CHAPTER 14

THE SOLUTION OF SEVERAL QUESTIONS PERTAINING TO THIS PART OF ANALYSIS

212.

So far we have explained the artifices, which arise in this part of analysis and which are necessary, so that all those tasks pertaining to this thus can be resolved, therefore in order that we can show these more clearly, a few similar questions are to be presented here and the solutions of the same to be included.

213.

I. Question: Can such a number x be found, so that if 1 were to be added to that as well as to be subtracted from that, in both cases a square would result?

Calling the sought number x, thus so that $x+1$ as well as $x-1$ must be a square. For the first we put $x+1=pp$, thus $x=pp-1$ and $x-1=pp-2$, which must also be a square. Putting the root of that to be $p-q$, thus there will be $pp-2=pp-2pq+qq$, where the terms pp themselves vanish and from that there will be found $p=\frac{qq+2}{2q}$; further from which there is obtained $x=\frac{q^4+4}{4qq}$, where q can be assumed as wished, and can also be assumed as a fraction.

Therefore putting $q=\frac{r}{s}$, thus we obtain $x=\frac{r^4+4s^2}{4rrss}$
from which we will show even smaller values:

if	$r=1$	2	1	3
and	$s=1$	1	2	1
thus	$x=\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

214.

II. Question: Can such a number x be found, so that two arbitrary numbers may be added to that, such as, for example 4 and 7, then in both cases a square will arise?

Thus these two formulas $x+4$ and $x+7$ must be squares; therefore putting $x+4=pp$ for the first, thus $x=pp-4$, but the other formula becomes $x+7=pp+3$, which also must be a square. Hence putting the square root of that $=p+q$, thus $pp+3=pp+2pq+qq$, from which there is found $p=\frac{3-qq}{2q}$ consequently $x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Now setting a fraction such as $\frac{r}{s}$ for *q*, thus we find $x=\frac{9s^4-22qq+q^4}{4rrss}$, where all arbitrary whole numbers can be assumed for *r* and *s*. Taking $r=1$ and $s=1$, thus we have $x=-3$, and from that $x+4=1$ and $x+7=4$. But if a positive number is wanted for *x*, thus putting $s=2$ and $r=1$, there we find $x=\frac{57}{16}$; from which $x+4=\frac{121}{16}$ and $x+7=\frac{169}{16}$; further if we put $s=3$ and $r=1$, thus we obtain $x=\frac{133}{9}$, from which $x+4=\frac{169}{9}$, and $x+7=\frac{196}{9}$. Should the final term predominate over the middle term $x+4$, thus we can put $r=5$ and $s=1$, that [first term] will become $x=\frac{21}{25}$, and from that $x+4=\frac{121}{25}$ and $x+7=\frac{196}{25}$.

215.

III. Question: Can such a fraction *x* be found, so that if the same may be added to or taken from 1, in both cases a square arises?
Since both these formulas $1+x$ and $1-x$ must be squares, thus one puts for the first $1+x=pp$, and that becomes $x=pp-1$ and the second formula becomes $1-x=2-pp$, which must be a square. Now since neither the first nor the last term is a square, thus it must be seen, if a case can be guessed that such happens ; but such a case is obvious at once, namely $p=1$, therefore we put $p=1-q$, thus so that $x=qq-2q$, therefore our formula becomes $2-pp=1+2q-qq$, the root of which is put $=1-qr$, thus we obtain $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$; from this $2-q=-2r+qrr$ and $q=\frac{2r+2}{rr+1}$; from this there becomes $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$ and because *r* is a fraction, thus on putting $r=\frac{t}{u}$, there becomes $x=\frac{4tu^2-4t^3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$, thus *u* must be greater than *t*.

Therefore on putting $u=2$ and $t=1$, thus $x=\frac{24}{25}$; putting $u=3$ and $t=2$, thus $x=\frac{120}{169}$, and from that $1+x=\frac{289}{169}$ and $1-x=\frac{49}{169}$, which are both squares.

216.

IV. Question: Can such numbers *x* be found, that to which 10 can be either added or subtracted to yield a square?

Thus these formulas $10+x$ and $10-x$ must be squares, which can be done in the following manner. But in order to show another way, thus it can be considered, also that the product of these formulas must be a square, namely $100-xx$. Now since here the first term already is a square, thus the root is put $=10-px$, thus there becomes $100-xx=100-20px+ppxx$ and thus $x=\frac{20p}{pp+1}$; but it follows from this, that only the product becomes a square, and not each one in particular. But if only the one becomes a square, thus the other necessarily must be one also ; but now the first becomes

$$10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1};$$

and because $pp+2p+1$ is a square already, thus still this fraction $\frac{10}{pp+1}$ must be a square, and consequently also this expression $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$.
Thus it is necessary only, that the number $10pp+10$ must be a square, where again a case must be guessed that happens. This is the case when $p=3$ and therefore we put $p=3+q$, and thus we obtain $100+60q+10qq$; the root of which is put to be $10+qt$, thus there becomes $100+60q+10qq=100+20qt+qqtt$, from which $q=\frac{60-20t}{tt-10}$, where $p=3+q$ and $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Putting $t=3$, thus there becomes $q=0$ and $p=3$ consequently $x=6$, therefore $10+x=16$ and $10-x=4$. But let $t=1$, thus $q=40$ and $p=-\frac{13}{9}$ and $x=-\frac{234}{25}$; but this can be put equally to be $x=+\frac{234}{25}$, and then $10+x=\frac{484}{25}$ and $10-x=\frac{16}{25}$, which are both squares.

217.

To be noted: Should this question be made general, and for any given number a the numbers x were sought, so that both $a+x$ as well as $a-x$ should become a square, thus solutions would be impossible often, namely in all the cases, in which the number a is not formed from the sum of two squares. But we have seen above already [§ 168], that from 1 to 50 only the following numbers shall be from the sum of two squares, or shall be contained in this form $xx+yy$:
1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, thus the remaining numbers, which similarly as far as 50, shall be : 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, cannot be split up into the sum of two squares ; thus as often as a were from this latter division of the numbers, thus just as often would the question be impossible to answer.

In order to show this, thus let us put $a+x=pp$ and $a-x=qq$, and there addition gives $2a=pp+qq$; thus so that $2a$ must be a sum of two squares, but if $2a$ is such a sum, thus also a must be such [as follows at once by expanding the square], thus if a cannot be the sum of two squares, thus also it is not possible, that $a+x$ and $a-x$ be equal to squares.

218.

Therefore if $a=3$, thus the question would be impossible, and that therefore, because 3 is not the sum of two squares ; one might indeed object, that perhaps two fractional squares would make a sum of 3; also this is not possible, since there becomes $3=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}$ and multiplying by $qqss$, thus there would be $3qqss=ppss+qqrr$, where $ppss+qqrr$ is a sum of two squares, which itself can be divided by 3; but we have shown above, that a sum of two squares can have no divisors, other than which themselves make such a sum [see §170].

Indeed the two numbers 9 and 45 shall themselves be divisible by 3, also the same are both divisible by 9 and thus truly each one of the pair are squares, whereby they can be represented, because namely $9=3^2+0^2$, and $45=6^2+3^2$, which cannot be used here : therefore this conclusion is quite correct, that if a number a is not expressed in whole numbers from the sum of two squares, such also cannot be done in terms of fractions; but if the number a in whole numbers is the sum of two squares, thus the same can be expressed in fractions to be the sum of two squares in an infinite number of ways, which we wish to show.

219.

V. Question: Can a number, which is the sum of two squares, be expressed as the sum of two other numbers in an infinite number of ways?

The number $ff+gg$ therefore shall be given and two other numbers are to be found, such as xx and yy, whose sum $xx+yy$ shall be equal to the number $ff+gg$, so that $xx+yy=ff+gg$. Now it is thus clear, that if x is greater or smaller than f, y conversely must be smaller or greater than g. Therefore we put $x=f+pz$ and $y=g-qz$, thus there becomes

$$ff+2fpz+ppzz+gg-2gqz+qqzz=ff+gg,$$

where the terms ff and gg themselves disappear, but the remaining terms can be divided by z. Therefore $2fp+ppz-2gq+qqz=0$ or $ppz+qqz=2gq-2fp$, and thus $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, from which the following values will be found for x and y

$$x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq} \text{ and } y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq},$$

where for p and q all possible numbers can be assumed at will.

The number 2 shall be given, thus so that $f=1$ and $g=1$ and there becomes

$xx+yy=2$, if $x=\frac{2pq+qq-pp}{pp+qq}$ and $y=\frac{2pq+pp-qq}{pp+qq}$

putting $p=2$ and $q=1$, thus there will be $x=\frac{1}{5}$ and $y=\frac{7}{5}$.

220.

VI. Question: If the number a is a sum of two squares, can such numbers x be found, so that both $a+x$ as well as $a-x$ will be a square?

Let the number $a=13=9+4$, and putting

$$13+x=pp \text{ and } 13-x=qq,$$

thus in the first place the addition gives $26=pp+qq$, and the subtraction gives $2x=pp-qq$: thus the numbers p and q must be obtained, so that $pp+qq$ will be equal to 26, which also is a sum of two squares, namely $25+1$, consequently this number 26 must be made into squares, the larger of which is assumed for pp, and the smaller for qq. From this initially one obtains $p=5$ and $q=1$ and from that there becomes $x=12$; but after this from that above the number 26 will be resolved into two squares in an endless number of ways. Then if $f=5$ and $g=1$, if in the above formulas instead of the letters p and q we write t and u, but p and q for the letters x and y, thus we find

$$p=\frac{2tu+5(uu-tt)}{tt+uu} \text{ and } q=\frac{10tu-tt+uu}{tt+uu}.$$

Now one assumes t and u for the numbers at will, from which one determines the letters p and q, thus obtaining the number sought $x=\frac{pp-qq}{2}$

For example, let $t=2$ and $u=1$, thus $p=-\frac{11}{5}$ and $q=\frac{23}{5}$; and hence $pp-qq=-\frac{408}{25}$ and $x=\frac{204}{25}$.

221.

Moreover, in order to resolve this question generally, thus the given number shall be $a=cc+dd$, but that sought $=z$, thus so that these formulas $a+z$ and $a-z$ must become squares.

Now putting

$$a+z=xx \text{ and } a-z=yy,$$

thus initially there becomes $2a=2(cc+dd)=xx+yy$, and secondly $2z=xx-yy$. Thus the squares xx and yy must be provided, so that $xx+yy=2(cc+dd)$, where $2(cc+dd)$ also is a sum of the two squares, namely $(c+d)^2+(c-d)^2$. For brevity, we put $c+d=f$ and $c-d=g$: so that there must be $xx+yy=ff+gg$, but from above this happens, if we take

$$x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq} \text{ and } y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}.$$

From this we obtain the easiest solution, if we take $p=1$ and $q=1$, then from that there becomes $x=\frac{2g}{2}=g=c-d$ and $y=f=c+d$, and from this consequently $z=2cd$. From this it is now apparent

$$cc+dd+2cd=(c+d)^2 \text{ and } cc+dd-2cd=\left(c-d\right)^2$$

In order to find another solution, thus let $p=2$ and $q=1$, that becomes $x=\frac{c-7d}{5}$, and $y=\frac{7c+d}{5}$ where *c* and *d*, as well as *x* and *y* can be negative or positive, because only their squares are present. Now since *x* must be greater than *y*, thus on taking *d* negative there will be $x=\frac{c+7d}{5}$, and $y=\frac{7c-d}{5}$. From this $z=\frac{24dd+14cd-24cc}{25}$, which value must be added to $a=cc+dd$, gives $\frac{cc+14cd+49dd}{25}$, of which the square root is $\frac{c+7dd}{5}$. On taking *z* from *a* there remains $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$, of which the square root is $\frac{7c-dd}{5}$; the former namely is *x*, and the latter *y*.

222.

VII. Question: Can such a number *x* be found, that if thus both to itself as well as to its square *xx*, one may be added, in both cases a square arises from this?

Thus both these formulas $x+1$ and $xx+1$ will become squares. For the first, putting $x+1=pp$, thus there will be $x=pp-1$, and the second formula $xx+1=p^4-2pp+2$, which formula must be a square also: but the same is of that kind, so that no solution is to be found, as long as no case is known already; but such a case is apparent at once, namely when $p=1$. Therefore we put $p=1+q$, thus there becomes

$$xx+1=1+4qq+4q^3+q^4,$$

which can be made into a square in a number of ways.

I. In the first place putting the root of that to be $1+qq$, thus there is

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4$$

from which $4q+4qq=2q$ or $4+4q=2$ and $q=-\frac{1}{2}$, consequently $p=\frac{1}{2}$ and $x=-\frac{3}{4}$.

II. Now putting the root to be $1-qq$, thus there will be

$$1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4,$$

and therefore $q=-\frac{3}{2}$ and $p=-\frac{1}{2}$, from which $x=-\frac{3}{4}$ as before.

III. Again, putting the root to be $1+2q+qq$, so that the first and last terms themselves both disappear, thus there becomes

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4,$$

from which $q=-2$ and $p=-1$, therefore $x=0$.

IV. But the root can be put to be $1-2q-qq$, thus

$$1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+6qq+4q^3+q^4$$

from which there will be $q=-2$ as before.

V. In order that the two first terms cancel each other, thus the root shall become $1+2qq$, that is : $1+4qq+4q^3+q^4=1+4qq+4q^4$,

and from that $q=\frac{4}{3}$ and $p=\frac{7}{3}$; consequently $x=\frac{40}{9}$; from which it follows

$$x+1=\tfrac{49}{9}=(\tfrac{7}{3})^2 \text{ and } xx+1=\tfrac{1681}{81}=\left(\tfrac{41}{9}\right)^2.$$

Should one wish to find still more values for q, then one of the values found here must be taken, e.g. $-\frac{1}{2}$, and put further $q=-\frac{1}{2}+r$;

but from which there would become

$$p=\tfrac{1}{2}+r;\ pp=\tfrac{1}{4}+r+rr \text{ and } p^4=\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{2}r+\tfrac{3}{2}rr+2r^3+r^4,$$

consequently our formula $\frac{25}{16}-\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}rr+2r^3+r^4$ which, must be a square, and therefore also can be multiplied by 16, namely

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4$$

Now of which we put :

I. The root $=5+fr\pm 4rr$, so that

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr\pm 40rr+ffrr\pm 8fr^3+16r^4.$$

Now since the first and last terms cancel out, thus we determine f, so that the second term also vanishes, which happens if

$-24=10f$ and thus $f=-\frac{12}{5}$, as then the extra terms divided by rr give :

$$-8+32r=\pm 40+ff\pm 8fr.$$

For the positive sign we have $-8+32r=40+ff+8fr$, and from that

$r=\frac{48+ff}{32-8f}$. Now since $f=-\frac{12}{5}$, thus $r=\frac{21}{20}$, consequently

$p=\frac{31}{20}$ and $x=\frac{561}{400}$, from which $x+1=\left(\frac{31}{20}\right)^2$ and $xx+1=\left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II. But if the negative sign applies, thus $-8+32r=-40+ff-8fr$,

and from that $r=\frac{ff-32}{32+8f}$. Since now $f=-\frac{12}{5}$, thus $r=-\frac{41}{20}$, consequently

$p=-\frac{31}{20}$, from which the last equation arises.

III. Let the root be $4rr+4r\pm 5$, so that

$$16r^4+32r^3-8rr-24r+25=16r^4+32r^3\pm 40rr+16rr\pm 40r+25,$$

where both the first terms and the last terms quite vanish, while the remaining terms divided by r give $-8r-24=\pm 40r\ 16r\pm 40$, or

$$-24r-24=\pm 40r\pm 40.$$

If the upper [positive] sign applies, thus there becomes

$-24r-24=40r+40$, or

$0=64r+64$, or $0=r+1$, that is $r=-1$ and $p=-\frac{1}{2}$, which case we have had already; and now the same follows also from the lower [negative] sign.

IV. Putting the root to be $5+fr+grr$ and thus *f* and *g* to be determined, so that the three first terms vanish. Since now :

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr+10grr+ffrr+2fgr^3+ggr^4,$$

initially there must be $-24=10f$ and thus $f=-12$ and further $-8=10g+ff$, and thus $g=\frac{-8-ff}{10}$, or $g=-\frac{344}{250}=-\frac{172}{125}$; both the last terms can be divided by r^3 giving $32+16r=2fg+ggr$ and from that $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. Here the numerator $2fg-32 = \frac{24\cdot172-32\cdot625}{5\cdot125}=\frac{-32\cdot496}{625}$, or this numerator $=\frac{-16\cdot32\cdot31}{625}$, while the denominator gives $16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{328\cdot672}{125\cdot125}$, or $16-gg=\frac{8\cdot32\cdot41\cdot21}{25\cdot625}$, from which $r=-\frac{1550}{861}$, and from this $p=-\frac{2239}{1722}$, and from this a new value of *x* is found, namely $x=pp-1$.

223.

VIII. Question: For three given numbers *a*, *b* and *c*, can such a number *x* be found, which added to each of the same, may each become a square?

Thus there are these three formulas to be made into squares, namely $x+a$, $x+b$ and $x+c$.

Putting $x+a=zz$ for the first, so that $x=zz-a$, thus there will be two other formulas $zz+b-a$ and $zz+c-a$, each one of which must be a square. But no general solution of this can be given, because such very often is impossible, and the possibility is based solely on the nature of the of the two numbers $b-a$ and $c-a$. Then , for example, if $b-a=1$ and $c-a=-1$, that is $b=a+1$ and $c=a-1$, then $zz+1$ and $zz-1$ will be squares, and *z* without doubt shall be a fraction. Therefore we put $z=\frac{p}{q}$, thus there would be these two formulas which must be the squares $pp+qq$ and $pp-qq$, consequently their product, namely p^4-q^4, must be a square, but that is not possible as has been shown above [§ 202].

Further, were $b-a=2$, and $c-a=2$, that is $b=a+2$ and $c=a-2$, thus , if again we put $z=\frac{p}{q}$, these two formulas $pp+2qq$ and $pp-2qq$ must become squares, consequently also their product p^4-4q^4, which likewise is not possible.

Generally putting $b-a=m$ and $c-a=n$, further also $z=\frac{p}{q}$, thus these formulas $pp+mqq$ and $pp+nqq$ must be squares *;* which as we have seen is impossible, either if $m=+1$ and $n=-1$, or if $m=+2$ and $n=-2$.

Further, it is not possible $m=ff$ and $n=ff$ .Since then as there would be the same product $p^4-f^4q^4$ to be a difference of two squares, which can never be a square.

Even thus, if $m=2ff$ and $n=-2ff$, neither also can both these formulas $pp+2ffqq$ and $pp-2ffqq$ be squares, because their product $p^4-4f^4q^4$ also must be a square ; consequently if we put $fq=r$, these formulas become p^4-4r^4 , the impossibility also can be seen above.

Further were $m=1$ and $n=2$, so that these formulas $pp+qq$ and $pp+2qq$ must be squares, thus putting $pp+qq=rr$ and $pp+2qq=ss$; there would be from the first $pp=rr-qq$, and thus from the other $rr+qq=ss$; there must be as well $rr-qq$ as $rr+qq$ shall be a square ; and also their product r^4-q^4 must be a square, which is impossible.

From this it is sufficient to see, that it is not easy to choose such numbers for *m* and *n*, that the solution is possible. The few means to find such values for *m* and *n* is, that suchlike cases must be guessed, or such a form made to be found.

Putting $ff+mgg=hh$ and $ff+ngg=kk$, thus we obtain from the first $m=\frac{hh-ff}{gg}$, and from the second $n=\frac{kk-ff}{gg}$. Now assuming numbers at will for *f*, *g*, *h* and *k* , thus assuming for *m* and *n* such values, that the solution is possible.

For example, let $h=3, k=5, f=1$ and $g=2$; thus there becomes $m=2$ and $n=6$.

Now we are assured, that it is possible to make the two formulas $pp+2qq$ and $pp+6qq$ into squares, because such occur if $p=1$ and $q=2$. Moreover the first will be a square of a general kind if $p=rr-2ss$ and $q=2rs$ *;* then there becomes $pp+2qq=(rr+2ss)^2$. But the other formula will then become $pp+6qq=r^4+20rrss+4s^4$, a known case of which is, that the same is a square, namely if $p=1$ and $q=2$, and which happens if $r=1$ and $s=1$, or generally if $r=s$ *;* since then our formula becomes $25s^4$. Now since we know this case, thus we put $r=s+t$, thus there becomes

$rr=ss+2st+tt$ and $r^4=s^4+4sst+6sstt+4st^3+t^4$,

therefore our formula will become $25s^4+44s^3t+26sstt+4st^3+t^4$, from which if the square root shall be $5ss+fst+tt$, of which the square is

$$25s^4+10fs^3t+10sstt+ffsstt+2fst^3+t^4,$$

where the first and last terms of the same cancel. Thus we now assume f, in order that its last term but one cancels, which happens if $4=2f$ and $f=2$; as then the remaining terms divided by sst give this equation: $44s+26t=10fs+10t+fft=20s+14t$, or $2s=-t$ and $\frac{s}{t}=-\frac{1}{2}$, therefore there becomes $s=-1$ and $t=2$, or $t=-2s$, consequently $r=-s$ and $rr=ss$, which is the known case itself.

Thus we assume a value for f, so that the second terms cancel, which happens if $44=10f$, or $f=\frac{22}{5}$; since then the remaining terms divided by stt give $26s+4t=10s+ffs+2ft$, that is $-\frac{84}{25}s=\frac{24}{5}t$, consequently $t=-\frac{7}{10}s$ and thus $r=s+t=\frac{3}{10}s$, or $\frac{r}{s}=\frac{3}{10}$: therefore $r=3$, and $s=10$; from which we obtain $p=2ss-rr=191$ and $q=2rs=60$, from which our formula becomes : $pp+2qq=43681=209^2$, and $pp+6qq=58081=241^2$.

224.

To be noted: Suchlike values for *m* and *n*, that permit our formulas to be made into squares, according to the above method, allows still more such numbers to be found. Moreover it is to be observed, that the ratio of these numbers *m* and *n* can be assumed at will. Let this ratio be as *a* to *b*, and putting $m=az$ and $n=bz$, then how do we assume from that how *z* shall be determined, so that both these formulas $pp+azqq$ and $pp+bzqq$ may be transformed into squares? The manner in which this is done will be shown in the following problem.

225.

IX. Question: If *a* and *b* shall be given numbers ; how can the number *z* be found, that itself allows both these formulas $pp+azqq$ and $pp+bzqq$ to be made into squares, and likewise the smallest values for *p* and *q* to be determined?

Setting $pp+azqq=rr$ and $pp+bzqq=ss$, and multiplying the first by *b* and the second by *a*, thus the difference of the same gives this equation $(b-a)pp=brr-ass$ and thus $pp=\frac{br-ass}{a-s}$, which formula thus must be a square. Now since such happens if $r=s$, thus one puts $r=s+(b-a)t$ in order that the fractions may be taken away, thus there becomes

$$pp=\frac{brr-ass}{a-s}=\frac{bss+2b(b-a)st+b(b-a)^2-ass}{b-a}$$

$$=\frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}=ss+2bst+b(b-a)tt$$

Now putting $p = s + \frac{x}{y}t$, thus there becomes

$$pp = ss + \frac{2x}{y}\cdot st + \frac{xx}{yy} = ss + 2bst + b(b-a)tt$$

where *ss* cancels, and the other terms divided by *t* and multiplied by *yy* give $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, from which

$$t = \frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}, \text{ therefore } \frac{t}{s} = \frac{2xy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$$

From which we obtain $t = 2xy - 2byy$ and $s = b(b-a)yy - xx$, further $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, and from that

$$p = s + \frac{x}{y}\cdot t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy.$$

Now since we have found *p* along with *r* and *s*, thus it remains still to find *z*. In order to do this , we subtract the first equation $pp + azqq = rr$ from the second $pp + bzqq = ss$, thus the remainder is given:

$zqq(b-a) = ss - rr = (s+r)\cdot(s-r)$. Now since

$s + r = 2(b-a)xy - 2xx$ and

$s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$, or

$s + r = 2x((b-a)y - x)$ and

$s - r = 2(b-a)y(by-x)$, thus either

$$(b-a)zqq = 2x((b-a)y-x)\cdot 2(b-a)y(by-x)$$

or

$$zqq = 2x((b-a)y-x)\cdot 2y(by-x),$$

or $$zqq = 4xy((b-a)y-x)y(by-x);$$

consequently

$$z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}$$

Therefore the largest square by which the numerator can be divided must be taken for *qq* ; but already we have found :

$$p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy,$$

from which it can be seen, that these formulas are easier and simpler, if we put : $x = v + by$ or $x - by = v$; since then there becomes $p = vv - abyy$, and

$$z = \frac{4(v+by)\cdot y\cdot v(v+ay)}{qq} \text{ or } z = \frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq},$$

where the numbers *v* and *y* can be taken at will, and as in the first place we find *qq* , as the largest square is taken, thus that is contained in the numerator, from which thus *z* is then given ; since then $m = az$ and $n = bz$, but finally there will be $p = vv - abyy$; and from this the sought formulas are obtained:

I.) $$pp + azqq = \left(vv - abyy\right)^2 + 4avy\left(v + ay\right)\left(v + by\right),$$

which is a square, the root of which is $r = -vv - 2avy - abyy$.

II.) But the second formula becomes

$$pp + bzqq = \left(vv - abyy\right)^2 + 4avy(v + ay)(v + by),$$

which also is a square, the root of which is $s = -vv - 2bvy - abyy$;
where the values of r and s also can be taken as positive; it will be useful to illustrate these with some examples.

226.

I. Example: Let $a = -1$ and $b = +1$, and we seek numbers for z so that these two formulas $pp - zqq$ and $pp + zqq$ can become squares : the first namely $= rr$, and the second $= ss$.
Here $p = vv + yy$ and one has also in order to find z to consider the formula $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, since then we must assume various numbers for v and y, and from that the values of z will be found, as follows here:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
zqq	$4\cdot6$	$4\cdot30$	$16\cdot15$	$9\cdot16\cdot5$	$36\cdot25\cdot16\cdot7$	$16\cdot9\cdot14$
qq	4	4	16	$9\cdot16$	$36\cdot25\cdot16$	$16\cdot9$
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

from which the following formulas can be resolved and can be made into squares:

I. These two formulas $pp - 6qq$ and $pp + 6qq$ may be used to make squares, which happens if $p = 5$ and $q = 2$. As then the first will become $= 25 - 24 = 1$; and the second $= 25 + 24 = 49$.

II. Also these two formulas $pp - 30qq$ and $pp + 30qq$ may be used to make squares, which happens if $p = 13$ and $q = 2$; since then the first will be $= 169 - 120 = 49$, and the second $169 + 120 = 289$.

III. These two formulas $pp - 15qq$ and $pp + 15qq$ can also become squares, which happens if $p = 17$ and $q = 4$, since then the first will be $289 - 240 = 49$, and the second $289 + 240 = 529$.

IV. Also these two formulas $pp-5qq$ und $pp+5qq$ can also become squares, which happens if $p=41$ and $q=12$, since then the first will be $1681-720=961=31^2$, and the second $1681+720=2401=49^2$.

V. Also these two formulas $pp-7qq$ und $pp+7qq$ can become squares, which happens if $p=337$ and $q=120$; since then the first will become $113569-100800=12769=113^2$, and the second $113569+100800=214369=463^2$.

VI. Also these two formulas $pp-14qq$ and $pp+14qq$ can become squares, which happens if $p=65$ and $q=12$; since then the first will become $4225-2016=2209=47^2$ and the second $4225+2016=6241=79^2$.

227.

II. Example: If the two numbers *m* and *n* are in the ratio 1:2, that is if $a=1$ and $b=2$, thus $m=z$ and $n=2z$, thus the values for *z* shall be found, so that these formulas $pp+zqq$ and $pp+2zqq$ may become squares.

There is no need to use the above general formulas here, especially since this example can be brought so quickly to the previous. Then we put $pp+zqq=rr$ and $pp+2zqq=ss$: thus from the first we obtain $pp=rr-zqq$, which value for *pp* substituted into the second gives $tt+zqq=ss$; consequently these two formulas $rr-zqq$ and $rr+zqq$ must be able to be made into squares, which is the case of the previous examples. Thus we have also the following values here for *z* $6, 30, 15, 5, 7, 14$ etc.

Such a transformation can also be used generally. If we assume, that these two formulas $pp+mqq$ and $pp+nqq$ are able to be made into squares, thus let us put $pp+mqq=rr$ and $pp+nqq=ss$, thus giving the first $pp=rr-mqq$, and thus the second $ss=rr-mqq+nqq$ or $rr+(n-m)qq=ss$; therefore if the first formulas shall be possible, so also these shall be possible $rr-mqq$ and $rr+(n-m)qq$; and since we may confuse *m* and *n* between themselves, thus these also are possible $rr-nqq$ and $rr+(m-n)qq$*;* but if those first formulas are impossible, thus also shall these latter be impossible.

228.

III. Example: The numbers *m* and *n* shall be as 1:3, or $a=1$ and $b=3$, thus $m=z$ and $n=3z$, so that the formulas $pp+zqq$ and $pp+3zqq$ shall become squares.

Because here $a=1$ and $b=3$, thus the question shall be possible as long as

$$zqq = 4vy(v+y)(v+3y), \text{ and } p = vv - 3yy.$$

Therefore on taking the following values for v and y :

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	$16\cdot2$	$4\cdot9\cdot30$	$4\cdot4\cdot35$	$4\cdot9\cdot25\cdot4\cdot2$	$4\cdot9\cdot16\cdot25\cdot43$
qq	16	$4\cdot9$	$4\cdot4$	$4\cdot4\cdot9\cdot25$	$4\cdot9\cdot16\cdot25$
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	25	13

Now here we have two cases for $z=2$, from which we can make squares from the two formulas $pp+2qq$ and $pp+6qq$, this happens in the first place if $p=2$ and $q=4$, and consequently also if $p=1$ and $q=2$; since then there becomes $pp+2qq=9$ and $pp+6qq=25$. This happens again if $p=191$ and $q=60$, since then there becomes $pp+2qq=(209)^2$ and $pp+6qq=(241)^2$. But it is hard to determine whether or not a square would arise for zqq if we can put $z=1$. We would like to discuss now the question as to whether or not these two formulas $pp+qq$ and $pp+3qq$ can be made into squares: this investigation can be put in place in the following way.

229.

We thus want to investigate whether or not these two formulas $pp+qq$ and $pp+3qq$ can be used to generate squares. On putting $pp+qq=rr$ and $pp+3qq=ss$, thus the following points are to be considered:

I. The numbers p and q can be considered as indivisible by each other; then if they had a common divisor, thus the formulas would still remain squares, if p and q were divided by that.

II. Now p cannot be an even number ; since then q would be odd, and thus the second formula would be a number of this form $4n+3$, which cannot be a square ; therefore p by necessity is odd, and pp a number of the form $8n+1$.

III. Now since p is odd, thus from the first case not only is q even but also thus indeed to be divisible by 4, since from that qq would be of this form $16n$; and $pp+qq$ of this form $8n+1$.

IV. Further p cannot be divisible by 3 ; since then pp itself would be divisible by 9 but not qq, consequently $3qq$ is divisible by 3 only, but not by 9, and thus $pp+3qq$ also would be divisible by 3 but not by 9, and therefore cannot be a square; consequently the number p cannot be divided by 3, therefore pp will be of the form $3n+1$.

V. Since p itself cannot be divided by 3, thus q itself must be divisible by 3 ; since then if q were not divisible by 3, thus qq would be a number of the form $3n+1$, and therefore $pp+qq$ of this form $3n+2$, which cannot be a square: consequently q must be divisible by 3.

VI. Also p cannot be divisible by 5 ; since if this were the case, thus q cannot be divisible by 5 and qq must be a number of the form $5n+1$ or $5n+4$, thus $3qq$ would be a number of the form $5n+3$ or $5n+2$, and $pp+3qq$ also must be a number of which form, which thus cannot be of this form to be a square; therefore then necessarily p cannot be divisible by 5, and thus pp must be a number of the form $5n+1$ or $5n+4$.

VII. Now since p cannot be divided by 5, thus we will see, whether or not q itself can be divided by 5. If q were not divisible by 5, thus $3qq$ would be of this form Art $5n+2$ or $5n+3$, as we have seen, and since pp either is of the form $5n+1$ or $5n+4$, thus $pp+3qq$ would either be of the form $5n+1$ or $5n+4$ just as pp; if $pp=5n+1$, thus there must be $qq=5n+4$, because otherwise $pp+qq$ cannot be a square : but then if we had $3qq=5n+2$, and $pp+3qq=5n+3$, which cannot be a square; on the other hand, if $pp=5n+4$, thus there must be $qq=5n+1$ and $3qq=5n+3$ and consequently $pp+3qq=5n+2$, which also cannot be a square: from which it follows that qq must be divisible by 5.

VIII. Now since q must be divisible initially by 4 , secondly by 3, and in the third place also by 5, thus q must be such a number $4\cdot 3\cdot 5m$ or $q=60m$; therefore our formula must become $pp+3600mm=rr$ und $pp+10800mm=ss$; then since the first taken away from the second gives $7200mm=ss-rr=(s+r)(s-r)$; so that $s+r$ and $s-r$ must be factors of $7200mm$: whereby it is to be noted that both s as well as r must be odd numbers, and therefore indivisible between each other.

IX. Therefore there shall be $7200mm=4fg$ or the factors from $2f$ and $2g$, and putting $s+r=2f$ and $s-r=2g$, thus $s=f+g$ and $r=f-g$, since then f and g must be indivisible between themselves, and the one even and the other odd. Now since $fg=1800mm$, thus we must express $1800mm$ in two factors, of which one is even, and the other odd, but both have no common divisors between themselves.

X. It is to be noted further, that since $rr=pp+qq$ and thus r is a factor of $pp+qq$, the number $r=f-g$ also is a sum of two squares, and because the same is odd, must be expressed in the form $4n+1$.

XI. If we assume first that $m=1$, thus $fg=1800=8\cdot 9\cdot 25$, from which the following decompositions arise : $f=1800$ and $g=1$, or $f=200$ and $g=9$, or $f=72$ and $g=25$, or $f=225$ and $g=8$; from the first there becomes $r = f - g = 1799 = 4n+3$; according to the second there would be $r = f - g = 191 = 4n+3$; according to the third, $r = f - g = 47 = 4n+3$; but according to the fourth $r = f - g = 217 = 4n+1$; therefore the three first vanish, and only the fourth remains ; from which one can conclude generally, that the greater factor must be odd, but the smaller one must be even ; but here also the value $r = 217$ cannot be used, because the same is divisible by 7, which is not the sum of two squares.

XII. Taking $m = 2$, thus there becomes $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, thus on taking $f = 225$ and $g = 32$, so that $r = f - g = 193$, which number can well be a sum of two squares and thus deserves to be proven:
now since $q = 120$ and $r = 193$, thus there becomes
$pp = rr - qq = (r+q)\cdot(r-q)$,
also $r+q = 313$ and $r - q = 73$, thus we can see indeed that no square arises for *pp* from this, because these factors are not squares.
Should one take the trouble to take still other numbers for the given *m*, thus all the labour would be in vain, as we would like to show.

230.

Proposition. It is not possible, that these two formulas $pp+qq$ and $pp+3qq$ can be squares at the same time ; or in which cases, that if the one will be a square, the other certainly is not.

Which will be proven thus.

Since *p* is odd and *q* is even, as we have seen, thus $pp+qq$ cannot be a square other than if $q = 2rs$ and $p = rr - ss$; but the other $pp+3qq$ cannot be a square other than if $q = 2tu$ and $p = tt - 3uu$ or $p = 3uu - tt$. Now because in both cases *q* must be a double product, thus putting $q = 2abcd$ for both cases, and taking for the first $r = ab$ and $s = cd$; but for the second $t = ac$ and $u = bd$, thus there becomes for the first case $p = aabb - ccdd$, but for the second case
$p = aacc - 3bbdd$, or $p = 3bbdd - aacc$, both values which must be same; from which we obtain either
$aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, or $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$; whereby it is to be observed that the numbers *a, b, c* and *d* generally are smaller than *p* and *q*. We must thus consider each of these two special cases; from the first we obtain $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$ or
$bb(aa+3dd) = cc(aa+dd)$, from which there becomes $\frac{bb}{cc} = \frac{aa+dd}{aa+3dd}$,
which fraction must be a square. But here the numerator and denominator cannot have a common divisor other than 2, because the difference between which is $2dd$. Therefore, should 2 be a common divisor, thus both $\frac{aa+dd}{2}$ as well as $\frac{aa+3dd}{2}$ must be squares, but both the numbers *a* and

d in this case are odd, and thus their squares are of the form $8n+1$, therefore the second formula $\frac{aa+3dd}{2}$ will have the form $4n+2$ and cannot be a square; consequently 2 cannot be a common divisor, but the numerator $aa+dd$ and the denominator $aa+3dd$ are indivisible between themselves; each one by itself must be a square. Now because these formulas in the first form are similar, thus it follows, that if the numbers in the first formula were squares, also in the smallest numbers would equally be square formulas, and thus one can always come to the smaller numbers. Now in the smallest numbers no such thing is given, thus neither can the same be given in greatest numbers.

But this conclusion is only correct to a certain extent, if also the above second case $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$ should lead to the same similarity; but from this there becomes $aabb+aacc=3bbdd+ccdd$, or $aa(bb+cc)=dd(3bb+cc)$, and therefore $\frac{aa}{dd}=\frac{3bb+cc}{bb+cc}=\frac{cc+3bb}{cc+bb}$, which fraction must be a square, so that the above conclusion is fully confirmed; if such cases were given in the largest numbers, that $pp+qq$ and $pp+3qq$ were squares, in the same manner it must be present in these smallest numbers also, which still does not happen.

231.

XII. Question: Three such numbers are to be found *x*, *y* and *z*, so that if each two be multiplied by each another and 1 added to the product, then a square will be forthcoming.

It is required to make these three formulas into squares :

$$\text{I.)}\,xy+1;\ \text{II.)}\,xz+1;\ \text{III.)}\,yz+1.$$

From the last two formulas, putting $xz+1=pp$ and $yz+1=qq$, thus from those we obtain : $x=\frac{pp-1}{z}$ and $y=\frac{qq-1}{z}$, from which the first formula becomes $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, which must be a square, and thus also multiplied by *zz*, that is $(pp-1)(qq-1)+zz$, which can be constructed easily from that. Then we put the root of that $=z+r$, thus obtaining $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, and therefore $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, where numbers can be assumed at will for *p*, *q* and *r*.

For example, let $r=-pq-1$, thus there becomes $rr=ppqq+2pq+1$ and

$$z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2},$$

consequently

$$x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2} \text{ and } y=\frac{2(pq+q)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

But if whole numbers are required, thus we put $xy+1=pp$ for the first formula and take $z=x+y+q$, thus the second formula becomes

$$xx+xy+xq+1 \;=xx+qx+pp\,,$$

while the third will be

$$xy+yy+qy+1=yy+qy+pp\,,$$

which evidently becomes a square, if we take $q=\pm 2p$*;* then since the second becomes $xx\pm 2px+pp$ of which the root is $x\pm p$, while the third becomes $yy\pm 2py+pp$ of which the root is $y\pm p$*;* therefore we have these very neat solutions: $xy+1=pp$ or $xy=pp-1$, which can be shown easily for each number, thus assumed for p ; and next is the third number which can be shown in a two-fold manner, either $z=x+y+\;2p$ or $z=x+y-2p$, which we illustrate by the following example:

I. We take $p=3$, thus there becomes $pp-1=8$; now on setting $x=2$ and $y=4$, thus there becomes either $z=12$ or $z=0$: and also the three numbers sought will be 2, 4 and 12.

II. If there shall be $p=4$, thus there becomes $pp-1=15$; now on taking $x=5$ and $y=3$, thus there becomes either $z=16$ or $z=0$: and the three numbers sought will be 3, 5 and 16.

III. Let $p=5$, thus $pp-1=24$; now taking $x=3$ and $y=8$, thus $z=21$, or also $z=1$: from which the following numbers arise, either 1, 3 and 8, or 3, 8 and 21.

232.

XIII. Question: Three whole numbers are sought *x, y* and *z,* so that if to the product of each two a given number *a* may be added, every time a square arises from this.

Therefore these three formulas must become squares :

$$\text{I.)}\, xy+a;\quad \text{II.)}\, xz+a;\quad \text{III.)}\, yz+a\,.$$

Now putting $xy+a=pp$ for the first, and taking $z=x+y+q$, thus the second formula becomes $xx+xy+xq+a=xx+qx+pp$ and the third becomes $xy+yy+yq+a=yy+qy+pp$, which both become squares, if $q=\pm 2p$; thus so that $z=x+y\pm 2p$, and therefore two values can be found for z .

233.

XIV. Question: Four whole numbers are required *x, y, z* and *v,* so that if to the product of each two a given number a may be added, a square emerges each time.

Thus the following six formulas must be made into squares:

$$\text{I.)}\quad xy+a;\qquad \text{II.)}\;\; xz+a;\qquad \text{III.)}\;\; yz+a;$$

$$\text{IV.)}\;\; xv+a;\qquad \text{V.)}\;\; yv+a;\qquad \text{VI.)}\;\; zv+a.$$

Now on putting for the first formula $xy + a = pp$, and taking $z = x + y + 2p$, thus the second and third formulas will be squares. Further taking $v = x + y - 2p$, thus the fourth and fifth formulas also become squares, and thus only the sixth still remains left over, which shall become $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, which must be a square. Now since $pp = xy + a$, thus the last formula becomes $xx - 2xy + yy - 3a$; consequently these two formulas must still need to be made into squares:

$$\text{I.)} \quad xy + a = pp \quad \text{and II.)} \quad (x - y)^2 - 3a.$$

Let the root of the latter be $(x - y) - q$, thus there becomes

$$(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + qq,$$

and that becomes $-3a = -2q(x - y) + qq$ and finally $x - y = \frac{qq+3a}{2q}$, or $x = y + \frac{qq+3a}{2q}$; from this we find $pp = yy + \frac{qq+3a}{2q} y + a$. Now take $p = y + r$, thus becoming $2ry + rr = \frac{qq+3a}{2q} y + a$, or
$4qry + 2qrr = (qq + 3a) y + 2aq$, or
$2qrr - 2aq = (qq + 3a) y - 4qry$ and $y = \frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr}$, where *q* and *r* can be assumed at will, and it thus arises from that, that only whole numbers are arise here for *x* and *y*. Then because $p = y + r$ thus also *z* and *v* shall be whole. But here it is assumed for the main part from the nature of the given number *a*, where the business with these whole numbers can still be a little difficult; also it is to be noted, that this solution is already very restricted throughout, since these letters *z* and *v* have the given values $x + y \pm 2p$, in that the same nevertheless can still have many other values. To this end on this question we will engage the following condition, which also can be useful in other cases.

I. If $xy + a$ shall be a square and thus $xy - a$, thus the numbers *x* and *y* shall be contained always in this similar form $rr - ass$; therefore if we put $x = bb - acc$ and $y = dd - aee$, thus $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Now if $be - cd = \pm 1$, then there becomes
$xy = (bd - ace)^2 - a$, and thus $xy + a = (be - ace)^2$.

II. Now further we put $z = ff - agg$ and assume the numbers *f* and *g* thus, so that $bg - cf = 1$ and also $dg - ef = 1$, thus also the formulas $xz + a$ and $yz + a$ would become squares. Thus it is assumed only from that, that such numbers may be found for *b, c* and *d, e* and also for *f* and *g*, that the above property may be fulfilled.

III. We would like to represent these three letter pairs by these fractions

$\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, and $\frac{f}{g}$, which thus must be supplied, so that the difference between each two may be expressed by a fraction, of which the numerator $=1$. Then since $\frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{be-dc}{ce}$ thus this numerator must, as we have seen, always shall be ± 1. Here one can always assume one of these fractions at will, and find another easily from that, so that the noted condition can be used.

For example, let the first be $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$, thus the second $\frac{d}{e}$ must be almost equal to this. Let $\frac{d}{e}=\frac{4}{3}$, so the difference $z=\frac{1}{6}$.

We can also determine this second fraction from the first from the general method ; then since $\frac{3}{2}-\frac{d}{e}=\frac{3e-2d}{2e}$, thus we must have, $3e-2d=1$, so $2d=3e-1$ and $d=e+\frac{e-1}{2}$. Therefore we take $\frac{e-1}{2}=m$ or $e=2m+1$, thus we obtain $d=3m+1$ and our second fraction will be $\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$. Now the second fraction thus also can be found for each first fraction, from which we include the following examples.

$\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+2}{5m+3}$	$\frac{11m+2}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. We have found two such fractions for $\frac{b}{c}$ and $\frac{d}{e}$, thus it is quite an easy matter to find a third $\frac{f}{g}$, which stands in an equal ratio with the first two. We need only put $f=b+d$ and $g=c+e$, thus so that $\frac{f}{g}=\frac{b+d}{c+e}$, then since from the two first ratios there is $be-cd=\pm 1$, thus $\frac{f}{g}-\frac{b}{c}=\frac{\pm 1}{cc+ce}$. Just as thus the second taken from the third $\frac{f}{g}-\frac{d}{e}=\frac{be-cd}{ee+ce}=\frac{\pm 1}{ce+ee}$.

V. Having now found three such fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ and $\frac{f}{g}$, thus we can now solve our question for three numbers x, y and z, thus so that these three formulas $xy+a$, $xz+a$ and $yz+a$ become squares. Then we need only put $x=bb-acc$, $y=dd-aee$ and $z=ff-agg$. Taking, for example, from the above table, $\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$ and $\frac{d}{e}=\frac{7}{4}$, thus there becomes $\frac{f}{g}=\frac{12}{7}$; from which we obtain $x=25-9a$, $y=49-16a$ and $z=144-49a$; then since there becomes $xy+a=1225-840a+144aa=(35-12a)^2$, further there will be

$$xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2,$$

and

$$yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (84 - 28a)^2.$$

234.

But should, according to the content of the question, we be required to find four suchlike numbers *x*, *y*, *z* and *v*, thus we must add still a fourth to the above fractions . Therefore there shall be the three first $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, and putting the fourth fraction $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, thus so that it stands in the same associated relation as the second and third; if we now take

$$x = bb - acc;\ y = dd - aee;\ z = ff - agg \text{ and } v = hh - akk,$$

thus fulfilling already the following requirement:

I.) $xy + a = \square$; II.) $xz + a = \square$; III.) $yz + a = \square$; IV.) $yv + a = \square$; V.) $zv + a = \square$;

it still remains only, that $xv + a$ also becomes a square, which from the same does not happen, because the first fraction does not stand in the same associated ratio with the fourth. It is therefore necessary in the three first fractions still to retain the undetermined number *m*, and the same to be determined thus, so that also $xv + a$ becomes a square.

VI. Therefore we take the first case from the above table and put $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ and $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$ thus there becomes $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ and $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. From this there becomes $x = 9 - 4a$ and $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$, thus

$$xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$$

or

$$xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288mm + 528m + 244) + 4aa(4m+4)^2,$$

which can be made into a square easily, because *mm* is multiplied by a square ; but concerning which we do not wish to tarry and explain further.

VII. It can also be shown that such similar fractions of a more general kind are useful : then there shall be

$$\frac{b}{c} = \frac{I}{1},\ \frac{d}{e} = \frac{nI-1}{n};\text{ thus there becomes } \frac{f}{g} = \frac{nI+I-1}{n+1} \text{ and } \frac{h}{k} = \frac{2nI+I-2}{2n+1};$$

putting $2n + 1 = m$ into the last ratio, thus the same will be $\frac{Im-2}{m}$, consequently from the first $x = II - a$ and from the last $v = (Im-2)^2 - amm.$

Thus it only remains still, to show that $xv+a$ is a square. Now since $v=\left(II-a\right)mm-4Im+4$ and thus

$$xv+a=\left(II-a\right)^{2}mm-4(II-a)Im+4II-3a\,,$$

which must be a square ; the root of that is now put to be $\left(II-a\right)m-p$, of which the square is $\left(II-a\right)^{2}mn-2\left(II-a\right)mp+pp$, from which we obtain,

$$-4\left(II-a\right)Im+4II-3a=-2\left(II-a\right)mp+pp \text{ and } m=\tfrac{pp-4II+3a}{\left(II-a\right)\left(2p-4I\right)}\,\cdot$$

Taking $p=2I+q$, thus $m=\frac{4Iq+qq+3a}{2q\left(II-a\right)}$, where any numbers can be taken for I and q.

For example, were $a=1$ thus we take $I=2$, since $m=\frac{4q+qq+3}{6q}$ [; should be $m=\frac{8q+qq+3}{6q}$]: putting $q=1$ thus $m=\frac{4}{3}$ and $m=2n+1$; but we will not delay, but precede to the following question.

235.

XV. Question : Three such numbers are required *x, y* and *z,* so that the sum as well as the difference of each two shall be a square.

Thus the following six formulas must be made into squares:

$$\text{I.)}\ \ x+y;\quad \text{II.)}\ x+z;\quad \text{III.)}\ y+z;$$
$$\text{IV.)}\ x-y;\quad \text{V.)}\ x-z;\quad \text{VI.)}\ y-z.$$

We begin with the three last formulas, and put $x-y=pp,\ x-z=qq$ and $y-z=rr$, thus we obtain from the last two

$$x=qq+z \text{ and } y=rr+z\,,$$

the first therefore gives $x-y=qq-rr=pp,$ or $qq=pp+rr$, so that the sum of the squares $pp+rr$ must be a square, namely qq, which happens if $p=2ab$ and $r=aa-bb$, since then $q=aa+bb$.

But meanwhile the letters p, q and r are retained and the three first formulas are to be considered, since then the first becomes $x+y=qq+rr+2z$; the second $x+z=qq+2z$; and the third $y+z=rr+2z$. We put for the first:

$$qq+rr+2z=tt,\text{thus } 2z=tt-qq-rr\,;$$

therefore then according to these, the two formulas must be made into squares :

$$tt-rr=\square \text{ and } tt-qq=\square\text{, that is}$$

$$tt-\left(aa-bb\right)^{2}=\square \text{ and } tt-\left(aa+bb\right)^{2}=\square,$$

which assume this form :

$$tt - a^4 - b^4 + 2aabb \text{ and } tt - a^4 - b^4 - 2aabb;$$

because now thus $cc + dd + 2cd$ as well as $cc + dd - 2cd$ is a square, thus we see that we reach our final result, if we can equate $tt - a^4 - b^4$ with $cc + dd$ and $2aabb$ with $2cd$. In order to bring this about, thus let us put $cd = aabb = ffgghhkk$ and take $c = ffgg$ and $d = hhkk$; $aa = ffhh$ and $bb = ggkk$ or $a = fh$ and $b = gk$, from which the first equation

$$tt - a^4 - b^4 = cc + dd$$

takes this form:

$tt - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4$ and thus $tt = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4$ that is $tt = \left(f^4 + k^4\right)\left(g^4 + h^4\right)$ which product thus must be a square, but the solution of that might become very hard.

We will therefore approach this problem in a different way, and from the first three equations $x - y = pp$; $x - z = qq$; $y - z = rr$ determine the letters y and z, which become $y = x - pp$ and $z = x - qq$, so that $qq = pp + rr$. Now the first formula becomes

$$x + y = 2x - pp,\ x + z = 2x - qq;$$

and

$$y + z = 2x - pp - qq;$$

for this last equation we put $2x - pp - qq = tt$, so that $2x = tt + pp + qq$ and only these formulas $tt + qq$ and $tt + pp$ remain, which must be made into squares. But since now there must be $qq = pp + rr$, thus we put $q = aa + bb$, and $p = aa - bb$, thus there becomes $r = 2ab$; from which our formulas shall become :

$$\text{I.)}\quad tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$$

$$\text{II.)}\quad tt + \left(aa - bb\right)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square.$$

Now here again we compare $tt = a^4 + b^4$ with $cc + dd$, and $2aabb$ with $2cd$, thus we reach our required result: therefore we put as above $c = ffgg$, $d = hhkk$ and $a = fh$, $b = gk$; thus $cd = aabb$, and there must be yet $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; from which it follows

$$tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = \left(f^4 - k^4\right)\left(g^4 - h^4\right).$$

Thus the question arising from that is as follow: two differences between biquadratics, such as $f^4 - k^4$ and $g^4 - h^4$, which multiplied together make a square.

To this end we would like to discuss the formula $m^4 - n^4$ and to see what kind of numbers arise from that, if given numbers shall be assumed for m

and *n*, and whereby the squares, thus to be contained therein, to be noted especially. Now because $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, thus we can construct the following tables from that.

Table
for the numbers which are contained in the formula $m^4 - n^4$.

mm	nn	$mm - nn$	$mm + nn$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3·5
9	1	8	10	16·5
9	4	5	13	5·13
16	1	15	17	3·5·17
16	9	7	25	25·7
25	1	24	26	16·3·13
25	9	16	34	16·2·17
49	1	48	50	25·16·2·3
49	16	33	65	3·5·11·13
64	1	63	65	9·5·7·13
81	49	32	130	64·5·13
121	4	117	125	25·9·5·13
121	9	12	130	16·2·5·7·13
121	49	72	170	144·5·17
144	25	119	169	169·7·17
169	1	168	170	16·3·5·7·17
169	81	88	250	25·16·5·11
225	64	161	289	289·7·23

From this we can give already some solutions: namely if we take $ff = 9$ and $kk = 4$, thus there becomes $f^4 - k^4 = 13 \cdot 5$: further if we take $gg = 81$, and $hh = 49$, thus there becomes $g^4 - h^4 = 64 \cdot 5 \cdot 13$, from which $tt = 64 \cdot 25 \cdot 169$; consequently $t = 520$. Now since $tt = 270400$; $f = 3$; $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, thus we obtain $a = 21$; $b = 18$; from which $p = 117$, $q = 765$ and $r = 756$; from which we find

$$2x = tt + pp + qq = 869314 \text{ and thus } x = 434657;$$

therefore further $y = x - pp = 420968$; and finally $z = x - qq = -150568$, which number also can be taken positive, because then the sum and the difference can be interchanged; consequently our three numbers sought are :

$$x = 434657$$

$$y = 420968$$

$$z = 150568$$

$$\begin{aligned}
\text{therefore}\quad x+y &= 855625 = (925)^2\\
x+z &= 585225 = (765)^2\\
y+z &= 571536 = (756)^2\\
\text{and further}\quad x-y &= 13689 = (117)^2\\
x-z &= 284089 = (533)^2\\
y-z &= 270400 = (520)^2
\end{aligned}$$

Still other numbers can be found from the above table, if we put $ff=9,\ kk=4$ and $gg=121,\ hh=4$; then from this there becomes $tt=13\cdot5\cdot5\cdot13\cdot9\cdot25=9\cdot25\cdot25\cdot169$, so that $t=3\cdot5\cdot5\cdot13=975$. Now because $f=3,\ g=11,\ k=2$ and $h=2$, thus there becomes

$a=fh=6$ and $b=gk=22$, from which there becomes

$p=aa-bb=-448,\ q=aa+bb=520$ and $r=2ab=264$,

therefore we obtain

$$2x=tt+pp+qq=950625+200704+270400=1421729,$$

therefore

$x=\frac{1421729}{2}$, from which $y=x-pp=\frac{1020321}{2}$ and $x-qq=\frac{880929}{2}$. Now it is to be noted, that if these numbers have the property sought, the very same multiplied by any square, must keep the same property. Thus we can take the numbers found four times greater, thus the three following numbers will likewise perform sufficiently well :

$$x=2843458,\ y=2040642 \text{ and } z=1761858,$$

which are greater than the foregoing; so that those can be considered to be the smallest possible to be contained.

236.

XVI. Question: Three square numbers are required, to that the difference between each two will be a square.

The previous resolutions serve us also to resolve these. Then if x, y and z shall be such numbers, so that these formulas become squares

$$\begin{aligned}
&\text{I.)}\ x+y; &&\text{III.)}\ x+z; &&\text{V.)}\ y+z;\\
&\text{II.)}\ x-y; &&\text{IV.)}\ x-z; &&\text{VI.)}\ y-z;
\end{aligned}$$

thus also the product of the first and second will be a square $xx-yy$, also likewise the product of the third and the fourth $xx-zz$, and finally the product also of the fifth and the sixth $yy-zz$ will be as square, therefore the three squares sought here shall be xx, yy, zz. All these numbers are very large, and there is given without doubt far smaller, because, because it is just not necessary, in order that $xx-yy$ makes a square, that each of $x+y$ and $x-y$ must be a square especially, in that, for example, $25-9$ is a square, yet there neither $5+3$ nor $5-3$ is a square. Thus we would like especially to resolve this question and in the first place to be observed, for that one square can become put as 1. Then if $xx-yy$, $xx-zz$ and $yy-zz$ shall be squares, thus the same remain as squares, if they are divided by zz ; therefore these formulas must be made into squares : $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\square$, $\frac{xx}{zz}-1=\square$, and $\frac{yy}{zz}-1=\square$. Thus only the case of these two fractions $\frac{x}{z}$ and $\frac{y}{z}$ is assumed ; now on taking

$$\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1} \text{ and } \frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1},$$

thus these two latter conditions are fulfilled ; then there becomes

$$\frac{xx}{zz}-1=\frac{4pp}{(pp-1)^2} \text{ and } \frac{yy}{zz}-1=\frac{4qq}{(qq-1)^2}$$

Thus there still remains only the case of the first formula to be made into a square, which is

$$\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2}-\frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2}=\left(\frac{pp+1}{pp-1}+\frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1}-\frac{qq+1}{qq-1}\right)$$

Now here the first factor $=\frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, but the other $=\frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, the product of which $=\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Now because the denominator already is a square and the numerator is multiplied by the square 4, thus it is still necessary to make this formula $(ppqq-1)(qq-pp)$ into a square, or also this $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; which happens if

$pq=\frac{ff+gg}{2fg}$ and $\frac{q}{p}=\frac{hh+kk}{2hk}$ were taken; since then each factor is a particular square. From this there is now:

$$qq=\frac{ff+gg}{2fg}\cdot\frac{hh+kk}{2hk};$$

consequently these two fractions multiplied by each other must amount to a square, and thus also if the same be multiplied by $4ffgg\cdot hhkk$, that is, $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; which formula is fully in agreement with those, as have been found before, if we put

$$f=a+b,\ g=a-b,\ h=c+d \text{ and } k=c-d ;$$

then that becomes $2\left(a^4-b^4\right)\cdot 2\left(c^4-d^4\right)=4\left(a^4-b^4\right)\left(c^4-d^4\right)$, which happens, as we have seen, if $aa=9$, $bb=4$, $cc=81$ and $dd=49$, or $a=3$, $b=2$, $c=9$ and $d=7$. From this there becomes $f=5$, $g=1$, $h=16$ and $k=2$, and therefore $\frac{p}{q}=\frac{5}{13}$ and $\frac{p}{q}=\frac{260}{64}=\frac{65}{16}$; these two equations multiplied by each other give $qq=\frac{65\cdot 13}{16\cdot 5}=\frac{13\cdot 13}{16}$, consequently $q=\frac{13}{4}$, therefore $p=\frac{4}{5}$; through which we obtain $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=-\frac{41}{9}$ and $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}=\frac{185}{153}$. Since now $x=-\frac{41z}{9}$ and $y=\frac{185z}{153}$, thus one takes in order to obtain whole numbers $z=153$, there becomes $x=-697$ and $y=185$, as a result of which the three square numbers sought are the following :

$$xx=485809 \quad \text{since there becomes } xx-yy=45184=(672)^2$$

$$yy=34225 \qquad yy-zz=10816=(104)^2$$

$$zz=23409 \qquad xx-zz=462400=(680)^2$$

which squares are much smaller, than if we had wished to take the squares of the three numbers *x*, *y* and *z* found in the original question.

237.

It might be objected here, that these solutions were found merely by trial and error, as that has been done with the help of the above table. But we have only availed ourselves of these means in order to find the smallest solution; but if it could not be seen from that already, thus with the help of the above rule indefinitely many solutions can be given. Since namely in the last question, this product is obtained:

$$(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$$

to be made into a square, because then there becomes

$$\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}\text{and}\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1},$$

thus on putting $\frac{q}{p}=m$ or $q=mp$, since then our formula becomes $(mmp^4-1)(mm-1)$, which clearly is a square if $p=1$; and this value leads us to another, if we put $p=1+s$, but then this formula must be a square

$$(mm-1)\cdot(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$$

and thus also if the same shall be divided by this square $(mm-1)^2$, since then this arises

$$1+\frac{4mms}{mm-1}+\frac{6mmss}{mm-1}+\frac{4mms^3}{mm-1}+\frac{mms^4}{mm-1}.$$

Here we abbreviate by putting $\frac{mm}{mm-1}=a$, thus this formula becomes $1+4as+6ass+4as^3+as^4$ which must be a square. Let the square root of this be $1+fs+gss$ of which the square is

$$1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4,$$

and thus f and g can be determined, so that the three first terms vanish, which happens if $4a=2f$ or $f=2a$, and $6a=2g+ff$, consequently $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$, thus the three last terms give this equation : $4a+as=2fg+ggs$, from which we find $s=\frac{4a-2fg}{gg-a}=\frac{4a-12aa+8a^3}{4a^4-12a^3+9aa-a}$, that is $s=\frac{4-12a+8aa}{4a^3-12aa+9a-1}$, which fraction with $a-1$ cancelled gives $\frac{4(2a-1)}{4aa-8a+1}$. This value gives us already infinitely many solutions because the number m, from which $a=\frac{mm}{m-1}$ arose, can be taken at will, which it is necessary to illustrate by an example.

I. Let $m=2,$ thus so that $a=\frac{4}{3}$ and therefore $s=4\cdot\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}}=-\frac{60}{23}$ and from this $p=-\frac{37}{23}$, consequently $q=-\frac{74}{23}$; finally $\frac{x}{z}=\frac{949}{420}$ and $\frac{y}{z}=\frac{6005}{4947}$.

II. Let $m=\frac{3}{2}$, thus $a=\frac{9}{5}$ and $s=4\cdot\frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{24}}=-\frac{260}{11}$, therefore $p=-\frac{249}{11}$ and $q=-\frac{747}{22}$, from which the fractions $\frac{x}{z}$ and $\frac{y}{z}$ can be found.

A special case still deserves to be mentioned, if a is a square, as happens if $m=\frac{5}{3}$, then there becomes $a=\frac{25}{16}$. Again we abbreviate $a=bb$, thus so that our formula shall become
$1+4bbs+6bbss+4bbs^3+bbs^4$; the root of which shall be $1+2bbs+bss$, of which the square shall be $1+4bbs+2bss+4b^4ss+4b^3s^3+bbs^4$, where the two first and the last terms are removed, the remaining terms divided by ss give $6bb+4bbs=2b+4b^4+4b^3s$, from which

$$s=\frac{6bb-2b-4b^4}{4b^3-4bb}=\frac{3b-1-2b^3}{2bb-2b};$$

which fraction after it can be abbreviated by cancelling $b-1$, then becomes

$$s=\frac{1-2b-2bb}{2b} \text{ and } p=\frac{1-2bb}{2b}.$$

Also the root of the above formula also can be put to be $1+2bs+bss$, of which the square is $1+4bs+2bss+4bbss+4bbs^3+bbs^4$, where the first and the two last terms vanish, and the remaining terms divided by s give $4bb+6bbs=4b+2bs+4bbs$. Now since $bb=\frac{25}{16}$ and $b=\frac{5}{4}$, thus we obtained from that $s=-2$ and $p=-1$, consequently $pp-1=0$: from which nothing will be found, because there would be $z=0$.

But in the above case, since $p=\frac{1-2bb}{2b}$, if $m=\frac{5}{3}$ and therefore $a=\frac{25}{16}=bb$, it follows that $b=\frac{5}{4}$, thus $p=-\frac{17}{20}$ arises, and $q=mp=-\frac{17}{12}$, and consequently $\frac{x}{z}=\frac{689}{111}$ and $\frac{y}{z}=\frac{433}{145}$.

238.

XVII. Question: Three square numbers are required *xx*, *yy* and *zz*, so that the sum of each two again assumes a square.

Now since the three formulas *xx* + *yy*, *xx* + *zz* and *yy* + *zz* must be made into squares, thus the same can be divided by zz, so that the three following equations are obtained :

$$\text{I.)}\ \frac{xx}{zz}+\frac{yy}{zz}=\square\ ;\ \text{II.)}\ \frac{xx}{zz}+1=\square\ ;\ \text{III.)}\ \frac{yy}{zz}+1=\square.$$

Then since it is sufficient for the last two to occur, if

$$\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}\text{and }\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q},$$

from which the first formula will be $\frac{(pp-1)^2}{4pp}+\frac{(qq-1)^2}{4qq}$, which thus also multiplied by 4 must be a square, that is $\frac{(pp-1)^2}{pp}+\frac{(qq-1)^2}{qq}$, or also multiplied by $ppqq$: $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, which cannot very well happen without a case to be known, that the same is a square; such a case cannot be guessed on its own, therefore we have to must take recourse to another line of enquiry, a few of which we will mention.

I. Since the formula itself can be expressed thus :

$$qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$$

thus it can happen, that the same can be divided by that square which happens if we take $q-1=p+1$ or $q=p+2$, since then there will be $q+1=p+3$, whereby our formula becomes

$$(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2(p+1)^2=\square,$$

which divided by $(p+1)^2$ must become a square, namely

$$(p+2)^2(p+1)^2+pp(p+3)^2,$$

thus expanded out in this form becomes $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Now because here the last term is a square, thus we put the root to be $2+fp+gpp$ or $gpp+fp+2$, of which the square is

$$ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$$

where f and g must be determined thus, so that the three last terms vanish, which happens if $-4=4f$, or $f=-1$ and $6=4g+1$, or $g=\frac{5}{4}$, since then the first terms divided by p^3 gives

$2p+8=ggp+2fg=\frac{16}{25}p-\frac{5}{2}$, from which we find $p=-24$ and $q=-22$; hence we obtain $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$ or $x=-\frac{575}{48}z$ and $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$ or $y=-\frac{483}{44}z$.

Now taking $z=16\cdot 3\cdot 11$, thus $x=575\cdot 11$ and $y=483\cdot 12$; therefore the roots of the three sought squares shall be:

$$x=6325=11\cdot 23\cdot 25,\ y=5796=12\cdot 21\cdot 23,\ z=528=3\cdot 11\cdot 16,$$

then from this there shall be

$$xx+yy=23^2\left(275^2+252^2\right)=23^2\cdot 373^2$$

$$xx+zz=11^2\left(575^2+48^2\right)=11^2\cdot 577^2$$

$$yy+zz=12^2\left(483^2+44^2\right)=12^2\cdot 485^2$$

II. One can still make from indefinitely many ways, that our formula can be divided by a square ; For example, putting $(q+1)^2=4(p+1)^2$ or $q+1=2(p+1)$, that is $q=2p+1$ and $q-1=2p$, from which our formula becomes $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp\cdot 4\cdot(p+1)^2(4pp)=\square$, which divided by $(p+1)^2$, gives $(2p+1)^2(p-1)^2+16p^4=\square$, or $20p^4-4p^3-3pp+2p+1=\square$, but from which nothing can be found.

III. Therefore putting $(q-1)^2=4(p+1)^2$, or $q-1=2(p+1)$ thus $q=2p+3$ and $q+1=2p+4$ or $q+1=2(p+2)$; where our formula divided by $(p+1)^2$, shall become:

$$(2p+3)^2(p-1)^2+16pp(p+2)^2,$$

that is $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; the root of which shall be $3-p+gpp$, of which the square is $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$. Now there we take in order that also the third term vanishes to become $53=6g+1$ or $g=\frac{26}{3}$; thus were the remaining terms divided by p^3 to give $20p+68=ggp-2g$ or $\frac{256}{3}=\frac{496}{9}p$, therefore $p=\frac{48}{31}$ and $q=\frac{189}{31}$, from which again a solution follows.

IV. Putting $q-1=\frac{4}{3}(p-1)$, thus

$$q=\frac{4}{3}p-\frac{1}{3}\text{ and } q+1=\frac{4}{3}p+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(2p+1),$$

therefore our formula divided by $(p-1)^2$ becomes

$$\tfrac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2+\tfrac{64}{81}pp(2p+1)^2,$$

which multiplied by 81, becomes
$9(4p-1)^2(p+1)^2+64pp(2p+1)^2=400p^4+472p^3+73pp-54p+9$,
where thus both the first as well as the last term are squares. Therefore we put the root to be $20pp-9p+3$, from which this square becomes

$$400p^4-360p^3+201pp-54p+9,$$

and hence we obtain $472p+73=-360p+201$, therefore

$$p=\tfrac{2}{13} \text{ and } q=\tfrac{8}{39}-\tfrac{1}{3}=-\tfrac{5}{39}.$$

We can also put $20pp+9p-3$ for the above root, from which the square

$$400p^4+360p^3-120pp+81pp-54p+9,$$

which compared with our formula gives $472p+73=360p-39$, and from that $p=-1$, but which value serves no useful purpose.

V. We can also arrange that our formula can be divided by both the squares $(p+1)^2$ and $(p-1)^2$ at the same time. In order to do this we put $q=\frac{pt+1}{p+t}$, so that

$$q+1=\frac{pt+p+t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

and

$$q-1=\frac{pt-p-t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

from which our formula can be divided by $(p+1)^2(p-1)^2$, now

$$=\frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2}+pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4},$$

which multiplied by the square $(p+t)^4$ must still be a square, namely

$$(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2 \text{ or}$$

$$ttp^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+(tt+1)^2pp+(tt-1)^2pp+2t(tt+1)p+tt,$$

thus where the first as well as the last terms are squares. Therefore we put the root to be $tpp+(tt+1)p-t$, of which the square

$$ttp^4+2t(tt+1)p^3-2ttpp+(tt+1)^2pp-2t(tt+1)p+tt$$

compared with our formula gives:

$$2ttp+(tt+1)^2p+(tt-1)^2p+2t(tt+1)=-2ttp+(tt+1)^2p-2t(tt+1),$$

or $4ttp+(tt-1)^2p+4t(tt+1)=0$, or $(tt+1)^2p+4t(tt+1)=0$, that is $tt+1=-\frac{4t}{p}$, from which we obtain $p=\frac{-4t}{tt+1}$; from this we find $pt+1=\frac{-3tt+1}{tt+1}$ and $p+t=\frac{t^3-3t}{tt+1}$, consequently $q=\frac{-3tt+1}{t^3-3tt}$, where t can be assumed at will.

For example, let $t=2$ thus there becomes $p=-\frac{8}{5}$ and $q=-\frac{11}{2}$, from which we find
$\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{39}{80}$ and $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{117}{44}$, or $x=\frac{3\cdot 13}{4\cdot 4\cdot 5}z$ and $y=\frac{9\cdot 13}{4\cdot 11}z$. Now we take $z=4\cdot 4\cdot 5\cdot 11$, thus there will be $x=3\cdot 13\cdot 11$ and $y=4\cdot 5\cdot 9\cdot 13$: thus the roots of the three squares sought are :

$$x=3\cdot 11\cdot 3=429\ ;\ y=4\cdot 5\cdot 9\cdot 13=2340 \text{ and } z=4\cdot 4\cdot 5\cdot 11=880.$$

Which are still smaller than these found above.

Also from these we have :

$$xx+yy=3^2\cdot 13^2\left(121+3600\right)=3^2\cdot 13^2\cdot 61^2;$$
$$zz+xx=11^2\cdot\left(1521+6400\right)=11^2\cdot 89^2;$$
$$yy+zz=20^2\cdot\left(13689+1936\right)=20^2\cdot 125^2;$$

VI. Finally we note according to this question, that from any one solution whole solution yet another can be found easily: then if these values were found : $x=a,\ y=b$ and $z=c$; so that if
$aa+bb=\square,\ aa+cc=\square,$ and $bb+cc=\square$, thus also the following provide satisfactory values, $x=ab,\ y=bc$ and $z=ac$,
then there becomes

$$xx+yy=aabb+bbcc=bb\left(aa+cc\right)=\square$$
$$xx+zz=aabb+aacc=aa\left(bb+cc\right)=\square$$
$$yy+zz=aacc+bbcc=cc\left(aa+bb\right)=\square.$$

Since we have just found :

$$x=a=3\cdot 11\cdot 13;\ y=b=4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 \text{ und } z=c=4\cdot 4\cdot 5\cdot 11,$$

thus we obtain from those yet these other solutions :

$$x=ab=3\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 13$$
$$y=bc=4\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13$$
$$z=ac=3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 11\cdot 13$$

all three which can be divided by $3\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 13$, and thus can be obtained from the following formulas $x=9\cdot 3,\ y=3\cdot 4\cdot 4\cdot 5$ and $z=4\cdot 11$, that is $x=117, y=240$ and $z=44$, which are smaller again than the original ; but from these there becomes :

$$xx + yy = 71289 = 267^2$$
$$xx + zz = 15625 = 125^2$$
$$yy + zz = 59536 = 244^2.$$

239.

XVIII. Question: Two numbers are required *x* and *y*, so that if we add the one to the square of the other then a square shall be produced, thus so that these two formulas $xx + y$ and $yy + x$ must become squares.

We can put at once $xx + y = pp$ for the first, and derive from that $y = pp - xx$, thus the other formula would become $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$, the solution of which is not immediately apparent.

However we can put equally for both formulas :

$xx + y = (p-x)^2 = pp - 2px + xx$ und $yy + x = (q-y)^2 = qq - 2qy + yy$, from which we obtain now these two equations:

I.) $y + 2px = pp$ and II.) $x + 2qy = qq$,

from which *x* and *y* can be found easily. Namely, we find

$$x = \tfrac{2qpp-qq}{4pq-1} \text{ and } y = \tfrac{2pqq-pp}{4pq-1};$$

where *p* and *q* can be assumed at will.

For example, putting $p = 2$ and $q = 3$, thus we obtain these two numbers sought $x = \frac{15}{23}$ and $y = \frac{32}{23}$, hence then there will be

$$xx + y = \tfrac{225}{529} + \tfrac{32}{23} = \tfrac{961}{529} = \left(\tfrac{31}{23}\right)^2 \text{ and } yy + x = \tfrac{1024}{529} + \tfrac{15}{23} = \left(\tfrac{37}{23}\right)^2.$$

Further, taking $p = 1$ and $q = 3$, thus there becomes $x = -\frac{3}{11}$ and $y = \frac{17}{11}$; but because one number is negative, thus it is not possible to allow this solution to be valid.

Putting $p = 1$ and $q = \frac{3}{2}$, thus $x = \frac{3}{20}$ and $y = \frac{7}{10}$, since then there becomes

$$2xx + y = \tfrac{9}{400} + \tfrac{7}{10} = \tfrac{289}{400} = \left(\tfrac{17}{20}\right)^2 \text{ and } yy + x = \tfrac{49}{100} + \tfrac{3}{20} = \tfrac{64}{100} = \left(\tfrac{8}{10}\right)^2.$$

240.

XIX. Question: To find two numbers of which the sum shall be a square and the sum of their squares shall be a biquadratic.

These numbers shall be *x* and *y* and because $xx + yy$ must be a biquadratic, thus we make the same initially to be a square, which happens if $x = pp - qq$ and $y = 2pq$, thus there becomes $xx + yy = (pp+qq)^2$. Now from that this must be a biquadratic, thus $pp+qq$ must be as a square, therefore we put further $p = rr - ss$ und $q = 2rs$, thus there becomes $pp+qq = (rr+ss)^2$; consequently $xx + yy = (rr+ss)^4$ and thus this is a biquadratic; as then however there becomes

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 \text{ and } y = 4r^3s - 4rs^3.$$

Thus it yet remains, that this formula $x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4$ is a square, of which we can put the root to be $rr + 2rs + ss$, and thus our formula equals this square : $r^4 + 4r^3s + 6rrss + 4rs^3 + s^4$, where both the first and last terms cancel, now the remaining terms divided by *rss* give $6r + 4s = -6r - 4s$ or $12r + 8s = 0$: thus $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$; or the root can be put also to be $rr - 2rs + ss$, from which the fourth term vanishes; since now the square of this is $r^4 - 4r^3s + 6rrss - 4rs^3 + s^4$, thus the remaining terms divided by *rrs* give $4r - 6s = -4r + 6s$, or $8r = 12s$, consequently $r = \frac{3}{2}s$; now if $r = 3$ and $s = 2$ thus there would be $x = -119$, negative.

Further let us put $r = \frac{3}{2}s + t$, thus for our formula

$$rr = \frac{9}{4}ss + 3st + tt,\ r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{8}sst + \frac{9}{2}stt + t^3$$

consequently,

$$\begin{aligned}
r^4 &= \tfrac{81}{16}s^4 + \tfrac{27}{2}s^3t + \tfrac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4\\
4r^3s &= \tfrac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3\\
-6rrss &= -\tfrac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt\\
-4rs^3 &= -s^4 6s^4 - 4s^3t\\
+s^4 &= +s^4
\end{aligned}$$

thus our formula $$\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4$$

which must be a square, and thus also must be multiplied by 16 ; there we obtain this formula $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$; the root thereof we put $ss + 148st - 4tt$, of which the square is

$$s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$$

Here both the first two and the last terms are removed, now the remaining terms divided by *stt* give $21896s - 1184t = 408s + 160t$ and thus

$$\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}.$$

Thus taking $s = 84$ and $t = 1343$, consequently $r = 1469$; and from these numbers $r = 1469$ and $s = 84$ we find:

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761 \text{ and } y = 1061652293520.$$

CAPITEL 14

AUFLÖSUNG EINIGER FRAGEN DIE ZU DIESEM THEIL DER ANALYTIC GEHÖREN

212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytic vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, so hieher gehören aufzulösen, dahero wir um dieses in ein größeres Licht zu setzen einige dergleichen Fragen hier vorlegen und die Auflösung derselben beyfügen wollen.

213.

I. Frage: Man suche eine Zahl, daß wann man darzu 1 so wohl addirt oder auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme? Setzt man die gesuchte Zahl *x*, so muß so wohl $x+1$ als auch $x-1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x+1=pp$, so wird $x=pp-1$ und $x-1=pp-2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man setze, die Wurzel davon sey $p-q$, so wird $pp-2=pp-2pq+qq$, wo sich die *pp* aufheben und daraus gefunden wird $p=\frac{qq+2}{2q}$

; daraus man ferner erhält $x=\frac{q^4+4}{4qq}$, wo man *q* nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze dahero $q=\frac{r}{s}$, so erhalten wir $x=\frac{r^4+4s^2}{4rrss}$
wovon wir etliche
kleinere Werthe anzeigen wollen:

wann	$r=1$	2	1	3
und	$s=1$	1	2	1
so wird	$x=\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

214.

II. Frage: Man suche eine Zahl *x*, daß wann man dazu 2 beliebige Zahlen als z. E. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also diese zwey Formeln $x+4$ und $x+7$ Quadrate werden; man setze dahero für die erstere $x+4=pp$, so wird $x=pp-4$, die andere Formel aber wird $x+7=pp+3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel davon $=p+q$, so wird $pp+3=pp+2pq+qq$, woraus gefunden wird $p = \frac{3-qq}{2q}$ folglich $x = \frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Setzen wir für q ein Bruch als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4-22qq+q^4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige gantze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r=1$ und $s=1$, so wird $x=-3$, und daraus wird $x+4=1$ und $x+7=4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s=2$ und $r=1$, da bekommt man $x=\frac{57}{16}$; woraus wird $x+4=\frac{121}{16}$ und $x+7=\frac{169}{16}$; will man ferner setzen $s=3$ und $r=1$, so bekommt man $x=\frac{133}{9}$, woraus $x+4=\frac{169}{9}$, und $x+7=\frac{196}{9}$. Soll das letzte Gleid das mittlere überwiegen, so setze man $r=5$ und $s=1$, da wird $x=\frac{21}{25}$, und daraus $x+4=\frac{121}{25}$ und $x+7=\frac{196}{25}$.

215.

III. Frage: Man suche einen solchen Bruch *x*, daß wann man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Da diese beyden Formeln $1+x$ und $1-x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1+x=pp$, da wird $x=pp-1$ und die andere Formel $1-x=2-pp$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, da solches geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich $p=1$, deswegen setze man $p=1-q$, also daß $x=qq-2q$, so wird unsere Formel $2-pp=1+2q-qq$, davon setze man die Wurzel $=1-qr$, so bekommt man $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$; hieraus $2-q=-2r+qrr$ und $q=\frac{2r+2}{rr+1}$; hieraus wird $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$ weil r ein Bruch ist, so setze man $r=\frac{t}{u}$, so wird $x=\frac{4tu^2-4t^3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$, also muß u gröser seyn als t.

Man setze demnach $u=2$ und $t=1$, so wird $x=\frac{24}{25}$; setzt man $u=3$ und $t=2$, so wird $x=\frac{120}{169}$, und daraus $1+x=\frac{289}{169}$ und $1-x=\frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate sind.

216.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen *x*, welche so wohl zu 10 addirt als von 10 subtrahirt Quadrate hhervorbringen?

Es müßen also diese Formeln $10+x$ und $10-x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedencke man, daß auch das Product dieser Formeln einQuadrat seyn müße, nemlich $100-xx$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel

$=10-px$, so wird $100-xx=100-20px+ppxx$ und allso $x=\frac{20p}{pp+1}$; hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wann aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eines seyn; nun aber wird die erste

$$10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1};$$

und weil $pp+2p+1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch dieser Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10pp+10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist wann $p=3$ und deswegen setze man $p=3+q$, so bekommt man $100+60q+10qq$; davon setze man die Wurzel $10+qt$, so wird
$100+60q+10qq=100+20qt+qqtt$, daraus
$q=\frac{60-20t}{tt-10}$, daraus $p=3+q$ und $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Setzt man $t=3$, so wird $q=0$ und $p=3$ folglich $x=6$, dahero wird $10+x=16$ und $10-x=4$. Es sey aber $t=1$, so wird $q=40$ und $p=-\frac{13}{9}$ und $x=-\frac{234}{25}$; es ist aber gleich viel zu setzen $x=+\frac{234}{25}$, und dann wird $10+x=\frac{484}{25}$ und $10-x=\frac{16}{25}$, welche beyde Quadrate sind.

217.

Anmerckung: Wollte man diese Frage allgemein machen und für eine jegliche gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, also daß so wohl $a+x$ als $a-x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung öfters unmöglich werden, nemlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwey Quadraten ist. Aber wir haben schon oben [§ 168] gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwey Quadraten, oder in dieser Form $xx+yy$ enthalten sind:
1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, die übrigen also, welche gleichfals bis 50 sind:
3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,
nicht können in zwey Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztem Zahlen wäre, so offt würde auch die Frage unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns setzen $a+x=pp$ und $a-x=qq$, und da giebt die Addition $2a=pp+qq$; also daß $2a$ eine Summe von zwey Quadraten seyn muß, ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn, wann dahero a keine Summe von zwey Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a+x$ und $a-x$ zugleich Quadrate seyn können.

218.

Wann demnach $a = 3$ wäre, so würde die Frage unmöglich seyn, und das deswegen, weil 3 keine Summe von zwey Quadraten ist; man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, dann wäre $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$ und man multiplicirte mit $qqss$, so würde $3qqss = ppss + qqrr$, wo $ppss + qqrr$ eine Summe von zwey Quadraten ist, welche sich durch 3 theilen ließe; wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine anderen Theiler haben könne, als welche selbst solche Summen sind.

Es laßen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet: daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß wann eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten ist, solches auch nicht in Brüchen geschehen könne; ist aber die Zahl a in gantzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten seyn, welches wir zeigen wollen.

219.

V. Frage: Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten ist, auf unendlich vielerley Art in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen?

Die vorgegebene Zahl sey demnach und man soll zwey andere Quadraten, als xx und yy suchen, deren Summe $xx + yy$ gleich sey der Zahl $ff + gg$, also daß $xx + yy = ff + gg$. Hier ist nun so gleich klar, daß wann x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müße als g. Man setze dahero $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird

$$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg,$$

wo sich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen laßen. Dahero wird $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$ oder $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{pp + qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq} \text{ und } y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq},$$

wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, also daß $f = 1$ und $g = 1$ so wird $xx + yy = 2$, wann $x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq}$ und $y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq}$ setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

220.

VI. Frage: Wann die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten ist, solche Zahlen x zu finden, daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde?

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze

$$13 + x = pp \text{ und } 13 - x = qq,$$

so giebt erstlich die Addition $26 = pp + qq$, die Subtraction aber $2x = pp - qq$: also müßen *p* und *q* so beschaffen seyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für *pp*, das kleinere aber für *qq* genommen wird. Hieraus bekömmt man erstlich $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unendlich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelößt werden. Dann weil $f = 5$ und $g = 1$, wann wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben *p* und *q* schreiben *t* und *u*, vor *x* und *y* aber die Buchstaben *p* und *q*, so finden wir

$$p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu} \text{ und } q = \frac{10tu - tt + uu}{tt + uu}.$$

Nimmt man nun für *t* und *u* Zahlen nach Belieben an und bestimmt daraus die Buchstaben *p* und *q*, so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{pp - qq}{2}$

Es sey z.E $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = -\frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $pp - qq = -\frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a = cc + dd$, die gesuchte aber $= z$, also daß diese Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden sollten.

Nun setze man

$$a + z = xx \text{ und } a - z = yy,$$

so wird erstlich $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$, und hernach $2z = xx - yy$. Es mußen also die Quadrate *xx* und *yy* so beschaffen seyn, daß $xx + yy = 2(cc + dd)$, wo $2(cc + dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man setze Kurtze halber $c + d = f$ und $c - d = g$: also daß seyn muß $xx + yy = ff + gg$, dieses geschieht aber aus dem obigen, wann man nimmt

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq} \text{ und } y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}.$$

Hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wann man nimmt $p = 1$ und $q = 1$, dann daraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar

$$cc + dd + 2cd = (c + d)^2 \text{ und } cc + dd - 2cd = (c - d)^2$$

Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p=2$ und $q=1$, da wird $x=\frac{c-7d}{5}$, und $y=\frac{7c+d}{5}$ wo so wohl *c* und *d*, als *x* und *y* negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun *x* größer seyn soll als *y*, so nehme man *d* negativ und da wird $x=\frac{c+7d}{5}$, und $y=\frac{7c-d}{5}$ Hieraus $z=\frac{24dd+14cd-24cc}{25}$, welcher Werth zu $a=cc+dd$ addirt, giebt $\frac{cc+14cd+49dd}{25}$, wovon die Quadrat -Wurzel ist $\frac{c+7dd}{5}$. Subtrahirt man aber *z* von *a* so bleibt $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{7c-dd}{5}$; jene ist nemlich *x*, diese aber *y*.

222.

VII. Frage: Man suche eine Zahl *x*, daß wann so wohl zu derselben selbst als zu ihrem Quadrat *xx*, eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Es mußen also diese beyde Formeln $x+1$ und $xx+1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze dahero für die erste $x+1=pp$, so wird $x=pp-1$, und die zweyte Formel $xx+1=p^4-2pp+2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: dieselbe aber ist von der Art, daß keine Auflösung zu finden, wofern nicht schon ein Fall bekant ist; ein solcher Fall aber falt so gleich in die Augen, nemlich wo $p=1$. Man setze dahero $p=1+q$, so wird

$$xx+1=1+4qq+4q^3+q^4,$$

welches auf vielerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann.

I. Man setze erstlich die Wurzel davon $1+qq$, so wird

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4$$

daraus wird $4q+4qq=2q$ oder $4+4q=2$ und $q=-\frac{1}{2}$, folglich $p=\frac{1}{2}$ und $x=-\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1-qq$, so wird

$$1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4,$$

und daher $q=-\frac{3}{2}$ und $p=-\frac{1}{2}$, hieraus $x=-\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1+2q+qq$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4,$$

daraus wird $q=-2$ und $p=-1$, daher $x=0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1-2q-qq$, so wird

$$1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+6qq+4q^3+q^4$$

daraus wird $q=-2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel

$1+2qq$, da wird

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+4qq+4q^4,$$

und daraus $q=\frac{4}{3}$ und $p=\frac{7}{3}$; folglich $x=\frac{40}{9}$; woraus folgt

$$x+1=\frac{49}{9}=\left(\frac{7}{3}\right)^2 \text{ und } xx+1=\frac{1681}{81}=\left(\frac{41}{9}\right)^2.$$

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen z. E. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner setzen $q=-\frac{1}{2}+r$; daraus aber würde

$$p=\frac{1}{2}+r;\ pp=\frac{1}{4}+r+rr \text{ und } p^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}rr+2r^3+r^4,$$

folglich unsere Formel $\frac{25}{16}-\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}rr+2r^3+r^4$ welche ein Quadrat seyn soll, und dahero auch mit 16 multiplicirt, nemlich

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4$$

Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $=5+fr\pm 4rr$, also daß

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr\pm 40rr+ffrr\pm 8fr^3+16r^4.$$

Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wann $-24=10f$ und also $f=-\frac{12}{5}$, alsdann geben die übrigen Glieder durch rr dividirt

$$-8+32r=\pm 40+ff\pm 8fr.$$

Für das obere Zeichen hat man $-8+32r=40+ff+8fr$, und daraus $r=\frac{48+ff}{32-8f}$. Da nun $f=-\frac{12}{5}$, so wird $r=\frac{21}{20}$, folglich $p=\frac{31}{20}$ und $x=\frac{561}{400}$, daraus wird $x+1=\left(\frac{31}{20}\right)^2$ und $xx+1=\left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8+32r=-40+ff-8fr$, und daraus $r=\frac{ff-32}{32+8f}$. Da nun $f=-\frac{12}{5}$, so wird $r=-\frac{41}{20}$, folgich $p=-\frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entspringt.

III. Es sey die Wurzel $4rr+4r\pm 5$, also daß

$$16r^4+32r^3-8rr-24r+25=16r^4+32r^3\pm 40rr+16rr\pm 40r+25,$$

wo die zwey ersten und die gantz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt geben $-8r-24=\pm 40r\ 16r\pm 40$, oder

$$-24r-24=\pm 40r\pm 40.$$

Wann das obere Zeichen gilt, so wird $-24r-24=40r+40$, oder $0=64r+64$, oder $0=r+1$, das ist $r=-1$ und $p=-\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gehabt haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5+fr+grr$ und bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun

$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr+10grr+ffrr+2fgr^3+ggr^4$, so wird erstlich $-24=10f$ und also $f=-12$ ferner $-8=10g+ff$, und also $g=\frac{-8-ff}{10}$, oder $g=-\frac{344}{250}=-\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32+16r=2fg+ggr$ und daraus $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. Hier wird der Zehler $2fg-32 = \frac{24\cdot172-32\cdot625}{5\cdot125}=\frac{-32\cdot496}{625}$, oder dieser Zehler $=\frac{-16\cdot32\cdot31}{625}$, der Nenner aber giebt $16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{328\cdot672}{125\cdot125}$, oder $16-gg=\frac{8\cdot32\cdot41\cdot21}{25\cdot625}$, daraus wird $r=-\frac{1550}{861}$, hieraus $p=-\frac{2239}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nemlich $x=pp-1$, gefunden.

223.

VIII. Frage: Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt ein Quadrat hervorbringe?

Es müßen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nemlich $x+a$, $x+b$ und $x+c$.

Man setze für die erstere $x+a=zz$, also daß $x=zz-a$, so werden die beyden andern Formeln $zz+b-a$ und $zz+c-a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll. Hievon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr öfters unmöglich ist, und die Möglichkeit beruhet einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b-a$ und $c-a$. Dann wäre z. E. $b-a=1$ und $c-a=-1$, das ist $b=a+1$ und $c=a-1$, so müßten $zz+1$ und $zz-1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze dahero $z=\frac{p}{q}$, so würden diese zwey Formeln Quadrate seyn müßen, $pp+qq$ und $pp-qq$, folglich müßte auch ihr Product, nemlich p^4-q^4, ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey ist oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b-a=2$, und $c-a=2$, das ist $b=a+2$ und $c=a-2$, so müßten, wann man wiederum setzte $z=\frac{p}{q}$, diese zwey Formeln $pp+2qq$ und $pp-2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product p^4-4q^4, welches ebenfals nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b-a=m$ und $c-a=n$, ferner auch $z=\frac{p}{q}$, so müßen diese Formeln Quadrate seyn $pp+mqq$ und $pp+nqq$; welches wie wir eben gesehen unmöglich ist, wann entweder $m=+1$ und $n=-1$, oder wann $m=+2$ und $n=-2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich wann $m=ff$ und $n=ff$. Dann als dann würde das Product derselben $p^4 - f^4q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten seyn, welche niemahls ein Quadrat werden kann.

Eben so wann $m = 2ff$ und $n = -2ff$, so können auch diese Formeln $pp + 2ffqq$ und $pp - 2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich wann man setzt $fq = r$, diese Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, also daß diese Formeln $pp + qq$ und $pp + 2qq$ Quadrate seyn müßten, so setze man $pp + qq = rr$ und $pp + 2qq = ss$; da wird aus der ersteren $pp = rr - qq$, und also die andere $rr + qq = ss$; daher müßte so wohl $rr - qq$ als $rr + qq$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun zur Gnüge, daß es nicht leicht ist solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einige Mittel solche Werthe für m und n zu finden ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder solcher Gestalt ausfündig mache.

Man setzt $ff + mgg = hh$ und $ff + ngg = kk$, so bekommt man aus der erstern $m = \frac{hh-ff}{gg}$, und aus der andern $n = \frac{kk-ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n solche Werthe, da die Auflösung möglich ist.

Es sey z. E. $h = 3, k = 5, f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Anjetzt sind wir versichert, daß es möglich sey die zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadrate zu machen, weil solches geschieht wann $p = 1$ und $q = 2$. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat wann $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; dann da wird $pp + 2qq = (rr + 2ss)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $pp + 6qq = r^4 + 20rrss + 4s^4$, wovon ein Fall bekant ist, da dieselbe ein Quadrat wird, nemlich wann $p = 1$ und $q = 2$, und welches geschieht wann $r = 1$ und $s = 1$, oder wann überhaupt $r = s$; dann da wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wißen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $rr = ss + 2st + tt$ und $r^4 = s^4 + 4sst + 6sstt + 4st^3 + t^4$, dahero unsere Formel seyn wird $25s^4 + 44s^3t + 26sstt + 4st^3 + t^4$, davon sey die Wurzel $5ss + fst + tt$, wovon das Quadrat ist

$$25s^4 + 10fs^3t + 10sstt + ffsstt + 2fst^3 + t^4,$$

wo sich die ersten und lezten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geschieht wann $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdann geben die übrigen durch sst

dividirt diese Gleichung $44s+26t=10fs+10t+fft=20s+14t$, oder $2s=-t$ und $\frac{s}{t}=-\frac{1}{2}$, dahero wird $s=-1$ und $t=2$, oder $t=-2s$, folglich $r=-s$ und $rr=ss$, welches der bekante Fall selbst ist.
Man nehme *f* so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben, welches geschieht wann $44=10f$, oder $f=\frac{22}{5}$; da dann die übrigen Glieder durch *stt* dividirt geben $26s+4t=10s+ffs+2ft$, das ist $-\frac{84}{25}s=\frac{24}{5}t$, folglich $t=-\frac{7}{10}s$ und also $r=s+t=\frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s}=\frac{3}{10}$: dahero $r=3$, und $s=10$; hieraus bekommen wir $p=2ss-rr=191$ und $q=2rs=60$, woraus unsere Formeln werden: $pp+2qq=43681=209^2$, und $pp+6qq=58081=241^2$.

224.

Anmerckung: Dergleichen Zahlen für *m* und *n*, da sich unsere Formeln zu Quadrate machen laßen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden. Es ist aber zu mercken, daß die Verhältniß dieser Zahlen *m* und *n*nach Belieben angenommen werden kann. Es sey diese Verhältniß wie *a* zu *b*,und man setze $m=az$ und $n=bz$, so kommt es nun darauf an wie man *z* bestimmen soll, daß diese beyde Formeln $pp+azqq$ und $pp+bzqq$ zu Quadraten gemacht werden können? welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

225.

IX. Frage: Wann *a* und *b* gegebene Zahlen sind; die Zahl *z* zu finden, daß sich diese beyde Formeln $pp+azqq$ und $pp+bzqq$ zu Quadraten machen laßen, und zugleich die kleinsten Werthe für *p* und *q* zu bestimmen?

Man setze $pp+azqq=rr$ und $pp+bzqq=ss$, und man multiplicire die erstere mit *b* die andere aber mit *a*, so giebt die Differenz derselben diese Gleichung $(b-a)pp=brr-ass$ und also $pp=\frac{br-ass}{a-s}$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß. Da nun solches geschieht wann $r=s$, so setze man um die Bruche weg zu bringen $r=s+(b-a)t$, so wird

$$pp=\frac{brr-ass}{a-s}=\frac{bss+2b(b-a)st+b(b-a)^2-ass}{b-a}$$
$$=\frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}=ss+2bst+b(b-a)tt$$

Nun setze man $p=s+\frac{x}{y}t$, so wird

$$pp=ss+\frac{2x}{y}\cdot st+\frac{xx}{yy}=ss+2bst+b(b-a)tt$$

wo sich die *ss* aufheben, die übrigen Glieder aber durch *t* dividirt und mit

yy multiplicirt geben $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, daraus

$$t = \frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}, \text{ dahero } \frac{t}{s} = \frac{2xy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$$

Hieraus bekommt man $t = 2xy - 2byy$ und $s = b(b-a)yy - xx$, ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, und daraus

$$p = s + \frac{x}{y}\cdot t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy.$$

Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so ist noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu diesem Ende die erste Gleichung $pp + azqq = rr$ von der andern $pp + bzqq = ss$, so giebt der Rest $zqq(b-a) = ss - rr = (s+r)\cdot(s-r)$. Da nun $s + r = 2(b-a)xy - 2xx$ und $s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$, oder $s + r = 2x((b-a)y - x)$ und $s - r = 2(b-a)y(by-x)$, so wird

$$(b-a)zqq = 2x((b-a)y-x)\cdot 2(b-a)(by-x)$$

oder

$$zqq = 2x((b-a)y-x)\cdot 2y(by-x)$$

oder

$$zqq = 4xy((b-a)y-x)(by-x);$$

folglich

$$z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}$$

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, dadurch sich der Zehler theilen läßt; für p aber haben wir schon gefunden

$$p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy,$$

woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wann man setzet: $x = v + by$ oder $x - by = v$; dann da wird $p = vv - abyy$, und

$$z = \frac{4(v+by)\cdot y\cdot v(v+ay)}{qq} \text{ oder } z = \frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq},$$

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdann findet man erstlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, so in dem Zehler enthalten ist, woraus sich so dann z ergiebt; da dann $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = vv - abyy$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln:

I.) $$pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v+ay)(v+by),$$

welche ein Quadrat ist, davon die Wurzel $r = -vv - 2avy - abyy$ ist.

II.) Die zweyte Formel aber wird

$$pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v+ay)(v+by),$$

welches auch ein Quadrat ist, davon die Wurzel $s = -vv - 2bvy - abyy$; wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können; dieses wird dienlich seyn mit einigen Exempeln zu erläutern.

226.

I. Exempel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z allso daß diese zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können? die erstere nemlich $= rr$, und die andere $= ss$.

Hier wird $p = vv + yy$ und man hat also um z zu finden diese Formel zu betrachten $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, da wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folget:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v - y$	1	1	3	1	7	7
$v + y$	3	5	5	9	25	9
zqq	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 30$	$16 \cdot 15$	$9 \cdot 16 \cdot 5$	$36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 7$	$16 \cdot 9 \cdot 14$
qq	4	4	16	$9 \cdot 16$	$36 \cdot 25 \cdot 16$	$16 \cdot 9$
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadrate gemacht ·werden können:

I. Können diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, welches geschieht, wann $p = 5$ und $q = 2$. Dann da wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 30qq$ und $pp + 30qq$, welches geschieht wann $p = 13$ und $q = 2$; dann da wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $169 + 120 = 289$.

III. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 15qq$ und $pp + 15qq$, welches geschieht wann $p = 17$ und $q = 4$, dann da wird die erste $289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 5qq$ und $pp + 5qq$, welches geschieht wann $p = 41$ und $q = 12$, dann da wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp-7qq$ und $pp+7qq$, welches geschieht wann $p=337$ und $q=120$; dann da wird die erste $113569-100800=12769=113^2$, und die andere $113569+100800=214369=463^2$.

VI. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp-14qq$ und $pp+14qq$, welches geschieht wann $p=65$ und $q=12$; dann da wird die erste $4225-2016=2209=47^2$ und die andere $4225+2016=6241=79^2$.

227.

II. Exempel: Wann die beyden Zahlen *m* und *n* sich verhalten wie 1:2, das ist wann $a=1$ und $b=2$, also $m=z$ und $n=2z$, so sollen die Werthe für *z* gefunden werden, so daß diese Formeln $pp+zqq$ und $pp+2zqq$ zu Quadraten gemacht werden können. Man hat nicht nöthig hier die obigen zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Exempel kann so gleich auf das vorige gebracht werden. Dann setzt man $pp+zqq=rr$ und $pp+2zqq=ss$, so bekommt man aus der erstern $pp=rr-zqq$ welcher Werth für *pp* in der zweyten gesetzt giebt $tt+zqq=ss$; folglich müßen diese zwey Formeln $rr-zqq$ und $rr+zqq$ zu Quadrate gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Exempels ist. Also hat man auch hier für *z* folgende Werthe $6, 30, 15, 5, 7, 14$ etc.

Eine solche Verwandelung kann auch allgemein angestellt werden. Wann wir annehmen, daß diese zwey Formeln $pp+mqq$ und $pp+nqq$ zu Quadraten gemacht werden können, so laßt uns setzen $pp+mqq=rr$ und $pp+nqq=ss$, so giebt die erstere $pp=rr-mqq$, und also die zweyte $ss=rr-mqq+nqq$ oder $rr+(n-m)qq=ss$; wann dahero die ersteren Formeln möglich sind, so sind auch diese $rr-mqq$ und $rr+(n-m)qq$ möglich; und da wir *m* und *n* unter sich verwechseln können, so sind auch diese möglich $rr-nqq$ und $rr+(m-n)qq$; sind aber jene Formeln unmöglich so sind auch diese unmöglich.

228.

III. Exempel: Es seyen die Zahlen *m* und *n* wie 1:3, oder $a=1$ und $b=3$, also $m=z$ und $n=3z$, so daß diese Formeln $pp+zqq$ und $pp+3zqq$ zu Quadrate gemacht werden sollen.

Weil hier $a=1$ und $b=3$, so wird die Sache möglich so oft $zqq=4vy(v+y)(v+3y)$, und $p=vv-3yy$.

Man nehme dahero für *v* und *y* folgende Werthe:

	I.	II.	III.	IV.	V.

v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	$16\cdot2$	$4\cdot9\cdot30$	$4\cdot4\cdot35$	$4\cdot9\cdot25\cdot4\cdot2$	$4\cdot9\cdot16\cdot25\cdot43$
qq	16	$4\cdot9$	$4\cdot4$	$4\cdot4\cdot9\cdot25$	$4\cdot9\cdot16\cdot25$
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	25	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z=2$, daraus wir auf zweyerley Art diese Formeln $pp+2qq$ und $pp+6qq$ zu Quadraten machen können, erstlich geschieht dieses wann $p=2$ und $q=4$, folglich auch wann $p=1$ und $q=2$; dann da wird $pp+2qq=9$ und $pp+6qq=25$. Hernach geschieht es auch wann $p=191$ und $q=60$, dann da wird $pp+2qq=(209)^2$ und $pp+6qq=(241)^2$. Ob aber nicht auch seyn könnte $z=1$? welches geschehen würde wann für zqq ein Quadrat herauskäme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun diese Frage erörtern, ob diese zwey Formeln $pp+qq$ und $pp+3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229.

Man soll allso untersuchen ob diese zwey Formeln $pp+qq$ und $pp+3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? Man setze $pp+qq=rr$ und $pp+3qq=ss$, so sind folgende Puncte zu bedentken:

I. Können die Zahlen *p* und *q* als untheilbar unter sich angesehen werden; dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wann *p* und *q* dadurch getheilt würde.

II. Kann *p* keine gerade Zahl seyn; dann da würde *q* ungerad, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art $4n+3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; dahero ist *p* nothwendig ungerad, und *pp* eine Zahl von dieser Art $8n+1$.

III. Da nun *p* ungerad ist, so muß aus der ersten Form *q* nicht nur gerad, sondern so gar durch 4 theilbar seyn, damit *qq* eine Zahl werde von dieser Art 16*n;* und $pp+qq$ von dieser Art $8n+1$.

IV. Ferner kann *p* nicht durch 3 theilbar seyn; dann da würde *pp* sich durch 9 theilen laßen *qq* aber nicht, folglich 3*qq* nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $pp+3qq$ durch 3 nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl *p* nicht durch 3 theilbar seyn, dahero *pp* von der Art $3n+1$ seyn wird.

V. Da sich *p* nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich *q* durch 3 theilen laßen; dann wäre *q* nicht durch 3 theilbar, so wäre *qq* eine Zahl von dieser Art $3n+1$, und dahero $pp+qq$ von dieser Art $3n+2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß *q* durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann *p* nicht durch 5 theilbar seyn; dann wäre dieses, so wäre *q* nicht durch 5 theilbar und *qq* eine Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$, also *3qq* eine Zahl von der Art $5n+3$ oder $5n+2$, und von welcher Art auch $pp+3qq$ seyn würde, also könnte diese Formel kein Quadrat seyn; dahero dann *p* nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also *pp* ein Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$ seyn muß.

VII. Da nun *p* nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich *q* durch 5 theilen laße oder nicht? Wäre *q* nicht theilbar durch 5, so wäre· *3qq* von dieser Art $5n+2$ oder $5n+3$, wie wir gesehen haben, und da *pp* entweder $5n+1$ oder $5n+4$, so würde $pp+3qq$ seyn entweder $5n+1$ oder $5n+4$ eben wie *pp;* es sey $pp=5n+1$, so müßte seyn $qq=5n+4$, weil sonst $pp+qq$ kein Quadrat seyn könnte: alsdann aber wäre $3qq=5n+2$, und $pp+3qq=5n+3$, welches kein Quadrat sein kann; wäre aber $pp=5n+4$, so müßte seyn $qq=5n+1$ und $3qq=5n+3$ folglich $pp+3qq=5n+2$, welches auch kein Quadrat seyn kann: woraus folget daß *qq* durch 5 theibar seyn müße.

VIII. Da nun *q* erstlich durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß *q* eine solche Zahl seyn $4\cdot 3\cdot 5m$ oder $q=60m$; dahero unsere Formeln seyn würden $pp+3600mm=rr$ und $pp+10800mm=ss$; da dann die erste von der zweyten subtrahirt giebt $7200mm=ss-rr=(s+r)(s-r)$; also daß $s+r$ und $s-r$ Factores seyn müßen von 7200*mm*: wobey zu mercken daß so wohl *s* als *r* ungerade Zahlen seyn müßen, und dabey unter sich untheilbar.

IX. Es sey demnach $7200mm=4fg$ oder die Factores davon 2*f* und 2*g*, und man setze $s+r=2f$ und $s-r=2g$, so wird $s=f+g$ und $r=f-g$, da dann *f* und *g* unter sich untheilbar seyn müßen, und die eine gerad und die andere ungerad. Da nun $fg=1800mm$, so muß man 1800*mm* in zwey Factores zerlegen, deren einer gerad, der andere aber ungerad sey, beyde aber unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu mercken, daß da $rr=pp+qq$ und also *r* ein Theiler von $pp+qq$, die Zahl $r=f-g$ auch eine Summe von zwey Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerad, in der Form $4n+1$ enthalten seyn müße.

XI. Nehmen wir erstlich an $m=1$, so wird $fg=1800=8\cdot 9\cdot 25$, woraus folgende Zerlegungen entspringen: $f=1800$ und $g=1$, oder $f=200$ und $g=9$, oder $f=72$ und $g=25$, oder $f=225$ und $g=8$; aus der ersten wird $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; dahero die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schließen kann, daß der größere Factor ungerad, der kleinere aber gerad sein müße; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, daher nimmt man $f = 225$ und $g = 32$, also daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine Summe von zwey Quadraten ist und also verdienet probirt zu werden: da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird weil $pp = rr - qq = (r + q) \cdot (r - q)$, allso $r + q = 313$ und $r - q = 73$, allso sieht man wohl daß für pp kein Quadrat heraus komme, weil diese Factoren nicht Quadrate sind.
Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergebens seyn, wie wir noch zeigen wollen.

230.

Lehr-Satz. Es ist nicht möglich, daß diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewis keines.

Welches also bewiesen wird.

Da p ungerad und q gerad ist, wie wir gesehen haben, so kann $pp + qq$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wann $q = 2rs$ und $p = rr - ss$; die andere aber $pp + 3qq$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wann $q = 2tu$ und $p = tt - 3uu$ oder $p = 3uu - tt$. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber $t = ac$ und $u = bd$, so wird für die erstere $p = aabb - ccdd$, für die andere aber $p = aacc - 3bbdd$, oder $p = 3bbdd - aacc$, welche beyde Werthe einerley seyn müßen; dahero wir bekommen entweder $aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, oder $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$; wobey zu mercken daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müßen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders erwegen; aus dem erstern erhalten wir $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$ oder $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa+dd}{aa+3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß. Hier kann aber der Zehler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz darzwischen $2dd$ ist. Sollte dahero 2 ein gemeiner Theiler seyn, so müßte so wohl $\frac{aa+dd}{2}$ als auch $\frac{aa+3dd}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem

Fall ungerad und also ihre Quadrate von der Form $8n+1$, dahero die letztere Formel $\frac{aa+3dd}{2}$ diese Form $4n+2$ haben wird und kein Quadrat seyn kann; folglich kann 2 kein gemeiner Theiler seyn, sondern der Zehler $aa+dd$ und der Nenner $aa+3dd$ sind unter sich untheilbar; dahero ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß wann die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleiche Formeln Quadrate seyn würden, und so könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, so kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieser Schluß ist aber nur in so fern richtig, als auch der obige zweyte Fall $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$ auf dergleichen führt; hieraus aber wird $aabb+aacc=3bbdd+ccdd$, oder $aa(bb+cc)=dd(3bb+cc)$, und dahero $\frac{aa}{dd}=\frac{3bb+cc}{bb+cc}=\frac{cc+3bb}{cc+bb}$, whelcher Bruch ein Quadrat sein muß, allso daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; indem wann es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da $pp+qq$ und $pp+3qq$ Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

231.

XII. Frage: Man soll drey solche Zahlen finden *x*, *y* und *z*, so daß wann je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\, xy+1;\ \text{II.)}\, xz+1;\ \text{III.)}\, yz+1.$$

Man setze vor die beyden letztern $xz+1=pp$ und $yz+1=qq$, so findet man daraus $x=\frac{pp-1}{z}$ und $y=\frac{qq-1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit *zz* multiplicirt, das ist $(pp-1)(qq-1)+zz$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Dann setzt man die Wurzel davon $=z+r$, so bekommt man $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, und dahero $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, wo für *p*, *q* und *r* beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sey z. E. $r=-pq-1$, so wird $rr=ppqq+2pq+1$ und

$$\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2},$$

folglich

$$x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2} \text{ und } y=\frac{2(pq+q)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

Will man aber gantze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel

$xy+1=pp$ und nehme $z=x+y+q$, so wird die zweyte Formel

$$xx+xy+xq+1 = xx+qx+pp,$$

die dritte aber wird

$$xy+yy+qy+1=yy+qy+pp,$$

welche offenbar Quadrate werden, wann man nimmt $q=\pm 2p$; dann da wird die zweyte $xx\pm 2px+pp$ davon die Wurzel ist $x\pm p$, die dritte aber wird $yy\pm 2py+pp$ davon die Wurzel ist $y\pm p$; dahero haben wir diese sehr nette Auflösung: $xy+1=pp$ oder $xy=pp-1$, welches für eine jede Zahl, so für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z=x+y+2p$ oder $z=x+y-2p$, welches wir durch folgende Exempel erläutern wollen:

I. Man nehme $p=3$, so wird $pp-1=8$; nun setze man $x=2$ und $y=4$, so wird entweder $z=12$ oder $z=0$: und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p=4$, so wird $pp-1=15$; nun nehme man $x=5$ und $y=3$, so wird $z=16$ oder $z=0$: und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p=5$, so wird $pp-1=24$; nun nehme man $x=3$ und $y=8$, so wird $z=21$, oder auch $z=1$: woraus folgende Zahlen entspringen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232.

XIII. Frage: Man suche drey gantze Zahlen *x*, *y* und *z*, so daß wann zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl *a* addirt wird, jedes mahl ein Quadrat heraus komme?

Es müßen also diese drey Formeln Quadrate werden:

$$\text{I.)}\, xy+a;\quad \text{II.)}\, xz+a;\quad \text{III.)}\, yz+a.$$

Nun setze man für die erste $xy+a=pp$, und nehme $z=x+y+q$, so wird die zweyte $xx+xy+xq+a=xx+qx+pp$ und die dritte $xy+yy+yq+a=yy+qy+pp$, welche beyde Quadrate werden, wann $q=\pm 2p$; also daß $z=x+y\pm 2p$, und dahero für *z* zwey Werthe gefunden werden können.

233.

XIV. Frage: Man verlangt vier gantze Zahlen *x*, *y*, *z* und *v*, so daß wann zum Product aus je zweyen eine gegebene Zahl *a* addirt wird, jedesmahl ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\quad xy+a;\qquad \text{II.)}\ \ xz+a;\qquad \text{III.)}\ \ yz+a;$$
$$\text{IV.)}\ \ xv+a;\qquad \text{V.)}\ \ yv+a;\qquad \text{VI.)}\ \ zv+a.$$

Nun setze man vor die erste $xy+a=pp$ und nehme $z=x+y+2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v=x+y-2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und bleibt also nur noch die sechste übrig, welche seyn wird $xx+2xy+yy-4pp+a$, welche ein Quadrat seyn muß. Da nun $pp=xy+a$, so wird diese letzte Formel $xx-2xy+yy-3a$, folglich müßen noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\quad xy+a=pp \quad \text{und II.)}\quad (x-y)^2-3a.$$

Von der letztern sey die Wurzel $(x-y)-q$, so wird

$$(x-y)^2-3a=(x-y)^2-2q(x-y)+qq,$$

und da wird $-3a=-2q(x-y)+qq$ und folglich $x-y=\frac{qq+3a}{2q}$ oder $x=y+\frac{qq+3a}{2q}$; hieraus wird $pp=yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$. Man nehme $p=y+r$, so wird $pp=yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$, oder $4qry+2qrr=(qq+3a)y+2aq$, oder $2qrr-2aq=(qq+3a)y-4qry$ und $y=\frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß vor x und y gantze Zahlen herauskommen. Dann weil $p=y+r$ so werden auch z und v gantz seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo die Sache mit den gantzen Zahlen noch einige Schwierigkeiten haben könnte; allein es ist zu bemercken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränckt worden, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x+y\pm 2p$ gegeben worden, indem dieselben nothwendig noch viel andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Ende über diese Frage folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wann $xy+a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy-a$, so müßen die Zahlen x und y immer in dieser ähnlichen Form $rr-ass$ enthalten seyn; wann wir demnach setzen $x=bb-acc$ und $y=dd-aee$, so wird $xy=(bd-ace)^2-a(be-cd)^2$. Ist nun $be-cd=\pm 1$, so wird $xy=(bd-ace)^2-a$, und also $xy+a=(be-ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z=ff-agg$ und nehmen die Zahlen f und g allso an, daß $bg-cf=1$ und auch $dg-ef=1$, so werden auch diese Formeln $xz+a$ und $yz+a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch diese Brüche vorstellen $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, und $\frac{f}{g}$, welche demnach also beschaffen seyn müßen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch ausgedrückt werde, dessen Zehler $=1$. Dann da $\frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{be-dc}{ce}$ so muß dessen Zehler, wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gemeldte Bedingung statt finde.

Es sey z. E. der erste $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e}=\frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z=\frac{1}{6}$.

Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgeime Art bestimmen; dann da $\frac{3}{2}-\frac{d}{e}=\frac{3e-2d}{2e}$, so muß seyn, $3e-2d=1$, also $2d=3e-1$ und $d=e+\frac{e-1}{2}$. Man nehme dahero $\frac{e-1}{2}=m$ oder $e=2m+1$, so bekommen wir $d=3m+1$ und unser zweyter Bruch wird seyn $\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$

Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruch der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Exempel beyfügen wollen.

$\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+2}{5m+3}$	$\frac{11m+2}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es gantz leicht dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher mit den beyden erstern g in gleicher Verhältniß steht. Man darf nur setzen $f=b+d$ und $g=c+e$, also daß $\frac{f}{g}=\frac{b+d}{c+e}$, dann da aus den zwey ersten ist $be-cd=\pm 1$ so wird $\frac{f}{g}-\frac{b}{c}=\frac{\pm 1}{cc+ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g}-\frac{d}{e}=\frac{be-cd}{ee+ce}=\frac{\pm 1}{ce+ee}$.

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus so gleich unsere Frage für drey Zahlen *x*, *y* und *z* auflösen, also daß diese drey Formeln $xy+a$, $xz+a$ und $yz+a$ Quadrate werden. Dann man darf nur setzen
$x=bb-acc$, $y=dd-aee$ und $z=ff-agg$. Man nehme z. E. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e}=\frac{7}{4}$, so wird $\frac{f}{g}=\frac{12}{7}$; woraus man erhält
$x=25-9a$, $y=49-16a$ und $z=144-49a$; dann da wird

$$xy + a = 1225 - 840a + 144aa = (35 - 12a)^2,$$

ferner wird

$$xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2,$$

und

$$yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (84 - 28a)^2.$$

234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen *x*, *y*, *z* und *v* gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seyen demnach die drey erstere $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältniß stehe; wann man nun nimmt

$$x = bb - acc;\ y = dd - aee;\ z = ff - agg \text{ und } v = hh - akk,$$

so werden schon folgende Bedingungen erfüllt:

I.) $xy + a = \square$; II.) $xz + a = \square$; III.) $yz + a = \square$; IV.) $yv + a = \square$; V.) $zv + a = \square$;

es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbsten nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältniß steht. Es ist demnach nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl *m* beyzubehalten, und dieselbe also zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme demnach aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ und $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$ so wird $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x = 9 - 4a$ und $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$ also

$$xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$$

oder

$$xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288mm + 528m + 244) + 4aa(4m+4)^2,$$

welche leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann, weil *mm* mit einem Quadrat multiplicirt ist; wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen.
VII. Man kann auch solche Brüche dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen: dann es sey

$$\frac{b}{c} = \frac{I}{1},\ \frac{d}{e} = \frac{nI-1}{n}; \text{ so wird } \frac{f}{g} = \frac{nI+I-1}{n+1} \text{ und } \frac{h}{k} = \frac{2nI+I-2}{2n+1};$$

man setze in dem letzten $2n+1=m$, so wird derselbe $\frac{Im-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x=II-a$ und aus dem letzten $v=(Im-2)^2-amm.$ Allso ist nur noch übrig, daß $xv+a$ ein Quadrat werde. Da nun $v=(II-a)mm-4Im+4$ und also

$$xv+a=(II-a)^2 mm-4(II-a)Im+4II-3a\,,$$

welches ein Quadrat seyn muß; davon setze man nun die Wurzel $(II-a)m-p$, wovon das Quadrat $(II-a)^2 mn-2(II-a)mp+pp$, woraus wir erhalten,
$-4(II-a)Im+4II-3a=-2(II-a)mp+pp$ und $m=\frac{pp-4II+3a}{(II-a)(2p-4I)}$.
Man nehme $p=2I+q$, so wird $m=\frac{4Iq+qq+3a}{2q(II-a)}$, wo für I und q beliebige Zahlen genommen werden können.
Wäre z. E. $a=1$ so nehme man , da wird $m=\frac{4q+qq+3}{6q}$:
setzt man $q=1$ so wird $m=\frac{4}{3}$ und $m=2n+1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortschreiten.

235.

XV. Frage: Man verlangt drey solche Zahlen *x*, *y* und *z*, daß so wohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde?
Es müßen also die folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\quad x+y;\quad \text{II.)}\ x+z;\quad \text{III.)}\ y+z;$$
$$\text{IV.)}\ x-y;\quad \text{V.)}\ x-z;\quad \text{VI.)}\ y-z.$$

Man fange bey den drey letzten an, und setze
$x-y=pp,\ x-z=qq$ und $y-z=rr$, so bekommen wir aus den beyden letzten

$$x=qq+z \ \text{ und } \ y=rr+z\,,$$

dahero die erstere giebt $x-y=qq-rr=pp,$ oder $qq=pp+rr$, also daß die Summe der Quadraten $pp+rr$ ein Quadrat seyn muß, nemlich *qq*, welches geschieht wann $p=2ab$ und $r=aa-bb$, dann da wird $q=aa+bb$. Wir wollen aber inzwischen die Buchstaben *p*, *q* und *r* beybehalten und die drey erstern Formeln betrachten, da dann erstlich $x+y=qq+rr+2z$; zweytens $x+z=qq+2z$; drittens $y+z=rr+2z$.
Man setze für die erstere

$$qq+rr+2z=tt, \text{so ist } 2z=tt-qq-rr\,;$$

dahero dann noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden müßen
$tt-rr=\square$ und $tt-qq=\square$, das ist

$$tt-(aa-bb)^2=\square \text{ und } tt-(aa+bb)^2=\square,$$

welche diese Gestalten annehmen,

$$tt-a^4-b^4+2aabb \text{ und } tt-a^4-b^4-2aabb;$$

weil nun so wohl $cc+dd+2cd$ als $cc+dd-2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man daß wir unsern Endzweck erreichen, wann wir $tt-a^4-b^4$ mit $cc+dd$ und $2aabb$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerckstelligen, so laßet uns setzen $cd=aabb=ffgghhkk$ und nehmen
$c=ffgg$ und $d=hhkk$; $aa=ffhh$ und $bb=ggkk$ oder $a=fh$ und $b=gk$, woraus die erstere Gleichung

$$tt-a^4-b^4=cc+dd$$

diese Form erhält

$$tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4 \text{ und also } tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4$$

das ist $tt=\left(f^4+k^4\right)\left(g^4+h^4\right)$ welches Product also ein Quadrat seyn muß, davon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen dahero die Sache auf eine andere Art angreiffen, und aus den drey erstern Gleichungen $x-y=pp$; $x-z=qq$; $y-z=rr$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche seyn werden
$y=x-pp$ und $z=x-qq$, also daß $qq=pp+rr$. Nun werden die ersten Formeln

$$x+y=2x-pp,\ x+z=2x-qq;$$

und

$$y+z=2x-pp-qq;$$

vor diese letzte setze man $2x-pp-qq=tt$, also daß $2x=tt+pp+qq$ und nur noch diese Formeln $tt+qq$ und $tt+pp$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber seyn muß $qq=pp+rr$, so setze man $q=aa+bb$, und $p=aa-bb$, so wird $r=2ab$; woraus unsere Formeln seyn werden:

$$\text{I.)}\quad tt+(aa+bb)^2=tt+a^4+b^4+2aabb=\square$$

$$\text{II.)}\quad tt+(aa-bb)^2=tt+a^4+b^4-2aabb=\square.$$

Vergleichen wir nun hier wiederum $tt=a^4+b^4$ mit $cc+dd$, und $2aabb$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck: wir setzen demnach wie oben $c=ffgg$, $d=hhkk$ und $a=fh$, $b=gk$; so wird $cd=aabb$, und muß noch seyn $tt+f^4h^4+g^4k^4=cc+dd=f^4g^4+h^4k^4$; woraus folget

$$tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = \left(f^4 - k^4\right)\left(g^4 - h^4\right).$$

Die Sache kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt ein Quadrat machen.

Wir wollen zu diesem End die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen was für Zahlen daraus entspringen, wann für m und n gegebene Zahlen genommen werden, und dabey die Quadraten, so darinnen enthalten sind, besonders bemercken. Weil nun $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, so wollen wir daraus folgendes Täfelgen machen.

Tabelle

für die Zahlen welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind

mm	nn	$mm - nn$	$mm + nn$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3·5
9	1	8	10	16·5
9	4	5	13	5·13
16	1	15	17	3·5·17
16	9	7	25	25·7
25	1	24	26	16·3·13
25	9	16	34	16·2·17
49	1	48	50	25·16·2·3
49	16	33	65	3·5·11·13
64	1	63	65	9·5·7·13
81	49	32	130	64·5·13
121	4	117	125	25·9·5·13
121	9	12	130	16·2·5·7·13
121	49	72	170	144·5·17
144	25	119	169	169·7·17
169	1	168	170	16·3·5·7·17
169	81	88	250	25·16·5·11
225	64	161	289	289·7·23

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nemlich $ff = 9$ und $kk = 4$, so wird $f^4 - k^4 = 13 \cdot 5$: ferner nehme man $gg = 81$, und $hh = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64 \cdot 5 \cdot 13$, woraus $tt = 64 \cdot 25 \cdot 169$; folglich $t = 520$. Da nun $tt = 270400$; $f = 3$; $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man

$$2x = tt + pp + qq = 869314 \text{ und also } x = 434657;$$

dahero ferner $y = x - pp = 420968$; und endlich $z = x - qq = -150568$, welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in der Differenz und umgekehrt die Differenz in der Summe verwandelt werden; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen:

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

$$\text{dahero wird } x + y = 855625 = (925)^2$$
$$x + z = 585225 = (765)^2$$
$$y + z = 571536 = (756)^2$$
$$\text{und weiter } x - y = 13689 = (117)^2$$
$$x - z = 284089 = (533)^2$$
$$y - z = 270400 = (520)^2$$

Noch andere Zahlen können gefunden werden aus der obigen Tabelle, wann wir setzen $ff = 9$, $kk = 4$ und $gg = 121$, $hh = 4$; dann daraus wird $tt = 13\cdot 5\cdot 5\cdot 13\cdot 9\cdot 25 = 9\cdot 25\cdot 25\cdot 169$, also daß $t = 3\cdot 5\cdot 5\cdot 13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$, hieraus wird $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir

$$2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729,$$

dahero $x = \frac{1421729}{2}$, daruas $y = x - pp = \frac{1020321}{2}$ und $x - qq = \frac{880929}{2}$. Nun ist zu mercken, daß wann diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nemliche Eigenschaft behalten müßen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein genüge leisten:

$$x = 2843458,\ y = 2040642 \text{ und } z = 1761858,$$

welche größer sind als die vorhergehenden; also daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236.

XVI. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen, so daß die Differenz zwischen je zweyen ein Quadrat werde?

Die vorige Auflösung dienet uns auch um diese aufzulösen. Dann wann x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden

$$\text{I.)}\ \ x+y;\ \ \text{III.)}\ x+z;\ \ \text{V.)}\ \ y+z;$$
$$\text{II.)}\ \ x-y;\ \ \text{IV.)}\ x-z;\ \ \text{VI.)}\ \ y-z;$$

so wird auch das Product aus der ersten und zweyten $xx-yy$ ein Quadrat, ingleichen auch das Product von der dritten und vierten $xx-zz$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $yy-zz$ ein Quadrat seyn, dahero die drey hier gesuchten Quadrate seyn werden xx, yy, zz. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweiffel ·weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß um $xx-yy$ zu einem Quadrat zu machen, auch $x+y$ und $x-y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müße, indem z. E. $25-9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5+3$ noch $5-3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen und zuerst bemercken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Dann wann $xx-yy$, $xx-zz$ und $yy-zz$ Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wann sie durch zz dividirt werden; dahero diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müßen $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\square$, $\frac{xx}{zz}-1=\square$, und $\frac{yy}{zz}-1=\square$.

Allso kommt die Sache nur auf diese zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an; nimmt man nun

$$\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}\ \text{und}\ \frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1},$$

so werden die zwey letzere Bedingungen erfüllt; dann da wird

$$\frac{xx}{zz}-1=\frac{4pp}{(pp-1)^2}\ \text{und}\ \frac{yy}{zz}-1=\frac{4qq}{(qq-1)^2}$$

Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrat zu machen, welche ist

$$\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2}-\frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2}=\left(\frac{pp+1}{pp-1}+\frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1}-\frac{qq+1}{qq-1}\right)$$

Hier wird nun der erste Factor $=\frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, der andere aber

$=\frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$,

wovon das Product ist $=\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zehler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig diese Formel zu einem Quadrat zu machen $(ppqq-1)(qq-pp)$, oder auch diese $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; welches geschieht wann genommen wird

$$pq=\frac{ff+gg}{2fg}\quad\text{und}\ \frac{q}{p}=\frac{hh+kk}{2hk};$$

da dann ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun

$$qq = \frac{ff+gg}{2fg}\cdot\frac{hh+kk}{2hk};$$

folglich müßen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat ausmachen, und allso auch wann dieselben mit $4ffgg\cdot hhkk$ multiplicirt werden, das ist $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; welche Formel derjenigen, so im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wann man setzt

$$f=a+b,\ g=a-b,\ h=c+d \text{ und } k=c-d;$$

dann da kommt $2\left(a^4-b^4\right)\cdot 2\left(c^4-d^4\right)=4\left(a^4-b^4\right)\left(c^4-d^4\right)$, welches, wie wir gesehen haben geschieht, wann
$aa=9,\ bb=4,\ cc=81$ und $dd=49$, oder
$a=3,\ b=2,\ c=9$ und $d=7$. Hieraus wird $f=5,\ g=1,\ h=16$ und $k=2$, und dahero $\frac{p}{q}=\frac{5}{13}$ und $\frac{p}{q}=\frac{260}{64}=\frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt geben $qq=\frac{65\cdot 13}{16\cdot 5}=\frac{13\cdot 13}{16}$, folglich $q=\frac{13}{4}$, dahero wird $p=\frac{4}{5}$ dadurch bekommen wir $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=-\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}=\frac{185}{153}$. Da nun $x=-\frac{41z}{9}$ und $y=\frac{185z}{153}$, so nehme man um gantze Zahlen zu bekommen $z=153$, da wird $x=-697$ und $y=185$, folglich sind die drey gesuchten Quadrat-Zahlen folgende:

$$\begin{array}{ll} xx=485809 & \text{dann da wird } xx-yy=45184=(672)^2 \\ yy=34225 & yy-zz=10816=(104)^2 \\ zz=23409 & xx-zz=462400=(680)^2 \end{array}$$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wann wir von den in der vorigen Frage gefundenen drey Zahlen *x, y* und *z* die Quadrate hätten nehmen wollen.

237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns dazu die obige Tabelle behülflich gewesen. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedienet, um die kleinste Auflösung zu finden; wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nemlich bey der letztem Frage darauf ankommt, daß dieses Product

$$(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$$

zu einem Quadrat gemacht werde, weil alsdann sein wird

$$\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1} \text{ und } \frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1},$$

so setze man $\frac{q}{p}=m$ oder $q=mp$, da dann unsere Formel seyn wird

$(mmp^4-1)(mm-1)$, welche offenbar ein Quadrat wird wann $p=1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wann wir setzen $p=1+s$, alsdann aber muß diese Formel ein Quadrat seyn

$$(mm-1)\cdot(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$$

und also auch wann dieselbe durch das Quadrat $(mm-1)^2$ dividirt wird, da dann herauskonnnt

$$1+\tfrac{4mms}{mm-1}+\tfrac{6mmss}{mm-1}+\tfrac{4mms^3}{mm-1}+\tfrac{mms^4}{mm-1}.$$

Man setze hier der Kürtze halber $\frac{mm}{mm-1}=a$, also daß diese Formel $1+4as+6ass+4as^3+as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel davon $1+fs+gss$ deren Quadrat ist $1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4$, und man bestimme *f* und *g* also, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $4a=2f$ oder $f=2a$, und $6a=2g+ff$, folglich $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$, so geben die zwey letzten Glieder diese Gleichung $4a+as=2fg+ggs$, woraus gefunden wird $s=\frac{4a-2fg}{gg-a}=\frac{4a-12aa+8a^3}{4a^4-12a^3+9aa-a}$, das ist $s=\frac{4-12a+8aa}{4a^3-12aa+9a-1}$ welcher Bruch durch $a-1$ abgekürtzt giebt $\frac{4(2a-1)}{4aa-8a+1}$. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen weil die Zahl *m*, daraus hernach $a=\frac{mm}{m-1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Exempel zu erläutern nöthig ist.

I. Es sey $m=2$, so wird $a=\frac{4}{3}$ und dahero $s=4\cdot\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}}=-\frac{60}{23}$ und hieraus $p=-\frac{37}{23}$ folglich $q=-\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z}=\frac{949}{420}$ und $\frac{y}{z}=\frac{6005}{4947}$.

II. Es sey $m=\frac{3}{2}$, so wird $a=\frac{9}{5}$ und $s=4\cdot\frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{24}}=-\frac{260}{11}$, dahero $p=-\frac{249}{11}$ und $q=-\frac{747}{22}$, woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerckt zu werden, wann *a* ein Quadrat ist, wie geschieht wann $m=\frac{5}{3}$, dann da wird $a=\frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürtze halben $a=bb$, also daß unsere Formel seyn wird $1+4bbs+6bbss+4bbs^3+bbs^4$; davon sey die Wurzel $1+2bbs+bss$, deren Quadrat ist $1+4bbs+2bss+4b^4ss+4b^3s^3+bbs^4$ wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch *ss* dividirt geben $6bb+4bbs=2b+4b^4+4b^3s$, daraus

$$s=\frac{6bb-2b-4b^4}{4b^3-4bb}=\frac{3b-1-2b^3}{2bb-2b}$$

welcher Bruch noch durch $b-1$ abgekürtzt werden kann, da dann kommt

$$s=\tfrac{1-2b-2bb}{2b} \text{ und } p=\tfrac{1-2bb}{2b}.$$

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1+2bs+bss$, davon das Quadrat ist $1+4bs+2bss+4bbss+4bbs^3+bbs^4$ wo sich die ersten und zwey letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4bb+6bbs=4b+2bs+4bbs$. Da nun $bb=\tfrac{25}{16}$ und $b=\tfrac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s=-2$ und $p=-1$, folglich $pp-1=0$: woraus nichts gefunden wird, weil $z=0$ würde.
Im vorigen Fall aber, da $p=\tfrac{1-2bb}{2b}$, wann $m=\tfrac{5}{3}$ und dahero $a=\tfrac{25}{16}=bb$, folglich $b=\tfrac{5}{4}$, so kommt $p=-\tfrac{17}{20}$ und $q=mp=-\tfrac{17}{12}$, folglich $\tfrac{x}{z}=\tfrac{689}{111}$ und $\tfrac{y}{z}=\tfrac{433}{145}$.

238.

XVII. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen *xx, yy* und *zz*, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache?

Da nun diese drey Formeln *xx* + *yy*, *xx* + *zz* und *yy* + *zz* zu Quadrate gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch *zz* um die drey folgenden zu erhalten

$$\text{I.) } \tfrac{xx}{zz}+\tfrac{yy}{zz}=\square\text{; II.) } \tfrac{xx}{zz}+1=\square\text{; III.) } \tfrac{yy}{zz}+1=\square.$$

Da dann den zwey letzteren ein Genüge geschieht, wann

$$\tfrac{x}{z}=\tfrac{pp-1}{2p} \text{ und } \tfrac{y}{z}=\tfrac{qq-1}{2q},$$

hieraus wird die erste Formel $\frac{(pp-1)^2}{4pp}+\frac{(qq-1)^2}{4qq}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß, das ist $\frac{(pp-1)^2}{pp}+\frac{(qq-1)^2}{qq}$, oder auch mit *ppqq* multiplicirt $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, welches nicht wohl geschehen kann ohne einen Fall zu wißen, da dieselbe ein Quadrat wird; allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, dahero man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, wovon wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt

$$qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$$

so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat theilen laße; welches geschieht wann man nimmt $q-1=p+1$ oder $q=p+2$, da dann seyn wird $q+1=p+3$, woher unsere Formel wird

$$(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2(p+1)^2=\square,$$

welche durch $(p+1)^2$ dividirt ein Quadrat seyn muß, nemlich

$$(p+2)^2(p+1)^2+pp(p+3)^2,$$

so in diese Form aufgelößt wird $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $2+fp+gpp$ oder $gpp+fp+2$, davon das Quadrat ist

$$ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$$

wo man *f* und *g* so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $-4=4f$, oder $f=-1$ und $6=4g+1$, oder $g=\frac{5}{4}$, da dann die ersten Glieder durch p^3 dividirt geben $2p+8=ggp+2fg=\frac{16}{25}p-\frac{5}{2}$, woraus gefunden wird $p=-24$ und $q=-22$; daher wir erhalten $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$ oder $x=-\frac{575}{48}z$ und $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$ oder $y=-\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z=16\cdot3\cdot11$, so wird $x=575\cdot11$ und $y=483\cdot12$; dahero sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$$x=6325=11\cdot23\cdot25,\ y=5796=12\cdot21\cdot23,\ z=528=3\cdot11\cdot16,$$

dann hieraus wird

$$xx+yy=23^2\left(275^2+252^2\right)=23^2\cdot373^2$$
$$xx+zz=11^2\left(575^2+48^2\right)\quad=11^2\cdot577^2$$
$$yy+zz=12^2\left(483^2+44^2\right)\quad=12^2\cdot485^2$$

II. Man kann noch auf unendlich viel Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. E. $(q+1)^2=4(p+1)^2$ oder $q+1=2(p+1)$, das ist $q=2p+1$ und $q-1=2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp\cdot4\cdot(p+1)^2(4pp)=\square$, welche durch $(p+1)^2$ getheilt, giebt $(2p+1)^2(p-1)^2+16p^4=\square$ oder $20p^4-4p^3-3pp+2p+1=\square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze dahero $(q-1)^2=4(p+1)^2$, oder $q-1=2(p+1)$ so wird $q=2p+3$ und $q+1=2p+4$ oder $q+1=2(p+2)$; woher unsere Formel durch $(p+1)^2$ getheilt, seyn wird:

$$(2p+3)^2(p-1)^2+16pp(p+2)^2,$$

das ist $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; davon sey die Wurzel $3-p+gpp$, deren Quadrat ist $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$. Da nehme man nun um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{26}{3}$; so werden die übrigen Glieder durch p^3 dividirt geben $20p + 68 = ggp - 2g$ oder $\frac{256}{3} = \frac{496}{9}p$, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{189}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folget.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p-1)$, so wird

$$q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3} \text{ und } q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1),$$

dahero wird unsere Formel durch $(p-1)^2$ dividirt, seyn

$$\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2 + \frac{64}{81}pp(2p+1)^2,$$

welche mit 81 multiplicirt, wird

$$9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9,$$

wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $20pp - 9p + 3$, davon das Quadrat

$$400p^4 - 360p^3 + 201pp - 54p + 9$$

und daher erhält man $472p + 73 = -360p + 201$, dahero

$$p = \frac{2}{13} \text{ und } q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{39}.$$

Man kann auch für die obige Wurzel setzen $20pp + 9p - 3$, davon das Quadrat

$$400p^4 + 360p^3 - 120pp + 81pp - 54p + 9,$$

mit unserer Formel verglichen giebt $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber zu nichts nützet.

V. Man kann auch machen daß sich unsere Formel so gar durch beyde Quadrate $(p+1)^2$ und $(p-1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q = \frac{pt+1}{p+t}$, da wird

$$q + 1 = \frac{pt+p+t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

und

$$q - 1 = \frac{pt-p-t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

hieraus wird nun unsere Formel durch $(p+1)^2(p-1)^2$ dividirt

$$= \frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2} + pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4},$$

welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat seyn muß, nemlich

$$(pt+1)^2(p+t)^2 + pp(t+1)^2(t-1)^2 \text{ oder}$$

$$ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 + 2ttpp + (tt+1)^2 pp + (tt-1)^2 pp + 2t(tt+1)p + tt,$$

wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $tpp + (tt+1)p - t$, davon das Quadrat

$$ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 - 2ttpp + (tt+1)^2 pp - 2t(tt+1)p + tt$$

mit unserer Formel verglichen giebt:

$$2ttp + (tt+1)^2 p + (tt-1)^2 p + 2t(tt+1) = -2ttp + (tt+1)^2 p - 2t(tt+1),$$

oder $4ttp + (tt-1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, oder $(tt+1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$,

das ist $tt+1 = -\frac{4t}{p}$, woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{tt+1}$; hieraus wird

$pt+1 = \frac{-3tt+1}{tt+1}$ und $p+t = \frac{t^3-3t}{tt+1}$, folglich $q = \frac{-3tt+1}{t^3-3tt}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. E. $t = 2$ so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{11}{2}$, woraus wir finden

$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{39}{80}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44}$ oder $x = \frac{3\cdot 13}{4\cdot 4\cdot 5} z$ und $y = \frac{9\cdot 13}{4\cdot 11} z$. Man nehme nun $z = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11$, so wird $x = 3\cdot 13\cdot 11$ und $y = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13$: also sind die Wurzeln der drey gesuchten Quadraten

$$x = 3\cdot 11\cdot 3 = 429;\ y = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 = 2340 \text{ und } z = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11 = 880.$$

Welche noch kleiner sind als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$$xx + yy = 3^2\cdot 13^2(121+3600) = 3^2\cdot 13^2\cdot 61^2;$$

$$zz + xx = 11^2\cdot(1521+6400) = 11^2\cdot 89^2;$$

$$yy + zz = 20^2\cdot(13689+1936) = 20^2\cdot 125^2;$$

VI. Zuletzt bemercken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeglichen Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann: dann wann diese Werthe gefunden worden $x = a,\ y = b$ und $z = c$; also daß $aa + bb = \square,\ aa + cc = \square$ und $bb + cc = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten, $x = ab,\ y = bc$ und $z = ac$, dann da wird

$$xx + yy = aabb + bbcc = bb(aa+cc) = \square$$

$$xx + zz = aabb + aacc = aa(bb+cc) = \square$$

$$yy + zz = aacc + bbcc = cc(aa+bb) = \square.$$

Da wir nun eben gefunden

$$x = a = 3\cdot 11\cdot 13;\ y = b = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 \text{ und } z = c = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11,$$

so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$$x = ab = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 13$$
$$y = bc = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13$$
$$z = ac = 3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 11\cdot 13$$

welche sich alle drey durch $3\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 13$ theilen laßen, und also auf folgende Formel gebracht werden
$x = 9\cdot 3$, $y = 3\cdot 4\cdot 4\cdot 5$ und $z = 4\cdot 11$, das ist $x = 117$, $y = 240$ und $z = 44$,
welche noch kleiner sind als die vorigen; dahero wird aber:

$$xx + yy = 71289 = 267^2$$
$$xx + zz = 15625 = 125^2$$
$$yy + zz = 59536 = 244^2.$$

239.

XVIII. Frage: Man verlangt zwey Zahlen *x* und *y*, so daß wann man die eine zum Quadrat der andern addirt ein Quadrat herauskomme, also daß diese zwey Formeln $xx + y$ und $yy + x$ Quadrate seyn sollen?

Wollte man so gleich für die erstere setzen $xx + y = pp$ und daraus herleiten $y = pp - xx$, so würde die andere Formel
$p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$ wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zu gleich für beyde Formeln

$$xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx \text{ und } yy + x = (q - y)^2 = qq - 2qy + yy,$$

woraus wir dann diese zwey Gleichungen erhalten

$$\text{I.) } y + 2px = pp \text{ und II.) } x + 2qy = qq,$$

aus welchen *x* und *y* leicht gefunden werden können. Man findet nemlich

$$x = \tfrac{2qpp - qq}{4pq - 1} \text{ und } y = \tfrac{2pqq - pp}{4pq - 1};$$

wo man *p* und *q* nach Belieben annehmen kann.

Man setze z. E. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man diese zwey gesuchte Zahlen $x = \tfrac{15}{23}$ und $y = \tfrac{32}{23}$, dann daher wird

$$xx + y = \tfrac{225}{529} + \tfrac{32}{23} = \tfrac{961}{529} = \left(\tfrac{31}{23}\right)^2 \text{ und } yy + x = \tfrac{1024}{529} + \tfrac{15}{23} = \left(\tfrac{37}{23}\right)^2.$$

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\tfrac{3}{11}$ und $y = \tfrac{17}{11}$; weil aber eine Zahl negativ ist, so mögte man diese Auflösung nicht gelten laßen.

Man setze $p = 1$ und $q = \tfrac{3}{2}$, so wird $x = \tfrac{3}{20}$ und $y = \tfrac{7}{10}$, dann da wird

$$2xx + y = \tfrac{9}{400} + \tfrac{7}{10} = \tfrac{289}{400} = \left(\tfrac{17}{20}\right)^2 \text{ und } yy + x = \tfrac{49}{100} + \tfrac{3}{20} = \tfrac{64}{100} = \left(\tfrac{8}{10}\right)^2.$$

240.

XIX. Frage: Zwey Zahlen zu finden deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadraten ein Biquadrat sey.

Diese Zahlen seyen x und y und weil $xx+yy$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe erstlich zu einem Quadrat, welches geschieht wann $x=pp-qq$ und $y=2pq$, da dann wird $xx+yy=\left(pp+qq\right)^2$. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $pp+qq$ ein Quadrat seyn, dahero setze man ferner $p=rr-ss$ und $q=2rs$, so wird $pp+qq=\left(rr+ss\right)^2$; folglich

$$xx+yy=(rr+ss)^4$$

und also ein Biquadrat; alsdann aber wird

$$x=r^4-6rrss+s^4 \text{ und } y=4r^3s-4rs^3.$$

Allso ist noch übrig, daß diese Formel $x+y=r^4+4r^3s-6rrss-4rs^3+s^4$ ein Quadrat werde, man setze davon die Wurzel $rr+2rs+ss$, und also unsere Formel gleich diesem Quadrat $r^4+4r^3s+6rrss+4rs^3+s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rss dividirt geben $6r+4s=-6r-4s$ oder $12r+8s=0$: also $s=-\frac{12r}{8}=-\frac{3}{2}r$; oder man kann die Wurzel auch setzen $rr-2rs+ss$, damit die vierten Glieder wegfallen; da nun das Quadrat hievon ist $r^4-4r^3s+6rrss-4rs^3+s^4$, so geben die übrigen Glieder durch rrs dividirt $4r-6s=-4r+6s$, oder $8r=12s$, folglich $r=\frac{3}{2}s$; wann nun $r=3$ und $s=2$ so würde $x=-119$ negativ.

Laßt uns ferner setzen $r=\frac{3}{2}s+t$, so wird für unsere Formel

$$rr=\frac{9}{4}ss+3st+tt,\ r^3=\frac{27}{8}s^3+\frac{27}{8}sst+\frac{9}{2}stt+t^3$$

folglich

$$\begin{aligned}
r^4 &= \tfrac{81}{16}s^4+\tfrac{27}{2}s^3t+\tfrac{27}{2}sstt+6st^3+t^4\\
4r^3s &= \tfrac{27}{2}s^4+27s^3t+18sstt+4st^3\\
-6rrss &= -\tfrac{27}{2}s^4-18s^3t-6sstt\\
-4rs^3 &= -s^46s^4-4s^3t\\
+s^4 &= \quad +s^4
\end{aligned}$$

allso unsere Formel $\quad \frac{1}{16}s^4+\frac{37}{2}s^3t+\frac{51}{2}sstt+10st^3+t^4$

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wann sie mit 16 multiplicirt wird; da bekommt man diese $s^4+296s^3t+408sstt+160st^3+16t^4$; hievon setze man die Wurzel $ss+148st-4tt$, davon das Quadrat ist

$$s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$$

Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch *stt* dividirt geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also

$$\tfrac{s}{t} = \tfrac{1344}{21488} = \tfrac{336}{5372} = \tfrac{84}{1343}.$$

Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761 \text{ und } y = 1061652293520.$$