CHAPTER 15

THE RESOLUTION OF SUCH QUESTIONS FOR WHICH CUBES ARE REQUIRED

241.

In the above chapter such questions arose, where certain formulas had to be made into squares, because we then had the opportunity, to try out different approaches by which the above given rules could be brought to bear in practice. Now it remains still to consider such questions, where certain formulas must be made from cubes, for which the rules are given already in the above chapter, but which now through the solutions of the following questions must be presented in a fuller light.

242.

I. Question: Two cubes are required x^3 and y^3, the sum of which again shall be a cube.

Thus since $x^3 + y^3$ shall be a cube, thus also must this formula divided by the cube y^3 still be a cube, so that $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \text{Cube}$. Putting $\frac{x}{y} = z - 1$ thus we obtain $z^3 - 3zz + 3z$, which shall be a cube ; now, following the above rules, we will put the cube root to be $z - u$, of which the cube is $z^3 - 3uzz + 3uuz - u^3$, and u thus is to be determined, and also so that the two terms disappear, thus we would put $u = 1$, however the remaining terms would give

$$3z = 3uuz - u^3 = 3z - 1,$$

from which z becomes infinite, which value is of no help. But we may let u be undetermined, thus we obtain this equation:

$$-3zz + 3z = -3uzz + 3uuz - u^3;$$

from which quadratic equation the value of z shall certainly be determined: moreover we obtain $3uzz - 3zz = 3uuz - 3z - u^3$, that is $3(u-1)zz = 3(uu-1)z - u^3$, or $zz = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$

from which there is found :

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$$

or

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3u^2-3u-3}{12(u-1)}}$$

The case thus arises from that, that this fraction must be made into a square, we will hence multiply the fraction above and below by $3(u-1)$, by which the denominator becomes a square, $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, thus of which the numerator still must become a square. In the same it is evident that the last term already is a square, hence according to the rule the root of that is put equal to $guu+fu+3$, of which the square is

$$ggu^4+2fgu^3+6guu+ffuu+2fu+9$$

and the three last terms are made to vanish, thus in the first place there becomes $0=2f$, that is $f=0$, and next $6g+ff=-18$, and therefore $g=-3$; since then the two first terms divided by u^3 give $-3u+12=ggu+2fg=9u$; and hence $u=1$, which value leads us nowhere. Further if we want to put $u=1+t$, thus our formula becomes $-12t-3t^4$, which must be a square, but which cannot happen, as long as t is not negative. Thus there shall be $t=-s$, thus our formula becomes $12s-3s^4$, which is a square in the case $s=1$, but as then $t=-1$ and $u=0$, from which nothing can be found.

Other plans of attack may be tried as wished, but at now time will such a value be found, that would lead us to our result; from which one can be quite sure to conclude, that it is not possible to find such a cube, of which the sum would be a cube, but which also can be proven in the following manner.

243.

Proposition: It is not possible to find two cubes, the sum or difference of which would be a cube, [for natural numbers].

Here before everything else it is to be observed, that if the sum is impossible, then the difference also must be impossible. Then, if it shall be that $x^3+y^3=z^3$ is impossible, thus also it must be impossible, that $z^3-y^3=x^3$, while now z^3-y^3 is the difference of two cubes. It is thus sufficient to note the complete impossibility of either the sum or the difference of two cubes being a cube, because the one follows from the other. But the proof itself will depend on the following propositions.

I. It can be assumed, that the numbers x and y are indivisible by each other. Then if they had a common factor, thus the cubes themselves could be divided by the common cubic factor. For example, were $x=2a$, and $y=2b$ thus there would be $x^3+y^3=8a^3+8b^3$, and were these equal to a cube, then a^3+b^3 must be a cube also.

II. Now since x and y have no common divisors, thus either both these numbers shall be odd, or one is even and the other is odd. In the first case z must be even; but in the second case z must be odd. Therefore of these three numbers x, y and z always two must be odd, and one even. We will therefore take our proof for both numbers x and y odd, because it amounts to the same, whether we show the impossibility of the sum or of the difference, since the sum becomes the difference, if one of the roots is negative.

III. Therefore x and y shall be two odd numbers, thus both their sum as well as their difference be even. Therefore we put $\frac{x+y}{2} = p$ and $\frac{x-y}{2} = q$, thus there becomes $x = p+q$ and $y = p-q$, from which it is apparent, that of the two numbers p and q one must be even but the other odd ; therefore moreover, $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp+3qq)$: it must thus be proven, that this product $2p(pp+3qq)$ cannot be a cube. But should the case of the difference be proven, thus there would be $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(qq+3pp)$, which formula is completely similar to the above, provided only the letters p and q be interchanged; it is sufficient therefore to show the impossibility of this formula $2p(pp+3qq)$, because from that it follows necessarily, that neither the sum nor the difference of the two numbers can be a cube.

IV. Now were $2p(pp+3qq)$ a cube, thus the same would be even and thus divisible by 8: consequently the eighth part of our formula must be a whole number and for that to be a cube, namely $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$.
Now because of the two numbers p and q the one must be even, and the other is odd, thus $pp+3qq$ must be an odd number, and not to be divisible by 4, from which it follows that p must allow itself to be divisible by 4 and thus $\frac{p}{4}$ must be a whole number.

V. Now if this product $\frac{p}{4}\cdot\left(pp+3qq\right)$ must be a cube, thus each individual factor, namely $\frac{p}{4}$ and $pp+3qq$, must be a cube, thus the same namely can have no common factors. Then if a product of two factors , that are indivisible between themselves, must be a cube, thus necessarily each one must itself be a cube ; moreover if the same have a common divisor, thus the same must be considered especially. This is therefore the question: whether or not these two factors p and $pp+3qq$ can have a common factor? Which thus requires to be examined. If the same had a common factor, thus also both these pp and $pp+3qq$ have the same common factor, and thus also their difference, which is $3qq$, with that pp has just the same common factor; now since p and q between themselves are indivisible, thus the numbers *pp* and *3qq* can have no common factors other than 3, which happens if p can be divided by 3.

VI. We therefore have two cases to consider: the first is if the factors p and $pp+3qq$ have no common divisor, which always happens, if *p* is not divisible by 3 ; but the other case happens, if the same have a common divisor, which occurs if *p* is divisible by 3, since then both are divisible by 3. These two cases must be carefully distinguished from each other, because the proof for each one must be conducted specially.

VII. First case. Let p not be divisible by 3 and thus both our factors $\frac{p}{4}$ and $pp+3qq$ are not divisible by each other, thus each one must itself be a cube. Let us therefore make $pp+3qq$ into a cube, which happens as was seen above, if we put

$$p+q\sqrt{-3}=\left(t+u\sqrt{-3}\right)^3 \text{ and } p-q\sqrt{-3}=\left(t-u\sqrt{-3}\right)^3.$$

Thus from that there becomes $pp+3qq=\left(tt+3uu\right)^3$ and is thus a cube; but from this there becomes

$$p=t^3-9tuu=t\left(tt-9uu\right) \text{ and } q=3ttu-3u^3=3u\left(tt-uu\right);$$

because now *q* is an odd number, thus *u* also must be odd, but *t* shall be even, because otherwise $tt-uu$ would be an even number.

VIII. Now since $pp+3qq$ has been made into a cube, and it has been found that

$$p=t\left(tt-9uu\right)=t\left(t+3u\right)\left(t-3u\right),$$

thus now accordingly $\frac{p}{4}$ and thus also 2*p* to be a cube; therefore this formula $2t\left(t+3u\right)\left(t-3u\right)$ must be a cube. But here it is to be observed, that *t* in the first place is an even number and is not divisible by 3, because otherwise *p* also would be divisible by 3, which case is explicitly excluded here ; thus these three factors $2t, t+3u$ and $t-3u$ are indivisible among themselves, and therefore each must be a cube itself. Hence we may put $t+3u=f^3$ and $t-3u=g^3$, thus there becomes $2t=f^3+g^3$. But now 2*t* also is a cube, and consequently we have here two cubes f^3 and g^3 whose sum again were a cube, which clearly unequal, would be much smaller than the original cubes assumed x^3 and y^3. Then after we have put $x=p+q$ and $y=p-q$, but now *p* and *q* have determined the letters *t* and *u*, thus the numbers *p* and *q* must be much greater than *t* and *u*.

IX. Thus if two such cubes were given in terms of large numbers, then one could also assign even much smaller similar numbers whose sum would be a cube, and from that again to arrive at smaller similar cubes. Now since in that does not happen with the smallest numbers, thus these are not possible in all the larger numbers. This conclusion thus will be confirmed, just as the other case also leads to, as thus we will see to be the same.

X. The second case. Now let p be divisible by 3, but q is not, and we put $p = 3r$: thus our formula becomes

$$\tfrac{3r}{4}\cdot(9rr+3qq),\ \text{or}\ \tfrac{9}{4}r(3rr+qq),$$

both factors which cannot be divisible by each other, because $3rr+qq$ cannot be divided by 2 or 3, and just as r as well as p must be even, thus each of these two factors must be a cube.

XI. Now we make the second factor $3rr+qq$ or $qq+3rr$ into a cube, thus we find as above $q = t(tt-9uu)$ and $r = 3u(tt-u)$; where it is to be observed, that because q was even, here t also is odd, but u must be an even number.

XII. Because now $\frac{9r}{4}$ also must be a cube and thus also multiplied by the cube $\frac{8}{27}$, thus must $\frac{2r}{3}$, that is $2u(tt-uu) = 2u(t+u)(t-u)$ be a cube, which three factors are indivisible between themselves and thus each itself must be a cube; now if we put $t+u = f^3$ and $t-u = g^3$, thus from that it follows that $2u = f^3 - g^3$, which also must be a cube, in that $2u$ must be a cube. Because we would then have such a form : two smaller cubes f^3 and g^3 of which the difference would be a cube, and consequently also the sum of which would be a cube; then we must only put $f^3 - g^3 = h^3$, thus becoming $f^3 = h^3 + g^3$, and thus we would have two cubes whose sum would be a cube too. Thereby we have confirmed fully the above conclusion, that thus no such cubes are given in the largest numbers, of which the sum or difference would be a cube, and that therefore similar cases are not encountered among smaller numbers.

244.

Now because it is not possible to find two such cubes, of which the sum or difference would be a cube, thus our first question has fallen away, and it is customary rather to make a start with this question, how three cubes may be found, the sum of which may amount to a cube: one can however assume two of the same at will, thus so that only the third shall be required to be found; which question we will now carry out.

245.

II. Question: For two given cubes a^3 and b^3 it is required to find a third x^3, which with the same taken together again amounts to a cube.

Thus it is required that this formula $a^3+b^3+x^3$ be a cube also, which cannot happen otherwise, than if a case is known already, but here such a case presents itself, namely $x=-a$, thus we put $x=y-a$, there becomes $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$, and therefore it is our formula $y^3-3ayy+3aay+b^3$ which must become a cube , of which the first and last terms already is a cube, therefore at once we can find two such solutions .

I. According to the first term, we can put the root of that to be $y+b$, of which the cube is $y^3+3byy+3bby+b^3$; from which we obtain $-3ay+3aa=3by+3bb$, therefore $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$; consequently $x=-b$ which is of no help.

II. But the root can also be put to be $b+fy$, the cube of which is $f^3y^3+3bffyy+3bbfy+b^3$; and *f* thus determined, so that the third term also vanished, which happens if $3aa=3bbf$ or $f=\frac{aa}{bb}$, since then the two first terms divided by *yy* give $y-3a=f^3y+3bff=\frac{a^6y}{b^6}+\frac{3a^4}{b^4}$, which multiplied by b^6 multiplied gives $b^6y-3ab^6=a^6y+3a^4b^3$; from which there is found

$$y=\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3\left(a^3+b^3\right)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3},$$

and thus

$$x=y-a=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}=a\cdot\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}.$$

Thus if the two cubes a^3 and b^3 shall be given, thus here we have found the root of the third cube sought, and if for that the same were positive, thus we need only assume b^3 for the greater cube, which will be made clear by a few examples.

I. Let the two given cubes be 1 and 8, thus so that $a=1$ and $b=2$, thus this formula $9+x^3$ will be a cube if $x=\frac{17}{7}$; since then there becomes $9+x^3=\frac{8000}{343}=(\frac{20}{7})^3$.

II. Let the two given cubes be 8 and 27, thus so that $a=2$ and $b=3$, thus this formula $35+x^3$ will become a cube, if $x=\frac{124}{19}$.

III. Let the two given cubes be 27 and 64, thus so that $a=3$ and $b=4$, thus this formula $91+x^3$ will be a cube, if $x=\frac{465}{37}$.

If it was required to find still another suchlike third cube to add to two given cubes, thus in the first formula $a^3+b^3+x^3$ there must be put further $x=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}+z$, since then one would be able to return to a similar formula, from which leading to new values of z to be determined, but which would involve too extensive calculations.

246.

A remarkable case occurs from this question, if both the given cubes shall be equal to each other, or $b=a$; since then we obtain $x=\frac{3a^4}{0}$ which is infinite, and thus no solution is present; therefore this question if $2a^3+x^3$ shall be a cube, still cannot be resolved. For example, if $a=1$ and our formula becomes $2+x^3$, thus it is to be noted, that whatever changes one would like to make, all endeavors will be in vain, and never from that can a skilful value for x be found, from which already it surely appears that it can be concluded, that to twice a cube no cube can be found, which taken together with that amounts to another cube, or that this equation $2a^3+x^3=y^3$ shall be impossible ; but from the same this follows $2a^3=y^3-x^3$, and therefore also it is not possible to find two cubes, of which the difference would be twice a cube, which also can be understood from the sum of two cubes and can be proved in the following manner.

247.

Proposition. Neither the sum nor the difference between two cubes can ever become equal to a cube doubled, or this formula $x^3\pm y^3=2z^3$ is impossible by itself, other than the case $y=x$, which by itself if evident.

Here again x and y can be assumed to be indivisible between themselves, then if they had a common divisor, thus z also must be divided by that and also the whole equation can be divided by that cube. Now because $x^3\pm y^3$ must a whole number, thus both the numbers x and y must be odd, therefore so that their sum as well as their difference shall be even. Thus we put both $\frac{x+y}{2}=p$ and $\frac{x-y}{2}=q$, thus there becomes $x=p+q$ and $y=p-q$; since then from the numbers p and q the one must be even but the other odd . Moreover, from this it follows that

$$x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p\left(pp+2qq\right),$$

$$\text{and } x^3-y^3=6pqq+2q^3=2q\left(3pp+qq\right);$$

both formulas are fully alike to each other. Therefore it will suffice to show, that this formula $2p\left(pp+3qq\right)$can never be a doubled cube, and thus this one $p\left(pp+3qq\right)$ can never be a cube, the proof of which is contained in the following theorem.

I. Here again two cases arise to be considered, the first is that, if the two factors p and $pp+3qq$ have no common divisor, since then each one must be itself a cube; but the other case is, if the same have a common factor, which as we have seen above can be no other than 3.

II. The first case. Therefore it shall be the case that p is not divisible by 3, and thus both the factors between themselves are indivisible, thus we may make in the first place $pp+3qq$ to be a cube, which happens, if $p=t\left(tt-9uu\right)$ and $q=3u\left(tt-uttt\right)$, thus so that still the value of p must be a cube. Now since t is not divisible by 3, because p otherwise would be divisible by 3, thus the two factors will be t and $tt-9uu$, indivisible between themselves, and consequently each one must be itself a cube.

III. But the latter again has two factors, namely $t+3u$ and $t-3u$, which are indivisible between themselves, in the first place t itself is not divisible by 3, but hence because of the two numbers t and u one is even and the other is odd. Then if both were odd, thus not only p but q as well would be odd, which cannot be the case, consequently each of these factors $t+3u$ and $t-3u$ must also be a cube itself.

IV. Therefore we put $t+3u=f^3$ and $t-3u=g^3$, thus there becomes $2t=f^3+g^3$. But now t is a cube itself, which shall be $=h^3$, so that were $f^3+g^3=2h^3$, that is we have two far smaller cubes, namely f^3 and g^3, the sum of which also would be a cube doubled.

V. Second case. Now p is divisible by 3 and thus q is not. We can put therefore $p=3r$, thus our formula becomes

$$3r\left(9rr+3qq\right)=9r\left(3rr+qq\right),$$

which factors are now indivisible between themselves and therefore each one must be a cube.

VI. Now in order that the latter $qq+3rr$ can be made into a cube, thus we put $q=t(tt-9uu)$ and $r=3u(tt-uu)$, since then further, of the numbers t and u, one must be even, but the other must be odd, because otherwise both the numbers q and r would be even. Moreover from this we obtain the first factor $9r=27u(tt-uu)$, which must be a cube, and consequently also divided by 27 will be a cube, namely $u(tt-uu)$ that is $u(t+u)(t-u)$.

VII. Now because also these three factors are mutually indivisible by each other, thus each must be considered to be a cube. Therefore putting for both the latter $t+u=f^3$ and $t-u=g^3$, thus we obtain $2u=f^3-g^3$; because now also u must be a cube, thus we obtain the two cubes f^3 and g^3 in far smaller numbers, the difference of which likewise would be a cube doubled.

VIII. Because now no suchlike cube is given in terms of smaller numbers, of which the sum or difference would be a cube doubled, thus it is evident that suchlike does not occur in the case of large numbers.

IX. It could be objected, that equally well such a case is given in small numbers, namely $f=g$, by which the above conclusion could be compromised. If there were alone $f=g$, then one has in the first case $t+3u=t-3u$ and thus $u=0$, consequently also there would be $q=0$ and since we had put $x=p+q$ and $y=p-q$, thus also the two first cubes x^3 and y^3 would be equal to each other, which case is specifically excluded. Just as also in the other case, if there were put $f=g$, thus there must be $t+u=t-u$ and thus again $2t=0$, therefore also $r=0$ and consequently $p=0$, since then again both the first cubes x^3 and y^3 would be equal to each other, but there is no question of this case.

248.

III. Question: A general method is required of which the sum of three cubes x^3, y^3 and z^3, in turn amounts to another cube.

We have seen already, that two of these cube can be assumed to be known, and from that always the third can be determined, only if the first two were not equal to each other; according to the above method in each case a third cube can be found only for one value of the third cube, and it would be very hard to detect more cases arising from that.

Thus we consider here all three cubes as being unknown; and in order to give a general solution, we put $x^3+y^3+z^3=v^3$, and take one of these to the other side, from which we obtain $x^3+y^3=v^3-z^3$; which equation can adopt the following sufficient form.

I. Putting $x=p+q$ and $y=p-q$, thus because as we have seen $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$; further putting $v=r+s$ and $z=r-s$, thus we have $v^3-z^3=2s(ss+3rr)$; then there must be :

$$2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr), \text{or } p(pp+3qq)=s(ss+3rr).$$

II. We have seen above, that one such number $pp+3qq$ can have no other divisor, than which themselves are contained just in this form.

Because now both these formulas $pp+3qq$ and $ss+3rr$ must necessarily have a common divisor, thus the same must be $=tt+3uu$.

III. To this end we put

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu) \text{ and } ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu),$$

since then $p=ft+3gu$ and $q=gt-fu$; consequently

$$pp=fftt+6fgtu+9gguu \text{ and } qq=ggtt-2fgtu+ffuu ;$$

from which

$$pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu$$

that is

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu).$$

IV. Just as we obtain from the other formula :

$$s=ht+3ku \text{ and } r=kt-hu ,$$

from which the equation arises

$$(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu),$$

which divided by $tt+3uu$ gives

$$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk),$$

or

$$ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hk+3kk)-3gu(ff+3gg),$$

from which we obtain:

$$t=\frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u .$$

V. Now in order to obtain the whole number, thus we take

$$u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk),$$

from which

$$t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg),$$

where we can assume take the four letters *f*, *g*, *h* and *k* at will.

VI. Now we have found these four numbers for the values of *t* and *u*, thus we obtain from these :

I.) $p=ft+3gu$, II.) $q=gt-fu$, III.) $s=ht+3ku$, IV.) $r=kt-hu$,

and from these finally, values for the solution of our question

$$x=p+q,\ y=p-q,\ z=r-s \text{ and } v=r+s ,$$

which solution is hence general, so that therein all possible cases are contained, because in this whole calculation, no arbitrary restriction has been made.

The whole artifice depends on this, that our equation could be made divisible by $tt+3uu$, through which the letters *t* and *u* can be determined by a simple equation. The applications of these formulas can be used in infinitely many ways, of which we will add a few examples.

I. Let $k=0$ and $h=1$, thus there becomes

$$t=-3g(ff+3gg) \text{ and } u=f(ff+3gg)-1$$

therefore from this :

$$p=-3fg\left(ff+3gg\right)+3fg\left(ff+3gg\right)-3g=-3g,\; q=-\left(ff+3gg\right)^2+f,$$

further $s=-3g(ff+3gg)$ and $r=-f(ff+3gg)+1$, from which finally we obtain

$$x=-3g-\left(ff+3gg\right)^2+f,\; y=-3g+(ff+3gg)^2-f,$$

$$z=\left(3y-f\right)\left(ff+3yg\right)+1 \text{ and finally } v=-\left(3\mathrm{g}+f\right)\left(ff+3gg\right)+1.$$

Now let us put $f=-1$ and $g=+1$, thus we obtain

$$x=-20, y=14,\; z=17 \text{ and } v=-7;$$

therefore we have this equation :

$$-20^3+14^3+17^3=-7^3 \text{ or } 14^3+17^3+7^3=20^3.$$

II. Let $f=2, g=1$ and thus $ff+3gg=7$; further $h=0$ and $k=1$, thus $hh+3kk=3$, hence there shall be $t=-12$ and $\mathrm{t}=14$; from this there becomes :

$$p=2t+3u=18,\; q=t-2u=-40,\; r=t=-12 \text{ and } s=3u=42;$$

therefore we obtain:

$$x=p+q=-22,\; y=p-q=58,\; z=r-s=-54 \text{ und } v=r+s=30;$$

so that

$$-22^3+58^3-54^3=30^3 \text{ or } 58^3=30^3+54^3+22^3.$$

Now since all the roots can be divided by 2, thus there shall be also:

$$29^3=15^3+27^3+11^3.$$

III. Let $f=3,\; g=1,\; h=1$ and $k=1$, thus $ff+3gg=12$ and $hh+3kk=4$, so there will be $t=-24$ and $u=32$, which themselves can be divided by 8; and since here this only arises from their ratio, thus we can put $t=-3$ and $u=4$. From this we obtain $p=3t+3u=+3,\; q=t-3u=-15,\; r=t-u=-7$ and $s=t+3u=+9$; from which there becomes $x=-12$ and $y=18,\; z=-16$ and $v=2,$ so that thus

$$-12^3+18^3-16^3=2^3 \text{ or } 18^3=16^3+12^3+2^3:$$

or also divided by 2 :

$$9^3=8^3+6^3+1^3.$$

IV. Let us put $g=0$ and $k=h$, so that *f* and *h* cannot be determined. Now since there becomes $ff+3gg=ff$ and $hh+3kk=4hh;$ thus we obtain $t=12h^3$ and $u=f^3-4h^3$; hence further

$$p = ft = 12fh^3, q = -f^4 + 4fh^3,$$

$$r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3, \text{ and } s = 3hf^3,$$

from which at last,

$$x = p + q = 16fh^3 - f^4, \qquad y = p - q = 8fh^3 + f^4$$

$$z = r - s = 16h^4 - 4hf^3, \qquad \text{and } v = r + s = 16h^4 + 2hf^3.$$

Now we take $f = h = 1$, so that we obtain $x = 15,\ y = 9,\ z = 12$ and $v = 18$, which divided by 3 gives $x = 5,\ y = 3,\ z = 4$ and $v = 6,$ so that $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Hereby it is noteworthy, that these three roots 3, 4, 5 increase by one, therefore on account of this we will investigate if there may be still more suchlike roots given.

249.

IV. Question: Three roots are required in an arithmetical progression, of which the difference $= 1$, thus so that the cubes of the same numbers may be added together, further giving a cube.

Let x be the central number of these, thus the smaller will be $= x - 1$ and the larger $= x + 1$; the cubes of the same added give now

$$3x^3 + 6x = 3x(xx + 2),$$

which must be a cube. Now, for this to happen, it is necessary that a case shall be known, and after several attempts we find $x = 4$, therefore we put according to the above given rules $x = 4 + y$, thus there becomes

$$xx = 16 + 8y + yy \text{ and } x^3 = 64 + 48y + 12yy + y^3,$$

from which our formula will be $216 + 150y + 36yy + 3y^3$, where the first term is a cube, but the last is not. Therefore we put the root to be $6 + fy$ and arrange so that both the first terms vanish; now since the cube from that is $216 + 108fy + 18ffyy + f^3y^3$, thus there must be $150 = 108f$, thus $f = \frac{25}{18}$. Moreover the remaining roots divided by yy give

$$36 + 3y = 18ff + f^3 = \tfrac{25^2}{18} + \tfrac{25^3}{18^3}y,$$

or

$$18^3 \cdot 36 + 18^3 \cdot 3y = 18^2 \cdot 25^2 + 25^3 y \text{ or } 18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2 = 25^3 y - 18^3 \cdot 3y,$$

therefore

$$y = \frac{18.^3 36 - 18^2 \cdot 25^2}{25^3 - 3 \cdot 18^3} = \frac{18^2\left(18 \cdot 36 - 25^2\right)}{25^3 - 3 \cdot 18^3},$$

and thus

$y = \frac{324\cdot 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}$; consequently $x = \frac{32}{1871}$.

Since it seems possibly a burden to pursue this reduction to a cube further, thus it is to be observed that the question can always be made into a square. Since then $3x(xx+2)$ must be a cube, thus we put the same $= x^3y^3$, since then we obtain $3xx+6 = xxy^3$ and thus $xx = \frac{6}{y^3-3} = \frac{36}{6y^3-18}$. Now since the numerator of this fraction is already a square, thus it is still necessary only, that the denominator $6y^3-18$ be made into a square ; for that again it is necessary to guess a case. But because 18 is divisible by 9, and 6 only by 3, thus y itself must also be divisible by 3 . Therefore we put $y = 3z$, thus our denominator becomes $= 162z^3 - 18$, which is divided by 9, namely $18z^3 - 2$ must still be a square. Now this division only happens if $z = 1$; therefore we put $z = 1+v$, so that there must be $16+54v+54w+18v^3 = \square$. We put the root of that to be $4+\frac{27}{4}v$, the square of which is $16+54v+\frac{729}{16}vv$, and thus $54+18v = \frac{729}{16}$; or $18v = -\frac{135}{16}$, consequently $2v = -\frac{15}{16}$, and $v = -\frac{15}{32}$, from which we obtain $z = 1+v = \frac{17}{32}$, further $y = \frac{51}{32}$.

Now we will consider the above denominator, which was

$$6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9\left(18z^3 - 2\right).$$

But of this factor $18z^3 - 2$ we have the square root $4+\frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, thus the square root of the whole denominator is $\frac{321}{128}$; but the root of the numerator is $= 6$, from which it follows that $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, which value is quite different from that found before. Thus the roots of our three cubes shall be the following :

$$\text{I.)}\ x-1 = \frac{149}{107}; \quad \text{II.)}\ x = \frac{256}{107}; \quad \text{III.)}\ x+1 = \frac{363}{107}$$

if which the cubes added together give rise to a cube, of which the root shall be $xy = \frac{256}{107}\cdot\frac{51}{32} = \frac{408}{107}$.

250.

We will hereby conclude this section of the indeterminate analysis, because from the apposite questions enough opportunity has been found to clarify the principle artifices, which have been used so far in this science.

END OF THE SECOND PART

CAPITEL 15

AUFLÖSUNG SOLCHER FRAGEN WORZU CUBI ERFORDERT WERDEN

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewiße Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir dann Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewiße Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I. Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also x^3+y^3 ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3}+1=\text{Cubo}$. Man setze $\frac{x}{y}=z-1$ so bekommen wir $z^3-3zz+3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubic-Wurzel setzen $z-u$, wovon der Cubus ist $z^3-3uzz+3uuz-u^3$, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u=1$, die übrigen Glieder aber würden geben

$$3z=3uuz-u^3=3z-1,$$

woraus gefunden wird z gleich unendlich, welcher Werth uns nichts hilft. Man laße aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung:

$$-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3;$$

aus welcher Quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde: wir bekommen aber $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3$, das ist $3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, oder $zz=(u+1)z-\frac{u^3}{3(u-1)}$ woraus gefunden wird

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$$

oder

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\frac{-u^3+3u^2-3u-3}{12(u-1)}}$$

Die Sache kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde, wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$

multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nemlich $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, wovon also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $guu+fu+3$, wovon das Quadrat ist

$$ggu^4+2fgu^3+6guu+ffuu+2fu+9$$

und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird erstlich $0=2f$ das ist $f=0$, und hernach $6g+ff=-18$, und dahero $g=-3$; alsdann geben die zwey ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u+12=ggu+2fg=9u$; und daher $u=1$, welcher Wert zu nichts führet. Wollen wir nun weiter setzen $u=1+t$, so wird unsere Formel $-12t-3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll, welches nicht geschehen kann, wofern t nicht negativ ist. Es sey also $t=-s$, so wird unsere Formel $12s-3s^4$, welche in dem Fall $s=1$ ein Quadrat wird, alsdann aber wäre $t=-1$ und $u=0$, woraus nichts gefunden werden kann.

Man mag auch die Sache angreiffen wie man will, so wird man niemahls einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Endzweck führet; woraus man schon ziemlich sicher schließen kann, daß es nicht möglich sey zwey Cubos zu finden, deren Summe ein Cubus wäre, welches aber auch folgender Gestalt bewiesen werden kann.

243.

Lehr-Satz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemercken, daß wann die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müße. Dann wann es unmöglich ist daß $x^3+y^3=z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3-y^3=x^3$, nun aber ist z^3-y^3 die Differenz von zwey Cubis. Es ist also genung die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum deßelben theilen laßen. Wäre z. E. $x=2a$, und y $2b$ so würde $x^3+y^3=8a^3+8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch a^3+b^3 ein Cubus seyn.

II. Da nun x und y keinen gemeinen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerad, oder die eine gerad, und die andere ungerad. Im erstern Falle müßte z gerad seyn; im andern Fall aber müßte z ungerad seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerad und eine gerad. Wir wollen dahero zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der

Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wann die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen demnach *x* und *y* zwey ungerade Zahlen, so wird so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn. Man setze dahero $\frac{x+y}{2}=p$ und $\frac{x-y}{2}=q$, so wird $x=p+q$ und $y=p-q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen *p* und *q* die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß; dahero aber wird $x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq)$: es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(qq+3pp)$, welche Formel der vorigen gantz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben *p* und *q* verwechselt sind, dahero es genung ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp+3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp+3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerad und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine gantze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$. Weil nun von den Zahlen *p* und *q* die eine gerad, die andere aber ungerad ist, so wird $pp+3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich *p* dulch 4 theilen laßen müße und also $\frac{p}{4}$ eine gantze Zahl sey.

V. Wann nun dieses Product $\frac{p}{4}\cdot\left(pp+3qq\right)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$, ein Cubus seyn, so nemlich dieselben keinen gemeinen Theiler haben. Dann wann ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wann dieselben aber einen gemeinen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren *p* und $pp+3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen Theiler, so würden auch diese *pp* und $pp+3qq$ eben denselben gemeinen Theiler haben, und also auch ihre Differenz, welche ist *3qq,* mit dem *pp* eben denselben gemeinen Theiler haben; da nun *p* und *q* unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen *pp* und *3qq* keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wann sich *p* durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben dahero zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wann die Factoren *p* und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, welches immer geschieht, wann sich *p* nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt, da dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müßen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey denmach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns dahero $pp+3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wann man, wie oben gezeigt worden, setzt

$$p+q\sqrt{-3}=\left(t+u\sqrt{-3}\right)^3 \text{ und } p-q\sqrt{-3}=\left(t-u\sqrt{-3}\right)^3.$$

Damit dadurch werde $pp+3qq=\left(tt+3uu\right)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird

$$p=t^3-9tuu=t\left(tt-9uu\right) \text{ und } q=3ttu-3u^3=3u\left(tt-uu\right);$$

weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerad, t aber gerad seyn, weil sonsten $tt-uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp+3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden

$$p=t\left(tt-9uu\right)=t\left(t+3u\right)\left(t-3u\right),$$

so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; dahero diese Formel $2t\left(t+3u\right)\left(t-3u\right)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemercken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonsten auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist; also sind diese drey Factoren $2t, t+3u$ und $t-3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$ so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbahr ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Dann nachdem wir gesetzt haben $x=p+q$ und $y=p-q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müßen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wann es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleineren Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summ auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewis nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir so gleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p=3r$ so wird unsere Formel

$$\tfrac{3r}{4}\cdot(9rr+3qq), \text{ oder } \tfrac{9}{4}r(3rr+qq),$$

welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und *r* eben so wohl gerad seyn muß als *p*, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q=t(tt-9uu)$ und $r=3u(tt-u)$; wo zu mercken, daß weil *q* ungerad war, hier auch *t* ungerad, *u* aber eine gerade Zahl seyn müße.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wann man aber setzt $t+u=f^3$ und $t-u=g^3$, so folgt daraus $2u=f^3-g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre; dann man darf nur setzen $f^3-g^3=h^3$, so wird $f^3=h^3+g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

244.

Weil es nun nicht möglich ist zwey solche Cubos zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fält auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit dieser Frage zu machen, wie drey Cubi gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache: man kann aber zwey von denselben nach Belieben annehmen, also daß nur der dritte gefunden werden soll; welche Frage wir anjetzo vornehmen wollen.

245.

II. Frage: Es wird zu zwey gegebenen Cubis a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubum ausmache?

Es soll also diese Formel $a^3+b^3+x^3$ ein Cubus werden, welches da es nicht anders geschehen kann, als wann schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall aber hier sich von selbsten darbiethet nemlich $x=-a$, so setze man

$x = y - a$, da wird $x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3$, und dahero unsere Formel die ein Cubus werden soll $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$, wovon das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, dahero man so gleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y + b$, deren Cubus ist $y^3 + 3byy + 3bby + b^3$; woraus wir bekommen $-3ay + 3aa = 3by + 3bb$, dahero $y = \frac{aa-bb}{a+b} = a - b$; folglich $x = -b$ welcher uns zu nichts dienet.

II. Man kan aber die Wurzel auch setzen $b + fy$, davon der Cubus ist $f^3y^3 + 3bffyy + 3bbfy + b^3$; und *f* also bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $3aa = 3bbf$ oder $f = \frac{aa}{bb}$, da dann die zwey ersten Glieder durch *yy* dividirt geben $y - 3a = f^3y + 3bff = \frac{a^6y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^4}$, welche mit b^6 multiplicirt giebt $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^4b^3$; daraus gefunden wird

$$y = \frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3\left(a^3 + b^3\right)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3},$$

und allso

$$x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a \cdot \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}.$$

Wann also die beyden Cubi a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubi gefunden, und damit dieselbe positiv werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubum annehmen, welches wir durch einige Exempel erläutern wollen.

I. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 1 und 8, also daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird diese Form $9 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{17}{7}$; dann da wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 8 und 27, also daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird diese Form $35 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 27 und 64, also daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird diese Form $91 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubis noch mehr dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$, da man dann wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für *z* bestimmen ließen, welches aber in allzuweitläufige Rechnungen führen würde.

246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merckwürdiger Fall, wann die beiden gegebenen Cubi einander gleich sind, oder $b=a$; dann da bekommen wir $x=\frac{3a^4}{0}$ das ist unendlich, und erhalten also keine Auflösung; dahero diese Frage wann $2a^3+x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelößt werden können. Es sey z. E. $a=1$ und also unsere Formel $2+x^3$, so ist zu mercken, daß was man auch immer vor Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergebens sind, und nimmer daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann, woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubo kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubum ausmachte, oder daß diese Gleichung $2a^3+x^3=y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folget diese $2a^3=y^3-x^3$, und dahero auch nicht möglich ist zwey Cubos zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen und folgender Gestalt bewiesen werden kann.

247.

Lehr-Satz. Weder die Summe, noch die Differenz zwischen zwey Cubis kann jemahls einem doppelten Cubo gleich werden, oder diese Formel $x^3\pm y^3=2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer dem Fall $y=x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar seyn und also die gantze Gleichung durch den Cubum davon getheilt werden können. Weil nun $x^3\pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müßen beyde Zahlen x und y ungerad seyn, dahero so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn wird. Man setze allso und $\frac{x+y}{2}=p$ und $\frac{x-y}{2}=q$, so wird $x=p+q$ und $y=p-q$; da dann von den Zahlen p und q die eine gerad die andere aber ungerad seyn muß. Hieraus folgt aber

$$x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p\left(pp+2qq\right),\ \text{und}\ x^3-y^3=6pqq+2q^3=2q\left(3pp+qq\right)$$

welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Dahero es genung seyn wird zu zeigen, daß diese Formel $2p\left(pp+3qq\right)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p\left(pp+3qq\right)$ kein Cubus seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwey Fälle zu betrachten vor, da von der erste ist, wann die zwey Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, da dann ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welcher wie wir oben gesehen kein anderer seyn kann als 3.

II. Erster Fall. Es sey demnach p nicht theilbar durch 3, und also die beyden Factores unter sich unteilbar, so mache man erstlich $pp+3qq$ zu einem Cubo, welches geschieht, wann
$p=t(tt-9uu)$ und $q=3u(tt-uttt)$, also daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonsten p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind diese zwey Factoren t und $tt-9uu$, untheilbar unter sich, und muß folglich ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factores, nemlich $t+3u$ und $t-3u$, welche unter sich nutheilbar sind, erstlich weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber weil von den Zahlen t und u die eine gerad und die andere ungerad ist. Dann wann beyde ungerad wären, so würde nicht nur p sondern auch q ungerad werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder von diesen Factoren $t+3u$ und $t-3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$, so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus welcher sey $=h^3$, allso daß $f^3+g^3=2h^3$ wäre, das ist wir hätten zwey weit kleinere Cubos nemlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p=3r$, so wird unsere Formel

$$3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq),$$

welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und dahero ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letzteren $qq+3rr$ zu einem Cubo zu machen, so setze man $q=t(tt-9uu)$ und $r=3u(tt-uu)$, da dann wieder von den Zahlen t und u die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß, weil sonsten die beyde Zahlen q und r gerad würden. Hieraus aber bekommen wir den erstern Factor $9r=27u(tt-uu)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nemlich
$u(tt-uu)$ das ist $u(t+u)(t-u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich nutheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man demnach für die beyden letztern $t+u=f^3$ und $t-u=g^3$, so bekommt man $2u=f^3-g^3$; weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen zwey Cubos f^3 und g^3, deren Differenz gleichfals ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubos giebt, deren

Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß da es in kleinem Zahlen gleich wohl einen solchen Fall gebe, nemlich wann $f=g$, der obige Schluß betriegen könnte. Allein wann $f=g$ wäre, so hätte man in dem erstern Fall $t+3u=t-3u$ und also $u=0$, folglich wäre auch $q=0$ und da wir gesetzt hatten $x=p+q$ und $y=p-q$, so wären auch die zwey ersten Cubi x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden. Eben so auch in dem andern Fall, wann $f=g$ wäre, so müßte seyn $t+u=t-u$ und also wiederum $2t=0$, dahero auch $r=0$ und folglich $p=0$, da dann wiederum die beyden erstern Cubi x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keines weges die Frage ist.

248.

III. Frage: Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubos x^3, y^3 und z^3, deren Summe wiederum einen Cubum ausmache?

Wir haben schon gesehen, daß man zwey von diesen Cubis für bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen könne, wann nur die beyden erstem einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubum und es würde sehr schwer fallen daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drey Cubos als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir $x^3+y^3+z^3=v^3$, und bringen den einen von den erster nauf die andere Seite, damit wir bekommen $x^3+y^3=v^3-z^3$; welcher Gleichung folgender Gestalt ein Genügen geschehen kann.

I. Man setze $x=p+q$ und $y=p-q$, so wird wie wir gesehen $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$; ferner setze man $v=r+s$ und $z=r-s$, so wird $v^3-z^3=2s(ss+3rr)$; dahero dann seyn muß

$$2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr), \text{oder } p(pp+3qq)=s(ss+3rr).$$

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $pp+3qq$ keine andere Theiler habe, als welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun diese beyde Formeln $pp+3qq$ und $ss+3rr$ nothwendig einen gemeinen Theiler haben müßen, so sey derselbe $=tt+3uu$.

III. Zu diesem Ende setze man

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu) \text{ und } ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu),$$

da dann $p=ft+3gu$ und $q=gt-fu$ wird; folglich

$$pp=fftt+6fgtu+9gguu \text{ und } qq=ggtt-2fgtu+ffuu;$$

hieraus

$$pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu$$

das ist

$$pp+\ 3qq=(ff+3gg)\ (tt+3uu)\,.$$

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel

$$s=ht+3ku \text{ und } r=kt-hu\,,$$

woraus diese Gleichung entspringt

$$(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu)\,,$$

welche durch $tt+3uu$ dividirt giebt

$$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk)\,,$$

oder

$$ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hk+3kk)-3gu(ff+3gg)\,,$$

woraus wir erhalten

$$t=\ \frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u\,.$$

V. Um nun gantze Zahlen zu bekommen, so nehme man

$$u=\ f(ff+3gg)-h(hh+3kk)\,,$$

damit sey

$$t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)\,,$$

wo man die vier Buchstaben *f, g, h* und *k* nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für *t* und *u* gefunden, so erhält man daraus:

$$\text{I.)}\, p=\ ft+3gu,\ \text{II.)} q=gt-\ fu,\ \text{III.)} s=ht+3ku,\ \text{IV.)} r=\ kt-hu\,,$$

und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage

$$x=p+q,\ y=p-q,\ z=\ r-s \text{ und } v=r+s\,,$$

welche Auflösung so allgemein ist, daß darinnen alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser gantzen Rechnung keine willkührliche Einschränckung gemacht worden.

Der gantze Kunstgriff bestehet darinn, daß unsere Gleichung durch $tt+3uu$, theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben *t* und *u* durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich vielerley Art angesteilet werden, wovon wir einige Exempel anführen wollen.

I. Es sey $k=0$ und $h=1$, so wird

$$t=-3g(ff+3gg) \text{ und } u=\ f(ff+3gg)-1$$

hieraus also

$$p=-3fg(ff+3gg)+3fg(ff+3gg)-3g=-3g,\ q=-(ff+3gg)^2+\ f\ ,$$

ferner $s=-3g(ff+3gg)$ und $r=-f(ff+3gg)+1$, woraus wir endlich bekommen

$$x = -3g - (ff + 3gg)^2 + f,\ y = -3g + (ff + 3gg)^2 - f,$$

$z = (3y - f)(ff + 3yg) + 1$ und endlich $v = -(3g + f)(ff + 3gg) + 1$.

Laßt uns nun setzen $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir

$$x = -20, y = 14,\ z = 17 \text{ und } v = -7;$$

dahero haben wir diese Gleichung

$$-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3 \text{ oder } 14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3.$$

II. Es sey $f = 2, g = 1$ und also $ff + 3gg = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $hh + 3kk = 3$, so wird seyn $t = -12$ und $\mathrm{t} = 14$; hieraus wird

$$p = 2t + 3u = 18,\ q = t - 2u = -40,\ r = t = -12 \text{ und } s = 3u = 42;$$

dahero wir bekommen

$$x = p + q = -22,\ y = p - q = 58,\ z = r - s = -54 \text{ und } v = r + s = 30;$$

also daß

$$-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3 \text{ oder } 58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3.$$

Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen laßen, so wird auch seyn

$$29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3.$$

III. Es sey $f = 3,\ g = 1,\ h = 1$ und $k = 1$, also $ff + 3gg = 12$ und $hh + 3kk = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen laßen; und da es hier nur auf ihre Verhältniße ankommt, so wollen wir setzen $t = -3$ und $u = 4$. Hieraus bekommen wir

$p = 3t + 3u = +3,\ q = t - 3u = -15,\ r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = 9$;

hieraus wird $x = -12$ und $y = 18, z = -16$ und $v = 2$, also daß

$$-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3 \text{ oder } 18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3:$$

oder auch durch 2 abgekürtzt

$$9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3.$$

IV. Laßt uns setzen $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $ff + 3gg = ff$ und $hh + 3kk = 4hh$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner

$$p = ft = 12fh^3, q = -f^4 + 4fh^3,$$

$$r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3, \text{ und } s = 3hf^3,$$

daraus endlich

$$x = p + q = 16fh^3 - f^4, \qquad y = p - q = 8fh^3 + f^4$$

$$z = r - s = 16h^4 - 4hf^3, \qquad \text{und } v = r + s = 16h^4 + 2hf^3.$$

Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir

$x = 15,\ y = 9,\ z = 12$ und $v = 18$, welche durch 3 abgekürtzt geben

$x = 5,\ y = 3,\ z = 4$ und $v = 6$, also daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Hierbey ist merckwürdig, daß diese drey Wurzeln 3, 4, 5 um Eins steigen, dahero wir untersuchen wollen ob es noch mehr dergleichen gebe?

249.

IV. Frage: Man verlangt drey Zahlen in einer Arithmetischen Progression, deren Differenz $=1$, also daß die Cubi derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubum hervorbringen?

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $=x-1$ und die größere $=x+1$; die Cubi derselben addirt geben nun

$$3x^3+6x=3x(xx+2),$$

welches ein Cubus seyn soll. Hierzu ist nun nöthig daß ein Fall bekannt sey wo dieses geschieht, und nach einigem Probiren findet man $x=4$, dahero setzen wir nach den oben gegebenen Regeln $x=4+y$, so wird

$$xx=16+8y+yy \text{ und } x^3=64+48y+12yy+y^3,$$

woraus unsere Formel wird $216+150y+36yy+3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze demnach die Wurzel $6+fy$ und mache daß die beyden ersten Glieder wegfallen; da nun der Cubus davon ist $216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, so muß seyn $150=108f$, also $f=\frac{25}{18}$. Die übrigen Glieder aber durch yy dividirt geben

$$36+3y=18ff+f^3=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^3}y,$$

oder

$18^3\cdot 36+18^3\cdot 3y=18^2\cdot 25^2+25^3y$ oder $18^3\cdot 36-18^2\cdot 25^2=25^3y-18^3\cdot 3y$,

dahero

$$y=\frac{18.^3 36-18^2\cdot 25^2}{25^3-3\cdot 18^3}=\frac{18^2\left(18\cdot 36-25^2\right)}{25^3-3\cdot 18^3},$$

und also

$y=\frac{324\cdot 23}{1871}=-\frac{7452}{1871}$; folglich $x=\frac{32}{1871}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte diese Reduction zu einem Cubo weiter zu verfolgen, so ist zu mercken daß die Frage immer könne auf Quadrate gebracht werden. Dann da $3x(xx+2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $=x^3y^3$, da man denn erhält $3xx+6=xxy^3$ und also $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3-18$ zu einem Quadrat zu machen; wozu wiederum nöthig ist einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen laßen. Man setze deswegen $y=3z$, so wird unser Nenner $=162z^3-18$ welcher durch 9 dividirt, nemlich $18z^3-2$, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar wann $z=1$; man setze dahero $z=1+v$, so muß seyn $16+54v+54w+18v^3=\square$. Davon setze man die Wurzel $4+\frac{27}{4}v$, deren Quadrat ist $16+54v+\frac{729}{16}vv$, und also $54+18v=\frac{729}{16}$; oder $18v=-\frac{135}{16}$, folglich $2v=-\frac{15}{16}$, und $v=-\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z=1+v=\frac{17}{32}$, ferner $y=\frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher war

$$6y^3-18=162z^3-18=9\left(18z^3-2\right).$$

Von diesem Factor aber $18z^3-2$ haben wir die Quadrat-Wurzel $4+\frac{27}{4}v=\frac{107}{128}$, also die Quadrat-Wurzel aus dem gantzen Nenner ist $\frac{321}{128}$; aus dem Zähler aber ist derselbe $=6$, woraus folget $x=\frac{6}{\frac{321}{128}}=\frac{256}{107}$, welcher Werth von dem vorher gefundenen gantz unterschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubis folgende:

$$\text{I.)}\; x-1=\frac{149}{107};\quad \text{II.)}\; x=\frac{256}{107};\quad \text{III.)}\; x+1=\frac{363}{107}$$

deren Cubi zusammen addirt einen Cubum hervorbringen, davon die Wurzel seyn wird $xy=\frac{256}{107}\cdot\frac{51}{32}=\frac{408}{107}$.

250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytic beschließen, weil wir bey den angebrachten Fragen Gelegenheit genug gefunden haben die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in dieser Wissenschaft sind gebraucht worden.

ENDE DES ZWEYTEN THEILS