CHAPTER 4

WAYS OF MAKING THIS IRRATIONAL FORMULA $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ RATIONAL.

38.

Thus now the question arises, what values must be assumed for *x*, in order that the formula $a+bx+cxx$ may become a perfect square, and thus the rational square root of that can be taken. Moreover, there the letters *a*, *b* and *c* are assumed to be given numbers, and the assignation of the unknown number *x* depends mainly on the nature of which, whereby on that account it is to be noted initially, that in many cases the solution will be unattainable from that; but if the same were possible, then at first one must be content merely with rational values in the calculation of the letters *x*, and not to demand, that indeed the same be whole numbers, as which require a special investigation.

39.

We assume here, that this formula rises only to the second power of *x*, as higher powers require special methods, with which will be dealt with afterwards.

Should the second power not be present here, and there shall be $c=0$, thus the question has hardly any difficulty : then if this formula $\sqrt{(a+bx)}$ were given, and x would be determined, so that $a+bx$ were a perfect square, thus $a+bx=yy$ would be put in place, from which thus equally there is obtained $x=\frac{yy-a}{b}$*;* and now for *y* any arbitrary numbers can be taken, and from each such a value can be found for *x*, that $a+bx$ is a square and consequently $\sqrt{(a+bx)}$ becomes rational.

40.

Therefore we will begin with this formula $\sqrt{(1+xx)}$, where such a value must be found for *x*, that if 1 will be added to that square xx, the sum again becomes a square, which cannot be divided into whole numbers, in so far as there are no whole square numbers only greater by 1 that the preceding, therefore one must be required to be satisfied with fractional numbers for *x*.

41.

Because $1+xx$ must be a square, and there should be put $1+xx=yy$, thus there would be $xx=yy-1$ and $x=\sqrt{(yy-1)}$. Thus in order to find *x*, such a value must be found for *y*, that its square less 1 would be a square again, which question is just as difficult as the preceding and thus nothing would have been gained.

But that it does actually work for fractions, which by putting $1+xx$ for *x* produces a square, can be seen from the following cases:

I.) If $x=\frac{3}{4}$ then $1+xx=\frac{25}{16}$ and consequently $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{4}$.

II.) Just as this can happen, if $x=\frac{4}{3}$ where $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{3}$ arises.

III.) Thereupon if we put $x=\frac{5}{12}$ thus we obtain $1+xx=\frac{169}{144}$, of which the square root is $\frac{13}{12}$.

Now how such numbers and thus indeed how all possible numbers can be found, must now be demonstrated here.

42.

Such can happen in two ways. According to the first way, one puts $\sqrt{(1+xx)}=x+p$ thus becoming $1+xx=xx+2px+pp$, where the square xx cancels and consequently x can be determined without a square root sign. Thus in the equation found xx is subtracted from both sides thus becoming $2px+pp=1$, from which there will be found $x=\frac{1-pp}{2p}$, where any number can be assumed for p, and thus also the fraction can be put in place for that.

Therefore putting $p=\frac{m}{n}$ thus $x=\frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; multiplying above and below by nn, there becomes thus $x=\frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Thus from that $1+xx$ will be a square, and thus all possible whole numbers can be assumed for m and n as it pleases, and from that an endless number of values can be found for x.

Generally putting $x=\frac{nn-mm}{2mn}$, thus there becomes

$1+xx=1+\frac{n^4-2nnmm+m^4}{4mmnn}$ or $1+xx=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn}$ which fraction actually is a square, and from that there is found

$$\sqrt{(1+xx)}=\frac{nn+mm}{2mn}.$$

Now from this the smaller values of x can be indicated:

If	$n=2$	3	3	4	4	5	5	5	5
and	$m=1$	1	2	1	3	1	2	3	4
thus	$x=\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44.

From this it follows in a general manner, that $1+\frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$. Now multiplying this equation by $(2mn)^2$, thus becoming

$$(2mn)^2+(nn-mm)^2=(nn+mm)^2;$$

thus in general we have two squares, whose sum further is a square ; by means of which we can solve this question:

How do we find two square numbers, of which the sum also shall be a square?

Thus, should there be $pp+qq=rr$: to this end we must put only $p=2mn$ and $q=nn-mm$ thus there becomes $r=nn+mm$. Since further from this

$$(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2,$$

we can thus solve this question as well :

To find two square numbers, whose difference again shall be a square? thus so that $pp-qq=rr$ *;* since we need only put $p=nn+mm$ and $q=2mn$, thus $r=nn-mm$ or we can also put $p=nn+mm$ and $q=nn-mm$, as then there becomes $r=2mn$.

45.

But we have spoken about two ways of making the formula into a square $1+xx$; the other kind now adopts the following form

Putting $\sqrt{(1+xx)}=1+\frac{mx}{n}$*;* therefore we find

$$1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn};$$

here taking 1 from both sides, thus there becomes $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; which equation is allowed to be divided by x, and consequently gives $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, or multiplied by nn $nnx=2mn+mmx$, from which the found value $x=\frac{2mn}{nn-mm}$ can be put for the value of *x*, thus there shall be

$$1+xx=1+\frac{4mmnn}{n^4-2mmnn+m^4} \text{ or } =\frac{n^4+2mmnn+m^4}{n^4-2mmnn+m^4},$$

which fraction is the square of $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Since now this equation has been obtained

$$1+\frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$$

thus it follow as above

$$(nn-mm)^2+(2mn)^2=(nn+mm)^2$$

which are the previous two squares, the sum of which again makes a square.

46.

This case, which we have dealt with in detail, now gives us two methods at hand in order that the general formula $a+bx+cxx$ can be made a square. The first applies to all cases, where *c* is a square; but the second, where *a* is a square ; we will go through both cases here.

I.) Therefore in the first place c shall be a square number, or the given formula shall be $a+bx+ffxx$, which must become a square, to this end putting $\sqrt{a+bx+ffxx}=fx+\frac{m}{n}$ thus becomes $a+bx+ffxx=ffxx+\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, where the xx term can be cancelled from both sides, thus so that $a+bx=\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, which multiplied by nn, gives $nna+nnbx=2mnfx+mm$; from which there is found $x=\frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$, now becoming with this value written for x,

$$\sqrt{a+bx+ffxx}=\frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf}+\frac{m}{n}=\frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}.$$

47.

Since a fraction was to be found for x, thus at once one can put $x=\frac{p}{q}$, also that $p=mm-nna$, and $q=nnb-2mnf$, and as then the formula $a+\frac{bp}{q}+\frac{ffpp}{qq}$ will be a square; consequently the same remains a square if it were to multiplied by the square qq, therefore also this formula $aqq+bpq+ffpp$ will be a square, if one puts $p=mm-nna$ and $q=nnb-2mnf$, from which an endless number of solutions in whole numbers can be found, because the letters m and n can be taken as wished.

48.

II.) The second case occurs, if the letter a is a square. Therefore it shall be of the form given $ff+bx+cxx$, which must be made into a square. To this end we put

$$\sqrt{(ff+bx+cxx)}=f+\frac{mx}{n} \text{ thus there becomes } ff+bx+cxx=ff+\frac{2mfx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$$

where ff itself is cancelled and all the remaining terms themselves can be divided by x, to that $b+cx=\frac{2mf}{n}+\frac{mmx}{nn}$, or $nnb+nncx=2mmf+mmx$, or again $nncx-mmx=2mnf-nnb$, and consequently $x=\frac{2mnf-nnb}{nnc-mm}$; now on putting this value for x, thus there becomes

$$\sqrt{(ff+bx+cxx)}=f+\frac{2mnf-nnb}{nnc-mm}=\frac{nncf+mmf-nnb}{nnc-mm};$$

now putting here $x=\frac{p}{q}$, thus the above following formula can be made into a square, $ffqq+bpq+cpp$, as which can be done if one puts $p=2mnf-nnb$ and $q=nnc-mm$.

49.

Here is in addition an especially interesting case, if $a=0$; or if this formula $bx+cxx$ shall be made into a square; since then one need put only $\sqrt{(bx+cxx)}=\frac{mx}{n}$ thus becoming $bx+cxx=\frac{mmxx}{nn}$, where on dividing by x and multiplied by nn there arises,

$bnn + cnnx = mmx$, and consequently $x = \frac{nnb}{mm-cnn}$. One looks for examples in all the triangles which also are equal to square number, thus $\frac{xx+x}{2}$ and thus also $2xx + 2x$ is a square. Now the same shall be $\frac{mmxx}{nn}$, thus $2nnx + 2nn = mmx$ and $x = \frac{2nn}{mm-2nn}$, where all the suitable numbers can be taken for m and n, but since then for the most part a fraction is found for x; yet whole numbers can arise, as if one puts $m = 3$ and $n = 2$ thus one obtains $x = 8$, from which the triangular number is 36, which also is a square.

Also one can put $m = 7,$ and $n = 5$, thus $x = -50$ from which the triangular number is 1225, which also is the triangular number of $+49$ and also the square of 35; this would also arise here if one had put $n = 7,$ and $m = 10$, since then $x = 49$.

Just as one can put $m = 17,$ and $n = 12$, there becomes $x = 288$, of which the triangular number is $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, which is a square number, from which the root $= 12 \cdot 17 = 204$.

50.

By this last case is to consider, that the formula $bx + cxx$ from this basis is to be made into a square, because the same had a factor, namely *x*, which leads us to new cases, in which also the formula $a + bx + cxx$ can be a square, if neither *a* nor *c* is a square.

These cases can be found instead if $a + bx + cxx$ allows itself to be divided up into two factors , which happens if $bb - 4ac$ is a square. In order to show this thus it is to be noted, that the factors always depend on the roots of an equation. Thus one puts $a + bx + cxx = 0$, hence becoming $cxx = -bx - a$ and $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, from which there is found

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)} \text{ or } x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\left(\sqrt{bb-4ac}\right)}{2c}$$

from which it is clear that if $bb - 4ac$ is a square, these roots can be specified to be rational.

Therefore let $bb - 4ac = dd$, thus the roots shall be $\frac{-b \pm d}{2c}$ or there is $x = \frac{-b \pm d}{2c}$, thus the divisors from the formula $a + bx + cxx$ shall be $x + \frac{b-d}{2c}$ and $x + \frac{b+d}{2c}$, which multiplied by each other yields the same formula but only divided by *c*, namely one finds $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$, since now $dd = bb - 4ac$, thus one finds $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$, which multiplied by *c* gives *cxx* + *bx* + *a*. One must thus then multiply one factor by *c*, thus our formula is equal to this product:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

and one sees, that this solution can be found always, as often as oft $bb - 4ac$ is a square.

51.

From this the third case follows, in which our formula $a+bx+cxx$ can be made into a square; which thus we will add to both those above.

III.) Now this case itself occurs, if our formula can be represented by such a product $(f+gx)\cdot(h+kx)$. In order that this can make a square, thus one puts the square root of that :

$\sqrt{(f+gx)\cdot(h+kx)}=\frac{m\cdot(f+gx)}{n}$, thus one obtains

$$(f+gx)\cdot(h+kx)=\frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn}$$

which equation divided by $f+gx$, gives $h+kx=\frac{mm\cdot(f+gx)}{nn}$ that is,
$hnn+knnx=fmm+gmmx$, from which there is found $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

In order to illustrate this, thus this question shall be proposed:

I. Question: we look for the numbers *x*, so that if 2 is taken from twice the square, the remainder again shall be a square.

Now since $2xx-2$ must be a square, thus it is to be considered, that this formula can itself be represented by the following factors $2\cdot(x+1)(x-1)$; thus putting the root of this to be $\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, thus there will become $2\cdot(x+1)(x-1)=\frac{mm\cdot(x+1)^2}{nn}$, on dividing by $x+1$, and multiplying by *nn*, thus we find $2nnx-2nn=mmx+mm$
and therefore $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mn}$

Taking here $m=1$ and $n=1$, thus $x=3$, and $2xx-2=16=4^2$.
Taking $m=3$ and $n=2$, thus there becomes $x=-17$: but since only the square of x arises, thus it the same whether we take $x=-17$ or $x=+17$ as both become $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Question: Let it this form $6+13x+6xx$ be given, which shall be made into a square. Now here we have $a=6, b=13$ and $c=6$, where thus neither *a* nor *c* is a square. So we examine whether $bb-4ac$ will be a square ; now since that comes to 25, thus we know that this formula can consist of two factors, which shall be $(2+3x)\cdot(3+2x)$; now the root of that shall be $\frac{m(2+3x)}{n}$ thus we find $(2+3x)\cdot(3+2x)=\frac{mm(2+3x)^2}{nn}$,
from which $3nn+2nnx=2mm+3mmx$ and therefore $x=\frac{2mm-3nn}{2nn-3mm}=\frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Now if the numerator shall be positive, thus 3*nn* must be greater than 2*mm,* and so 2*mm* smaller than 3n*n;* consequently $\frac{mm}{nn}$ shall be smaller than $\frac{3}{2}$, so that the numerator is positive. But so

that the denominator shall be positive, thus 3*mm* must be greater than 2*nn* and thus $\frac{mm}{nn}$ shall be greater than $\frac{2}{3}$. In order to find a positive number for x , thus such numbers must be assumed for *m* and *n*, that $\frac{mm}{nn}$ shall be smaller than $\frac{3}{2}$ and yet greater than 2

Now on putting $m = 6$ and $n = 5$, thus $\frac{mm}{nn} = \frac{36}{25}$, which is smaller than $\frac{3}{2}$ and evidently greater than $\frac{2}{3}$; from which one finds $x = \frac{3}{58}$.

54.

IV.) This third form leads us yet to a fourth one, which occurs, if the formula $a + bx + cxx$ can be divided into two parts in such a way, that the first shall be a square, but the other lets itself be formed into two factors, so that in such a form $pp + qr$ arises, where the letters *p, q* and *r* signify a formula of this kind $f + gx$. Then since one need only put $\sqrt{(pp+qr)} = p + \frac{mq}{n}$, thus $pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mmqq}{nn}$, where this *pp* itself is cancelled and the remaining terms can be divided by q , so that $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mmq}{nn}$ or $nnr = 2mnp + mmq$, from which *x* can be determined easily, and this is the fourth case, in which our formula can be made into a square, which we now would like to illustrate by an example.

55.

III. Question: Such numbers x are sought which, with their square doubled and 1 taken away, become another square ; or if 1 be taken away from the square doubled, a square will remain. As for example occurs for the number 5, whose square 25 taken doubled is 50, from which 1 taken leaves the square remainder 49.

So that $2xx - 1$ shall be a square, where according to our formula $a = -1,\ b = 0,$ and $c = 2$, and also neither *a* nor *c* is a square, nor can it be resolved into two factors, because $bb - 4ac = 8$ is not a square, and therefore none of the three cases can be used.

But according to the fourth case, this formula shall be proposed thus $xx + (xx-1) = xx + (x-1)(x+1)$. The root of this now provides $x + \frac{m(x+1)}{n}$; therefore $xx + (x-1)(x+1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}x$, where the *xx* terms cancel and the remaining terms can be divided by $x+1$ and multiplied by *nn*, since that becomes $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$ and $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; and because in our formula $2xx - 1$ only the square *xx* arises, thus so that regardless whether *x* is positive or negative, the same value of *x* arises . One can also write equally $-m$ instead of *m* whereby one obtains

$$x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}.$$

Here one takes $m=1$ and $n=1$, so one has $x=1$ and $2xx-1=1$. If further there shall be $m=1$ and $n=2$ thus $x=\frac{5}{7}$ and $2xx-1 = \frac{1}{49}$. But on putting $m=1$ and $n=-2$, thus there becomes $x=-5$, or $x=+5$ and $2xx-1=49$.

56.

IV. Question : One searches for such numbers, of which twice the square is taken, if to that 2 shall be added, makes a square again ; 7 is of such a kind, whose square taken is 98, and 2 added, gives the square 100.
Therefore this formula $2xx+2$ must be a square, where $a=2$, $b=0$ and $c=2$, thus again neither a nor c is a square, also $bb-4ac$ or -16 is not a square, and the third rule cannot be used here.

But the fourth rule thus allows our formula to be put in place.

Putting the first part $=4$, thus the other part shall be $2xx-2=2(x+1)\cdot(x-1)$, and therefore our formula $4+2(x+1)\cdot(x-1)$. The root of which shall be $2+\frac{m\cdot(x+1)}{n}$ from which this equation arises

$$4+2(x+1)\cdot(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$$

where the 4 itself cancels, but the remaining terms let themselves be divided by $x+1$, so that $2nnx-2nn=4mn+mmx+mm$ and therefore $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$.

Putting $m=1$ and $n=1$ thus $x=7$, and $2xx+2=100$. Taking $m=0$ and $n=1$ thus gives $x=1$ and $2xx+2=4$.

57.

Often it happens that when neither the first, nor the second nor third rule can be used, as a consequence the fourth rule can be required to split the formula into two such parts. As if the formula $7+15x+13xx$ appeared, thus indeed such an analysis is possible, but it does not appear so clear. Then the first part is $(1-x)^2$ or $1-2x+xx$, and therefore the other part will be $6+17x+12xx$, which therefore has factors because $17^2-4\cdot 6\cdot 12=1$ and thus is a square. Also the two factors from that truly shall be $(2+3x)\cdot(3+4x)$; so that the formula shall become $\left(1-x\right)^2+\left(2+3x\right)(3+4x)$, which now can be resolved according to the fourth rule.

But is it not well to ask, that anyone could guess this decomposition ? Therefore we will assign a general way, in order to recognize in the first place, if it is possible for such a formula to be resolved; because it gives infinitely many suchlike expressions, of which the solutions are simply impossible, as for example this expression $3xx+2$ occurs, which can never be made into a square.

But such a formula is possible in one single case, thus it is easy to find all the solutions themselves, which we would like to consider here.

58.

The whole advantage which can be arrived at in such cases, consists of this, that either no case can be found, or that one can guess as it were a case in which a formula such as $a+bx+cxx$ can be a square; in so far as one can substitute smaller and smaller values for *x*, in order to see if in any case a square arises?

In order to illustrate this approach, whenever a fractional number may be substituted for x, can one write a fraction such as $\frac{t}{u}$ as a value for *x*, from which this formula $a+b\frac{t}{u}+c\frac{tt}{uu}$ arises, which if it is a square, multiplied by the square *uu* also remains a square. It is only necessary for this to be proven, to ask if such whole number values can be chosen for *t* und *u*, so that this formula $auu+btu+ctt$ will be a square; then and only then if one substitutes $x=\frac{t}{u}$ will this formula $a+bx+cxx$ thus be known to be a square.

But if despite all the trouble no case can be found, so that one has good reason to suppose it is quite impossible to make as square from the formula, as such would have to become infinitely large.

59.

But if one can guess a case in which such a formula becomes a square, then it is quite easy to find all the possible cases in which the same likewise will be a square ; and the number itself is always infinitely large.

In order to show this, thus we will consider initially the formula $2+7xx,$ where $a=2,\ b=\ 0,$ and $c=7$: the same will hence appear to be a square, if $x=1$; therefore putting $x=1+y,$ thus there becomes $xx=1+2y+yy$, and our formula becomes $9+14y+7yy$, in which the first term is a square: thus we put according to the second rule the square root from that to be $=3+\frac{my}{n}$, as we obtain this equation $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn},$ where the 9's cancel, the remaining terms can all be divided by y ; since we obtain $14nn+7nny=6mn+mmy$ and therefore $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; from that we find $x=\frac{6m-7nn--mm}{7nn-mm}$, where one can take all arbitrary numbers for m and n .

Now putting $m=1$ and $n=1,$ thus there becomes $x=-\frac{1}{3}$, or also because only *xx* arises, $x=+\frac{1}{3}$, therefore $2+7xx=\frac{25}{9}$. Further on putting $m=3$ and $n=1,$ thus $x=-1$ or $x=+1$. But on putting $m=3$ and $n=-1,$ thus there arises $x=17$; from that $2+7xx=2025$, which is the square of 45. Let us also put $m=8$ and $n=3$, thus there will be $x=-17$ as above. But on putting $m=8$ and $n=-\ 3$, thus there becomes $x=271$, from which there becomes $2+7xx=514089=717^2$.

60.

Further we will consider this formula $5xx+3x+7$, which is a square if $x=-1$. Therefore we put $x=y-1$, and thus our formula is changed into this

$$\begin{array}{r} 5yy-10y+5 \\ +\ \ 3y-3 \\ +7 \\ \hline 5yy-7y\ \ +9 \end{array}$$

of which one puts the square root $=3-\frac{my}{n}$, thus

$$5y^2-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{n},$$

from which we obtain $5nny-7nn=-6mn+mmy$, and

$$y=\frac{7nn-\ 6mn}{5nn-mm}, \text{ consequently } x=\frac{2nn-6mm+mm}{5nn-mm}.$$

Let there be $m=2$ and $n=1$, thus $x=6$ and therefore $5xx+3x+7=169=13^2$.

But putting $m=-2$ and $n=1$, thus $x=18$ and

$$5xx+3x+7=1681=41^2.$$

61.

Let us now consider also this formula $7xx+15x+13$, and thus at once put $x=\frac{t}{u}$, so that this formula $7tt+15tu+13uu$ shall become a square. Now try some smaller numbers for *t* and *u* as follows:

Let	$t=1$	and $u=\ 1$,	thus our formula becomes	$=35$
"	$t=2$	" $u=\ 1$,	" " " "	$=71$
"	$t=2$	" $u=-1$	" " " "	$=11$
"	$t=3$	" $u=\ 1$,	" " " "	$=121$

Now since 121 is a square, and so shows that the value $x=3$ performs well enough, thus put $x=y+3$ and so our formula will become

$$7yy+42y+63+15y+45+13$$

or $7yy+57y+121$; the root of that is put $=11+\frac{my}{n}$, thus becoming

$7yy+57y+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, or $7nny+57nn=22mn+mmy$,

and from that $\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$ and $x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$.

For example, putting $m = 3$ and $n = 1,$ thus there becomes $x = -\frac{3}{2}$ and our formula $7xx + 15x + 13 = \frac{25}{4} = \left(\frac{25}{2}\right)^2$. Further let $m = 1$ and $n = 1$, thus $x = -\frac{17}{6}$. Taking $m = 3$ and $n = -1$, thus $x = \frac{129}{2}$ and our formula becomes

$$7xx + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = \left(\frac{347}{2}\right)^2.$$

62.

But sometimes it is all an effort in vain to guess a case, in which the above formula shall be a square, as e.g. by this case occurring $3xx + 2$, or if one writes $\frac{t}{u}$ for x, this formula $3tt + 2uu$, which can take any numbers you like for t and u, will never be a square. There are infinitely many like formulas, which never can be made into squares, and therefore it is worth the effort to indicate a few characteristics, from which the impossibility can become known, by which often you can be relieved from much trouble, where such a square arise through guessing, to which the following chapter is intended.

CAPITEL 4
VON DER ART DIESE IRRATIONALE FORMELN $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ RATIONAL ZU MACHEN

38.

Hier ist also die Frage was für Werthe für x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a+bx+cxx$ ein wirckliches Quadrat werde, und also die Quadrat-Wurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruhet hauptsächlich die Bestimmung der unbekanten Zahl x, wobey zum voraus zu bemercken, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich werde; wann aber dieselbe möglich ist, so muß man sich zum wenigsten anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x blos mit rationalen Werthen begnügen, und nicht fordern, daß dieselben so gar gantze Zahlen seyn sollen, als welches eine gantz besondere Untersuchung erfordert.

39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potestät von x steige, indem höhere Potestäten besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte hier nicht einmahl die zweyte Potestät vorkommen, und $c=0$ seyn, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: dann wann diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a+bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur setzen $a+bx=yy$, woraus man so gleich erhielte $x=\frac{yy-a}{b}$; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a+bx$ ein Quadrat und folglich $\sqrt{(a+bx)}$ rational herauskäme.

40.

Wir wollen demnach bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1+xx)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß wann zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in gantzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine gantze Quadrat-Zahl nur um 1 größer ist als die vorhergehende, dahero man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

41.

Weil $1+xx$ ein Quadrat seyn soll, und man setzen wollte $1+xx=yy$, so würde $xx=yy-1$ und $x=\sqrt{(yy-1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre Quadrate weniger 1 wiederum Quadrate würden, welche Frage eben so schwer ist als die vorige und würde also hierdurch nichts gewonnen.

Daß es aber würcklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1+xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I.) wann $x=\frac{3}{4}$ so wird $1+xx=\frac{25}{26}$ folglich $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{4}$.

II.) Eben dieses geschieht wann $x=\frac{4}{3}$ wo $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{3}$ herauskommt.

III.) Hernach wann man setzt $x=\frac{5}{12}$ so erhält man so er a man $1+xx=\frac{169}{144}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{13}{12}$.

Wie nunmehr dergleichen Zahlen und so gar alle mögliche gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

42.

Solches kann auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1+xx)}=x+p$ so wird $1+xx=xx+2px+pp$, wo sich das Quadrat xx aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Dann in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beyderseits xx so wird $2px+pp=1$, woraus gefunden wird $x=\frac{1-pp}{2p}$ wo man für p eine jede Zahl annehmen kann, und auch so gar dafür Brüche gesetzt werden können.

Man setze dahero $p=\frac{m}{n}$ so wird $x=\frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, so bekommt man $x=\frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Damit also $1+xx$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche gantze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x=\frac{nn-mm}{2mn}$, so wird

$1+xx=\frac{n^4-2nnmm+m^4}{4mmnn}$ oder $1+xx=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn}$ welcher Bruch würcklich ein Quadrat ist und daraus gefunden wird

$$\sqrt{\left(1+xx\right)}=\frac{nn+mm}{2mn}.$$

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemercket werden:

wann	$n=2$	3	3	4	4	5	5	5	5
und	$m=1$	1	2	1	3	1	2	3	4
so wird	$x=\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1+\frac{\left(nn-mm\right)^2}{\left(2mn\right)^2}=\frac{\left(nn+mm\right)^2}{\left(2mn\right)^2}$. Nun multiplicere man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird

$$\left(2mn\right)^2+\left(nn-mm\right)^2=\left(nn+mm\right)^2;$$

wir haben also auf eine allgemeine Art zwey Quadraten, deren Summe wieder ein Quadrat ist; hierdurch wird nun diese Frage aufgelößt:

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadrat-Zahl sey?

Also soll $pp+qq=rr$ seyn: zu diesem Ende darf man nur setzen $p=2mn$ und $q=nn-mm$ so wird $r=nn+mm$. Da hernach ferner

$$(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2,$$

so können wir auch diese Frage auflösen:

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadrat-Zahl sey? also daß $pp-qq=rr$; dann da darf man nur setzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, so wird $r=nn-mm$ oder man kann auch setzen $p=nn+mm$ und $q=nn-mm$, so wird alsdann $r=2mn$.

45.

Wir haben aber zweyerley Arten versprochen um die Formel $1+xx$ zu einem Quadrat zu machen; die andere Art verhält sich nun folgender Gestalt:

Man setze $\sqrt{(1+xx)}=1+\frac{mx}{n}$; daher bekommt man

$$1+xx=1+\tfrac{2mx}{n}+\tfrac{mmxx}{nn};$$

subtrahirt man hier beyderseits 1, so wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; welche Gleichung sich durch x theilen läßt oder mit, und folglich giebt $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt $nnx=2mn+mmx$, woraus gefunden wird x setzt man diesen Werth für $x=\frac{2mn}{nn-mm}$, so wird

$$1+xx=1+\frac{4mmnn}{n^4-2mmnn+m^4} \text{ oder } =\frac{n^4+2mmnn+m^4}{n^4-2mmnn+m^4},$$

welcher Bruch das Quadrat ist von $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Da man nun daher diese Gleichung bekommt

$$1+\frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$$

so fließt daraus Wie oben

$$(nn-mm)^2+(2mn)^2=(nn+mm)^2$$

welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand um die allgemeine Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; die andere aber, wo a ein Quadrat ist; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey demnach erstlich c eine Quadrat-Zahl oder die gegebene Formel sey $a+bx+ffxx$, welche ein Quadrat werden soll, zu diesem Ende setze man $\sqrt{a+bx+ffxx}=fx+\frac{m}{n}$ so wird $a+bx+ffxx=ffxx+\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, wo sich die xx beyderseits aufheben, also daß $a+bx=\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, welche mit nn multiplicirt, $nna+nnbx=2mnfx+mm$ giebt; woraus gefunden wird $x=\frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$, wird nun dieser Werth für x geschrieben, so wird

$$\sqrt{a+bx+ffxx}=\frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf}+\frac{m}{n}=\frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}.$$

47.

Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man sogleich $x=\frac{p}{q}$, also daß $p=mm-nna$, und $q=nnb-2mnf$, und alsdann wird die Formel $a+\frac{bp}{q}+\frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat wann sie mit dem Quadrat qq multiplicirt wird, dahero auch diese Formel $aqq+bpq+ffpp$ ein Quadrat wird, wann man setzt $p=mm-nna$ und $q=nnb-2mnf$, woraus unendlich viel Auflösungen in gantzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48.

II.) Der zweyte Fall findet statt, wann der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey demnach diese Formel gegeben $ff+bx+cxx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man

$$\sqrt{(ff+bx+cxx)}=f+\frac{mx}{n} \text{ so wird } ff+bx+cxx=ff+\frac{2mfx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$$

wo sich die ff aufheben und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen laßen, also daß $b+cx=\frac{2mf}{n}+\frac{mmx}{nn}$, oder $nnb+nncx=2mmf+mmx$, oder $nncx-mmx=2mnf-nnb$, und folglich $x=\frac{2mnf-nnb}{nnc-mm}$; setzt man nun diesen Werth für x, so wird

$$\sqrt{(ff+bx+cxx)}=f+\frac{2mnf-nnb}{nnc-mm}=\frac{nncf+mmf-nnb}{nnc-mm};$$

setzt man hier $x=\frac{p}{q}$, so kann wie oben folgende Formel zu einem Quadrat gemacht werden, $ffqq+bpq+cpp$, als welches geschiehet wann man setzt $p=2mnf-nnb$ und $q=nnc-mm$.

49.

Hier ist besonders der Fall merckwürdig, wann $a=0$; oder wann diese Formel $bx+cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden soll; dann da darf man nur setzen $\sqrt{(bx+cxx)}=\frac{mx}{n}$ so wird $bx+cxx=\frac{mmxx}{nn}$ wo durch x dividirt nn und mit nn multiplicirt herauskommt, $bnn+cnnx=mmx$, folglich $x=\frac{nnb}{mm-cnn}$. Man suche zum Exempel alle dreyeckigte Zahlen welche zugleich Quadrat Zahlen sind, so muß $\frac{xx+x}{2}$ und also auch $2xx+2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{mmxx}{nn}$, so wird $2nnx+2nn=mmx$ und $x=\frac{2nn}{mm-2nn}$, wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, alsdann aber wird mehrentheils für x ein Bruch gefunden; doch können auch gantze Zahlen herauskommen, als wann man setzt $m=3$ und $n=2$ so bekommt man $x=8$, wovon das Dreyeck ist 36, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch setzen $m=7,$ und $n=5$, so wird $x=-50$ wovon das Dreyeck ist 1225, welches zugleich das Dreyeck ist von $+49$ und auch das Quadrat von 35; dieses wäre auch heraus gekommen, wann man gesetzt hätte $n=7,$ und $m=10$, dann da wird $x=49$.

Eben so kann man setzen $m=17,$ und $n=12$, da wird $x=288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{288\cdot289}{2}=144\cdot289$, welches eine Quadrat-Zahl ist, deren Wurzel $=12\cdot17=204$.

50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwegen, daß die Formel $bx+cxx$ aus diesem Grund zum Quadrat gemacht worden, weil dieselbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a+bx+cxx$ ein Quadrat werden kann, wann weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden statt wann sich $a+bx+cxx$ in zwey Factores vertheilen läßt, welches geschiehet wann $bb-4ac$ ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen so ist zu mercken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a+bx+cxx=0$, so wird $cxx=-bx-a$ und $xx=-\frac{bx}{c}-\frac{a}{c}$, woraus gefunden wird

$$x=-\frac{b}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{bb}{4cc}-\frac{a}{c}\right)} \text{ oder } x=-\frac{b}{2c}\pm\frac{\left(\sqrt{bb-4ac}\right)}{2c}$$

woraus erhellet daß wann $bb-4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzeln rational angegeben werden können.

Es sey demnach $bb-4ac=dd$, so sind die Wurzeln $\frac{-b\pm d}{2c}$ oder es ist $x=\frac{-b\pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a+bx+cxx$ die Divisores seyn $x+\frac{b-d}{2c}$ und $x+\frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen, man findet nemlich $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{dd}{4cc}$ da nun $dd=bb-4ac$ so hat man $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{bb}{4cc}+\frac{4ac}{4cc}=xx+\frac{bx}{c}+\frac{a}{c}$, welche mit c multiplicirt giebt $cxx+bx+a$. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel diesem Product gleich sein:

$$\left(cx+\tfrac{b}{2}-\tfrac{d}{2}\right)\left(x+\tfrac{b}{2c}+\tfrac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer statt findet, so oft $bb-4ac$ ein Quadrat ist.

51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

III.) Dieser Fall ereignet sich nun, wann unsere Formel durch ein solches Product vorgestellet werden kann $(f+gx)\cdot(h+kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon:

$\sqrt{(f+gx)\cdot(h+kx)}=\frac{m\cdot(f+gx)}{n}$, so bekommt man

$$(f+gx)\cdot(h+kx)=\frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn}$$

welche Gleichung durch $f+gx$ dividirt, giebt $h+kx=\frac{mm\cdot(f+gx)}{nn}$ das ist $hnn+knnx=fmm+gmmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Frage vorgegeben:

I. Frage: Man suche die Zahlen *x*, daß wann man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey?

Da nun seyn muß $2xx-2$ ein Quadrat, so ist zu erwegen, daß sich diese Formel durch folgende Factores vorstellen läßt $2\cdot(x+1)(x-1)$; man setze also die Wurzel davon $\frac{m\cdot(x+1)}{n}$ so wird $2\cdot(x+1)(x-1)=\frac{mm\cdot(x+1)^2}{nn}$ man dividire durch $x+1$, und multiplicere mit *nn*, so bekommt man $2nnx-2nn=mmx+mm$ und dahero $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mn}$

Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so wird $x=3$, und $2xx-2=16=4^2$.
Nimmt man $m=3$ und $n=2$, so wird $x=-17$: da aber nur das Quadrat von *x* vorkommt, so ist es gleich viel ob man nimmt $x=-17$ oder $x=+17$ aus beyden wird $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Frage: Es sey diese Formel gegeben $6+13x+6xx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a=6, b=13$ und $c=6$, wo also weder *a* noch *c* ein Quadrat ist. Man sehe also ob $bb-4ac$ ein Quadrat werde; da nun kommt 25, so weis man daß diese Formel durch zwey Factores vorgestellt werden kann, welche sind $(2+3x)\cdot(3+2x)$; davon sey nun die Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$ so bekommt man $(2+3x)\cdot(3+2x)=\frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, daraus wird $3nn+2nnx=2mm+3mmx$ und daher wird $x=\frac{2mm-3nn}{2nn-3mm}=\frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß *3nn* größer seyn als *2mm*, und also *2mm* kleiner als *3nn;* folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber der Nenner positiv werde, so muß $3mm$ größer seyn als $2nn$ und also $\frac{mm}{nn}$ größer seyn als $\frac{2}{3}$. Um dahero für x positive Zahlen zu finden, so müßen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner sey als $\frac{3}{2}$ und doch größer als 2

Setzt man nun $m=6$ und $n=5$, so wird $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$, welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$ und offenbahr größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x=\frac{3}{58}$.

54.

IV.) Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Platz findet, wann die Formel $a+bx+cxx$ dergestalt in zwey Theile zertheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factores auflösen laße, also daß eine solche Form herauskomme $pp+qr$, wo die Buchstaben *p, q* und *r* Formeln von dieser Art $f+gx$ bedeuten. Dann da darf man nur setzen $\sqrt{(pp+qr)}=p+\frac{mq}{n}$, so wird $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$, wo sich die *pp* aufheben und die übrigen Glieder durch *q* theilen laßen, also daß $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$ oder $nnr=2mnp+mmq$, woraus sich x leicht bestimmen läßt, und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Exempel erläutern wollen.

55.

III. Frage: Man suche solche Zahlen *x,* daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein anderes Quadrat? oder wann man davon 1 subtrahirt ein Quadrat übrig bleibe? wiebeyder Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen ist 50, wovon 1 subtrahirt das Quadrat 49 übrig bleibt.

Also muß $2xx-1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a=-1,\ b=0,$ und $c=2$, und allso weder a noch c ein Quadrat ist, auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factores auflösen, weil $bb-4ac=8$ kein Quadrat ist, und dahero keiner von den drey ersten Fällen statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel also vorgestellt werden $xx+(xx-1)=xx+(x-1)(x+1)$. Hievon werde nun die Wurzel gesetzt $x+\frac{m(x+1)}{n}$ dahero wird $xx+(x-1)(x+1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}x$, wo sich die xx aufheben und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen laßen, da dann kommt $nnx-nn=2mnx+mmx+mm$ und $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; und weil in unserer Formel $2xx-1$ nur das Quadrat xx vorkommt, so ist es gleich viel ob die Werthe von x positiv oder negativ herauskommen. Man kann auch so gleich $-m$ anstatt m schreiben damit man bekomme

$$x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}.$$

Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so hat man $x=1$ und $2xx-1=1$. Es sey ferner $m=1$ und $n=2$ so wird $x=\frac{5}{7}$ und $2xx-1 = \frac{1}{49}$. Setzt man aber $m=1$ und $n=-2$, so wird $x=-5,$ oder $x=+\ 5$ und $2xx-1=49.$

56.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wann dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache? dergleichen ist 7, wovon das Quadrat doppelt genommen ist 98, und 2 addirt, kommt das Quadrat 100.
Es muß also diese Formel $2xx+2$ ein Quadrat seyn, wo $a=2,$ $b=0$ und $c=2,$ also wieder weder *a* noch *c* ein Quadrat ist, auch ist $bb-4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann die dritte Regel hier nicht statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel also vorstellen.

Man setze den ersten Theil $=4$, so wird der andere seyn $2xx-2=2(x+1)\cdot(x-1)$, und daher unsere Formel $4+2(x+1)\cdot(x-1)$. Davon sey die Wurzel $2+\frac{m\cdot(x+1)}{n}$ woher diese Gleichung entspringt

$$4+2(x+1)\cdot(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$$

wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder sich aber durch $x+1$laßen, also daß $2nnx-2nn=4mn+mmx+mm$ und daher $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$.

Setzt man $m=1$ und $n=1$ so wird $x=7$, und $2xx+2=100$. Nimmt man $m=0$ und $n=1$ so wird $x=1$ und $2xx+2=4$.

57.

Oefters geschiehet es auch daß wann weder die erste, noch zweyte, noch dritte Regel Platz findet, man nicht finden kan, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Als wann diese Formel vorkäme $7+15x+13xx$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fält aber nicht so leicht in die Augen. Dann der erste Theil ist $\left(1-x\right)^2$ oder $1-2x+xx$, und daher wird der andere seyn $6+17x+12xx$, welcher deswegen Factoren hat weil $17^2-4\cdot6\cdot12=1$ und also ein Quadrat ist. Die zwey Factores davon sind auch würcklich $\left(2+3x\right)\cdot(3+4x)$; also daß diese Formel seyn wird $\left(1-x)^2+\left(2+3x\right)(3+4x\right)$, welche jetzo nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Es ist aber nicht wohl zu fordern, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; dahero wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erstlich zu erkennen, ob es möglich sey eine solche Formel aufzulösen? weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx+2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat
gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einigen Fall möglich, so ist es leicht alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch allhier erörtern wollen.

58.

Der gantze Vortheil, welcher in solchen Fällen zu statten kommen kann, bestehet darin, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel $a+bx+cxx$ ein Quadrat wird? indem man für *x* einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen ob in keinem Fall ein Quadrat herauskomme?

Um diese Arbeit zu erläutern, wann etwann eine gebrochene Zahl für *x* gesetzt dieses leisten sollte, kann man sogleich für *x* einen Bruch als $\frac{t}{u}$ schreiben, woraus diese Formel erwächst $a+b\frac{t}{u}+c\frac{tt}{uu}$, welche wann sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat *uu* multiplicirt ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig, zu probiren, ob man für *t* und *u* solche Werthe in gantzen, Zahlen errathen kann, daß diese Formel $auu+btu+ctt$ ein Quadrat werde? dann alsdann wann man setzt $x=\frac{t}{u}$ so wird auch diese Formel *u* $a+bx+cxx$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man großen Grund zu vermuthen, daß es gantz und gar unmöglich sey, die Formel zu einem Quadrat zu machen, als dergleichen es unendlich viele giebt.

59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es gantz leicht alle mögliche Fälle zu finden, darinn dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich diese Formel betrachten $2+7xx,$ wo $a=2,\ b=\ 0,$ und $c=7$: dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wann $x=1$; dahero setze man $x=1+y,$ so wird $xx=1+2y+yy$, und unsere Formel wird seyn $9+14y+7yy$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist: also setzen wir nach der zweyten Regel die Quadrat-Wurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, da bekommen wir diese Gleichung $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn},$ wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch *y* theilen laßen; da bekommen wir $14nn+7nny=6mn+mmy$ und daher $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; daraus finden wir $x=\frac{6m-7nn--mm}{7nn-mm}$, wo man für *m* und *n* alle beleibige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m=1$ und $n=1,$ so wird $x=-\frac{1}{3}$, oder auch weil nur *xx* vorkommt, $x=+\frac{1}{3}$, dahero wird $2+7xx=\frac{25}{9}$. Man setze ferner $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-1$ oder $x=+1$. Setzt man aber $m=3$ und $n=-1,$ so wird $x=17$; daraus wird $2+7xx=2025$, welches das Quadrat ist von 45. Laßt uns auch setzen $m=8$ und $n=3$, so wird $x=-17$ wie zuvor. Setzen wir aber $m=8$ und $n=-3$, so wird $x=271$, daraus wird $2+7xx=514089=717^2$.

60.

Wir wollen ferner diese Formel betrachten $5xx+3x+7$, welche ein Quadrat wird, wann $x=-1$. Deswegen setze man $x=y-1$ so wird unsere Formel in diese verwandelt

$$\begin{array}{r} 5yy-10y+5 \\ +\ 3y-3 \\ +7 \\ \hline 5yy-7y\ +9 \end{array}$$

davon setze man die Quadrat-Wurzel $=3-\frac{my}{n}$, so wird

$$5-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{n},$$

daher wir bekommen $5nny-7nn=-6mn+mmy$, und

$$y=\frac{7nn-6mn}{5nn-mm}, \text{ folglich } x=\frac{2nn-6mm+mm}{5nn-mm}.$$

Es sey $m=2$ und $n=1$, so wird $x=6$ und also $5xx+3x+7=169=13^2$.

Setzt man aber $m=-2$ und $n=1$, so wird $x=18$ und

$$5xx+3x+7=1681=41^2.$$

61.

Laßt uns nun auch diese Formel betrachten $7xx+15x+13$, und so gleich setzen $x=\frac{t}{u}$, also daß diese Formel $7tt+15tu+13uu$ ein Quadrat seyn soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen wie folget:

Es sey $t=1$ und $u=\ 1$, so wird unsere Formel $=35$
" " $t=2$ " $u=\ 1$, " " " " $=71$
" " $t=2$ " $u=-1$ " " " " $=11$
" " $t=3$ " $u=\ 1$, " " " " $=121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x=3$ ein Genüge leistet, so setze man $x=y+3$ und so wird unsere Formel

$$7yy+42y+63+15y+45+13$$

oder $7yy+57y+121$; davon setze man die Wurzel $=11+\frac{my}{n}$, so bekommt man

$7yy+57y+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, oder $7nny+57nn=22mn+mmy$,

und daher $\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$ und $x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$.

Man setze z. E. $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{3}{2}$ und unsere Formel

$7xx+15x+13=\frac{25}{4}=\left(\frac{25}{2}\right)^2$. Es sey ferner $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{17}{6}$.

Nimmt man $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=\frac{129}{2}$ und unsere Formel

$$7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=\left(\frac{347}{2}\right)^2.$$

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx+2$, oder wann man für *x* schreibt $\frac{t}{u}$, dieser $3tt+2uu$, welche man mag auch für *t* und *u* Zahlen annehmen die man will, niemahls ein Quadrat wird. Dergleichen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth seyn einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkennt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden wo ein Quadrat herauskommt, wozu das folgende Capitel bestimmt ist.

CHAPTER 5

CONSIDERING THE CASES IN WHICH THE FORMULA $a + bx + cxx$ CAN NEVER BE A SQUARE.

63.

Since our general formula consists of three terms, thus it is to be observed, that the same can always be changed into another, in which the middle term is missing. This happens if one puts $x = \frac{y-b}{2c}$, therefore our formula becomes this form :

$$a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}, \text{ or } \frac{4ac-bb+yy}{4c}.$$

Should this be a square, thus one puts the same $= \frac{zz}{4}$, to become $4ac - bb + yy = czz$ and consequently $yy = czz + bb - 4ac$.

Thus if our formula shall be a square, thus this formula $czz + bb - 4ac$ also will be a square and reversing, if this formula is a square, thus also the above will be a square; consequently if one writes t for $bb - 4ac$, thus it arises from that whether or not such a formula $czz + t$ can be a square? And since this formula consists only of two terms, thus it is without question far easier to judge whether or not it can be seen to be a square from the nature of the two given numbers c and t.

64.

If $t = 0$, then it is clear, that the formula czz will be a square only if the number c is a square. Then since a square divided into another square, further is a square, thus czz cannot be a square, provided that $\frac{czz}{zz}$, that is c, is not a square. Thus if the number c is not a square, thus neither also can the formula czz in any way be a square. But if c itself be placed before a square number, thus also czz is a square, one may assume any number for z.

65.

In order to assess the other cases, thus we must get help from these results, which were quoted above, about the different ways of considering a number with respect to its divisors.

Thus in considering the divisors of 3, the numbers shall be of three kinds : the first is understood to be those numbers, which can be divided by 3 and can be expressed by the formula $3n$.

In order that the second kind pertains to those, which divided by 3 leaves 1, and are contained in this form $3n+1$.

Moreover the third kind realizes the numbers themselves, which divided by 3 leaves 2 and are expressed by this formula $3n+2$.

Now since all the numbers are contained in one of the 3 forms, thus we will consider the squares taken from these.

The first number pertains to the formula $3n$, thus so that its square is $9nn$, which not only can be divided by 3 but also by 9.

If the number is included in the form $3n+1$, so that its square is $9nn+6n+1$, which divided by 3 gives $3nn+2n$ and 1 to be left over, and also belongs to the second kind $3n+1$.

If finally the number is included in this form $3n+2$, thus its square is $9nn+12n+4$, which divided by 3, gives $3nn+4n+1$, and 1 left over, and thus belongs to the second kind $3n+1$: therefore it is clear, that all the square numbers in respect of the divisors 3 are only of the second kind. Then further if the same may be divisible by 3, since then it must also necessarily be divisible by 9 ; or if it cannot be divided by 3 , thus only 1 is always left over, but never 2. Therefore no number, which is contained in the form $3n+2$, can be a square.

66.

From this we can now easily show, that the formula $3xx+2$ can never be a square, one may put in place either a whole number or a fraction. Then if x is a whole number and one divides this formula $3xx+2$ by 3 then 2 is left over, therefore [from above] this formula cannot be a square. But if x were a fraction, thus putting $x=\frac{t}{u}$, from which fraction we can now assume to know, that the same has been brought into its simplest form, and thus t and u have no common divisor, apart from 1. Now should $\frac{3tt}{uu}+2$ be a square, so likewise the same be multiplied by uu , that is $3tt+2uu$ should be a square also, but this also can never happen. As then the number u may or may not be divisible by 3 : let the numbers divide each other, then t cannot be divided by 3 otherwise t and u would have a common divisor.

Therefore setting $u=3f$, thus the formula becomes $3tt+18ff$, which divided by 3 gives $tt+6ff$, which cannot be divided further by 3, as it would necessarily become a square, because although $6ff$ itself can be divided, tt divided by 3 leaves 1 left over.

But suppose u itself not be divisible by 3, thus one can see what is left. Because the first term of $3tt+2uu$ can be divided by 3, thus it arises that the remainder comes entirely from the second term $2uu$. But now uu divided by 3 has the remainder 1, or it is a number of this kind $3n+1$, thus $2uu$ is a number of this kind $6n+2$, and thus divided by 3 leaves 2 over: therefore our formula $3tt+2uu$ divided by 3, leaves the remainder 2, and thus it is known that it cannot be a square number.

67.

Just as it can be seen, that also this formula $3tt+5uu$ can never be a square, and thus indeed none of these: $3tt+8uu$, $3tt+11uu$, $3tt+14uu$ etc. where the numbers 5, 8, 11, 14 etc. divided by 3 have a remainder of 2. Thus were u divisible by 3, and consequently t not so divisible, and on putting $u=3s$, thus the formula would be divisible by 3 but not divisible by 9. Were u not divisible by 3 and thus uu would be a number of this form $3n+1$, so although the first term $3tt$ were divisible by 3, but the other $5uu$ of this form, $15n+5$ or the other $8uu$ of this form $24n+8$, or $11uu$ of this $33n+11$ etc. would be divisible by 3, would leave the remainder 2 and thus cannot be quadratic.

68.

This is also valid for the general formula $3tt+(3n+2)uu$, which no more can be a quadratic, and neither also for the case that n shall be a negative number. Thus if $n=-1$, thus it is impossible, that this formula $3tt-uu$ can be made a square. Since if u is divisible by 3, thus the case is apparent, but if u were not divisible by 3, then uu would be a number of this form $3n+1$, and thus our formula becomes $3tt-3n-1$, which divided by 3 leaves the remainder -1, or by 3 more, leaves + 2 over. Generally putting $n=-m$ our formula will become $3tt-(3m-2)uu$, which thus can never be a square.

69.

Up to this stage the investigation has led us through the divisors 3 ; we would like also to consider 4 as a divisor, since then all the numbers shall be contained in one of these four forms:

$$\text{I. } 4n, \text{II. } 4n+1, \text{ III. } 4n+2, \text{ IV. } 4n+3.$$

The first of these numbers is the square $16nn$ and thus itself divisible by 16. Then there is a number of the second kind $4n+1$, so that its square is $16nn+8n+1$, which divided by 8 leaves 1 and thus pertains to this form $8n+1$. Then there is a number of the third kind $4n+2$ thus its square is $16nn+16n+4$, which divided by 16 leaves 4, and thus pertains to the form $16n+4$. Finally there is a number of the fourth form $4n+3$, and thus its square $16nn+24n+9$, which divided by 8 leaves 1.

70.

From this we learn the following, firstly that all even square numbers shall belong to this form $16n$ or to this $16n+4$; consequently all the even remainders, namely $16n+2;\ 16n+6;\ 16n+8;\ 16n+10;\ 16n+12;\ 16n+14$ can never be square numbers.

After that from the odd squares we see, that all are held in the single form $8n+1$, or divided by 8 leave the remainder 1. Therefore all the remaining odd numbers which belong to one of these forms $8n+3;\ 8n+5;\ 8n+7$, can never be squares.

71.

On this foundation we can also show more widely, that this formula $3tt+2uu$ can never be a square. Since either both the numbers t and u shall be odd, or one is even and the other odd, because both likewise cannot be even, else 2 shall be their common factor. Were both odd, and thus consequently tt as well as uu shall belong to this form $8n+1$, thus the first term $3tt$ divided by 8 would leave 3 over, but the other term leaves 2 over, but both together would leave 5, and thus cannot be a square. But if t were an even number and u odd, thus the first term $3tt$ would be divisible by 4 , but the other term $2uu$ divided by 4 would leave 2 over, thus both together would leave 2 over and thus cannot be a square. But finally were u even, namely $u=2s$, and moreover t odd and consequently $tt=8n+1$, thus our formula would be $24n+3+8ss$, which divided by 8 leaves 3 over, and thus cannot be a square.

Now this argument can be extended to this formula $3tt+(8n+2)uu$ *;* likewise to this $(8m+3)tt+2uu$, and even as fare as to this $\left(8m+3\right)tt+\left(8n+2\right)uu$, where all whole numbers *m* and *n* both positive as well as negative can be assumed.

72.

Further we are going to search such forms for the divisor 5, in respect of which all the numbers shall be present in one of these five formulas:

I. $5n$, II.$5n+1$, III.$5n+2$, IV. $5n+3$, V. $5n+4$.

Now let there be a number of the first form, thus its square is 25*nn,* which not only is divisible by 5, but also by 25 .

If the number is of the second kind, then its square $25nn+10n+1$, which divided by 5 leaves 1 over and thus is contained in the form $5n+1$.

If the number is of the third kind, then its square $25nn+20n+4$, which divided by 5 leaves 4 over.

If it is a number of the forth kind, then its square $25nn+30n+9$, which divided by 5 leaves 4 over.

If it is a number of the fifth kind, then its square $25nn+40n+16$, which divided by 5 leaves 1 over. Therefore if a square number is not divisible by 5, then the remainder is either always 1 or 4, but never 2 or 3; therefore numbers of the form $5n+2$ and $5n+3$ can never be squares.

73.

We can understand also from the same principle, whether either this formula $5tt+2uu$ or else $5tt+3uu$ can be squares. Then either *u* is divisible by 5 or not: in the first case if this formula should be divisible by 5, but then neither will be divisible by 25, and thus neither can be a square. But if *u* is not divisible by 5, thus *uu* either is of the form $5n+1$ or $5n+4$, in the first case the formula becomes $5tt+10n+2$, which leaves remainder 2 on division by 5 ; but the other becomes $5tt+15n+3$, which leaves 3 on division by 5, and thus cannot be a square. But if $uu=5n+4$, thus the first formula becomes $5tt+10n+8$, which leaves the remainder 3 on division by 5 ; but the other will be $5tt+15n+12$, which divided by 5 leaves 2 over, and thus also in this case cannot be a square.

Just as on the same basis it can be seen also, that neither this formula $5tt+(5n+2)uu$ nor that $5tt+(5n+3)uu$ can be a square, because the same remainders are left as before, also one can equally write *5mtt* in the first term than 5*tt*, provided *m* cannot be divided by 5.

74.

Since all even squares are of this form 4*n*, and moreover all the odd squares are of the form $4n+1$, and thus neither $4n+2$ nor $4n+3$ can be a square, hence from that it follows, that this general formula $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ can never be a square. Then if *t* were even than *tt* would itself be divisible by 4, but the other term divided by 4 would leave the remainder 3 ; moreover if both the numbers *t* and *u* were odd, then the remainder from *tt* and *uu* would be 1, thus the remainder from the whole formula would be 2. But now there is no square number which divided by 4 leaves the remainder 2 ; also here it is to be observed, that m as well as n can be taken as negative, and also $=0$, therefore neither this formula $3tt+3uu$ nor that $3tt-3uu$ can be a square.

75.

As we have found from the divisors examined so far, that some kinds of numbers can never be squares, so this may be true also for all other divisors, that there are always kinds of numbers to be found that cannot be squares.

Let the divisor 7 be taken, thus all the numbers are in one of the following seven kinds, from which we will investigate the squares also.

	Kinds of numbers.	Squares.	Kinds of squares.
I.	$7n$	$49nn$	$7n$
II.	$7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III.	$7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV.	$7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI.	$7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Now since the squares, which are not themselves divisible by 7, must be contained in one of these three kinds $7n+1,\ 7n+2,\ 7n+4$, thus the three other kinds are completely denied from being in the nature of squares. These kinds are now $7n+3,\ 7n+5,\ 7n+6$, and the cause of this is clear, as always two kinds can be found to which the squares of a given kind belong.

76.

In order to show this more thoroughly, thus it is observed that the last kind $7n+6$ can be expressed thus as $7n-1$; just as also the formula $7n+5$ is the same as $7n-2$, and $7n+4$ is just as much as $7n-3$. But now it is clear, that from these two kinds of numbers $7n+1$ and $7n-1$ the squares divided by 7 leave the same kind of remainder, namely 1; just as both these squares are of the same kind, $7n+2$ and $7n-2$.

77.

Thus in general, in whatever manner the divisor may be provided, which we will indicate by the letter d, the following different kinds of numbers are represented thus :

$$dn,\ dn+1,\ dn+2,\ dn+3 \text{ etc. } dn-1, dn-2, dn-3 \text{ etc.}$$

where the squares of $dn+1$ and $dn-1$ have this in common, that they leave the remainder 1 on division by d, and thus both belong to the same kind, namely $dn+1$. Just as it happens also with the two kinds $dn+2$ and $dn-2$, the squares of which belong to the form $dn+4$.

And thus it happens generally also of these two forms $dn+a$ and $dn-a$, the squares of which divided by d, no matter which leave the same remainder, namely aa; or as great an amount remains, if aa is divided by d.

78.

In this way an endless number of such formulas arise $att+buu$ which in no way can become squares. Thus from the divisor 7 it is understood readily, that none of these three formulas

$$7tt+3uu, 7tt+5uu \text{ und } 7tt+6uu$$

can never be a square, since *uu* divided by 7 leaves either 1, 2 or 4 ; further because by the first there is left over 3, 6 or 5, by the second either 5, 3 or 6, and by the third either 6, 5 or 3 remains, by which no square can occur. If we come upon suchlike formulas, thus all effort is in vain, that one himself might give, in order to guess that in some single case, where a sought square might appear, and in this way these considerations are of great importance.

But if one of the foregoing formulas is not of this nature, and one can guess some single case, where the same is a square, then we have seen already in the last chapter, how from that an endless number of other cases should be found.

The previous formula was actually $axx+b$, and because fractions commonly are used for *x*, thus we have seen $x=\frac{t}{u}$, thus this formula should be made into a square $att+buu$.

But there is often an number of cases where *x* can thus be given in whole numbers, as now towards finding the same, will be shown in the following chapter.

CAPITEL 5

VON DEN FÄLLEN DA DIE FORMEL $a + bx + cxx$ NIEMAHLS EIN QUADRAT WERDEN KANN

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemercken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschiehet wann man setzt $x=\frac{y-b}{2c}$, dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt

$$a+\frac{by-bb}{2c}+\frac{yy-2by+bb}{4c}, \text{ oder } \frac{4ac-bb+yy}{4c}.$$

Soll diese ein Quadrat werden, so setze man dasselbe $=\frac{zz}{4}$, so wird $4ac-bb+yy=czz$ folglich $y=czz+bb-4ac$.

Wann also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese $czz+bb-4ac$ ein Quadrat und umgekehrt, wann diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich wann man für $bb-4ac$ schreibt *t*, so kommt es darauf an ob eine solche Formel $czz+t$ ein Quadrat werden könne oder nicht? und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es ohnstreitig weit leichter die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen *c* und *t* geschehen muß.

64.

Wann $t=0$ ist, so ist offenbar, daß die Formel *czz* nur alsdann ein Quadrat werde, wann die Zahl *c* ein Quadrat ist. Dann da ein Quadrat durch ein ander Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann *czz* kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{czz}{zz}$, das ist *c*, ein Quadrat ist. Also wann die Zahl *c* kein *Q*uadrat ist, so kann auch die Formel *czz* auf keinerlei Weise ein Quadrat werden. Ist aber *c* vor sich eine Quadrat-Zahl, so ist auch *czz* ein Quadrat, man mag für *z* annehmen was man will.

65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müßen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was oben von den verschiedenen Arten der Zahlen in Ansehung eines jeglichen Theilers angeführt worden.

Also in Ansehung des Theilers 3 sind die Zahlen von dreyerley Art: die erste begreift diejenigen Zahlen, welche sich durch 3 theilen laßen und durch diese Formel $3n+1$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig laßen, und in dieser Formel $3n+1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt 2 übrig laßen, und durch diese Formel $3n+2$ vorgestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, so wollen wir die Quadraten davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel 3*n* enthalten, so ist ihr Quadrat 9*nn*, welches sich also nicht nur durch 3 sondern so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n+1$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn+6n+1$, welches durch 3 dividirt giebt $3nn+2n$ und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art $3n+1$ gehöret.

Ist endlich die Zahl in dieser Formel $3n+2$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn+12n+4$, welches durch 3 dividirt, gibt $3nn+4n+1$, und 1 im Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art $3n+1$ gehöret: daher ist klar, daß alle Quadrat-Zahlen in Ansehung des Theilers 3 nur von zweyerley Arten sind. Dann entweder laßen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdann müßen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen laßen; oder wann sie sich nicht durch 3 theilen laßen, so bleibt allezeit nur 1 im Rest, niemals aber 2. Dahero keine Zahl, die in der Form $3n+2$ enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3xx+2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für *x* eine gantze Zahl oder einen Bruch setzen. Dann wann *x* eine ganze Zahl ist und man theilt diese Formel $3xx+2$ durch 3 so bleiben 2 übrig, daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Wann aber *x* ein Bruch ist, so setze man $x=\frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also *t* und *u* keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun $\frac{3tt}{uu}+2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit *uu* multiplicirt, das ist diese $3tt+2uu$ ein Quadrat seyn, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Dann entweder läßt sich die Zahl u durch 3 theilen oder nicht: läßt sie sich theilen, so läßt sich t nicht theilen weil sonsten t und u einen gemeinen Theiler hätten.

Man setze dahero $u = 3f$, so wird unsere Formel $3tt + 18ff$, welche durch 3 getheilt giebt $tt + 6ff$, so sich nicht weiter durch 3 theilen läßt, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar $6ff$ theilen läßt, tt aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Rest blos auf das zweyte Glied $2uu$ an. Nun aber uu durch 3 dividirt 1 im Rest hat, oder eine Zahl ist von dieser Art $3n+1$, so wird $2uu$ eine Zahl von dieser Art $6n+2$ seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen: dahero unsere Formel $3tt + 2uu$ durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadrat-Zahl seyn kann.

67.

Eben so kann man beweisen, daß auch diese Formel $3tt + 5uu$ niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von diesen: $3tt + 8uu$, $3tt + 11uu$, $3tt + 14uu$ etc. wo die Zahlen 5, 8, 11, 14 etc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Dann wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte u = 3s, so würde die Formel durch 3 nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also uu eine Zahl von dieser Art $3n+1$, so wäre zwar das erste Glied $3tt$ durch 3 theilbar, das andere aber $5uu$ von dieser Form $15n+5$, oder $8uu$ von dieser Form $24n+8$, oder $11uu$ von dieser $33n+11$ etc. würde durch 3 dividirt 2 übrig laßen und also kein Quadrat seyn können.

68.

Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel $3tt + (3n+2)uu$, welche nimmermehr ein Quadrat werden kann, und auch nicht wann für n negative Zahlen gesetzt würden. Also wann $n = -1$, so ist es unmöglich, diese Formel $3tt - uu$ zu einem Quadrat zu machen. Dann wann u durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar, wäre aber u nicht theilbar durch 3, so würde uu eine Zahl von dieser Art $3n+1$, und also unsere Formel seyn $3tt - 3n - 1$, welche durch 3 dividirt übrig läßt -1, oder um 3 mehr, + 2 übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$ so wird unsere Formel $3tt - (3m-2)uu$, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführet; wir wollen dahero auch 4 als einen Theiler betrachten, da dann alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:

$$\text{I. } 4n, \text{II. } 4n+1, \text{ III. } 4n+2, \text{ IV. } 4n+3,$$

enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16nn$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ists eine Zahl von der zweyten Art $4n+1$, so ist ihr Quadrat $16nn + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt und gehört also zu dieser Formel $8n+1$. Ists eine Zahl von der dritten Art $4n+2$ so ist ihr Quadrat $16nn + 16n + 4$, welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in dieser Form $16n+4$ enthalten ist. Ists endlich eine Zahl von der vierten Art $4n+3$, so ist ihr Quadrat $16nn + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

70.

Hieraus lernen wir folgendes, erstlich daß alle gerade Quadrat-Zahlen in dieser Form $16n$ oder in dieser $16n+4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nemlich $16n+2$; $16n+6$; $16n+8$; $16n+10$; $16n+12$; $16n+14$ können niemals Quadrat-Zahlen seyn.

Hernach von den ungeraden Quadraten ersehen wir, daß alle in dieser einzigen Formel $8n+1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 im Rest laßen. Dahero alle übrige ungerade Zahlen welche in einer von dieser Formel $8n+3$; $8n+5$; $8n+7$ enthalten sind, können niemals Quadrate werden.

71.

Aus diesem Grund können wir auch wiederum zeigen, daß diese Formel $3tt+2uu$ kein Quadrat seyn kann. Dann entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerad und die andere ist ungerad, weil beyde zugleich nicht gerad seyn können, indem sonst 2 ihr gemeiner Theiler seyn würde. Wären beyde ungerad, und folglich so wohl tt als uu in dieser Form $8n+1$ enthalten, so würde das erste Glied $3tt$ durch 8 dividirt 3 übrig laßen, das andere Glied aber 2 übrig laßen, beyde zusammen aber würden 5 übrig laßen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3tt$ durch 4 theilen laßen, das andere aber $2uu$ würde durch 4 dividirt 2 übrig laßen, also beyde zusammen würden 2 übrig laßen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerad nemlich $u=2s$, aber t ungerad und folglich $tt=8n+1$, so würde unsere Formel seyn $24n+3+8ss$, welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf diese Formel ausdehnen $3tt+(8n+2)uu$; imgleichen auch auf diese $(8m+3)tt+2uu$, und auch so gar auf diese $\left(8m+3\right)tt+\left(8n+2\right)uu$, wo für m und n alle gantze Zahlen so wohl positive als negative genommen werden können.

72.

Wir gehen solcher Gestalt weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von diesen fünf Formeln:

$$\text{I. } 5n,\ \text{II.} 5n+1,\ \text{III.} 5n+2,\ \text{IV. } 5n+3,\ \text{V. } 5n+4$$

enthalten sind. Ist nun eine Zahl von der ersten Art, so ist ihr Quadrat $25nn$, welches nicht nur durch 5 sondern auch durch 25 theilbahr ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25nn+10n+1$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt und also in dieser Formel $5n+1$ enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25nn+20n+4$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25nn+30n+9$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25nn+40n+16$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wann dahero eine Quadrat-Zahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; dahero in diesen Formeln $5n+2$ und $5n+3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

73.

Aus diesem Grund können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5tt+2uu$ noch diese $5tt+3uu$ ein Quadrat werden könne. Dann entweder ist *u* durch 5 theilbar oder nicht: im erstein Fall würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen laßen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber *u* nicht theilbar durch 5, so ist *uu* entweder $5n+1$ oder $5n+4$, im erstern Fall wird die erste Formel $5tt+10n+2$, welche durch 5 getheilt 2 übrig läßt; die andere aber wird $5tt+15n+3$, welche durch 5 getheilt 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber $uu=5n+4$, so wird die erste Formel $5tt+10n+8$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird $5tt+15n+12$, welche durch 5 dividirt 2 übrig läßt, und also auch in diesem Fall kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grund siehet man auch, daß weder diese Formel $5tt+(5n+2)uu$ noch diese $5tt+(5n+3)uu$ ein Quadrat sein kann, weil eben dieselben Reste als vorher überbleiben, man kann auch so gar im ersten Glied $5mtt$ anstatt $5tt$ schreiben, wann nur *m* nicht durch 5 theilbar ist.

74.

Wie alle gerade Quadraten in dieser Form $4n$, alle ungerade aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind, und also weder $4n+2$, noch $4n+3$ ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß diese allgemeine Formel $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ niemals ein Quadrat seyn kann. Dann wäre *t* gerad so würde sich *tt* durch 4 theilen laßen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig lassen; wären aber beyde Zahlen *t* und *u* ungerad, so würden die Reste von *tt* und *uu* 1 seyn, also von der gantzen Formel würde der Rest seyn 2. Nun aber ist keine Zahl welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat; hier ist auch zu mercken, daß so wohl *m* als *n* negativ, und auch $=0$ genommen werden kann, dahero weder diese Formel $3tt-3uu$ noch diese $3tt\ uu$ ein Quadrat seyn kann.

75.

Wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate seyn können, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden die keine Quadrate seyn können.

Es sey der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadraten untersuchen wollen.

	Arten der Zahlen	ihre Quadraten	gehören zu der Art
I.	$7n$	$49nn$	$7n$
II.	$7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III.	$7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV.	$7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI.	$7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Da nun die Quadraten, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten enthalten seyn müssen $7n+1,\ 7n+2,\ 7n+4$, so werden die drey andern Arten von der Natur der Quadrate gäntzlich ausgeschloßen. Diese Arten sind nun $7n+3,\ 7n+5,\ 7n+6$, und der Grund davon ist offenbahr, weil sich immer zwey Arten finden davon die Quadraten zu einer Gattung gehören.

76.

Um dieses deutlicher zu zeigen, so bemercke man daß die letzte Art $7n+6$ auch also $7n-1$ ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die Formel $7n+5$ mit dieser $7n-2$ einerley, und $7n+4$ ist ebenso viel als $7n-3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n+1$ und $7n-1$ die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig lassen nemlich 1; eben so sind auch die Quadraten dieser beyden Arten $7n+2$ und $7n-2$ von einerley Gattung.

77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben *d* andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedene Arten der Zahlen folgende

$$dn,\ dn+1,\ dn+2,\ dn+3 \text{ etc. } dn-1, dn-2, dn-3 \text{ etc.}$$

wo die Quadrate von $dn+1$ und $dn-1$ dieses gemein haben, daß sie durch *d* dividirt 1 übrig laßen, und also beyde zu einer Art nemlich zu $dn+1$ gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten $dn+2$ und $dn-2$, deren Quadrate zu der Art $dn+4$ gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten $dn+a$ und $dn-a$, deren Quadrate durch *d* dividirt einerley übrig lassen nemlich *aa;* oder so viel als übrig bleibt, wann man *aa* durch *d* theilt.

78.

Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln $att+buu$ welche auf keinerley Weise Quadrate werden können. Also aus dem Theiler 7 erkennt man leicht, daß keine von diesen drey Formeln

$$7tt+3uu, 7tt+5uu \text{ und } 7tt+6uu$$

jemals ein Quadrat werden kann, weil *uu* durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt; ferner weil bey der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig blieb, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wann nun dergleichen Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergebens, die man sich geben wollte, um irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen möchte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine vorgegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden sollen.

Die vorgegebene Formel war eigentlich $axx+b$, und weil gemeiniglich für *x* Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x=\frac{t}{u}$, also daß diese Formel $att+buu$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle wo so gar x in gantzen Zahlen gegeben werden kann, wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.