^3+x^3 niemals ein Cubus werden kann, dahero ist es auch nicht möglich in dem Fall $t=1$.

156.

Man behauptet auch daß $2+x^3$ kein Cubus werden könne außer dem Fall $x=-1$; diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man aber $x=-1+y$, so bekommt man diese Formel $1+3y-3yy+y^3$, welche nach allen drey Fällen tractirt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1+y$, davon der Cubus $1+3y+3yy+y^3$ ist, so wird $-3yy=3yy$, welches nur geschieht wann $y=0$. Setzt man nach dem zweyten Fall die Wurzel $-1+y$, wovon der Cubus $-1+3y-3yy+y^3$, so wird $1+3y=-1+3y$ und $y=\frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel setzen $1+y$ welches schon geschehen.

157.

Es sey diese Formel gegeben $3+3x^3$ welche ein Cubus werden soll; dieses geschieht nun erstlich in dem Fall $x=-1$, woraus aber nichts geschloßen werden kann, hernach aber auch in dem Fall $x=2$: man setze deswegen $x=2+y$, so kommt diese Formel heraus $27+36y+18yy+3y^3$, welche zum ersten Fall gehöret, dahero sey die Wurzel $3+py$, wovon der Cubus $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; man mache allso $36=27p$ oder $p=\frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch yy dividirt,

$18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y=-2$, dahero $y=-\frac{54}{17}$, folglich $x=-\frac{20}{17}$; hieraus wird unsere Formel $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubic-Wurzel ist $3+py=-\frac{21}{17}$; und aus diesem Werth könnte man noch mehrere finden wann man wollte.

158.

Wir wollen zuletzt noch diese Formel betrachten $4+xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nemlich wann $x=2$ und $x=11$. Setzt man nun erstlich $x=2+y$, so muß diese Formel ein Cubus seyn $8+4y+yy$, dessen Wurzel sey $2+\frac{1}{3}y$, und also die Formel $=8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, woraus man erhält $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$, dahero $y=9$ und $x=11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x=11+y$, so bekommt man $125+22y+yy$, so dem Cubo von $5+py$, das ist $125+75py+15ppyy+p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p=\frac{22}{75}$ genommen, giebt $1=15pp+p^3y$ oder $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$; dahero $y=-\frac{122625}{10648}$, und also $x=-\frac{5497}{10648}$.

Weil x so wohl negativ als positiv seyn kann so setze man $x=\frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1-y$, damit der Nenner ein Cubus werde und da bekommt man $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, wo also nur noch der Zehler $8-8y+8yy-8y^3$ oder eben derselbe durch 8 dividirt nemlich $1-y+yy-y^3$ zu einem Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $=1-\frac{1}{3}y$, wovon der Cubus ist $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$, so wird $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, oder $27-27y=9-y$, dahero $y=\frac{9}{13}$, folglich $1+y=\frac{22}{13}$ und $1-y=\frac{4}{13}$, folglich $x=11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wann man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3}-y$, findet man eben dasselbe.

Nach der dritten Art, wann man die Wurzel setzt $1-y$, wovon der Cubus ist $1-3y+3yy-y^3$, bekommt man $-1+y=-3+3y$, und also $y=1$, folglich $x=\frac{4}{0}$, das ist unendlich; dahero wird auf diese Art nichts neues gefunden.

159.

Weil wir aber diese zwey Fälle schon wißen $x=2$ und $x=11$, so kann man setzen $x=\frac{2+11y}{1\pm y}$; dann ist $y=0$ so wird $x=2$, ist aber y unendlich groß so wird $x=\pm 11$.

Es sey demnach erstlich $x=\frac{2+11y}{1+y}$, so wird unsere Formel

$$4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy} \text{ oder } \frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2}$$

man multiplicire oben und unten mit $1+y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zehler welcher seyn wird $8+60y+177yy+125y^3$, zu einem Cubo gemacht werden soll.

Man setze demnach erstlich die Wurzel $=2+5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze demnach nach der zweyten Art die Wurzel $p+5y$, davon der Cubus $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$ und mache $177=75p$, oder $p=\frac{59}{25}$, so wird $8+60y=p^3+15ppy$, dahero $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{15625}$ und $y=-\frac{80379}{367875}$ woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch setzen $x=\frac{2+11y}{1-y}$, und da wird unsere Formel

$$4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2},$$

wovon der Nenner mit $1-y$ multiplicirt ein Cubus wird. Allso muß auch $8+28y+89yy-125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $=2+\frac{7}{3}y$, davon der Cubus ist $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^3$, so wurd $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, und also $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$, folglich $x=11$, welches der schon bekante Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2-5y$, wovon der Cubus ist $8-60y+150yy-125y^3$, so erhalten wir $28+89y=-60+150y$, foglich $y=\frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x=-\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wir $\frac{1191016}{729}$ welches der cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden wodurch eine solche Formel, entweder zu einem Quadrat oder zu einem Cubo gemacht werden kann, wann nur in jenem Fall die höchste Potestät der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterm aber den dritten nicht ubersteiget.

Man könnte noch den Fall hinzufugen da eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potestät die zweyte nicht ubersteigen muß. Wann aber eine solche Formel $a+bx+cxx$ ein Biquadrat seyn soll so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrat gemacht werden, da dann nur noch ubrig ist daß die Wurzel von diesem Quadrat noch ferner zu einem Quadrat gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also wann zum Exempel $xx+7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat welches geschieht wann $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$ oder auch $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich diesem Quadrat

$$\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq}$$

wovon die Wurzel ist $\frac{7pp+qq}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrat gemacht werden , muß: man multiplicire demnach oben und unten mit *2pq,* damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zehler $2pq(7pp+qq)$ ein Quadrat seyn mußen, welches nicht anders geschehen kann als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Ende setzen $q=pz$, damit diese Formel $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$ und also auch durch p^4 dividirt, nemlich diese $2z(7+zz)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z=1$, dahero setze man $z=1+y$, so bekommen wir

$$(2+2y)(8+2yy)=16+20y+6yy+2y^3,$$

wovon die Wurzel sey $4+\frac{5}{2}y$, davon das Quadrat $16+20y+\frac{25}{4}yy$, und unserer Formel gleich gesetzt giebt $6+2y=\frac{25}{4}, y=\frac{1}{8}$ und $z=\frac{9}{8}$; da nun $z=\frac{p}{q}$, so wird $q=9$ und $p=8$, dahero $x=\frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7+xx=\frac{279841}{20736}$, davon erstlich die Quadrat-Wurzel ist $\frac{529}{144}$, und hievon nochmals die Quadrat-Wurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: dann wann z. E. *cxx* ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $=px$, und da wird $cxx=p^3x^3$ oder $c=p^3x$, dahero $x=\frac{c}{p^3}$; man schreibe $\frac{1}{q}$ an statt *p,* so wird $x=cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbahr weil die Formel ein Quadrat enthält, dahero auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$ oder $abb+2abcx+accxx$ gantz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; dann man setze die Cubic-Wurzel davon $=\frac{b+cx}{q}$ so wird $a(b+cx)^2=\frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt giebt $a=\frac{b+cx}{q^3}$, daraus $x=\frac{aq^3-b}{c}$, wo man *q* nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet wie höchst nützlich es sey die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen so oft solches geschehen kann, und von dieser Materie soll weitläuffig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.

CAPITEL 11

VON DER AUFLÖSUNG DIESER FORMEL $axx+bxy+cyy$ IN FACTOREN

162.

Hier bedeuten die Buchstaben *x* und *y* nur allein gantze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte gesehen, wie die Frage immer auf gantze Zahlen gebracht werden kann. Dann ist z. E. die gesuchte Zahl x ein Bruch so darf man nur setzen $x=\frac{t}{u}$, da dann für t und u immer gantze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur gantze Zahlen, und ehe wir zeigen können wie dieselbe zu einem Quadrat, oder Cubo, oder einer noch höheren Potestät gemacht werden soll, so ist nöthig zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben soll, daß diese Formel zwey oder mehr Factores erhalte.

163.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor: der erste ist, wann sich diese Formel würcklich in zwey rationale Factores auflösen läßt, welches geschieht, wie wir schon oben gesehen haben, wann $bb-4ac$ eine QuadratZahl wird.

Der andere Fall ist, wann diese beyde Factores einander gleich werden, in welchem die Formel selbst ein würckliches Quadrat erithält.

Der dritte Fall ist, wann sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factores auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht wann $bb-4ac$ eine positive Zahl aber kein Quadrat ist, dieses aber wann $bb-4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle welche wir hier zu erwegen haben.

164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factores auflösen, so kann dieselbe also vorgestellt werden $(fx+gy)(hx+ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factores in sich schließt. Will man aber daß dieselbe auf eine allgemeine Art mehr Factores in sich schließe, so darf man nur setzen $fx+gy=pq$ und $hx+ky=rs$, da dann unsere Formel diesem Product $pqrs$ gleich wird, und also vier Factores in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehret werden könnte: hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth nemlich $x=\frac{pq-gy}{f}$, und $x=\frac{rs-ky}{h}$, woraus gefunden wird $hpq-hgy=frs-fky$, und also $y=\frac{frs-hpq}{fk-hg}$ und $x=\frac{kpq-grs}{fk-hg}$; damit nun x und y in gantzen Zahlen ausgedrückt werde, so müßen die Buchstaben p, q, r, s also angenommen werden, daß sich der Zehler durch den Nenner würcklich theilen laße, welches geschieht, wann sich entweder p und $r$oder q und s dadurch theilen laßen.

165.

Um dieses zu erläutern so sey diese Formel vorgegeben $xx-yy$, welche aus diesen Factoren besteht $(x+y)(x-y)$: soll dieselbe nun noch mehr Factoren haben, so setze man $x+y=pq$ und $x-y=rs$, so bekommt man $x=\frac{pq+rs}{2}$ und $y=\frac{pq-rs}{2}$; damit nun diese Zahlen gantz werden, so müßen die beiden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerad seyn oder beyde
ungerad.

Es sey z. E. $p=7,\ q=5,\ r=3$ und $s=1$, so wird $pq=35$ und $rs=3$, folglich $x=19$ und $y=16$: dahero entspringt $xx-yy=105$, welche Zahl würcklich aus den Factoren $7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ besteht; also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factores in sich schließt und demnach also vorgesteilet werden kann $(fx+gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann als welche aus der Wurzel *fx gy* entspringen, setzt man also $fx+gy=pqr$, so wird unsere Formel *ppqqrr* und kann also so viel Factoren haben als man will.

Hier wird von den zwey Zahlen *x* und *y* nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frey gestellt, dann man bekommt $x=\frac{pqr-gy}{f}$, wo *y* leicht so angenommen werden kann daß der Bruch wegfält. Die leichteste Formel von dieser Art ist *xx,* nimmt man $x=pqr$, so schließt das Quadrat *xx* drey quadratische Factoren in sich, nemlich *pp, qq* und *rr*.

167.

Weit mehr Schwierigkeiten aber hat der dritte Fall, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und da erfordert es besondere Kunstgriffe für *x* und *y* solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern so ist zu mercken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet, man darf nemlich nur setzen $x=\frac{z-by}{2a}$, da dann diese Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{zz-2byz+bbyy}{4a}+\frac{2byz-bbyy}{2a}+cyy=\frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}.$$

Wir wollen demnach so gleich das mittlere Glied weglaßen und diese Formel betrachten $axx+cyy$, wobey es darauf ankommt, was man den Buchstaben *x* und *y* für Werthe beylegen soll, damit diese Formel Factores erhalte. Es ist leicht zu erachten daß solches von der Natur der Zahlen *a* und *c* abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168.

Es sey also erstlich diese Formel gegeben $xx+yy$, welche alle Zahlen in sich begreifet, so eine Summ von zwey Quadraten ist, und wovon wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

unter welchen sich einige Prim-Zahlen befinden die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, was man den Buchstaben *x* und *y* für Werthe geben müße, daß die Formel $xx+yy$ Theiler oder Factores hat und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen wo x und y einen gemeinen Theiler unter sich haben, weil alsdann $xx + yy$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen laßen; dann wäre z. E. $x = 7p$ und $y = 7q$ so würde die Summ ihrer Quadrate $49pp + 49qq = 49(pp + qq)$ sich gar durch 49 theilen laßen. Dahero geht die Frage nur auf solche Formel wo x und y keinen gemeinen Theiler haben oder unter sich untheilbahr seyn. Die Schwierigkeit fält hier bald in die Augen, dann ob man gleich sieht, daß wann die beyden Zahlen x und y ungerad sind alsdann die Formel $xx + yy$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbahr werde; ist aber eine gerad und die andere ungerad, so wird die Formel ungerad, ob sie aber Theiler habe oder nicht? ist nicht so leicht zu sehen. Beyde Zahlen aber x und y können nicht gerad seyn, weil sie keinen gemeinen Theiler unter sich haben müßen.

169.

Es seyen demnach die beyden Zahlen x und y untheilbahr unter sich, und gleichwohl soll die Formel $xx + yy$ zwey oder mehr Factores in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factores auflösen läßt; allein die irrationale Factores, in welche diese Formel aufgelößt wird und durch dieses Product vorgestellet werden kann $\left(x + y\sqrt{-1}\right)\cdot(x - y\sqrt{-1})$ können uns eben denselben Dienst leisten; dann wann die Formel $xx + yy$ würckliche Factores hat, so müßen die irrationale Factoren wiederum Factores haben, indem wann diese Factoren keine weitere Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factores irrational ja so gar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationale Factores haben, sondern sie müßen irrational und so gar imaginär von gleicher Art seyn.

170.

Will man also daß diese Formel $xx + yy$ zwey rationale Factores bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factores, und setze erstlich $x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1})$, da dann weil $\sqrt{-1}$ so wohl negativ als positiv genommen werden kann von selbsten seyn wird $x - y\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})(r - s\sqrt{-1})$, also daß das Product davon, das ist unsere Formel seyn wird $xx + yy = \left(pp + qq\right)\left(rr + ss\right)$ und dieselbe folglich zwey rationale Factores enthält, nemlich $pp + qq$ und $rr + ss$. Hier ist aber noch übrig die Werthe von x und y zu bestimmen, als welche auch rational seyn müßen.

Wann man nun jene irrationale Factores mit einander multiplicirt, so bekommt man

$$x + y\sqrt{-1} = pr - qs + ps\sqrt{-1} + qr\sqrt{-1}$$

und

$$x - y\sqrt{-1} = pr - qs - ps\sqrt{-1} - qr\sqrt{-1},$$

addirt man diese Formeln, so wird $x = pr - qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1} = 2ps\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$, oder $y = ps + qr$.

Nimmt man also $x = pr- qs$ und $y = ps + qr$, so erhält unsere Formel $xx + yy$ gewiß zwey Factores, indem herauskommt

$$xx + yy = (pp + qq)(rr + ss).$$

Verlangte man mehr Factores so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $pp + qq$ zwey Factores hätte, und alsdann hätte man in allem drey Factores, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehret werden kann.

171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden: nimmt man z. E. q negativ, so wird $x + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summ der Quadraten eben diejenige ist als vorher; daraus ersehen wir, daß wann eine Zahl einem solchen Product $(pp + qq)(rr + ss)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwei Quadrate zerlegt werden könne, indem man gefunden erstlich

$$x = pr - qs \text{ und } y = ps + qr,$$

und hernach auch

$$x = pr + qs \text{ und } y = ps - qr.$$

Es sey z. E. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$ und $s = 1$, also daß dieses Product heraus käme $13 \cdot 5 = 65 = xx + yy$, da dann seyn wird entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$; in beyden Fällen aber ist $xx + yy = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summ von zwey Quadrat-Zahlen seyn. Man multiplicire z. E. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit ein ander, so kommt 1105 welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadraten zerlegt werden kann:

$$\text{I.) } 33^2 + 4^2, \text{II.) } 32^2 + 9^2, \text{III.) } 31^2 + 12^2, \text{IV.) } 24^2 + 23^2.$$

172.

Unter den Zahlen die in der Form $xx + yy$ enthalten sind, befinden sich also erstlich solche, die aus zwey oder mehrere dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammen gesetzt sind; hernach aber auch solche welche nicht solchergestalt zusammen gesetzt sind: diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $xx + yy$ nennen, jene aber zusammengesetzte; dahero werden die einfache Zahlen dieser Art seyn

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 etc.

In welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich Prim-Zahlen oder solche welche gar keine Theiler haben als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 und welche alle außer 2 so beschaffen sind, daß wann man 1 davon weg nimmt das übrige durch 4 theilbahr werde, oder welche alle in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind: hernach sind auch Quadrat-Zahlen vorhanden 9, 49 etc. deren Wurzeln aber 3, 7 etc. nicht vorkommen; wobey zu mercken, daß diese Wurzeln 3, 7 etc. in dieser Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbahr daß keine Zahl von dieser Form $4n-1$ eine Summ von zwey Quadraten seyn könne, dann da diese Zahlen ungerad sind, so müßte eines von den beyden Quadraten gerad das andere aber ungerad seyn; wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadraten durch 4 theilbahr sind, die ungeraden aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind; wann man dahero ein grades und ein ungrades Quadrat zusammen addirt, so bekommt die Summ immer diese Form $4n+1$, niemals aber diese Form $4n-1$. Daß aber alle Prim-Zahlen von der Form $4n+1$ eine Summ von zwey Quadraten seyn, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx+2yy$ betrachten, um zu sehen was x und y für Werthe haben müßen damit dieselbe Factores erhalte. Da nun diese Formel durch diese imaginäre Factores vorgestellet wird

$$\left(x+y\sqrt{-2}\right)\left(x-y\sqrt{-2}\right),$$

so ersieht man wie vorher, daß wann unsere Formel Factores hat, auch ihre imaginäre Factores welche haben müßen; man setze dahero erstlich

$$x+y\sqrt{-2}=\left(p+q\sqrt{-2}\right)(r+s\sqrt{-2}),$$

so folget von selbsten daß auch seyn müße und hieraus wird unsere Formel $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$, und hat also zwey Factores, deren so gar ein jeder von eben derselben Art ist; damit aber dieses geschehe so müßen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgender Gestalt geschehen kann. Da

$$x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2}$$

und

$$x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2}$$

so ist die Summ $2x=2pr-4qs,$ folglich $x=pr-2qs$; hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2}$, dahero $y=qr+ps$. Wann also unsere Formel $xx+2yy$ Factores haben soll, so sind dieselben immer also beschaffen, daß der eine seyn wird $pp+2qq$ und der andere $rr+2ss$, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art als $xx+2yy$; und damit dieses geschehe so können x und y wieder auf zweyerley Art bestimmt werden, weil q so wohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nemlich haben, erstlich $x-2qs$ und $y=ps+qr$, und hernach auch $x=pr+2qs$ und $y=ps-qr$.

174.

Diese Formel $xx+2yy$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen, und welche wir hier bis auf 50 setzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 48, 49, 50; die wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte abtheilen können; da werden dann die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49 welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Prim-Zahlen sind; von denen aber die hier nicht stehen kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemercken daß alle PrimZahlen die in unserer Formel enthalten sind, entweder in dieser Form $8n+1$ oder in dieser $8n+3$ gehören, da hingegen die übrigen welche entweder in dieser Form $8n+5$ oder in dieser $8n+7$ enthalten sind, nimmermehr aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen können: es ist aber auch gewis daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten sind, sich allezeit in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen laßen.

175.

Laßt uns auf eine gleiche Weise zu dieser allgemeinen Formel $xx+cyy$ fortschreiten, und sehen was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factores erhalte.
Da nun dieselbe durch dieses Produkt vorgesteilet wird

$$(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c}),$$

so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factores von gleicher Art: man setze nemlich

$$x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c}),$$

und

$$x-y\sqrt{-c}=\left(p-q\sqrt{-c}\right)\left(r-s\sqrt{-c}\right);$$

und da wird unsere Formel werden

$$xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css),$$

woraus erhellet daß die Factores wiederum von eben der Art als die Formel selbst seyn werden, die Werthe aber von x und y werden sich folgender Gestalt verhalten: $x=pr-cqs$ und $y=qr+ps$, oder $x=pr+cqs$ und $y=ps-qr$, und hieraus ist leicht abzusehen wie unsere Formel noch mehr Factores erhalten könne.

176.

Nun ist es auch leicht dieser Formel $xx-cyy$ Factores zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ schreiben darf; inzwischen laßen sich dieselben auch unmittelbar also finden; da unsere Formel diesem Product gleich ist $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, so setze man $x+y\sqrt{c}=\left(p+q\sqrt{c}\right)(r+s\sqrt{c})$ und $x-y\sqrt{c}=\left(p-q\sqrt{c}\right)(r-s\sqrt{c})$, woraus sogleich diese Factores erfolgen $xx-cyy=\left(pp-cqq\right)\left(rr-css\right)$, welche wieder von eben der Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y laßen sich auch wiederum auf eine doppelte Art bestimmen nemlich erstlich $x=pr+cqs$, $y=qr+ps$, und hernach auch $x=pr-cqs$ und $y=ps-qr$. Will man die Probe machen ob solchergestalt das gefundene Product herauskomme, so probire man die erstern Werthe, da dann seyn wird $xx = pprr + 2cpqrs + ccqqss$ und $yy = ppss + 2pqrs + qqrr$, also $cyy = cppss + 2cpqrs + cqqrr$, woraus man erhält:

$$xx - cyy = pprr - cppss + ccqqss - cqqrr$$

welches mit dem gefundenen Product $(pp - cqq)(rr - css)$ über einkommt.

177.

Bis hieher haben wir das erste Glied blos betrachtet, nun wollen wir setzen daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen was die Formel $axx + cyy$ für Factores erhalten könne.

Hier ist nun klar daß unsere Formel diesem Product gleich sey

$$(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c}),$$

welchen beyden Factoren demnach wiederum Factores gegeben werden müßen. Hierbey aber ereignet sich eine Schwierigkeit, dann wann man zu folge der obigen Art setzen wollte

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac},$$

und

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) = apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac},$$

woraus man erhielte

$$2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs, \text{und } 2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac},$$

so würde man so wohl für *x* als *y* irrationale Werthe finden, welche hier keineswegs stattfinden.

178.

Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholffen werden, wann man setzet:

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c},$$

und

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c};$$

woraus nun für *x* und *y* folgende rationale Werthe gefunden werden: $x = pr - cqs$ und $y = qr + aps$, alsdann aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen

$$axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss),$$

von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer gantz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen so in der ersteren Form enthalten sind, wann sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx+acyy$, als welche mit der obigen $xx+cyy$ übereinkommt, mit einander multipliciret wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wann zwey Zahlen von der ersten Form $xx+acyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art

$$(app+cqq)(arr+css)$$

mit ein ander multipliciren, und da ist leicht zu sehen daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr+cqs)^2+ac(ps-qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr+cqs=x$ und $ps-qr=y$, so bekommen wir diese Formel $xx+acyy$ welche von der letzteren Art ist; dahero dann zwey Zahlen von der erstern Art $axx+cyy$ mit einander multiplicirt eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürtzlich also vorstellen kann: die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II andeuten, und also I·I giebt II; I·II giebt I; II·II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wann man mehrere solche Zahlen mit ein ander multiplicirt: als I·I I giebt I; I·I·II giebt II; I·II·II giebt I; II·II·II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern so sey $a=2$ und $c=3$ woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx+3yy$, die andere aber in der Form $xx+6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx+3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden daß $1085-3yy$ ein doppeltes Quadrat nemlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich wann $y=3$, dann da wird $x=23$; hernach auch wann $y=11$, dann da wird $x=19$; drittens auch noch wann $y=13$, dann da wird $x=17$, und endlich viertens wann $y=19$, dann da wird $x=1$.

Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind welche aus zwey oder mehr kleinem Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt nemlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CAPITEL 12

VON DER VERWANDELUNG DIESER FORMEL $axx+cyy$ IN QUADRATEN ODER AUCH HÖHEREN POTESTÄTEN

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx+cyy$ öfters unmöglich zu Quadrate gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden in welcher $a=1$ ist. Z. E. diese Form $2pp-qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p+q)^2-2(p+q)^2$. Setzt man nun $2p+q=x$ und $p+q=y$, so kommt diese Formel $xx-2yy$ heraus, wo $a=1$ und $c=-2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch immer statt, so oft es möglich ist dergleichen Formeln zu einem Quadrat zu machen.

Wann demnach diese Formel $axx+cyy$ zu einem Quadrat oder einer andern höhern geraden Potestät gemacht werden soll, so können wir sicher setzen $a=1$, und die übrigen Fällen als unmöglich ansehen.

182.

Es sey daher diese Formel vorgelegt $xx+cyy$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus diesen Factoren besteht

$$\left(x+y\sqrt{-c}\right)\left(x-y\sqrt{-c}\right),$$

so müßen dieselben entweder Quadraten, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Dann wann das Product von zweyen Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. E. *pq*, so wird erfordert, entweder daß $p=rr$ und $q=ss$, das ist daß ein jeder Factor vor sich ein Quadrat sey, oder daß $p=mrr$ und $q=mss$, das ist daß die Factores Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyen, deswegen setze man $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbsten $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, dahero bekommen wir $xx+cyy=mm(pp+cqq)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber *x* und *y* zu bestimmen, so haben wir diese Gleichungen

$$x+y\sqrt{-c}=mpp+2mpq\sqrt{-c}\ -mcqq$$

und

$$x-y\sqrt{-c}=mpp-2mpq\sqrt{-c}\ -mcqq,$$

wo offenbahr das *x* gleich seyn muß dem rationalen Teil, $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theil; dahero wird $x=mpp-\ mcqq$ und $y\sqrt{-c}=2mpq\sqrt{-c}$ oder $y=2mpq$. Setzt man also $x=mpp-mcqq$ und $y=2mpq$, so wird unsere Formel $xx+cyy$ ein Quadrat, nemlich $mm(pp+cqq)^2$, davon die Wurzel ist $mpp+mcqq$.

183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbahr seyn, oder keinen gemeinen Theiler haben, so muß $m=1$ gesetzt werden. Wann daher $xx+cyy$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x=pp-cqq$ und $y=2pq$, da dann diese Formel dem Quadrat von $pp+cqq$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x=pp-cqq$, so kann man auch setzen $x=cqq-pp$, weil beyderseits das Quadrat xx einerley wird. Dieses sind nun eben diejenige Formeln, die wir schon oben aus gantz anderen Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätiget wird.
Dann nach der vorigen Methode, wann $xx+cyy$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $=x+\frac{py}{q}$, und da bekommt man $xx+cyy=xx+\frac{2pxy}{q}+\frac{ppyy}{qq}$, wo sich die xx aufheben die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit qq multiplicirt geben $cqqy=2pqx+ppy$, oder $cqqy-ppy=2pqx$; man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y}=\frac{cqq-pp}{2pq}$. Da aber x und y untheilbahr seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zehler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x=cqq-pp$ und $y=2pq$, wie vorher.

184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbsten Factores, als wann die vorgegebene Formel wäre $xx+acyy$ welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche gibt $x=acqq-pp$ und $y=2pq$, sondern auch noch diese $x=cqq-app$ und $y=2pq$; dann da wird ebenfals

$$xx+acyy=ccq^4+2acppqq+aap^4=(cqq+app)^2,$$

welches auch geschieht, wann man nimmt $x=app-cqq$, weil das Quadrat xx in beyden Fällen einerley herauskommt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze

$$x+y\sqrt{-ac}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^2 \text{ und } x-y\sqrt{-ac}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^2,$$

damit herauskomme $xx+acyy=(app+cqq)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdann aber wird

$$x+y\sqrt{-ac}=app+2pq\sqrt{-ac}-cqq$$

und

$$x-y\sqrt{-ac}=app-2pq\sqrt{-ac}-cqq,$$

woraus folgt

$$x=app-cqq \text{ und } y=2pq.$$

Läßt sich also die Zahl ac auf mehrerley Arten in zwey Factoren zertheilen so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstlich diese Formel $xx+yy$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac=1$, so nehme man $x=pp-qq$ und $y=2pq$, so wird

$$xx+yy=(pp+qq)^2.$$

Soll zweytens diese Formel $xx-yy$ ein Quadrat werden, so ist $ac=-1$; man nehme also $x=pp+qq$ und $y=2pq$, da dann $xx-yy=(pp-qq)^2$ wird.

Soll drittens diese Formel $xx+2yy$ ein Quadrat werden, wo $ac=2$, so nehme man $x=pp-2qq$, oder $x=2pp-qq$ und $y=2pq$, und dann wird

$$xx+2yy=(pp+2qq), \text{oder } xx+2yy=(2pp+qq)^2.$$

Soll viertens diese Formel $xx-2yy$ ein Quadrat werden wo $ac=-2$, so nehme man $x=pp+2qq$ und $y=2pq$, da dann kommt

$$xx-2yy=(pp-2qq)^2.$$

Soll fünftens diese Formel $xx+6yy$ ein Quadrat werden wo $ac=6$, und also entweder $a=1$ und $c=6$, oder $a=2$ und $c=3$; so kann man erstlich setzen $x=pp-6qq$ und $y=2pq$, da dann

$$xx+2yy=(pp+2qq)^2$$

Hernach kann man auch setzen $x=2pp-3qq$ und $y=2pq$, da dann

$$xx+6yy=(2pp+3qq)^2.$$

186.

Sollte aber diese Formel $axx+cyy$ zu einem Quadrat gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne wofern nicht schon ein Fall bekant ist, in welchem diese Formel würcklich ein Quadrat werde. Dieser bekante Fall sey demnach, wann $x=f$ und $y=g$, also daß $aff+cgg=hh$; und alsdann kann unsere Formel in einer andern von dieser Art $tt+acuu$ verwandelt werden, wann man setzt

$$t=\frac{afx+cgy}{h} \text{ und } u=\frac{gx-fy}{h};$$

dann da wird

$$tt=\frac{aaffxx+2acfgxy+ccggyy}{hh} \text{ und } uu=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{hh},$$

woraus folgt

$$tt+acuu=\frac{aaffxx+ccggyy+acggxx+acffyy}{hh}=\frac{axx(aff+cgg)+cyy(aff+cgg)}{hh};$$

da nun $aff + cgg = hh$, so wird $tt + acuu = axx + cyy$; und solchergestalt bekommt die vorgelegte Formel $axx + cyy$ diese Form $tt + acuu$, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann.

187.

Nun wollen wir ·weiter fortgehen und zusehen wie diese Formel $axx + cyy$, wo x und y unter sich untheilbahr seyn sollen, zu einem Cubo gemacht werden könne; wozu die vorigen Regeln keinesweges hinlänglich sind, die hier angebrachte Methode aber mit dem besten Fortgang angewandt werden kann: wobey noch dieses insonderheit zu mercken, daß diese Formel allezeit zu einem Cubo gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht angieng, wofern nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potestäten gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten etc. Potestät, ist die Auflösung immer möglich.

188.

Wann demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Cubo gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = \left(p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}\right)^3 \text{ und } x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = \left(p\sqrt{a} - q\sqrt{-c}\right)^3,$$

dann daraus wird das Product $axx + cyy = (app + cqq)^3$, und also unsere Formel ein Cubus: es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden könne? welches glücklicher weise gelingt; dann wann die angesetzte Cubi würcklich genommen werden, so erhalten wir diese zwei Gleichungen

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c},$$

und

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c},$$

woraus offenbahr folgt, daß

$$x = ap^3 - 3cpqq \text{ und } y = 3appq - cq^3.$$

Man suche z. E. zwey Quadrate xx und yy, deren Summ $xx + yy$ einen Cubus ausmache: weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir

$$x = p^3 - 3pqq \text{ und } y = 3ppq - q^3,$$

und alsdann wird $xx + yy = (pp + qq)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $xx + yy = 125 = 5^3$.

189.

Wir wollen noch diese Formel betrachten $xx + 3yy$, welche zu einem Cubo gemacht werden soll: weil nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird

$$x = p^3 - 9pqq \text{ und } y = 3ppq - 3q^3,$$

und alsdann $xx + 3yy = (pp + 3qq)^3$. Weil diese Formel öfters vorkommt wollen wir davon die leichtere Fälle hieher setzen.

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64 = 4^3$
2	1	10	9	$343 = 7^3$
1	2	35	18	$2197 = 13^3$
3	1	0	24	$1728 = 12^3$
1	3	80	72	$21952 = 28^3$
3	2	81	30	$9261 = 21^3$
2	3	154	45	$29791 = 31^3$

190.

Wäre die Bedingung nicht vorgeschrieben, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbahr seyn sollen, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: dann wann $axx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $attzz + cuuzz$ welche dem Cubo $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus so gleich gefunden wird $z = v^3(att + cuu)$; folglich sind die gesuchte Werthe für x und y, $x = tv^3(att + cuu)$ und $y = uv^3(att + cuu)$, welche außer dem Cubo v^3 noch $att + cuu$ zum gemeinen Theiler haben: diese Auflösung giebt so gleich

$$axx + cyy = v^6(att + cuu)^2(att + cuu) = v^6(att + cuu)^3,$$

welches offenbahr der Cubus ist von $v^2(att + cuu)$.

191.

Die hier gebrauchte Methode ist um so viel merckwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu einig und allein rationale und so gar gantze Zahlen erfordert wurden. Noch merckwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen wo die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr statt findet: dann wann z. E. $xx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nemlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubos seyn müßen; weil dieselben unter sich untheilbahr sind indem die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als wann z. E. $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr stattfinden, weil alsdann die beyden Factoren nemlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeine Theiler haben könnten, ohngeacht x und y dergleichen nicht haben, z. E. wann beyde ungerade Zahlen wären.

Wann demnach $xx-yy$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig daß so wohl $x+y$ als $x-y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl setzen $x+y=2p^3$ und $x-y=4q^3$, da dann $xx-yy$ ahnstreitig ein Cubus würde nemlich $8p^3q^3$, davon die Cubic-Wurzel ist $2pq$; alsdann aber wird $x=p^3+2q^3$, und $y=p^3-2q^3$. Wann aber die Formel $axx+cyy$ sich nicht in zwey rationale Factores zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden.

192.

Wir wollen .diese Abhandlung durch einige merckwürdige Fragen erläutern:

I. Frage: Man verlangt in gantzen Zahlen ein Quadrat xx daß wann darzu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121, ob aber mehr dergleichen gegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle da $xx+yy$ ein Cubus wird, welches wie aus dem obigen erhellet geschieht, wann $x=p^3-3pqq$ und $y=3ppq-q^3$; da nun hier $yy=4$, so ist $y=\pm 2$, folglich muß seyn $3ppq-q^3=+2$ oder $3ppq-q^3=-2$: im erstern Fall wird also $q(3pp-qq)=2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey demnach erstlich $q=1$, so wird $3pp-1=2$, folglich $p=1$ und also $x=2$ und $xx=4$.

Setzt man $q=2$, so wird $6pp-8=\pm 2$; gilt das Zeichen +, so wird $6pp=10$ und $pp=\frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen −, so wird $6pp=6$ und $p=1$, folglich $x=11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadraten gegeben werden, nemlich 4 und 121, welche wann dazu 4 addirt wird Cubi werden.

193.

II. Frage: Man verlangt solche Quadrate in gantzen Zahlen, welche wann dazu 2 addirt wird Cubi werden, wie bey dem Quadrat 25 geschieht: ob es nun noch mehr dergleichen giebt wird hier gefragt?

Da also $xx+2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle, wo die Formel $xx+2yy$ ein Cubus wird, welches aus dem obigen Articul 188, wo $a=1$ und $c=2$, geschieht, wann $x=p^3-6pqq$ und $y=3ppq-2q^3$; da nun hier $y=\pm 1$ so muß seyn $3ppq-2q^3=q(3pp-2qq)=\pm 1$, und also q ein Theiler von 1; es sey demnach $q=1$, so wird $3pp-2=\pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3pp=3$ und $p=1$, folglich $x=5$; das untere Zeichen aber giebt vor p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; woraus folgt daß nur das einzige Quadrat 25 in gantzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

194.

III. Frage: Man verlangt solche fünffache Quadrate, wann dazu 7 addirt wird daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5xx+7$ ein Cubus sey?

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $5xx+7$ ein Cubus wird, welches nach dem Articul 188, wo $a=5$ und $c=7$, geschieht, wann $x=5p^3-21pqq$ und $y=15ppq-7q^3$; weil nun hier seyn soll $y=\pm1$, so wird $15ppq-7q^3=q(15pp-7qq)=\pm1$, da dann q einTheiler seyn muß von 1, folglich $q=1$; daher wird $15pp-7=\pm1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q solche Brüche seyn könnten, da $y=1$ und x doch eine gantze Zahl würde; solches geschieht würcklich wann $p=\frac{1}{2}$ und $q=\frac{1}{2}$, dann da wird $y=1$ und $x=2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195.

IV. Frage: Man suche solche Quadrate in gantzen Zahlen, welche doppelt genommen wann davon 5 subtrahirt wird, daß ein Cubus heraus komme; oder $2xx-5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $2xx-5yy$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten Articul, wo $a=2$ und $c=-5$ geschieht, wann
$x=2p^3+15pqq$ und $y=6ppq+5q^3$. Hier aber muß seyn $y=\pm1$, und folglich

$$6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm1,$$

welches in gantzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmahl in Brüchen; dahero dieser Fall sehr merckwürdig ist, da gleichwohl eine Auflösung statt findet, wann nemlich $x=4$, dann da wird $2xx-5=27$, welches der Cubus ist von 3; und hievon ist es von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196.

Es ist also möglich, daß $2xx-5yy$ ein Cubus seyn könne deßen Wurzel so gar diese Form hat $2pp-5qq$, wann nemlich $x=4$, $y=1$ und $p=2$, $q=1$, und demnach haben wir einen Fall wo $2xx-5yy=\left(2pp-5qq\right)^3$, ungeacht die beyden Factoren von $2xx-5yy$ nemlich $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Fall $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, hingegen $\left(p\sqrt{2}+q\sqrt{5}\right)^3=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, welches keineswegs mit $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ überein kommt.

Es ist aber zu mercken, daß diese Formel $rr-10ss$ in unendlich viel Fällen 1 oder −1 werden kann; wann nemlich $r=3$ und $s=1$, ferner wann $r=19$ und $s=6$, welche mit dieser Formel $2pp-5qq$ multiplicirt wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey demnach $ff-10gg=1$, und anstatt daß wir oben gesetzt haben $2xx-5yy=\left(2pp-5qq\right)^3$, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art setzen $2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)^3$, und die Factores davon genommen geben $x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})\left(p\sqrt{2}\ \pm q\sqrt{5}\right)^3$. Es ist aber

$$\left(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5}\right)^3=\left(2p^3+15pqq\right)\sqrt{2}\pm\left(6ppq+5q^3\right)\sqrt{5},$$

wofür wir der Kürtze halber schreiben wollen $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$, welches mit $f+g\sqrt{10}$ multiplicirt giebt $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$, welches dem $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ gleich seyn muß, woraus entspringet

$$x=Af+5Bg \text{ und } y=Bf+2Ag;$$

da nun $y=\pm 1$ seyn muß, so ist nicht unumgänglich nöthig daß $6ppq+5q^3=1$ werde, sondern es ist genung wann nur die Formel $Bf+2Ag$, das ist

$$f\left(6ppq+5q^3\right)+2g\left(2p^3+15pqq\right)$$

dem ± 1 gleich werde, wo *f* und *g* vielerley Werthe haben können. Es sey z. E. $f=3$ und $g=1$, so muß diese Formel $18ppq+15q^3+4p^3+30pqq$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß seyn $4p^3+18ppq+30pqq+15q^3=\pm 1$.

197.

Diese Schwierigkeit alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen findet sich aber nur alsdann, wann in der Formel $axx+cyy$ die Zahl *c* negativ ist, weil alsdann diese Formel $axx+cyy$ oder diese $xx+acyy$, so mit ihr in einer genauen Verwandtschaft stehet, 1 werden kann, welches aber niemals geschehen kann wann *c* eine positive Zahl ist, weil $axx+cyy$ oder $xx+acyy$ immer größere Zahlen giebt, je größer *x* und *y* genommen werden. Dahero die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann, wann die beyden Zahlen *a* und *c* positiv genommen werden.

198.

Wir kommen also zur vierten Potestät und bemercken zuförderst, daß wann die Formel $axx+cyy$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl seyn müße; dann wann dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrat zu machen, oder wann es möglich wäre so könnte dieselbe auch in dieser Form $tt+acuu$ verwandelt werden, dahero wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $xx+cyy$ wann $a=1$ übereinstimmt, einschräncken. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von *x* und *y* beschaffen seyn müßen, daß diese Formel $axx+cyy$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus diesen zwey Factoren besteht $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, dahero gesetzt werden muß

$$x+y\sqrt{-c}=\left(p+q\sqrt{-c}\right)^4 \text{ und } x-y\sqrt{-c}=\left(p-q\sqrt{-c}\right)^4$$

woraus unsere Formel diesem Biquadrat $(pp+cqq)^4$ gleich wird, die Buchstaben

x und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folget:

$$x+y\sqrt{-c}=p^4+4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq-4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$$
$$x-y\sqrt{-c}=p^4-4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$$

folglich

$$x=p^4-6cppqq+\ ccq^4 \text{ und } y=4p^3q-4cpq^3.$$

199.

Wann also $xx+\ yy$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c=1$, so haben wir diese Werthe $x=p^4-6ppqq+q^4$ und $y=4p^3q-4pq^3$ und alsdann wird seyn $xx+yy=(pp+qq)^4$. Laßt uns z. E. setzen $p=2$ und $q=1$, so bekommen wir $x=7$ und $y=24$; hieraus wird $xx+yy=625=5^4$.
Nimmt man ferner $p=3$ und $q=2$, so bekommt man $x=119$ und $y=120$, daraus wird $xx+yy=13^4$.

200.

Bey allen geraden Potestäten wozu die Formel $axx+cyy$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende genug ist daß man nur einen einzigen Fall wiße, wo dieses geschieht; und alsdann kann diese Formel wie wir oben gesehen haben, in dieser Gestalt verwandelt werden $tt+acuu$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in dieser Form $xx+cyy$ enthalten angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, so wohl zur sechsten Potestät als einer jeglichen andern noch höhern geraden Potestät gemacht werden kann.

201.

Bey den ungeraden Potestäten aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so kann die Formel $axx+cyy$ allezeit zu einer jeglichen ungeraden Potestät gemacht werden. Dann verlangt man z. E. die fünfte Potestät, so darf man nur setzen $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=\left(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}\right)^5$, und $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=\left(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c}\right)^5$, da dann offenbahr wird $axx+cyy=(app+cqq)^5$.
Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}$ ist
$aap^5\sqrt{a}+5aap^4q\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acppq^3\sqrt{-c}+5ccpq^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$,
woraus sogleich geschlossen wird

$$x=aap^5-10acp^3qq+5ccpq^4 \text{ und } y=5aap^4q-10acppq^3+ccq^5.$$

Verlangt man allso eine Summ von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich

$$x = p^5 - 10p^3 qq + 5pq^4 \text{ und } y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5$$

Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $y = 41$, und

$$xx + yy = 3125 = 5^5.$$

CAPITEL 13

VON EINIGEN FORMELN DIESER ART $ax^4 + by^4$ WELCHE SICH NICHT ZU EINEM QUADRAT MACHEN LASSEN

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summ oder Differenz eine Quadrat-Zahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man so gar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nemlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber wo entweder $y = 0$ oder $y = x$, und in welchen Fällen die Sache offenbahr vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so viel mehr merckwürdig, weil wann nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viel Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemercken, daß die beyden Zahlen *x* und *y* als untheilbahr unter sich angesehen werden können; dann sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. *d* haben, also daß man setzen könnte $x = dp$ und $y = dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4 + d^4q^4$ und $d^4p^4 - d^4q^4$ welche wann sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müßten, also daß auch diese Formeln $p^4 + q^4$ und $p^4 - q^4$ Quadrate wären, wo nun die Zahlen *p* und *q* keinen weitern gemeinen Theiler haben; es ist demnach genung zu beweisen, daß diese Formeln in dem Fall da *x* und *y* unter sich untheilbahr sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt sich der Beweis von selbsten auf alle Fälle, da auch *x* und *y* gemeinschaftliche Theiler haben.

204.

Wir wollen demnach von der Summ zweyer Biquadraten nemlich dieser Formel $x^4 + y^4$ den Anfang machen, und wo wir *x* und *y* als unter sich untheilbahre Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen daß $x^4 + y^4$ außer den obgemeldten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis folgendergestalt geführet.

Wann jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch $x^4 + y^4$ ein Quadrat würde, dieselben möchten auch so groß seyn als sie wollten, weil in kleinen gewis keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß wann auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinem u. s. f. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey gemeldten welche aber zu keinen andern führen, so kann man sicher schließen, daß auch in größem, ja so gar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadraten $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir so gleich zeigen wollen.

205.

Um erstlich zu zeigen daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat seyn könne außer den beyden Fällen die für sich klar sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemercken.

I. Nehmen wir an daß die Zahlen x und y untheilbahr unter sich sind oder keinen gemeinen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerad, oder die eine ist gerad und die andere ungerad.

II. Beyde aber können nicht ungerad seyn, weil die Summ von zwey ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat seyn kann: dann ein ungerades Quadrat ist allezeit in der Form $4n+1$ enthalten, und also würde die Summ zweyer ungeraden Quadraten diese Form $4n+2$ haben, welche sich durch 2 nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses aber gilt auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wann demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerad, das andere aber ungerad seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß wann die Summ zweyer Quadraten ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $pp - qq$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde; woraus folget daß seyn müßte $xx = pp - qq$ und $yy = 2pq$ und da würde $x^4 + y^4 = (pp + qq)^2$.

IV. Hier also würde y gerad, x aber ungerad seyn: da nun $xx = pp - qq$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn; die erstere p aber kann nicht gerad seyn, weil sonsten $pp - qq$ als eine Zahl von dieser Form $4n-1$ oder $4n+3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerad q aber gerad seyn, wo sich von selbsten versteht daß dieselben untheilbahr unter sich seyn müßen.

V. Da nun $pp - qq$ ein Quadrat, nemlich dem xx gleich seyn soll, so geschieht dieses wie wir oben gesehen, wann $p = rr + ss$ und $q = 2rs$: dann da wird $xx = \left(rr - ss\right)^2$, und also $x = rr - ss$.

VI. Allein yy muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun haben $yy = 2pq$, so wird jetzt $yy = 4rs\left(rr + ss\right)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch

$rs(rr+ss)$ ein Quadrat seyn, wo *r* und *s* unter sich untheilbahre Zahlen sind, allso daß auch die hier befindlichen drey Factores, *r, s* und $rr+ss$, keinen gemeinen Theiler unter sich haben können.

VII. Wann aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbahr sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r = tt$ und $s = uu$: so muß auch $t^4 + u^4$ ein Quadrat seyn. Wann demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so würde auch hier $t^4 + u^4$ das ist ebenfals eine Summ von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn. Wobey zu mercken daß weil hier $xx = \left(t^4 + u^4\right)^2$ und $yy = 4ttuu\left(t^4 + u^4\right)$, die Zahlen *t* und *u* offenbahr weit kleiner seyn würden als *x* und *y*, indem *x* und *y* so gar durch die vierte Potestäten von *t* und *u* bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müßen.

VIII. Wann dahero zwey Biquadrate als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten, deren Summ ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summ von zwey weit kleineren Biquadraten herleiten, welche ebenfals ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachmahlen noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme: da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summ möglich ist, so folgt daraus offenbahr daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte hier zwar einwenden daß es in den kleinen Zahlen würcklich solche gebe wie schon anfanglich bemerckt worden, nemlich da das eine Biquadrat Nulle wird; allein auf diesen Fall kommt man gewis nicht wann man Solchergestalt von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Dann wäre bey der kleineren Summ $t^4 + u^4$ entweder $t = 0$ oder $u = 0$, so würde auch bey der größern Summ nothwendig $yy = 0$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kommt.

206.

Nun kommen wir zu dem andern Hauptsatz, daß auch die Differenz zwischen zwey Biquadraten als $x^4 - y^4$ niemals ein Quadrat werden könne, außer den Fällen $y = 0$ und $y = x$; zu dessen Beweis folgende Puncte zu mercken.

I. Sind die Zahlen *x* und *y* als untheilbahr unter sich anzusehen, und also entweder beyde ungerad oder die eine gerad und die andere ungerad. Da nun in beyden Fällen die Differenz von zweyen Quadraten wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders erwogen werden.

II. Es seyen also erstlich die beyden Zahlen *x* und *y* ungerad, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen *p* und *q* ungerad die andere aber gerad seyn. Nun wird $xx - yy = 4pq$ und $xx + yy = 2pp + 2qq$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, deren Factoren unter sich untheilbahr sind: folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, q und $pp+qq$ für sich ein Quadrat seyn, weil nemlich die eine Zahl p gerad, die andere q aber ungerad ist. Man setze dahero um die beyden ersten zu Quadraten zu machen $2p=4rr$ oder $p=2rr$, und $q=ss$, wo s ungerad seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4+s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun s^4+4r^4 eine Summ von zwey Quadraten ist, davon s^4 ungerad, $4r^4$ aber gerad ist, so setze man die Wurzel des erstern $ss=tt-uu$,wo t ungerad und u gerad ist; des letztern aber $2rr=2tu$ oder $rr=tu$, wo t und u unter sich untheilbahr sind.

IV. Weil nun $tu=rr$ ein Quadrat seyn muß, so muß so wohl t als u ein Quadrat seyn; man setze demnach $t=mm$ und $u=nn$, wo m ungerad und n gerad ist, so wird $ss=m^4-n^4$ also daß wieder eine Differenz von zwey Biquadraten nemlich m^4-n^4 ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden als x und y, weil r und s offenbahr kleiner sind als x und y, und hinwiederum m und n kleiner als r und 8; wann also die Sache in den größten Zahlen möglich und x^4-y^4 ein Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleinem Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber wo dieses möglich ist, sind wann das eine Biquadrat gleich 0 oder dem andern gleich ist: wäre das erstere so müßte seyn $n=0$, folglich $u=0$, ferner $r=0$ und $p=0$ und $x^4-y^4=0$, oder $x^4=y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n=m$, so würde $t=u$, weiter $s=0$, $q=0$ und endlich auch $x=y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

207.

Man könnte hier einwenden, daß da m ungerad und n gerad ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß machen könnte. Es ist aber genug daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen, und wir werden anjetzo zeigen daß auch x^4-y^4 kein Quadrat seyn könne, wann das eine Biquadrat gerad und das andere ungerad ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerad und y^4 ungerad, so wäre die Sach an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n+3$ herauskäme die kein Quadrat seyn kann. Es sey demnach x ungerad und y gerad, so muß seyn $xx=pp+qq$ und $y=2pq$, dann so wird

$$x^4-y^4=p^4-2ppqq+q^4=(pp-qq)^2,$$

wo von p und q das eine gerad das andere aber ungerad seyn muß.

II. Da nun $pp+qq=xx$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p=rr-ss$ und $q=2rs$; folglich $x=rr+ss$. Hieraus aber wird $yy=2(rr-ss)\cdot 2rs$ oder $yy=4rs(rr-ss)$, welches ein Quadrat sein muß, und also auch der vierte Theil davon nemlich $rs(rr-ss)$, wovon die Factoren unter sich untheilbahr sind.

III. Man setze demnach $r=tt$ und $s=uu$, so wird der dritte Factor $rr-ss=t^4-u^4$ welcher ebenfals ein Quadrat seyn muß; da nun derselbe auch eine Differenz von zwey Biquadraten ist welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärcke, also daß wann auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadraten ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbahre Fälle zu kommen: dahero gewis auch in den größten Zahlen solches nicht möglich ist.

208.

Der erste Theil dieses Beweises da die Zahlen x und y beyde ungerad genommen werden, kann folgender Gestalt abgekürtzet werden. Wann $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte seyn $xx = pp + qq$ und $yy = pp - qq$, wo von den Buchstaben p und q der eine gerad der andere aber ungerad wäre: alsdann aber würde $xxyy = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz von zwey solchen Biquadraten ist, davon das eine gerad das andere aber ungerad ist: daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theil des Beweises gezeigt worden.

209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summ noch die Differenz zweyer Biquadraten jemals eine Quadrat-Zahl werden könne, außer einigen wenigen offenbahren Fällen.

Wann demnach auch andere Formeln welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summ oder eine Differenz von zweyen Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind dieselben Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun statt in den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich daß diese Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde: dann weil diese Formel eine Summ von zwey Quadraten ist, so müßte seyn $xx = pp - qq$ und $2yy = 2pq$ oder $yy = pq$; da nun p und q untheilbahr unter sich sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man dahero $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 - s^4$: also müßte eine Differenz von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich daß diese Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde: dann da müßte seyn $xx = pp + qq$ und $2yy = 2pq$, weil alsdann heraus käme $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$; da nun $yy = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summ von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß diese Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müßen, welches nach den vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß diese Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; dann da dasselbe gerad seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4zz$ wäre, so würde seyn $x^4 + y^4 = 2zz$, und dahero

$$2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$$

und also ein Quadrat. Eben so würde seyn

$$2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$$

und also auch ein Quadrat. Da nun so wohl

$$2zz + 2xxyy \text{ als } 2zz - 2xxyy$$

ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4 - 4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4 - x^4 = y^4$ und also eine Differenz von zwey Biquadraten, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch diese Formel $2x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn; dann da beyde Zahlen x und y nicht gerad sind, weil sie sonsten einen gemeinen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerad und die andere ungerad, weil sonsten der eine Theil durch 4 der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbahr seyn würde, so müßen beyde ungerad seyn. Setzt man nun $x = p + q$ und $y = p - q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerad die andere aber ungerad, und da
$2x^4 - 2y^4 = 2(xx + yy)(xx - yy)$, so bekommt man $xx + yy = 2pp + 2qq = 2(pp + qq)$ und $xx - yy = 4pq$; allso unsere Formel $16pq(pp + qq)$, deren sechzehnte Theil, nemlich $pq(pp + qq)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factores unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p = rr$ und $q = ss$, so wird der dritte $r^4 + s^4$, welcher auch ein Quadrat seyn müßte: dieses aber ist nicht möglich.

210.

Auf eine gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß diese Formel $x^4 + 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerad seyn, weil alsdann y ungerad seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2 nicht aber durch 4 würde theilen laßen: dahero muß x ungerad seyn.

II. Man setze demnach die Quadrat-Wurzel unserer Formel $= xx + \frac{2pyy}{q}$,
damit dieselbe ungerad werde; so wird

$$x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4pxxyy}{q} + \frac{4ppy^4}{qq},$$

wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch yy dividirt und mit qq multiplicirt, geben

$$4pqxx + 4ppyy = 2qqyy, \text{oder } 4pqxx = 2qqyy - 4ppyy,$$

daraus wird $\frac{xx}{yy} = \frac{qq-2pp}{2pq}$; woraus folget

$$xx = qq - 2pp \text{ und } yy = 2pq,$$

welche eben die Formeln sind die wir schon oben gegeben haben.

III. Es müßte also $qq - 2pp$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wann $q = rr + 2ss$ und $p = 2rs$; dann da würde $xx = (rr - 2ss)^2$; hernach aber würde $4rs(rr + 2ss) = yy$, und allso müßte auch der vierte Theil $rs(rr + 2ss)$ ein Quadrat seyn, und folglich *r* und *s* jedes besonders. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre demnach $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen *t* und *u* weit kleiner wären als *x* und *y*; und Solchergestalt würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie leicht zu probiren ist, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

211.

Was hingegen diese Formel betrift $x^4 - 2y^4$, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte, und wann man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können so gar unendlich viel Fälle gefunden werden, da dieselbe würcklich ein Quadrat wird.

Dann wann $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß seyn werde $xx = pp + 2qq$ und $yy = 2pq$, weil man alsdann bekommt $x^4 - 2y^4 = \left(pp - 2qq\right)^2$. Da nun auch $pp + 2qq$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses wann $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; dann da wird $xx = (rr + 2ss)^2$. Allein hier ist wohl zu mercken, daß dieses auch geschehen würde, wann man annehme $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, dahero zwey Fälle hier in Erwegung zu ziehen sind.

I. Es sey erstlich $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$, so wird $x = rr + 2ss$; und weil $yy = 2pq$, so wird nun seyn $yy = 4rs(rr - 2ss)$; und müßten also *r* und *s* Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = tt$ und $s = uu$, so wird $yy = 4ttuu\left(t^4 - 2u^4\right)$; also

$$y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)} \text{ und } x = t^4 + 2u^4;$$

wann daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; ob aber gleich *t* und *u* kleinere Zahlen sind als *x* und *y*, so kann man doch wie vorher nicht schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, deswegen weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinem Zahlen gelanget; dann $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat seyn ohne auf diese Formel $t^4 - 2u^4$ zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nemlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, so wird zwar wie vorher $x = rr + 2ss$, allein für *y* bekommt man $yy = 2pq = 4rs(2ss - rr)$. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so bekommt man woraus erhellet, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wann diese $2u^4 - t^4$ ein Quadrat wird. Dieses aber geschieht offenbar, wann $t = 1$ und $u = 1$; und dahero bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2 \cdot 16 = 49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat werde, wann $u = 13$ und $t = 1$, weil alsdann $\sqrt{\left(2u^4 - t^4\right)} = 239$. Setzt man nun diese Werthe für *t* und *u,* so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nemlich

$$x = 1 + 2 \cdot 13^4 = 57123 \text{ und } y = 2 \cdot 13 \cdot 239 = 6214.$$

IV. So bald man aber Werthe für *x* und *y* gefunden, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für *t* und *u* schreiben, da man dann wieder neue für *x* und *y* erhalten wird.

Weil wir nun gefunden $x = 3$ und $y = 2$, so laßt uns in den No. I. gegebenen Formeln setzen $t = 3$ und $u = 2$, da dann $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$, so bekommen wir folgende neue Werthe $x = 81 + 2 \cdot 16 = 113$ und $y = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 84$.

Hieraus erhalten wir xx = 12769, und $x^4 = 163047361$; ferner $yy = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird $x^4 - 2y^4 = 63473089$ wovon die Quadrat-Wurzel ist 7967, welche auch völlig übereintrifft mit der anfänglich angesetzten $pp - 2qq$. Dann da $t = 3$ und $u = 2$, so wird $r = 9$ und $s = 4$, dahero $p = 81 - 32 = 49$ und $g = 72$, woraus $pp - 2qq = 2401 - 10368 = -7967$.