CHAPTER 2

ON THE SO-CALLED UNIVERSAL RULE, WHERE FROM TWO OR MORE EQUATIONS THREE OR MORE UNKNOWN NUMBERS CAN BE DETERMINED.

24.

We have seen in the previous chapter, how two unknown numbers can be determined from one equation, of such a form that whole and positive numbers are found. But if two equations arise then the question shall be undetermined, thus more than two unknown numbers arise. Such questions arise in common arithmetic books and are accustomed to be solved following the so-called Regula-Coeci [*so called* Blind Rule ?], the basic rule of which we will show here.

[A recent paper by Maarten Bullynck in Historia Mathematica, Vol. 36, Issue 1, February 2009, pages 48-72, *Modular arithmetic before C.F. Gauss*……….., investigates the origins of such arithmetic in earlier times. Now the word *coetus* refers to a gathering together or meeting, here of differing quantities, while *caecus* refers to blindness; the word *coeci* in the genitive singular cannot therefore refer to blindness, but to a collection of rules, which may be expressed as a universal rule, as indicated here. Ch. 11 of Fibonacci's *Liber Abaci* deals with mixing alloys of copper and silver for coinage; see S.E. Sigler's translation pub. by Springer.]

25.

We will start with an example:

I. Question: 30 people, men, women and children spend 50 Rthl. in an inn, whereby a man spends 3 Rthl., a woman 2 Rthl., and a child 1 Rthl. ; how many people were there of each kind ?

Let the number of men $= p$, of women $= q$, and of children $= r$,
thus one has the two following equations:

I.) $p+q+r=30$, II.) $3p+2q+r=50$;

of which the three letters *p, q* and *r* are determined to be whole positive numbers. From the first there becomes now $r=30-p-q$, and therefore $p+q$ must be smaller than 30; this value for *r* written in the other equation gives $2p+q+30=50$, thus $q=20-2p$ and $p+q=20-p$, which from the same is less than 30. Now one can take all numbers for *p*, which are not greater than 10, from which the following solutions arise :

The number of men	$p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$
of women	$q=20,\ 18,\ 16,\ 14,\ 12,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,$
and of children	$r=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,$

leaving out the first and last way, thus there are as many as 9 true solutions remaining.

26.

II. Question: Someone buys 100 head of livestock, pigs, goats and sheep, for 100 Rthl. a pig costs $3\frac{1}{2}$ Rthl., a goat$1\frac{1}{3}$ Rthl. and a sheep $\frac{1}{2}$ Rthl.; how many were there of each kind?

Let the number of pigs be $= p$, of goats $= q$, of sheep $= r$, thus one has the following 2 equations :

$$\text{I.) } p+q+r=100 \text{ , II.) } 3\tfrac{1}{2}p+1\tfrac{1}{3}q+\tfrac{1}{2}r=100;$$

the latter is multiplied by 6 in order to remove the fractions, thus becoming $21p+8q+3r=600$. From the first there is found $r=100-p-q$, which value put into the other equation gives $18p+5q=300$ or $5q=300-18p$ and $q=60-\frac{18p}{5}$; thus $18p$ shall be divisible by 5, or 5 is itself included as a factor. Therefore on putting $p = 5s$, there becomes thus $q=60-18s$ and $r=13s+40$,
where any whole number can be taken for *s*, but so that *q* does not become negative, therefore *s* cannot be assumed to be greater than 3, and thus if 0 also were excluded, only the following three solutions are to be found,

namely if,

	$s=$	1,	2,	3
thus	$p=$	5,	10,	15.
	$q=$	42,	24,	6.
	$r=$	53,	66,	79.

27.

If it is wished to give suchlike examples, thus it is to be observed for all cases, that the same shall be possible ; in order that now with that to be decided, thus the following to be noted:

There shall be the two equations, such as we had introduced before,

$$\text{I.)}\, x+y+z=a, \qquad \text{II.)}\, fx+gy+hz=b,$$

where *f, g, h,* along with *a* and *b* are given numbers ; now among the numbers *f, g* and *h* the first *f* to be the greatest and *h* the smallest, since $x+y+z=a$ thus $fx+fy+fz=fa$. Now $fx+fy+fz$ is greater than $fx+gy+hz$ therefore *fa* must be greater than *b,* or *b* must be smaller than *fa;* and that further $hx+hy+hz=ha$ and $hx+hy+hz$ indeed is smaller than $fx+gy+hz$ thus also *ha* must be smaller than *b,* or *b* greater than *ha.* Consequently, therefore, the number *b* cannot be less than *fa* and at the same time greater than *ha*, thus the question is always impossible .

This condition also is accustomed to be propounded, by saying that the number *b* must be contained between bounds *fa* and *ha*, in addition the same must not come closer than one from both the bounds, because otherwise the other letters cannot be determined.

In the preceding example, where $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ and $h=\frac{1}{2}$, the bounds were 350 and 50; should one place $b=51$ in place of 100, thus the equations would become $x+y+z=100$, and $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$ and the latter multiplied by 6 becomes $21x+8y+3z=306$; taking three times the first equation, thus becoming

$3x+3y+3z=300$, thus taken away from that leaves $18x+5y=6$, which likewise is clearly impossible, because x and y must be whole numbers.

28.

This rule can also be put to good use by mint-masters and goldsmiths, if they want to smelt together an alloy of a given mass from three or more kinds of silver of a given value ; as can be seen from the following example.

III. Question: A mint master has silver of three kinds, the first contains 14 half ounce parts of silver, the second 11, and the third 9 similar parts [in the original units, one Loth is equivalent to half an ounce, or $\frac{1}{32}$ th of a pound]. Now if he wanted to make a weight of 30 marks, which shall be 12 Loth, or half ounce parts of silver, how many marks must he take of each kind ?

He takes x marks of the first kind, y of the second, and z of the third, thus there shall be $x+y+z=30$, which is the first equation.

Further since a mark of the first kind contains 14 Loth of fine silver, thus x marks contains $14x$ Loth of silver; just as y marks of the second kind contains $11y$ Loth; and the z marks of the third kind contains $9z$ Loth of silver ; therefore the whole mass contains $14x+11y+9z$ Loth of silver. Now because the same weighs 30 marks, of which one mark shall contains 12 Loth of silver, thus also the quantity of silver within the same must be namely 360 Loth, from which this second equation arises $14x+11y+9z=360$; from this on subtracting the first equation taken nine times, namely $9x+9y+9z=270$, thus there remains left $5x+2y=90$, from which x and y shall be determined, and in whole numbers as well, as then moreover $z=30-x-y$; from this the equation is come upon $2y=90-5x$ and $y=45-\frac{5x}{2}$. Therefore there shall be $x=2u$ thus there becomes $y=45-5u$ and $z=3u-15$, thus u is greater than 4 and equally to be less than 10, from which the following solutions can be extracted :

$u=$	5	6	7	8	9
$x=$	10	12	14	16	18
$y=$	20	15	10	5	0
$z=$	0	3	6	9	12

29.

Sometimes more than three unknown numbers arise, where the solution can be done in just this way, as seen from the following example.

IV. Question: Someone buys 100 animals for 100 Rthl. ; an ox for 10 Rthl.; a cow for 5 Rthl. , a calf for 2 Rthl. ; a sheep for $\frac{1}{2}$ Rthl. How many oxen, cows, calves and sheep were there bought?

The number of oxen shall be $=p$, of cows $=q$, calves $=r$ and of sheep = s, thus the first equation is : $p+q+r+s=100$, but the second equation becomes $10p+5q+2r+\frac{1}{2}s=100$, which multiplied by 2 in order to remove the fractions gives

$20p+10q+4r+s=200$, the first equation is subtracted from this, thus one has $19p+9q+3r=100$; from this we arrive at $3r=100-19p-9q$ and $r=33+\frac{1}{3}-6p-\frac{1}{3}p-3q,$ or $r=33-6p-3q+\frac{1-p}{3},$ therefore $1-p$ or $p-1$ shall be divisible by 3.
Therefore on putting $p-1=3t$ thus there becomes :

$$p=3t+1$$
$$q=q$$
$$r=27-19t-3q$$
$$s=72+2q+16t$$

Thus $19t+3q$ must be smaller than 27. Now here q and t are taken as it pleases, but only if this condition were being observed, that $19t+3q$ will not exceed 27; therefore the following cases have arisen.

I. If $t=0$ then	II. If $t=1$ then	t cannot be put equal to 2 because otherwise r would be negative.
$p=1$	$p=4$	
$q=q$	$q=q$	
$r=27-3q$	$r=8-3q$	
$s=72+2q$	$s=88+2q$	

In the first case q cannot be greater than 9 and in the second case q cannot be greater than 2. From the two cases we thus obtain the following equations.

From the first case we obtain these 10 solutions:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Moreover, from the second case we obtain these 3 solutions:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

These are altogether 13 solutions ; but if 0 is not to be counted, then there are only 10 solutions.

30.

The method of the solving remains one and the same, if as well as in the first equation the letters are multiplied by given numbers as seen in the following example :

V. Question: Someone looks for three whole numbers, which if the first be multiplied by 3, the second by 5, and the third by 7, then the sum of the products shall be 560; but if the first be multiplied by 9, the second by 25, and the third by 49, then the sum of the products shall be 2920.

The first number shall be $=x$, the second $=y$, and the third $=z$, thus we have these two equations:

$$\text{I.)}\ 3x+5y+7z=560,\ \text{II.)}\ 9x+25y+49z=2920;$$

three times the first is subtracted from the second, namely $9x+15y+\ 21z=1680$, thus there remains $10y+28z=1240$, or divided by 2 $5y+14z=620$, from which there becomes $y=124-\frac{14z}{5}$; thus z itself must be divisible by 5 ; therefore on putting $z=5u$, thus there becomes $y=124-14u$; which values written in the first equation for z and y, give $3x-35u+620=560$, or

$$3x=35u-60 \text{ and } x=\tfrac{35u}{3}-20;$$

therefore putting $u=3t$, thus we arrive finally at this equation :

$$x=35t-20, y=124-42t, \text{ and } z=15t,$$

where any single whole number can be put for t, but only if t shall be greater than 0 and smaller than 3, from which one obtains two solutions :

$$\text{I.) if } t=1 \text{ then } x=15,\ y=82,\ z=15,$$
$$\text{II.) if } t=2 \text{ then } x=50,\ y=40,\ z=30.$$

CAPITEL 2

VON DER SOGENANNTEN REGEL-COECI WO AUS ZWEY GLEICHUNGEN DREY ODER MEHR UNBEKANTE ZAHLEN BESTIMMT WERDEN SOLLEN

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt daß dafür gantze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekante Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechen-Büchern vor und pflegen nach der so genannten Regel-Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirths-Hauß 50 Rthl. daran zahlt ein Mann 3 Rthl. ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgende Gleichungen

I.) $p+q+r=30$, II.) $3p+2q+r=50$;

aus welchen die drey Buchstaben *p, q* und *r* in gantzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r=30-p-q$, und deswegen muß $p+q$ kleiner seyn als 30; dieser Werth in der andern für *r* geschrieben giebt $2p+q+30=50$, also $q=20-2p$ und $p+q=20-p$, welches von selbsten kleiner ist als 30. Nun kann man für *p* alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entspringen:

Zahl der Männer $p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$

der Weiber $q=20,\ 18,\ 16,\ 14,\ 12,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,$

der Kinder $r=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,$

läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

26.

II. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schaafe, für 100 Rthl. kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthl. eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthl. ein Schaaf $\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schaafe $= r$, so hat man folgende zwey Gleichungen

I.) $p+q+r=100$, II.) $3\frac{1}{2}p+1\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r=100$; ;

diese letztere multiplicirt man mit *6* um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p+8q+3r=600$. Aus der ersten hat man $r=100-p-q$, welcher Werth in der andern gesetzt giebt $18p+5q=300$ oder $5q=300-18p$ und $q=60-\frac{18p}{5}$; also muß 18*p* durch 5 theilbahr seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also

$$p = 5s, \text{ so wird } q=60-18s \text{ und } r=13s+40,$$

wo für *s*. eine beliebige gantze Zahl genommen werden kann, doch so daß *q* nicht negativ werde, dahero *s* nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also wann 0 auch ausgeschloßen wird, nur folgende drey Auflösungen statt finden,
nemlich wann $s=1,\ 2,\ 3.$
so wird

$$p = \ 5,\ 10,\ 15.$$
$$q=42,\ 24,\ 6.$$
$$r=53,\ 66,\ 79.$$

27.

Wann man dergleichen Exempel selbsten vorgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß dieselben möglich sind; um nun davon zu urtheilen, so ist folgendes zu bemercken:

Es seyen die beyden Gleichungen, dergleichen wir bisher gehabt, also vorgestellet

$$\text{I.)}\, x+y+z=a, \quad \text{II.)}\, fx+gy+hz=b,$$

wo *f, g, h,* nebst *a* und *b* gegebene Zahlen sind; nun sey unter den Zahlen *f, g* und *h* die erste *f* die größte und *h* die kleinste, da $x+y+z=a$ so wird $fx+fy+fz=fa$. Nun ist $fx+fy+fz$ größer als *fx gy* + *hz* dahero muß *fa* größer seyn als *b*, oder *b* muß kleiner seyn als *fa;* und da ferner $hx+hy+hz=ha$ und $hx+hy+hz$ gewis kleiner ist als $fx+gy+hz$ so muß auch *ha* kleiner seyn als *b,* oder *b* größer als *ha.* Wofern demnach die Zahl *b* nicht kleiner als *fa* und zugleich größer als *ha*, so ist die Frage immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt auch also vorgetragen zu werden, daß die Zahl *b* zwischen diesen Gräntzen *fa* und *ha* enthalten seyn muß, ferner muß dieselbe auch nicht einem der beyden Gräntzen gar zu nahe kommen, weil sonsten die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In den vorigen Exempel, wo $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ und $h=\frac{1}{2}$ waren die Gräntzen 350 und 50; wollte man nun setzen $b=51$ anstatt 100, so wären die Gleichungen $x+y+z=100$, und $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$ und hier mit 6 multiplicirt $21x+8y+3z=306;$ man nehme die erste dreymahl, so wird $3x+3y+3z=300$, so von jener abgezogen läßt $18x+5y=6$, welche gleich offenbar unmöglich ist, weil x und y gantze Zahlen seyn müßen.

28.

Diese Regel kommt auch den Müntz-Meistern und Gold-Schmiden wohl zu statten, wann sie aus drey oder mehrere Sorten von Silber eine Maße von einem gegebenen Gehalt zusammen schmeltzen wollen; wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

III. Frage: Ein Müntz-Meister hat dreyerley Silber, das erste ist 14löthig, das andere 11löthig, das dritte 9löthig. Nun soll er eine Maße 30 Marck schwer machen, welche 12löthig seyn soll, wie viel Marck muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Marck, von der zweyten y M. und von der dritten z M. so muß seyn $x+y+z=30$ welches die erste Gleichung ist.

Da ferner ein Marck von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Marck enthalten $14x$ Loth Silber; eben so werden die y Marck von der zweyten Sorte enthalten $11y$ Loth; und die z Marck von der dritten Sorte werden enthalten $9z$ Loth Silber; dahero die gantze Maße an Silber enthalten wird $14x+11y+9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Marck wiegt, wovon ein Marck 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darinnen seyn, nemlich 360 Loth, woraus diese zweyte Gleichung entspringt $14x+11y+9z=360$; hiervon subtrahire man die erste 9mahl genommen, nemlich $9x+9y+9z=270$, so bleibt übrig $5x+2y=90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in gantzen Zahlen, alsdann aber wird $z=30-x-y$; aus jener Gleichung bekommt man $2y=90-5x$ und $y=45-\frac{5x}{2}$. Es sey demnach $x=2u$ so wird $y=45-5u$ und $z=3u-15$, also muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn, woraus folgende Auflösungen gezogen werden:

$u=5$	6	7	8	9
$x=10$	12	14	16	18
$y=20$	15	10	5	0
$z=0$	3	6	9	12

29.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekante Zahlen vor, wo die Auflösung auf eben diese Art geschehen kann, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

IV. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh um 100 Rthl. 1 Ochsen für 10 Rthl. 1 Kuh für 5 Rthl. 1 Kalb für 2 Rthl. 1 Schaaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schaafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sey $=p$, der Kühe $=q$, der Kälber $=r$ und der Schaafe = s, so ist die erste Gleichung: $p+q+r+s=100$, die zweyte Gleichung aber wird $10p+5q+2r+\frac{1}{2}s=100$, welche um die Brüche wegzubringen mit 2 multiplicirt gibt $20p+10q+4r+s=200$, hievon subtrahire man die erste Gleichung so hat man $19p+9q+3r=100$; hieraus bekommen wir $3r=100-19p-9q$ und

$r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$, dahero muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn.
Man setze demnach $p - 1 = 3t$ so wird:

$$p = 3t + 1$$
$$q = q$$
$$r = 27 - 19t - 3q$$
$$s = 72 + 2q + 16t$$

also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wann nur diese Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwegen haben.

I. wann $t=0$	II. wann $t=1$	t kann nicht 2 gesetzt
so wird $p=1$	so wird $p=4$	werden weil sonsten r
$q = q$	$q = q$	negativ würde.
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$	
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$	

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9 und im zweyten Fall muß q nicht größer seyn als 2. Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Fall erhalten wir diese 10 Auflösungen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem 13 Auflösungen; wann man aber 0 nicht wollte gelten laßen, so wären es nur 10 Auflösungen.

30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wann auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind wie aus folgendem

Exempel zu ersehen:

V. Frage: Man suche drey gantze Zahlen, wann die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 560; wann aber die erste mit 9 die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 2920?

Es sey die erste Zahl $= x$, die zweyte $= y$, die dritte $= z$, so hat man diese zwey Gleichungen

$$\text{I.)} 3x + 5y + 7z = 560, \ \text{II.)} 9x + 25y + 49z = 2920$$

von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen nemlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt $5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$ also muß sich *z* durch 5 theilen laßen; dahero setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für *z* und *y* geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder

$$3x = 35u - 60 \ \text{ und } \ x = \tfrac{35u}{3} - 20;$$

deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung:

$$x = 35t - 20, y = 124 - 42t, \text{ und } z = 15t,$$

wo man für *t* eine beliebige gantze Zahl setzen kann, doch so daß *t* größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

$$\text{I.) wann } t = 1 \text{ so wird } x = 15, \ y = 82, \ z = 15,$$
$$\text{II.) wann } t = 2 \text{ wird } x = 50, \ y = 40, \ z = 30.$$