CHAPTER 3

CONCERNING A NUMBER OF INDETERMINATE EQUATIONS TAKEN TOGETHER, WHERE ONE OF THE UNKNOWN NUMBERS OF THE FIRST DEGREE ONLY ARISES.

31.

Now we come to investigate indeterminate equations, where two unknown numbers are to be found, and that one does not stand alone as before, but rather is multiplied by the other or arises in a higher power, but only if the first power of the other is present. Such equations of a general kind have the following forms :

$$a+bx+cy+dxx+exy+fx^2+gxxy+hx^4+kx^3y+\text{etc.}=0$$

in which only y arises, and thus it can readily be determined from this equation, but the determination thus must be done, so that whole numbers arise for x and y . We will now consider suchlike cases, and make a start with the easier ones.

32.

I. Question: Two numbers are sought, such that if their sum is added to their product, then 79 arises.

The two numbers sought shall be x and y, thus so that there shall be $xy+x+y=79$, from which we obtain $xy+y=79-x$ and $y=\frac{79-x}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1}$, from which it is apparent that $x+1$ must be a factor of 80 ; since now 80 has so many divisors as can be found for each value of *x;* as can be seen from the following :

The divisors are	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
therefore $x=$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
and $y=$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

now because here the last solutions agree with the first, so that altogether one has the following five solutions :

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

This general equation

$$xy+ax+by=c$$

can also be resolved in such a manner, from which there arises $xy+by=c-ax$ and thus $y=\frac{c-ax}{x+b}$ or $y=-a+\frac{ab+c}{x+b}$; therefore $x+b$ must be a divisor of the known number $ab+c$, and thus from each single factor a value of x can be found for the same. Therefore putting $ab+c=fg$ thus so that $y=-a+\frac{fg}{x+b}$.

Now putting $x+b=f$ or $x=f-b$, thus there becomes $y=-a+g$ or $y=g-a$; on that account there are thus many different to represent the number $ab+c$ by two factors, such as fg, thus one obtains from that not only one, but two solutions: the first is namely

$$x=f-b \text{ and } y=g-a,$$

but the second form comes equally from this, if one puts $x+b=g$, there will be

$$x=g-b \text{ and } y=f-a.$$

Therefore should this given equation be $xy+2x+3y=42$ thus there would be $a=2,\ b=3$ and $c=42$ consequently $y=-2+\frac{48}{x+3}$. Now the number 48 can be presented by 2 factors as fg n, since then there will be always $x=f-3$ and $y=g-2$, or also $x=g-3$ and $y=f-2$.
Now the following are suchlike factors :

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factors	1·48		2·24		3·16		4·12		6· 8	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
Numbers	- 2	46	- 1	22	0	14	1	10	3	6
or	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

The equation can be presented still more generally:

$$mxy=ax+by+c,$$

where *a, b, c* and *m* are given numbers, but whole numbers are required for *x* and *y* .

Therefore on finding *y*, there becomes thus $y=\frac{ax+c}{mx-b}$, whereby here *x* may be taken away from the number, thus both sides are multiplied by *m,* so that we have $my=\frac{max+mc}{mx-b}=a+\frac{mc+ab}{mx-b}$. The numerator of this fraction is now a known number, of which the denominator must be a divisor, therefore representing the numerator by the two factors as fg, which often can be done in a number of ways, and see from that how any may be compared with $mx-b$, so that $mx-b=f$; but for this it is required, because $x=\frac{f+b}{m}$ that $f+b$ itself is divisible by m, therefore here only such factors of $mc+ab$ can be introduced, which, if to that *b* may be added, lets itself be divided by *m,* which shall be made clear by an example:
Thus, let there be $5xy=2x+3y+18$. From this there is found $y=\frac{2x+18}{5x-3}$ and $5y=\frac{10x+90}{5x-3}=2+\frac{96}{5x-3}$, now here such a divisor of 96 is sought, that if to the same 3 shall be added, the sum will be divisible by 5. Therefore all the divisors of 96 are taken, which are 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, from which it is clear that only these, namely 2, 12, 32 can be taken.

Thus there becomes

I.) $5x-3=2$, thus $5y=50$ and from that $x=1$, and $y=10$
II.) $5x-3=12$, thus $5y=10$ and from that $x=3$, and $y=2$
III.) $5x-3=32$, thus $5y=5$ and from that $x=7$, and $y=1$.

35.

Since here in the general solution there shall be $my-a=\frac{mc+ab}{mx-b}$, thus it is useful to add this note, that if a number of this form $mc+ab$ has a divisor, that is held in this form $mx-b$, as then the quotient must necessarily have this form $my-a$, and as then the number $mc+ab$ can be presented in the form $(mx-b)(my-a)$:

For example, let there be $m=12$, $a=5$, $b=7$ and $c=15$; thus one obtains $12y-5=\frac{215}{12x-7}$; now the divisors of 215 are 1, 5, 43, 215, among which those sought must be present, which are contained in the form $12x-7$, or if 7 be added to that, that the sum can be divided by 12, of which only 5 is suitable, thus $12x-7=5$ and $12y-5=43$. As now from the first there becomes $x=1$ thus also from the second y is found in whole numbers, namely $y=4$. This property is of the greatest importance in the investigation of the nature of numbers, and therefore deserves to be noted very well.

36.

We will now consider an equation of this form

$$xy+xx=2x+3y+29.$$

Now from this we find

$$y=\frac{2x-xx+29}{x-3} \text{ or } y=-x-1+\frac{26}{x-3};$$

thus $x-3$ must be a divisor of the number 26, and also the quotient will be $=y+x+1$. Now since the divisors of 26 are 1, 2, 13, 26 thus we obtain these solutions :

I.) $x-3=1$ or $x=4$, thus $y+x+1=y+5=26$; and $y=21$
II.) $x-3=2$ or $x=5$, also $y+x+1=y+6=13$; and $y=7$
III.) $x-3=13$ or $x=16$, and $y+x+1=y+17=2$; and $y=-15$

which negative value is left out, and thus also the last case $x-3=26$ cannot be included in the calculation.

37.

More formulas of this kind where only the first power of y arise, but still higher powers of x arise, are not necessary to be calculated here, because suchlike cases themselves occur only occasionally, and as then also they can be explained according to the method explained here. But if y also may be raised to the second or to a still higher power, and it is wished to determine the value from that according to the given rules, thus roots signs are come upon, behind which x in the second or to a still higher power is found, and since then from that to find out such a value of x, that the irrationality or the root sign or such a value of x may be removed.

And even here the great art of indeterminate analysis is presented, how suchlike irrational formulas should be brought to rationality, to which we will give the introduction in the following chapters.

CAPITEL 3

VON DEN ZUSAMMENGESETZTEN UNBESTIMMTEN GLEICHUNGEN WO VON DER EINEN UNBEKANTEN ZAHL NUR DIE ERSTE POTESTÄT VORKOMMT

31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekante Zahlen gesucht werden, und die eine nicht wie bisher allein steht, sondern entweder mit der andere multiplicirt oder in einer höheren Potestät vorkommt, wann nur von der andern blos die erste Potestät vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$a+bx+cy+dxx+exy+fx^2+gxxy+hx^4+kx^3y+\text{etc.}=0$$

in welcher nur *y* vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann, die Bestimmung muß aber also geschehen, daß für *x* und *y* gantze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und von den leichtern den Anfang machen.

32.

I. Frage: Man suche zwey Zahlen, wann ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, daß 79 herauskommen?

Es seyen die zwey verlangten Zahlen *x* und *y*, so muß seyn $xy+x+y=79$, woraus wir bekommen $xy+y=79-x$ und $y=\frac{79-x}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1}$, woraus erhellet daß $x+1$ ein Theiler seyn muß von 80 ; da nun 80 viele Theiler hat so findet man aus einem jeden einen Werth für *x;* wie aus folgenden zu sehen:

die Theiler sind	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
daher wird	$x=0$	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und	$y=79$	39	19	15	9	7	4	3	1	0

weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern übereinkommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

Solcher Gestalt kann auch diese allgemeine Gleichung aufgelößt werden

$$xy+ax+by=c$$

woraus kommt $xy + by = c - ax$ und also $y = \frac{c-ax}{x+b}$ oder $y = -a + \frac{ab+c}{x+b}$; dahero muß $x+b$ ein Theiler seyn der bekanten Zahl $ab+c$ und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für *x* gefunden werden. Man setze dahero es sey $ab + c = fg$ also daß $y = -a + \frac{fg+c}{x+b}$.

Nun nehme man $x+b$ oder $x = f - b$, so wird $y = -a + g$ oder $y = g - a$; derohalben auf so viel verschiedene Arten sich die Zahl $ab+c$ durch zwey Factores, als *fg*, vorstellen läßt, so erhält man daher nicht nur eine, sondern zwey Auflösungen: die erste ist nemlich

$$x = f - b \text{ und } y = g - a,$$

die andere aber kommt gleicher Gestalt heraus, wann man $x + b = g$ setzt, da wird

$$x = g - b \text{ und } y = f - a.$$

Sollte dahero diese Gleichung vorgegeben seyn $xy + 2x + 3y = 42$ so wäre $a = 2,\ b = 3$ und $c = 42$ folglich $y = -2 + \frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factores als *fg* vorgestellt werden, da dann immer seyn wird $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$.
Dergleichen Factores sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factores	1·48		2·24		3·16		4·12		6· 8	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
Zahlen	- 2	46	- 1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung also vorgesteilet werden:

$$mxy = ax + by + c,$$

wo *a*, *b*, *c* und *m* gegebene Zahlen sind, für *x* und *y* aber gantze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher *y* so bekommt man $y = \frac{ax+c}{mx-b}$ damit hier *x* aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man beyderseits mit *m*, so hat man $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zahler dieses Bruchs ist nun eine bekante Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß, man stelle dahero den Zähler durch zwey Factores als *f g* vor, welches öfters auf vielerley Art geschehen kann, und sehe ob sich einer davon mit $mx - b$ vergleichen laße, also daß $mx - b = f$; hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$ daß $f + b$ sich durch *m* theilen laße, daher hier nur solche Factores von $mc + ab$ gebraucht werden können, welche, wann dazu *b* addirt wird, sich durch *m* theilen laßen, welches durch ein Exempel erläutert werden soll:

Es sey demnach $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekommt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$, hier müßen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß wann zu denselben 3 addirt wird, die Summ durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96 welche sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet daß nur diese, nemlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sey demnach

I.) $5x - 3 = 2$, so wird $5y = 50$ und daher $x = 1$, und $y = 10$

II.) $5x - 3 = 12$, so wird $5y = 10$ und dahero $x = 3$, und $y = 2$

III.) $5x - 3 = 32$, so wird $5y = 5$ und dahero $x = 7$, und $y = 1$.

35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung wird $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, so ist dienlich diese Anmerckung zu machen, daß wann eine in dieser Form $mc + ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in dieser Form $mx - b$ enthalten ist, alsdann der Quotient nothwendig diese Form $my - a$ haben müße, und daß alsdann die Zahl $mc + ab$ durch ein solches Product $(mx - b)(my - a)$ vorgestellt werden könne:

Es sey z. E. $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$ und $c = 15$; so bekommt man $12y - 5 = \frac{215}{12x-7}$; nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müßen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wann man 7 darzu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen laße, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten wird $x = 1$ so findet man auch aus der andern y in gantzen Zahlen, nemlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdienet deswegen wohl bemercket zu werden.

36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser Art betrachten

$$xy + xx = 2x + 3y + 29.$$

Hieraus findet man nun

$$y = \frac{2x-xx+29}{x-3} \text{ oder } y = -x - 1 + \frac{26}{x-3};$$

also muß $x - 3$ ein Theiler seyn von der Zahl 26, und alsdann wird der Quotient $= y + x + 1$. Da nun die Theiler von 26 sind 1, 2, 13, 26 so erhalten wir diese Auflösungen:

I.) $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$

II.) $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, allso $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$

III.) $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$

welcher negative Werth wegzulaßen ist, und deswegen auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden muß.

37.

Mehr Formeln von dieser Art wo nur die erste Potestät von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig allhier zu berechnen, weil dergleichen Fälle sich nur selten ereignen, und alsdann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wann aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Potestät ansteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kommt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potestät befindlich ist, und alsdann kommt es darauf an solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierin bestehet die größte Kunst der unbestimmten Analytic, wie dergleichen Irrational-Formeln zur Rationalität gebracht werden sollen, wozu wir die Anleitung in den folgenden Capiteln geben wollen.