CHAPTER 6

ON THE FORMULA $axx+b$ BEING A SQUARE, IN THE CASE OF WHOLE NUMBERS.

79.

We have already noted above how a formula such as $a+bx+cxx$ can be transformed in order to remove the middle term, and therefore we are content in the present work to consider a formula restricted to this form $axx+b$, in which only whole numbers are to be found for *x*, for which the formula becomes a square. But it is necessary before all else, to show that such a formula is possible, for if it were impossible then even rational numbers might not be used for *x*, let alone finding whole numbers.

80.

Thus we assume thus that the formula $axx+b=yy$, so that both the letters *x* and *y*, as well as *a* and *b*, shall be whole numbers.

To this end, it is absolutely necessary that already a case involving whole numbers be known or guessed, or else then all the trouble would be superfluous to search for more suchlike cases, because perhaps the formula itself is impossible to be satisfied.
We will therefore assume that this formula becomes a square when $x=f$, and that square to be determined by *gg*, thus so that $aff+b=gg$, where therefore *f* and *g* are known numbers. Indeed, other similar cases must be deduced from this assumed case ; and although this investigation is much more important, yet it is subject to so many more difficulties, which we will be able to overcome through the following strategies.

81.

Now since already $aff+b=gg$ has been found, and upon this hypothesis also there shall be $axx+b=yy$, thus subtracting one equation from the other, so that $axx-aff=yy-gg$, which equation itself can be expressed by factoring : $a(x+f)(x-f)=(y+g)(y-g)$; thus becoming $apq(x+f)(x-f)=pq(y+g)(y-g)$, on multiplying both sides by *pq*; now in order to separate this equation into parts, the following subdivision can be made

$$ap(x+f)=q(y+g) \text{ and } q\left(x-f\right)=p(y-g),$$

and both the letters *x* and *y* can be found from these two equations;
the first equation divided by *q* gives $y+g=\frac{apx+apf}{q}$; the second divided by *p* gives $y-g=\frac{qx-qf}{p}$; the one subtracted from the other gives $2g=\frac{(app-qq)x+(app+qq)f}{pq}$, and multiplying this equation by *pq* to become $2pqg=\left(app-qq\right)x+(app+qq)f$, and therefore

$$x=\frac{2gpq}{app-qq}-\frac{(app+qq)f}{app-qq},$$

further there is found from this derivation, $y=g+\frac{2gqq}{app-qq}-\frac{(app+qq)fq}{(app-qq)p}-\frac{qf}{p}$. Here the first two terms contain the letter *g*, which taken together gives $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$; both the remaining contain the letter *f*, and give $-\frac{2afpg}{app-qq}$ under one denominator ; therefore we obtain

$$y=\frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}.$$

82.

This result does not appear to be at all in accordance with out final goal, as fractions are encountered here, yet since we want to find whole numbers for *x* and *y*, and it would indeed be a new question to ask what numbers are to be assumed for *p* and *q*, in order that fractions should disappear, which appears to be an even harder question than our main question. But here a single particular artifice can be applied, through which we can easily reach our final goal: for since here everything must be expressed in terms of whole numbers, thus we put $\frac{app+qq}{app-qq}=m$ and $\frac{2pq}{app-qq}=n$, from which we have $x=ng-mf$ and $y=mg-naf$. But here we cannot take any values of *m* and *n* as it pleases, since they must be determined thus, so that the above determinations are seen to be satisfied ; in order to do this, let us consider their squares, since we have then

$$mm=\frac{aap^4+2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4} \text{ and } nn=\frac{4ppqq}{aap^4-2appqq+q^4}$$

from which we find:

$$mm-ann=\frac{aap^4+2appqq+q^4-4appqq}{aap^4-2appqq+q^4}=\frac{aap^4-2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}=1.$$

83.

From which it can be seen, that both the numbers *m* and *n* must be provided thus, so that $mm=ann+1$. Now since *a* is a known number, it must be considered initially that a whole number be found for *n*, so that $ann+1$ becomes a square, of which consequently *m* is the root, and finally a solution is found for that, and also the above number *f* is found, so that $aff+b$ becomes a square, namely *gg*, thus we find the following values for *x* and *y*, in terms of whole numbers [from $aff+1=gg$ initially and $ann+1=mm$ in particular, we find]

$$x=ng-mf,\text{ and } y=mg-naf,$$

and from which there will be $axx+b=yy$.

84.

It is clear from above, that if once *m* and *n* were found, for these one can also write $-m$ and $-n$, because the square *nn* remains unchanged.

Therefore in order to find the integers *x* and *y* , so that there will be $axx+b=yy$, thus we must already have such a solution for this condition, namely to be for the case $aff+b=gg$; which thus is known already, and hence we must search still for the numbers *m* and *n,* for the number *a*, so that $ann+1=mm$, the instructions for which shall be given in the following sections. With this done we shall have a new case, which shall be $axx+b=yy$, for which $x=ng+mf$ and $y=mg+naf$. [Note the sign change.]

Putting this new case in place of the above for the assumed known one, and writing $ng+mf$ in place of *f,* and $mg+naf$ in place of *g,* thus we introduce further new values for *x* and *y* , again from which, if these were put in place of *f* and *g* , another new value will be given, and so on thus, so that if one had only a single case initially, he can find out from that indefinitely many other cases.

85.

The way in which we have reached this solution, was rather clumsy and seen initially to move away from our final purpose, likewise we came upon rather confused fractions, that by good fortune we were able to remove, it will be good therefore to show a short cut, which even leads us to this solution.

86.

Since the equation $axx+b=yy$ must be assumed, and we have already found that $aff+b=gg$, thus the former gives us $b=yy-axx$, and the latter $b=gg-aff$, consequently there must be also $yy-axx=gg-aff$, and now from all that assumed, we must find the unknown numbers *x* and *y* from the known numbers *f* and *g* : since it can be seen at once that these equations can be solved if we put $x=f$ and $y=g$; from this alone we can obtain no new case other than what is taken to be known already.

Therefore we will assume that we have already found such a number *n*, so that $ann+1$ will be a square, or that there shall be $ann+1=mm$, therefore we now have $mm-ann=1$, we multiply the part $gg-aff$ in the above equation that by giving

$$yy-axx=\left(gg-aff\right)(mm-ann)=ggmm-affmm-aggnn+aaffnn.$$

Further let us put $y=gm+afn$, thus we obtain:

$$ggmm+2afgmn+aaffnn-axx=ggmm-affmm-aggnn+aaffnn,$$

where the terms *ggmm* and *aaffnn* disappear and we obtain thus

$$axx=affmm+aggnn+2afgmn,$$

which equation divided by a gives $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, which formula clearly is a square, from which we obtain $x = fm + gn$, which are precisely the formulas we have found above.

87.

[Summary : For a given integer relation, $axx + b = yy$, with some initial values of x and y found by inspection, taken as f and g, so that $aff + b = gg$, then from the special relation $ann + 1 = mm$ satisfying values of m and n can be found, and from which we have $x = fm + gn$ and $y = gm + afn$, for the general term of the relation $axx + b = yy$. (These can be called relations between integral sequences, and for $s > 0$, e.g. $x_{s+1} = mx_s + ny_s$ and $y_{s+1} = my_s + anx_s$ can be written in more modern terms as solutions of the sequence equation $ax_s^2 + b = y_s^2$.)].

It will now be necessary to illustrate these solutions by some examples.

I. Question: Can we find all the whole numbers for x, so that $2xx - 1$ becomes a square, or that there becomes $2xx - 1 = yy$?

Here $a = 2$ and $b = 1$, now the first case is seen at once if we take $x = 1$ and $y = 1$. From this known case we now have $f = 1$ and $g = 1$; but further it is evident that to find such a number for n, so that $2nn + 1$ will be a square, namely mm, such as now happens if $n = 2$ and $m = 3$, therefore we know from any one case of f and g these new cases are found $x = 3f + 2g$, and $y = 3g + 4f$; now since the first known case is $f = 1$ and $g = 1$, thus we find from that the following new cases :

$x = f = 1$	5	29	169	
$y = g = 1$	7	41	239	etc.

88.

II. Question: How do we find all triangular numbers, which likewise shall be squares ?

z shall be the root of the triangular number, $\frac{zz+z}{2}$ which must be a square number of the same, to be x, thus there shall be $\frac{zz+z}{2} = xx$. On multiplying by 8 there will be $4zz + 4z = 8xx$ and adding 1 to both sides, gives $4zz + 4z + 1 = (2z+1)^2 = 8xx + 1$. It thus arises, that $8xx + 1$ will be a square, and if we put $8xx + 1 = yy$, thus $y = 2z + 1$, and thus the sought root of the triangular number $z = \frac{y-1}{2}$.

Now here we have $a = 8$, and $b = 1$, and the known case follows at once, namely $f = 0$ und $g = 1$. Further from that there becomes $8nn + 1 = mm$, thus from $n = 1$ and $m = 3$ there becomes $x = 3f + g$ and $y = 3g + 8f$, and $z = \frac{y-1}{2}$; from which we have the following solutions:

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681	etc.

89.

III. Question: How do we find all the pentagonal numbers which are equal to square numbers ?

The pentagonal number root shall be $= z$, so that the pentagonal number $= \frac{3zz-z}{2}$, to which the square xx shall be made equal: $3zz - z = 2xx$; we multiply by 12 and add 1, so that there becomes $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z-1)^2$.

Now putting $24xx + 1 = yy$, thus there becomes $y = 6z - 1$ and $z = \frac{y+1}{6}$; since here we have now $a = 24,\ b = 1$, thus the known case is $f = 0$ and $g = 1$. Since following this there must be $24nn + 1 = mm$, thus taking $n = 1$ and there becomes $m = 5$, therefore we obtain $x = 5f + g$ and $y = 5g + 24f$, and $z = \frac{y+1}{6}$; or also $y = 1 - 6z$, thus likewise $z = \frac{1-y}{6}$, from which the following solutions can be found :

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
or $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Question: Can we find all squares in whole numbers, which taken seven times and to which two is added again will become a square ?

Thus here it is required, that there must be $7xx + 2 = yy$, where $a = 7$ and $b = 2$; the known case can be seen at once, if $x = 1$ and then there is $x = f = 1$ and $y = g = 3$. Now the equation $7nn + 1 = mm$ is considered, and there it is found easily that $n = 3$ and $m = 8$; therefore we obtain $x = 8f + 3g$ and $y = 8g + 21f$, from which the following values are found for x and y :

$x = f = 1$	17	271
$y = g = 3$	45	717

[Thus, the initial values of *f* and *g*, 1 and 3 give the *x* and *y* values of 17 and 45, 17 and 45 give 271 and 717, etc.]

91.

V. Question: Can we find all the triangular numbers which likewise are pentagonal numbers ?

The root of the triangular numbers shall be $=p$ and the root of the pentagonal numbers shall be $=q$, thus there shall be $\frac{pp+p}{2}=\frac{3qq-q}{2}$, or $3qq-q=pp+p$; from which q is found, and since $qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, thus there becomes $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3}\right)}$, that is $q=\frac{1\pm\sqrt{(12pp+12p+1)}}{6}$. Thus it arises, that $12pp+12p+1$ is a square, and that expressed in terms of whole numbers. Since here the middle term $12p$ is available, thus we put $p=\frac{x-1}{2}$; thus we obtain $12pp=3xx-6x+3$ and $12p=6x-6$, therefore $12pp+12p+1=3xx-2$, which must be a square.

Therefore we put $3xx-2=yy$, so we have from that $p=\frac{x-1}{2}$ and $q=\frac{1+y}{6}$; since now the whole matter can be assumed from the formula $3xx-2=yy$, so that we have $a=3$ and $b=-2$, and the known case becomes $x=f=1$ and $y=g=1$; then we have for this equation, $mm=3nn+1$: $n=1$ and $m=2$, from which we obtain the following values for x and y, and further from that, for p and q.

Thus since $x=2f+g$ and $y=2g+3f$, then there becomes :

$x=f=1$	3	11	41
$y=g=1$	5	19	71
$p=0$	1	5	20
$q=\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
or $q=0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

because also, there is namely $q=\frac{1-y}{6}$.

92.

Until now we have been constrained to remove the second term from the given formula, if any were present: but the first method given can be applied to such a formula, where the middle term is present, which we would like to show here. Therefore this previous formula $axx+bx+c=yy$ shall be given which must be a square, and from this the case can be assumed at once : $aff+bf+c=gg$.

Now the given equation can be taken away from the above, thus becoming

$$a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg\ ,$$

which can be expressed by factors thus :

$$(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g)\ .$$

Multiplying both sides by pq, thus becoming

$$pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g),$$

which can be split up into these two parts to become

$$\text{I.})\, p(x-f)=q(y-g), \quad \text{II.})\, q(ax+af+b)=p(y+g).$$

Multiplying the first by *p*, the second by *q*, and take the former from the latter, thus giving $(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq$, from which there is found

$$x=\tfrac{2gpq}{aqq-pp}-\tfrac{(aqq+pp)f}{aqq-pp}-\tfrac{bqq}{aqq-pp}.$$

From the first equation there becomes:

$$q(y-g)=p(x-f)=p\left(\tfrac{2gpq}{aqq-pp}-\tfrac{2afqq}{aqq-pp}-\tfrac{bqq}{aqq-pp}\right);$$

thus,

$$y-g=\tfrac{2gpp}{aqq-pp}-\tfrac{2afpq}{aqq-pp}-\tfrac{bpq}{aqq-pp},$$

and therefore

$$y=g\left(\tfrac{aqq+pp}{aqq-pp}\right)-\tfrac{2afpq}{aqq-pp}-\tfrac{bpq}{aqq-pp}.$$

In order to subtract these fractions, thus as done above,

$$\tfrac{aqq+pp}{aqq-pp}=m \text{ and } \tfrac{2pq}{aqq-pp}=n,$$

and thus,

$$m+1=\tfrac{2aqq}{aqq-pp} \text{ and hence } \tfrac{qq}{aqq-pp}=\tfrac{m+1}{2a};$$

thus there becomes

$$x=ng-mf-b\tfrac{(m+1)}{2a} \text{ und } y=mg-naf-\tfrac{1}{2}bn,$$

where the letters *m* and *n* are to be provided just as above, namely, so that $mm=ann+1$.

93.

But such a form which are found for *x* and *y* are still mixed up with fractions, because the letters *b* include fractional terms, and thus do not serve our purpose. It is to be observed that if we proceed to the following values from these values along, the same will be whole numbers always, but which can be found much easier from the initial numbers *p* and *q* introduced. Assuming *p* and *q* in such a way, that $pp=aqq+1$; since now $aqq-pp=-1$, thus the fractions fall away by their own accord, and there becomes

$$x=-2gpq+f(aqq+pp)+bqq \text{ and } y=-g(aqq+pp)+2afpq+bpq,$$

but because in the known case $aff+bf+c=gg$ only the square gg arises, thus it is of no concern whether the letter g is given the + or − sign ; thus writing $-g$ in the place of $+g$, our formulae become:

$$x=2gpq+f(aqq+pp)+bqq \text{ and } y=g(aqq+pp)+2afpq+bpq,$$

since then certainly $axx+bx+c=yy$ will be known.

For example, can the hexagonal numbers be found which are equal to squares ? There must then be $2xx-x=yy$, where $a=2,\ b=-1$ and $c=0$; the known case here evidently is $x=f=1$ and $y=g=1$.

Therefore there must be $pp=2qq+1$, thus $q=2$, and $p=3$; therefore we obtain $x=12g+17f-4$ and $y=17g+24f-6$; from which the following values can be found :

$x=f=1$	25	841	
$y=g=1$	35	1189	etc.

94.

But we would like to examine the cases by the first formula, where the middle term is missing, still to remain in place to some extent, where the formula $axx+b$ becomes a square in whole numbers.

Therefore there shall be $axx+b=yy$ and for this purpose requires to be two parts :

In the first place a case must be known, where this happens : the same shall be $aff+b=gg$.

Secondly that one knows two numbers found for m and n, such that $mm=ann+1$, the instructions for finding which shall be given in the following chapter.

Now a new case is obtained from this, namely $x=ng+mf$ and $y=mg+anf$, from which subsequently new cases of similar forms can be found, which we wish to show of the following form:

$x=f$	A	B	C	D	E	
$y=g$	P	Q	R	S	T	etc.

where $A=ng+mf$	$B=nP+mA$	$C=nQ+mB$	$D=nR+mC$	
and $P=mg+anf$	$Q=mP+anA$	$R=mQ+anB$	$S=mR+anC$	etc.

both which series of numbers can be extended as far as it pleases without difficulty.

95.

But according to this method, is it possible to extend the upper series further without knowing the lower one, or again to extend the lower series without knowing the upper one ? But an easy rule can be specified for continuing the upper series alone without knowing the lower one, which rule applies also for the lower series without it being necessary to know about the upper series.

Namely the numbers, which can be put in place for *x*, continue to follow each other in a known progression each term of which, for example *E,* is known from the two previous terms *C* and *D,* which can be determined without having to note the upper terms *R* and *S* . Then since

$E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, that is $E = 2mnR + annC + mmC$, thus since $nR = D - mC$, it will be found that $E = 2mD - mmC + annC$ or

$E = 2mD - (mm - ann)C$;

but since $mm = ann + 1$ thus $mm - ann = 1$, and thus we have $E = 2mD - C$,

from which it is clear how each one of the above numbers can be determined from the two previous numbers.

Thus it behaves also with the lower series. Since then

$T = mS + anD,$ and $D = nR + mC,$ thus $T = mS + annR + amnC$.

Since now further $S = mR + anC,$ thus $anC = S - mR$, which value written for anC gives,

$$T = 2mS - R,$$

thus so that the lower series continues according to the same rule as the upper one.

For example, find all the whole numbers *x*, so that there will be $2xx - 1 = yy$. Since now $f = 1$ and $g = 1$; further from that $mm = 2nn + 1$, thus $n = 2$ and $m = 3$. Now since $A = ng + mf = 5$, thus the two first terms shall be 1 and 5, from which the following can be found according to this rule $E = 6D - C$, namely each term multiplied by six less the previous term gives the following term ; therefore the numbers required for *x* according to this rule continue thus :

1, 5, 29, 169, 985, 5741 etc.

From which it can be seen that the numbers can be continue indefinitely far. But if fractions were allowed to be valid too, thus according to the method given above, an even greater indefinite amount could be given.

CHAPTER 7

A PARTICULAR METHOD OF MAKING THE FORMULA $ann + 1$ INTO A SQUARE WITH WHOLE NUMBERS

96.

What was performed in the previous chapter cannot be brought to the stage of realization, if for any number *a* such a whole number *n* cannot be found in place so that $ann + 1$ becomes a square, or that $mm = ann + 1$ is obtained.

If we were satisfied with fractional numbers, then this equation would be resolved easily, so that one may only put $m = 1 + \frac{np}{q}$. Then since $mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{nnpp}{qq} = ann + 1$, since if 1 is taken away from both sides and the remaining terms divided by n , since then, on multiplying by *qq* there becomes $2pq + npp = anqq$, from which $n = \frac{2pq}{aqq-pp}$ will be found, from which infinitely many values can be found for *n*. But since *n* must be a whole number, so this is of no help to us, therefore a completely different method must be used, in order to find this.

97.

But it is to be observed before everything else, that if $ann+1$ shall be a square in whole numbers, *a* may be the number wanted in some case, but such is not always possible.

Then in the first place all cases must be excluded, where *a* is a negative number ; hence also all the cases are excluded, where *a* itself is a square number, because then *ann* would be a square, but no square + 1 can be a square in whole numbers. Therefore our formula thus must be restricted, so that the letter *a* be neither negative nor a square number ; but very often *a* is a positive number without a square, so that always such a whole number can be found for *n*, so that $ann+1$ shall become a square.

But had such a number been found, thus it is easy from the previous chapter, to deduce infinitely many of others. But for our purpose it is enough to find one and indeed the smallest.

98.

Moreover in former times a learned Englishman called PELL, had found a very ingenious method, which we would like to explain here. But the same is not thus provided, so that it may be used generally for any number *a,* but rather used only for each single particular case.

Therefore we will do easier cases at the start, and search for such a number *n* so that $2nn+1$ will be a square, or so that $\sqrt{(2nn+1)}$ is rational.

Now here it can be seen easily, that these square roots shall be greater than *n,* but yet smaller than 2*n*. Therefore the same is put $= n + p$, so that *p* certainly is smaller than *n.* Thus we have $\sqrt{(2nn+1)} = n + p$ and therefore $2nn+1 = nn + 2np + pp$, from which we now wish to find n . Since now $nn = 2np + pp - 1$ thus there becomes $n = p + \sqrt{(2pp-1)}$.

Therefore it is assumed from that, so that $2pp-1$ may become a square, which occurs if $p=1$ and from this we find that $n = 2$ and $\sqrt{(2nn+1)} = 3$. If this could not readily be seen at once , so that one had to be able to continue further, and since $\sqrt{(2pp-1)}$ is greater than *p,* and therefore *n* greater than 2*p*, thus on putting $n = 2p + q$, then there will be $2p + q = p + \sqrt{(2pp-1)}$ or $p + q = \sqrt{(2pp-1)}$, which with the square taken, gives $pp + 2pq + qq = 2pp - 1$ or $pp = 2pq + qq + 1$ and from that there becomes $p = q + \sqrt{(2qq+1)}$, thus $2qq+1$ must be a square, which occurs if $q = 0$ therefore $p=1$ and $n = 2$. From this example one can get already an idea of this method, but which will become yet better understood by the following examples.

99.

Now let $a = 3$, so that the formula $3nn + 1$ shall be a square. Putting $\sqrt{(3nn+1)} = n + p$, there will be $3nn + 1 = nn + 2np + pp$ and $2nn = 2np + pp - 1$ and therefore $n = \frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$; since now $\sqrt{(3pp-2)}$ is greater than *p* and thus *n* is greater than $\frac{2p}{2}$ or *p*, thus on putting $n = p + q$, there becomes $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp-2)}$ or $p + 2q = \sqrt{(3pp-2)}$; the square taken of this, becomes $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$ or $2pp = 4pq + 4qq + 2$, that is $pp = 2pq + 2qq + 1$, therefore $p = q + \sqrt{(3qq+1)}$. This formula is satisfied in terms of whole numbers by setting $q = 0$, from which $p = 1$ and $n = 1$, thus $\sqrt{(3nn+1)} = 2$.

100.

Now let $a = 5$, according to this the formula $5nn + 1$ makes a square, of which the root is greater than 2*n*: therefore on putting $\sqrt{(5nn+1)} = 2n + p$ there becomes $5nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ and from that $nn = 4np + pp - 1$; therefore $n = 2p + \sqrt{(5pp-1)}$. Now because $\sqrt{(5pp-1)}$ is greater than 2*p*, thus also *n* is greater than 4*p;* therefore on putting $n = 4p + q$, thus there becomes $2p + q\sqrt{(5pp-1)}$ or $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; therefore $pp = 4pq + qq + 1$ and thus $p = 2q + \sqrt{(5qq+1)}$; this is done to satisfaction if $q = 0$, consequently $p = 1$ and $n = 4$; therefore $\sqrt{(5nn+1)} = 9$.

101.

Further let $a = 6,$ in order that $6nn + 1$ can be made a square, of which the root is greater than 2*n*. Therefore we put $\sqrt{(6nn+1)} = 2n + p$, thus there becomes $6nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ or $2nn = 4np + pp - 1$ and therefore $n = p + \frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$ or $n = \frac{2p+\sqrt{(6pp-2)}}{2}$, thus *n* is greater than 2*p*, therefore we put $n = 2p + q,$ thus there becomes $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp-2)}$ or $2p + 2q = \sqrt{(6pp-2)}$. The square is taken, becoming $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$ or $2pp = 8pq + 4qq + 2$, that is $pp = 4pq + 2qq + 1$, from which there will be found $p = 2q + \sqrt{(6qq+1)}$; which formula is equal to the first equation, and thus $q = 0$ can be put in place, from which there will be $p = 1$ and $n = 2$, thus $\sqrt{(6nn+1)} = 5$.

102.

Further let $a = 7$ and $7nn + 1 = mm$*;* thus *m* is greater than 2*n*, therefore we put $m = 2n + p$, thus there becomes $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ or $3nn = 4np + pp - 1$, from which there will be found $n = \frac{2p+\sqrt{(7pp-3)}}{3}$. Since now *n* is greater than $\frac{4}{3}p$ and thus greater than *p*, thus we put $n = p+q$, thus there becomes $p+3q=\sqrt{(7pp-3)}$, the square taken gives $pp+6pq+9qq=7pp-3$;

$6pp=6pq+9qq+3,$ or $2pp=2pq+3qq+1$, from which there become $p=\frac{q+\sqrt{(7qq+2)}}{2}$.

Since now *p* is greater than $\frac{3q}{2}$, thus *p* is greater than *q*, thus putting $p=q+r$, thus $q+2r=\sqrt{(7qq+2)}$, the square taken gives $qq+4qr+4rr=7qq+2$ or $6qq=4qr+4rr-2$ or $3qq=2qr+2rr-1$ from which there will be found $q=\frac{r+\sqrt{(7rr-3)}}{3}$. Since now *q* is greater than *r*, thus putting $q=r+s$, this becomes $2r+3s=\sqrt{(7rr-3)}$. The square taken: $4rr+12rs+9ss=7rr-3$, or $3rr=12rs+9ss+3$ and $rr=4rs+3ss+1$; thus $r=2s+\sqrt{(7ss+1)}$.

Now since this formula resembles the first, thus we put $s=0$, and since we obtain $r=1,\ q=1,\ p=2$ and $n=3,$ from which $m=8$.

This calculation becomes very much shortened in the following manner, which can be used in other cases.

Since $7nn+1=mm$, thus *m* is smaller than 3*n*. One therefore puts $m=3n-p$, thus there will be $7nn+1=9nn-6np+pp$ or $2nn=6np-pp+1$, and from that $n=\frac{3p+\sqrt{(7pp+2)}}{2}$, thus *n* is smaller than 3*p*, therefore one puts $n=3p-q$, therefore $3p-2q=\sqrt{(7pp+2)}$ and the square taken

$$9pp-12pq+4qq=7pp+2,\text{ or }2pp=12pq-4qq+2\text{ and }pp=6pq-2qq+1,$$

from which there becomes $p=3q+\sqrt{(7qq+1)}$. Now here one can thus equally put $q=0$, thus there will be $p=1,\ n=3,$ and $m=8$ as before.

103.

Further we take $a=8$, thus so that $8nn+1=mm$ and therefore *m* is smaller than 3*n*, thus we put $m=3n-p$, thus there becomes $8nn+1=9nn-6np+pp$, or $nn=6np-pp+1$, from which $n=3p+\sqrt{(8pp+1)}$, which formula is already equal to the first, since one can put $p=0$, that becomes $n=1$ and $m=3$.

104.

One can proceed in a like manner for each other number *a*, but only if the same is positive and not a square, and such a square root can always be found finally, which is similar to the given formula, as for example to this $\sqrt{(att+1)}$, since then one need only put $t=0$, as in which case the irrationality always vanishes, and from which if one goes back, one obtains a value for *n*, so that $ann+1$ will be a square.

Sometimes the final result can be reached at once, but at other times many operations will be required for that, according to the nature of the number *a*, from which without certainty one can specify a known number. As far as to the number 13 the procedure still goes quite rapidly, but coming to $a=13$, thus the calculation becomes much more extended and therefore it will be better to perform this case here.

105.

Therefore let $a=13$ thus so that there shall be $13nn+1=mm$. Now because mm is greater than $9nn$, and thus m is greater than $3n$, thus one puts $m=3n+p$, and there becomes $13nn+1=9nn+6np+pp$, or $4nn=6np+pp-1$, therefore $n=\frac{3p+\sqrt{(13pp-4)}}{4}$, therefore n is greater than $\frac{6}{4}p$ and thus greater than p.

Hence one puts $n=p+q$, thus there becomes $p+4q=\sqrt{(13pp-4)}$; the square taken becomes $13pp-4pp+8pq+16qq$, therefore $12pp=8pq+16qq+4$, or divided by 4 $3pp=2pq+4qq+1$ and from that $p=\frac{q+\sqrt{(13qq+3)}}{3}$. From this p is greater than $\frac{p+3q}{3}$, and thus is greater than q; therefore one puts $p=q+r$, thus there becomes $2q+3r=\sqrt{(13qq+3)}$, the square taken gives $13qq+3=4qq+12qr+9rr$, that is $9qq=12qr+9rr-3$, which divided by 3 gives $3qq=4qr+3rr-1$, from that there becomes $q=\frac{2r+\sqrt{(13rr-3)}}{3}$. In this case q is greater than $\frac{2r+3r}{3}$ and thus q is greater than r; therefore one puts $q=r+s$, thus there becomes $r+3s=\sqrt{(13rr-3)}$, the square taken gives $13rr-3=rr+6rs+9ss$, or $12rr=6rs+9ss+3$, which divided by 3 becomes $4rr=2rs+3ss+1$ and from that $r=\frac{s+\sqrt{(13ss+4)}}{4}$. Here r is greater than $\frac{s+3s}{4}$ or s, therefore one puts $r=s+t$, thus becoming $3s+4t=\sqrt{(13ss+4)}$, the square taken gives $13ss+4=9ss+24st+16tt$ and thus $4ss=24st+16tt-4$, which divided by 4 gives $ss=6st+4tt-1$, from which there becomes $s=3t+\sqrt{(13tt-1)}$. Thus s is greater than $3t+3t$ or $6t$; therefore one puts $s=6t+u$, thus becoming $3t+u=\sqrt{(13tt-1)}$, the square taken $13tt-1=9tt+6tu+uu$ and from that $4tt=6tu+uu+1$ and $t=\frac{3u+\sqrt{(13uu+4)}}{4}$, where t is greater than $\frac{6u}{4}$ and thus greater than u. One therefore puts $t=u+v$, thus becoming $u+4v=\sqrt{(13uu+4)}$; the square taken $13uu+4=uu+8uv+16vv$ and $12uu=8uv+16vv-4$, divided by 4 giving $3uu=2uv+4vv-1$ from which $u=\frac{v+\sqrt{(13vv-8)}}{3}$, where u is greater than $\frac{4v}{3}$ and thus greater than v, therefore one puts $u=v+x$, thus becoming $2v+3x=\sqrt{(13vv-3)}$; the square taken gives $13vv-3=4vv+12vx+9xx$ or $9vv=12vx+9xx+3$, divided by 3 giving $3vv=4vx+3xx+1$, from which one finds $v=\frac{2x+\sqrt{(13xx+3)}}{3}$, where v is greater than

$\frac{5x}{3}$ and thus greater than *x*, therefore one puts $v = x + y$, thus becoming $x + 3y = \sqrt{(13xx + 3)}$, the square taken gives $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$ or $12xx = 6xy + 9yy - 3$, dividing by 3 to become $4xx = 2xy + 3yy - 1$ and $x = \frac{y + \sqrt{(13yy-4)}}{4}$, where *x* is greater than *y;* therefore one puts $x = y + z$, thus becoming $3y + 4z = \sqrt{(13yy - 4)}$, the square taken gives $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$ or $4yy = 24yz + 16zz + 4$, dividing by 4 giving $yy = 6yz + 4zz + 1$, from which $y = 3z + \sqrt{(13zz + 1)}$. Since this formula finally is similar to the first thus one puts $z = 0$, and on obtains as follows on going backwards:

$z = 0$	$u = v + x = 3$ $u = v + x = 3$	$q = r + s = 71$
$y = 1$	$t = u + v = 5$	$p = q + r = 109$
$x = y + z = 1$	$s = 6t + u = 33$	$n = p + q = 180$
$v = x + y = 2$	$r = s + t = 38$	$m = 3n + p = 649$

Thus 180 is the smallest whole number for *n* after 0, so that $13nn + 1$ becomes a square.

106.

It can be seen from this example how necessary, how lengthy sometimes such a calculation can be. Then among the bigger numbers one has to make at least ten times more operations, as here have occurred for the number 13 : it cannot very well be seen from that for which numbers so great an effort will be required, therefore it is useful, to take advantage of the work of others and to attach a table, where for all the numbers *a* as far as 100 the values of the letters *m* and *n* are set out, from which one can take the letters *m* and *n* corresponding to the cases arising.

107.

Meanwhile it is to be noted, that by each agreed kind of numbers the values of *m* and *n* generally can be found; but this happens only for these numbers which are either 1 or 2 greater or less than a square number, which it will be worthwhile to show.

108.

Therefore let $a = ee - 2$, or smaller by 2 than a square number, and there shall be $(ee - 2)nn + 1 = mm$, thus so that it is clear that *m* is smaller than *en,* therefore we put $m = en - p$, thus there becomes $(ee - 2)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$ or $2nn = 2enp - pp + 1$ and from that $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, where thus it is seen that if we take $p = 1$, the square root sign disappears and there shall be $n = e$ and $m = ee - 1$. If, for example, $a = 23$, where $e = 5$, thus there becomes $23nn + 1 = mm$, if $n = 5$ and $m = 24$. This is also itself clear, that if we put $n = e$, namely if $a = ee - 2$, thus there becomes $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, which is the square of $ee - 1$.

109.

Let there be now also $a = ee - 1$, namely smaller by 1 than a square number, thus so that there shall be $(ee-1)nn + 1 = mm$. Since now here again m is smaller than en, thus we put $m = en - p$, thus there will be $(ee-1)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, or $nn = 2enp - pp + 1$ and from that $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$; where the root sign vanishes if $p = 1$, and from that we get $n = 2e$, and $m = 2ee - 1$. This also can be seen easily. Then since $a = ee - 1$ and $n = 2e$, thus there becomes $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, which is the square of $2ee - 1$. For example let $a = 24$ so that $e = 5$, thus $n = 10$ and $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$.

110.

Now also let $a = ee + 1$, or to be greater than a square number by 1, thus so that there shall be $(ee+1)nn + 1 = mm$, where m clearly is greater than en, therefore putting $m = en + p$, thus there becomes $(ee+1)nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ or $nn = 2enp + pp - 1$, and thus $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$ where there can be taken $p = 1$, and there will be $n = 2e$ and $m = 2ee + 1$; this is also easy to understand, that since $a = ee + 1$ and $n = 2e$, thus there is $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$ which is the square of $2ee + 1$. For example, let $a = 17$ thus so that $e = 4$, and that becomes $17nn + 1 = mm$, if $n = 8$ and $m = 33$.

111.

Finally let there be $a = ee + 2$, or greater by 2 than a square number, thus there shall be $(ee+2)nn + 1 = mm$, where m clearly is greater than en, therefore on putting $m = en + p$, thus becoming $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ or $2nn = 2enp + pp - 1$ and from that $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp + 2pp - 2)}}{2}$. Here on taking now $p = 1$, thus there becomes $n = e$ and $m = ee + 1$. This can be seen at once to be equal, that since $a = ee + 2$ and $n = e$, thus there is $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, which is the square of $ee + 1$. For example, let $a = 11$ thus so that $e = 3$, thus there shall be $11nn + 1 = mm$, if $n = 3$ and $m = 10$. If one puts $a = 83$ thus there is $e = 9$, and the equation becomes $83nn + 1 = mm$, if one takes $n = 9$ and $m = 82$.

Table which specifies the smallest value of m and n for each value of a, thus so that $mm = ann + 1$

a	n	m	a	n	m	a	n	m
2	2	3	37	12	73	69	936	7775
3	1	2	38	6	37	70	30	251
5	4	9	39	4	25	71	413	3480
6	2	5	40	3	19	72	2	17
7	3	8	41	320	2049	73	267000	2281249
8	1	3	42	2	13	74	430	3699
10	6	19	43	531	3482	75	3	26
11	3	10	44	30	199	76	6630	57799
12	2	7	45	24	161	77	40	351
13	180	649	46	3588	24335	78	6	53
14	4	15	47	7	48	79	9	80
15	1	4	48	1	7	80	1	9
17	8	33	50	14	99	82	18	163
18	4	17	51	7	50	83	9	82
19	39	170	52	90	649	84	6	55
20	2	9	53	9100	66249	85	30996	285769
21	12	55	54	66	485	86	1122	10405
22	42	197	55	12	89	87	3	28
23	5	24	56	2	15	88	21	197
24	1	5	57	20	151	89	53000	500001
26	10	51	58	2574	19603	90	2	19
27	5	26	59	69	530	91	165	1574
28	24	127	60	4	31	92	120	1151
29	1820	9801	61	226153980	1766319049	93	1260	12151
30	2	11	62	8	63	94	221064	2143295
31	273	1520	63	1	8	95	4	39
32	3	17	65	16	129	96	5	49
33	4	23	66	8	65	97	6377352	62809633
34	6	35	67	5967	48842	98	10	99
35	1	6	68	4	33	99	1	10

[The following table contains some errors, as noted in the *O.O.* edition:

$$\text{for } a = 53,\ m = 66251,\ \text{ put } m = 66249;$$
$$\text{for } a = 58,\ n = 2564,\ \text{ put } n = 2574;$$
$$\text{for } a = 85,\ m = 285771,\ \text{ put } m = 285769.$$

We also note that Pell was not responsible for the original development of this quadratic or hyperbolic Diophantine equation, which dated back much further than Fermat, who considered the equation, to early Indian mathematicians. See Wikipedia or MacTutor for details.]

CHAPTER 8

CONCERNING THE MANNER IN WHICH THIS IRRATIONAL FORMULA $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3)}$ CAN BE MADE RATIONAL

112.

Here we continue to proceed to a formula that rises to the third power of x, in order to go next as far as to the fourth power, without particular attention both these cases must be dealt with in the same manner. Thus it is required that this formula $a+bx+cxx+dx^3$ be transformed into a square, and to this end rational values for x are to be sought skillfully ; then since this already is subject to far greater difficulties, thus far more skill is required to find even fractional numbers for x, and one is asked to be satisfied with that, and to forgo any solution in whole numbers. In order to advance this has to be observed here, that no general solution can be given, just as happens, but each operation gives us only one value for x to discern, since previously the above fractional method led from one solution to an infinite number of solutions.

113.

Since the formula $a+bx+cxx$ discussed previously gives infinitely many cases, where the solution is worse than impossible, thus such is found much more for the current formula in place, where not once is a solution to be considered, as long as one does not either know or has guessed one; therefore one can give rules for these cases only in place, for which one already has a known solution and can produce a new solution, from which subsequently from a know similarity yet another new one can be found, thus so that one can proceed always to find such forms.

But meanwhile it often happens, that if equally a solution is known already, then no others can be resolved from the same. Thus so that in such cases only a single one in place can be found, which circumstance is observed especially, because in the foregoing case from each single solution infinitely many new solutions were able to be found.

114.

Thus if such a formula $a+bx+cxx+dx^3$ shall be made into a square [for some x], thus already necessarily there must be a case from which put in place this happens already; but such a case clearly is most evident if the first equation is a quadratic and the formula is called $ff+bx+cxx+dx^3$, which evidently is a square, if there is put $x=0$.

Thus we will work with this formula initially, and see how from the known case $x=0$ yet another value can be found for x ; to this end two ways can be brought to bear, each of which we will explain here in particular, and with which it will be good to begin with special cases.

115.

Therefore, let this formula be given $1+2x-xx+x^3$, which must be a square. Now since here the first term 1 is a square, thus one can assume the root of this to be a square, so that the first two terms disappear. Therefore it shall be the square root $1+x$, of which the square shall be equal to our formula, and thus we obtain

$$1+2x-xx+x^3 = 1+2x+xx,$$

where both the first terms cancel each other out, and this equation arises $xx=-xx+x^3$ or $x^3=2xx$, which divided by xx thus becomes $x=2$, from which our formula becomes $1+4-4+8=9$.

In like manner if the formula $4+6x-5xx+3x^3$ shall become a square, thus one puts initially the root $=2+nx$ and finds n thus so that both the first terms disappear, because now there will be

$$4+6x-5xx+3x^3=4+4nx+nnxx,$$

thus there must be $4n=6$ and therefore $n=\frac{3}{2}$, whereby this equation arises $-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$ or $3x^3=\frac{29}{4}xx$, therefore $x=\frac{29}{12}$, which value makes our formula a square, of which the root shall be $2+\frac{3}{2}x=\frac{45}{8}$.

116.

The second way is obtained thus, so that one gives the root three terms, such as $f+gx+hxx$, which thus are designed, so that the first three terms in the equation vanish.

For example let this formula be given $1-4x+6xx-5x^3$, the root of which one puts $1-2x+hxx$ so that then there shall be

$$1-4x+6xx-5x^3=1-4x+4xx+2hxx-4hx^3+hhx^4;$$

where the first two roots disappear at once, but so that the third may disappear, thus there must be $6=2h+4$ and thus $h=1$, from which we obtain $-5x^3=-4x^3+x^4$, where on dividing by x^3 there becomes: $-5=4+x$ and $x=-1$.

117.

These two method thus can be used, if the first term a is a square. The reason thereof is based on the same, that by the first method the root gives two terms, as $f+px$, where f is the square root of the first term, and p thus will be assumed, so that also the second term disappears, and thus only the third and forth terms of our formula, namely $cxx+dx^3$, must be compared with $ppxx$, since then the equation divided by xx indicates a new value for x, which shall be $x=\frac{pp-c}{d}$.

Three terms are given to the root by the second method and putting the same to be $f+px+qxx$, namely if $a=ff$, and p and q determined in such a way, that the first three terms vanish on both sides, which thus comes about: so that

$$ff+bx+cxx\ dx^3 = ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pq^3+qqx^4$$

thus there must be $b=2fp$ thus $p=\frac{b}{2f}$, and $c=2fq+pp$, and thus $q=\frac{c-pp}{2f}$; and the remaining equation $dx^3=2pqx^3+qqx^4$ can be divided, and from that

$$x=\frac{d-2pq}{qq}.$$

118.

Meanwhile it often can happen, that although $a=ff$ still indicates no new values for x by this method, how it can be seen from this formula $ff+dx^3$, where the second and third terms are missing.

Then on putting according to the first method, the root $=f+px$, thus so that there shall be $ff+dx^3=ff+2fpx+ppxx$, thus there must be $0=2fp$ and $p=0$, therefore we find $dx^3=0$, and from that $x=0$, which is no newer value.

But on putting the root $=f+px+qxx$, according to the second method, thus so that there shall be

$$ff+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4$$

thus there must be $0=2fp$ and $p=0$, further $0=2fq+pp$, and thus $q=0$, therefore we find $dx^3=0$ and again $x=0$.

119.

In such cases there is now nothing other to do than perhaps one can see whether or not such a value could be guessed for *x*, where the formula becomes a square, since then from the same, according to the first method, we can find a new value for *x* ; which also indicates if the first term cannot be equal to a square.

In order to show this, so that formula shall be a square $3+x^3$, since now such happens if $x=1$, thus putting $x=1+y$ and since this is obtained : $4+3y+3yy+y^3$, in which the first term is a square. Thus, according to the first method, putting the root of that to be $2+py$, thus there becomes $4+3y+3yy+y^3=4+4py+ppyy$; where after that for the second term to disappear must be $3=4p$, and thus $p=\frac{3}{4}$, as then there will be $3+y=pp$ and $y=pp-3=\frac{9}{16}-\frac{48}{16}=-\frac{39}{16}$, consequently $x=-\frac{23}{16}$, which is a new value for *x*.

Now further according to the second method we put the root $=2+py+qyy$, thus there becomes $4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$, where so that the second term disappears there shall be $3=4p$, or $p=\frac{3}{4}$, and in order that the third disappears, $3=4q+pp$, also $q=\frac{3-pp}{4}=\frac{39}{64}$; thus we have $1=2pq+qqy$, and from that $y=\frac{1-2pq}{qq}$ or $y=\frac{352}{1521}$, consequently $x=\frac{1873}{1521}$.

120.

Now we want to show, if one has found such a value already, how a further new value may be found from that. We will introduce this from a general method, and make use of this formula $a+bx+cxx+dx^3$, from which [we assume that] it is known already to be a square if $x=f$, and that then it becomes $a+bf+cff+df^3=gg$.
From this we put $x=f+y$, thus one obtains this new formula :

$$\begin{array}{l} a \\ +bf \quad + by \\ +cff \quad + 2cfy \quad +cyy \\ +df^3 + 3dffy+3dfyy+dy^3 \\ \hline gg+(b+2cf+3dff)y+(c+3df)yy+dy^3 \end{array}$$

in which formula the first term is a square, thus so that both the above methods can be applied; from which new values for y and thus also for x are obtained; namely $x=f+y$.

121.

But sometimes it is of no help, even if equally one had guessed a value for x ; as happens in this formula $1+x^3$, which is a square if $x=2$. Then as a consequence on putting $x=2+y$, thus here the formula arises $9+12y+6yy+y^3$, which now must be a square. Following the first rule, the root of that square shall be $=3+py$, thus there becomes $9+12y+6yy+y^3=9+6py+ppyy$; where there must be $12=6p$ and $p=2$; as then there will be $6+y=pp=4$, and thus $y=-2$; consequently $x=0$, from which value nothing further can be found.

But according to the second method we take the root $=3+py+qyy$, thus there becomes $9+12y+6yy+y^3=9+6py+6qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$ where initially there must be $12=6p$ and $p=2$; further $6=6q+pp=6q+4$ and thus $q=\frac{1}{3}$, from which one obtains $1=2pq+qqy=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}y$; therefore $y=-3$, consequently $x=-1$, and $1+x^3=0$; from which nothing further is able to be deduced ; then one may wish to try $x=-1+z$, thus the formula arises $3z-3zz+z^3$, where the first term completely vanishes and thus neither the one nor the other method can be used.

Therefore it is most probable, that the formula $1+x^3$ can have no squares other than the three cases :

$$\text{I.) } x=2,\ \text{II.) } x=0,\ \text{III.) } x=-1,$$

but which can also be understood from other considerations.

122.

For exercise we will consider this formula $1+3x^3$, which becomes a square in these cases

$$\text{I.)}x=0,\ \ \text{II.)}x=1,\ \ \text{III.)}x=2,$$

and we want to see, if we can find still other such values.
Since now it is known that $x=1$ is a value, thus we put $x=1+y$; and since one obtains $1+3x^3=4+9y+9yy+3y^3$, from that the root shall be $2+py$ thus so that there becomes $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+ppyy$, where there must be $9=4p$ and thus $p=\frac{9}{4}$; moreover the remaining term gives $9+3y=pp=\frac{81}{16}$ and $y=-\frac{21}{16}$; consequently $x=-\frac{5}{16}$, since then $1+3x^3$ becomes a square, of which the root is $-\frac{61}{64}$ or also $+\frac{61}{64}$; now if one wanted further to put $x=-\frac{5}{16}+z$, thus from that again one would find another new value.

But if one wanted to put the root to be $2+py+qyy$ in the above formula according to the second method thus there becomes

$$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

thus in the first place there must be $9=4p,$ thus $p=\frac{9}{4}$; consequently $9=4q+pp=4q+\frac{81}{16}$, and thus $q=\frac{63}{64}$; again from the remaining terms there becomes $3=2pq+qqy=\frac{567}{128}+qqy$,
or $567+128qqy=384,$ or $128qqy=-183,$ that is $126\cdot\frac{63}{64}y=-183$,
or $42\cdot\frac{63}{64}y=-61$, therefore $y=-\frac{1952}{1323}$, consequently $x=-\frac{629}{1323}$, from which, according to the above instructions, further new values can be found.

123.

Here we have brought two new values from the known case $x=1$, from which if one wished to take the trouble, again more new ones could be found, but where one would incur very large fractions.

Therefore one has reason to be wondering, that not only from this case $x=1$ but also from the other case $x=2$, the same should be forthcoming ; which without doubt is a sign of the incomplete nature found of this method so far.

One can similarly set out the case $x=2$ to establish new values from this, to this end one puts $x=2+y$, thus so that this form shall be the square $25+36y+18yy+3y^3$; the root hereof according to the first method shall be $5+py=-\frac{131}{125}$, or $+\frac{131}{125}$, thus there becomes

$$25+36y+18yy+3y^3=25+10py+ppyy,$$

and thus $36 = 10p$ or $p = \frac{18}{5}$; from which there becomes from the remaining terms, on dividing by *yy*, $18 + 3y = pp = \frac{324}{25}$, and hence $y = -\frac{42}{25}$, and $x = \frac{8}{25}$, hence $1 + 3x^3$ will be a square of which the root is $5 + py = -\frac{131}{125}$, or $+\frac{131}{125}$.

Further according to the second method one can put the root to be $5 + py + qyy$, thus becoming

$$25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + 10qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4;$$

where in order that the second and the third terms must vanish $36 = 10p$, $q = \frac{18}{5}$ or $p = \frac{18}{5}$; therefore $18 = 10q + pp$, and $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, and $q = \frac{63}{125}$, the remaining terms, divided by y^3, gives $3 = 2pq + qqy$, or

$$qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}; \text{ thus } y = -\frac{3275}{1323} \text{ and } x = -\frac{629}{1323}.$$

124.

Just as this calculation is so difficult and troublesome, also in such cases, where from another basis it becomes quite easy so that indeed a general solution can be given, as happens in this formula $1 - x - xx + x^3$, where in general way $x = nn - 1$ can be taken, and since *n* indicates some arbitrary number.

Then if $n = 2$, thus $x = 3$, and our formula becomes $1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Taking $n = 3$, thus $x = 8$ and our formula becomes $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

But here a very particular circumstance occurs, for which we have to thank this easy solution, and which comes to mind at once, if we resolve our formula into factors. But it is easy to see, that the same can be divided by $1 - x$ and the quotient will be $1 - xx$, which further is composed from these factors $(1 + x(1 - x)$; thus so that our formula maintains this form:

$$1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2(1 + x).$$

Now since the same must be a square, and a square divided by a square again will be a square, thus also $1 + x$ must be a square ; and conversely if $1 + x$ is a square, also $(1 - x)^2(1 + x)$ will be a square, thus one is allowed to put $1 + x = nn$, thus one obtains at once $x = nn - 1$.

If this understanding had not been observed, thus it would have become difficult following the above method to find out only half a dozen values for *x*.

125.

For each given formula it is thus very good to resolve the same into factors, namely if it is possible.

How this is to be done, has been shown above already; namely the given formula is put $= 0$, and the roots of this equation are sought, since then each root, for example $x = f$, becomes a factor $f - x$, which undertaking is so much easier to perform, since here only rational roots are sought, which all divide the whole number .

126.

This circumstance is encountered in our general formula also

$$a + bx + cxx + dx^3,$$

when the two first terms vanish, thus so that $cxx + dx^3$ shall be a square; since then necessarily the formula must be divisible by the square xx, namely $c + dx$ is a square, since then one can put $c + dx = nn$, in order to obtain $x = \frac{nn-c}{d}$, which at once contains infinitely many, and even all the possible solutions.

127.

If by the use of the above first method we should not be able to remove the two first terms as the letter p could not be determined concerning that, thus we would come upon another irrational formula, which should be made rational.

Therefore let the above formula be $ff + bx + cxx + dx^3$, and we put the root of that $= f + px$, thus there becomes

$$ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx,$$

where the very first term is removed, and moreover the remainder divided by x $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, which is a quadratic equation, from which x will be found as follows:

$$x = \frac{pp-c+\sqrt{(p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd)}}{2d}.$$

Thus it arises from that, that the value of p can be found, by which this formula $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ will be a square. Since here the fourth power of the number p sought now arises, this case thus is dealt with in the following chapter.

CHAPTER 9

THE WAYS IN WHICH THE FORMULA

$$\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$$

CAN BE MADE RATIONAL.

128.

We come now to such formulas where the undetermined number x for the fourth power arises, with which we must end at once our investigation on the square root sign, since the theory still has not been brought further, so that the higher powers of x arising can be made into squares.

Moreover by this formula three cases arise in the determination ; the first of which is, if the first term a is a square; the second, if the last term ex^4 is a square; the third case if the first and last terms are equal to squares, which three cases we will deal with here in particular.

129.

I.) The resolution of the formula :

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}$$

Since here the first term is a square, thus one know according to the first method that the root may be put $= f + px$, and p determined thus, so that both the first terms disappear, and the remaining terms can be divided by xx ; as then all these still in the equation would arise after xx , and thus the calculation of x would require there a new root sign. Thus we must go directly to the second method at hand and put the root to be $= f + px + qxx$, in order thus to determine the letters p and q , so that the three first terms vanish, and therefore the remaining terms can be divided by x^3, since then only a simple equation arises from this, from which x can be determined without root signs.

130.

We put the root $= f + px + qxx$, thus so that there shall be

$$ff+bx+cxx+dx^3+ ex^4 = ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+ qqx^4$$

where the first terms for the same disappear ; for the second we put $b=2fp$, or $p=\frac{b}{2f}$, thus for the third term there must be $c=2fq+pp$, or $q=\frac{c-pp}{2f}$; which is done so that the remaining terms can be divided by x^3 and gives this equation $d+ex=2pq+qqx$: from which it is found that

$$x=\frac{d-2pq}{qq-e}, \text{ or } x=\frac{2pq-d}{e-qq}.$$

131.

But by this method it can be seen readily that nothing will be found, if the second and third terms in the formula are missing, or if thus $b=0$ as well as $c=0$, because as then $p=0$ and $q=0$; consequently $x=\frac{d}{-e}$, but from which new generally can be found, that in this case will become evidently $dx^3+ ex^4=0$, and thus our formula is equal to the square ff. But in its own particular way, if also $d=0$, thus there arises $x=0$, which value is of no further help, therefore this method provides no service for such a formula as $ff+ex^4$. Just as this very circumstance happens also, if $b=0$ and $d=0$, or if the second and fourth terms vanish, and the formula has this form $ff+cxx+ex^4$; since then there will be $p=0$ and $q=\frac{e}{2f}$, from which there is found $x=0$, which value thus is seen at once and leads no further.

132.

II.) Solution of the formula

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}.$$

This formula can thus at once become equal to the first case, by putting $x=\frac{1}{y}$, as then because this formula $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{y^2}+\frac{d}{y^3}+\frac{gg}{y^4}$ must be a square, thus must the same be multiplied by the square y^4 to remain a square ; but then since one obtains this formula

$$ay^4+by^3+cyy+dy+gg\ ,$$

which written backwards is completely similar to the above.

But there is no use for this, since the root of that can be written thus $gxx+px+q$, or backwards as $q+px+gxx$, since then

$$a+bx+cxx+dx^3+ggx^4=qq+2pqx+2gqxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

because now here the fifth term itself can be taken from the fifth term, thus in the first place p is determined, thus so that the same can be taken from the fourth term itself, which happens if $d=2gp$ or $p=\frac{d}{2g}$, further after this q must be determined, thus so that it can be taken from the third term which occurs if $c=2gq+pp$, or $q=\frac{c-pp}{2g}$; this is done, thus the two first terms of this equation are given $a+bx=qq+2pqx$, from which there is found

$$x=\frac{a-qq}{2pq-b},\ \text{ or } x=\frac{qq-a}{b-2pq}.$$

133.

Here again the deficiency mentioned above occurs, if the second and forth terms are missing, or if $b=0$ and $d=0$; since then there becomes $p=0$ and $q=\frac{c}{2g}$, thus from this there becomes $x=\frac{a-qq}{0}$, which value is indefinitely great, and to indicate something even as small as $x=0$ in the first case; therefore this method can hardly bring anything useful to an equation such as $a+cxx+ggx^4$.

134.

III.) Solution of the formula

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}.$$

It is clear that both the above methods can be applied to this formula, then since the first term is a square, thus one can put the root to be $f+px+qxx$ and the three first terms made to vanish; therefore because the last term is a square, thus one can also put the root to be $q+px+gxx$, and the last three terms made to vanish, since then one has two values of *x* to bring out.

But this formula can also be treated in two other ways, the same being proper for that.

According to the first way one puts the root to be $f+px+gxx$, and p thus determined so that the two terms vanish, because namely there shall be :

$$ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4 = ff+2fpx+2fgxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

thus making $b=2fp$ or $p=\frac{b}{2f}$, and because nothing other than the first and the last terms only, as well as the second, cancel each other out, thus the given remainder divided by *xx* gives this equation $c+dx=2fg+pp+2gpx$, from which there is found :

$$x=\frac{c-2fg-pp}{2gp-d} \text{ or } x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}.$$

Here it is to be noted in particular, that since in the formula only the square *gg* is present, the root of that *g* thus can be taken negative as well as positive ; from which yet another value of *x* can be obtained, namely

$$x=\frac{c+2fg-pp}{-2gp-d} \text{ or } x=\frac{pp-2fg-c}{d+2gp}.$$

135.

There is still another way of solving this formula: namely by putting the root as before $=f+px+gxx$, but *p* determined in such a way, so that the fourth terms cancel each other out; namely putting $d=2gp$ or $p=\frac{d}{2g}$ into the above equation, and because also the first term cancels with *g* in the last, thus the remaining terms divided by *x* gives this simple equation $b+cx=2fp+2fgx+ppx$, from which there is found :

$$x=\frac{b-2fp}{2fg+pp-c};$$

whereby it is to be observed that because in the formula only the square *ff* disappears, the root taken from that can also be put to be $-f$, thus so that also there will be :

$$x=\frac{b+2fp}{pp-2fg-c};$$

thus so that also from this two new values are found for *x* and consequently by the previous method discussed in all six new values are added from this.

136.

But here the irksome circumstance occurs again, that if the second and fourth terms vanish, or $b=0$ and $d=0$, no proper value can be established for *x*, and thus the solution of this formula $ff+cxx+ggx^4$ therefore cannot be obtained. Then because $b=0$ and $d=0$, thus one has $p=0$ for both ways, and therefore the first gives

$x=\frac{c-2fg}{0}$, and moreover the second $x=0$, from both of which nothing further can be found.

137.

These are now the three formulas on which the methods explained previously can be applied; but if in the given formula neither the first nor the last term is a square, thus nothing can be put right, until one has guessed such a value for *x* by which the formula becomes a square. Therefore let us assume, that already a square has been found for our formula, which occurs if we put $x=h$, thus so that $a+bh+chh+dh^3+eh^4=kk$, thus we are now able to put $x=h+y$, thus a new formula is assumed in which the first term shall be *kk* and thus is a square, therefore the first case can be considered. This transformation can also be considered, if in the previous cases a value for *x* such as for example $x=h$ has been found already ; since then one need only put $x=h+y$, so that a new equation is put in place on which the above method can be used: since then from the values found for *x* already other new ones can be introduced, and with these new ones one can proceed further in the same manner and thus find still more new values for *x*.

138.

But in particular this formula is often mentioned, where the second and the fourth terms are observed to vanish, that no solution of the same is to be had, as long as one had not already made some sort of guess ; but as then how to precede, we will show according to this formula $a+ex^4$, as which comes to be used very often.

We will assume that a value already has been guessed , $x=h$, thus so that there shall be $a+eh^4=kk$, in order that now from that a second may be found we put $x=h+y$, thus this formula must become a square :

$$a+eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$$

that is $kk+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$ which pertains to the first method ; therefore the square from the square root of $k+py+qyy$ and consequently our formula is equal to this square

$$kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$$

where initially *p* and *q* thus must be determined, also the two terms vanish, therefore there must be $4eh^3=2kp$ and thus $p=\frac{2eh^3}{k}$, further $6ehh=2kq+pp$,

therefore $q=\frac{6ehh-pp}{2k}$, or $q=\frac{3ehhkk-2eeh^6}{k^3}=\frac{ehh\left(3kk-2eh^4\right)}{k^3}$; consequently since

$eh^4=kk-a,$ thus $q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$; thereupon the following terms divided by y^3 gives $4eh+ey=2pq+qqy$, from which there is found

$$y=\frac{4eh-2pq}{qq-e},$$

from which the numerator can be expressed in this form $y=\frac{4ehk^4-4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$, which further since $eh^4=kk-a$, can be changed into this form $\frac{4ehk^4-4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, or $\frac{4eh\left(-akk+2a^2\right)}{k^4}=\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}$. But the denominator $qq-e$ is $=\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2-ek^6}{k^6}$, and this $=\frac{e\left(3ak^4-4a^3\right)}{k^6}=\frac{ea\left(3k^4-4aa\right)}{k^6}$, from which the sought value shall be

$$y=\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}\cdot\frac{k^6}{ea\left(3k^4-4aa\right)},\ \text{that is } y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$$

and therefore

$$x=\frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa},\ \text{or}\ \frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}.$$

Now this value is put in place for *x*, so that our formula, namely $a+ex^4$, becomes a square, the root of which shall be $k+py+qyy$, thus is brought to this form:

$$k+\frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa}+\frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{\left(3k^4-4aa\right)^2},$$

because from the above

$$p=\frac{2eh^3}{k},\ q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3},\ \text{and } y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}.$$

139.

We will remain still with this formula $a+ex^4$ and because the case $a+eh^4=kk$ is known, thus we can view the same as two cases to be thus as $x=-h$ as well as $x=+h$, and therefore we can change this formula into another according to the third manner where the first and last terms are squares. Such happens if we put $x=\frac{h(1+y)}{1-y}$, which artifice often does good service, thus our formula becomes :

$$\frac{a(1-y)^4+ek^4(1+y)^4}{(1-y)^4}\quad\text{or}\quad\frac{kk+4(kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^3+kky^4}{(1-y)^4};$$

from which the square root is put according to the third case $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, thus so that the numerator of our formula must at once be this square

$$kk+2kpy-2kkyy+ppyy-2kpy^3+kky^4.$$

It is arranged so that the second term vanishes, which happens if $4kk-8a=2kp$, or $p=\frac{2kk-4a}{k}$; the remaining terms divided by *yy* give :

$$6kk+4\left(kk-2a\right)y=-2kk+pp-2kpy,\text{or }y\left(4kk-8a+2kp\right)=pp-8kk,$$

since now $p=\frac{2kk-4a}{k}$, and $pk=2kk-4a$, thus there becomes

$$y(8kk-16a)=\frac{-4k^4-16akk+16aa}{kk},\ \text{consequently } y=\frac{-k^4-4akk+4aa}{kk(2kk-4a)};$$

in order that now x can be found from that, thus initially $1+y=\frac{k^4-8akk+4aa}{kk(2kk-4a)}$, and then secondly $1-y=\frac{3k^4-4aa}{kk(2kk-4a)}$ thus $\frac{1+y}{1-y}=\frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}$; consequently we have

$$x=\frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}\cdot h,$$

but which namely is the letter that we have found before already.

140.

In order to illustrate this with an example, thus this formula shall be given $2x^4-1$, which must be a square. Now here $a=-1$ and $e=2$, but the known case, where this formula is a square, is if $x=1$: thus there is $h=1$ and $kk=1$, that is $k=1$; from this we obtain at once this new value $x=\frac{1+8+4}{3-4}=-13$, but because only the fourth power of x is present, thus we can put $x=+\ 13$ also, and from that there becomes $2x^4-1=57121=(239)^2$.

We now assume this case as known, thus there becomes $h=13$ and $k=239$, from which a new value for x will be found, namely

$$x=\frac{3262808641+456968+4}{9788425923-4}\cdot 13\ =\frac{3263265613}{9788425919}\cdot 13,\ \text{thus } x=\frac{42422462969}{9788425919}.$$

141.

Similarly let us consider the somewhat more general formula $a+cxx+ex^4$, and for the known case, that will be a square if we take $x=h$, thus so that $a+chh+eh^4=kk$. In order to find others from this, thus we take $x=h+y$, since then our formula will have this form :

$$\begin{array}{l} a \\ chh+2chy+cyy \\ eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4 \\ \hline kk+(2ch+4eh^3)y+(c+6ehh)yy+4ehy^3+ey^4 \end{array}$$

where the first term is a square : therefore the square root of that is put to be $k+py+qyy$, thus so that our formula must be equal to this square

$$kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4;$$

now p and q are determined thus so that the second and third terms vanish, in order that it can be done, so that in the first place $2ch+4eh^3=2kp$ or $p=\frac{ch+2eh^3}{k}$, and following this so that $c+6ehh=2kq+pp$, or $q=\frac{c+6ehh-pp}{2k}$; as then the following terms can be divided by y^3 to give this equation $4eh+ey=2pq+qqy$, from which there will be found $y=\frac{4eh-2pq}{qq-e}$ and from that further $x=h+y$; in which case the square root from our formula shall be $k+py+qyy$. Now again it can be considered father as in the initial known case, thus further a new case is found from that, and such a form can continue from that as far as it pleases.

142.

In order to illustrate this, thus the given formula shall be $1-xx+x^4$ where consequently $a=1$, $c=-1$ and $e=1$. The known case can be seen at once, namely $x=1$, thus so that $h=1$ and $k=1$. Now on putting $x=1+y$, and the square root of our formula becomes $=1+py+qyy$, thus in the first place there must be $p=1$ and following this $q=2$; from this there is found $y=0$ and $x=1$, which is just the case known already, and thus nothing new is found. But it can be demonstrated by other means that this formula cannot be a square, apart from the cases $x=0$ und $x=\pm 1$.

143.

Further let this formula $2-3xx+2x^4$ be given as an example, where $a=2, c=-3$ and $e=2$. The known case gives at once, namely, $x=1$: therefore there shall be $h=1$, and thus $k=1$; now putting $x=1+y$ and the square root $1+py+qyy$, thus there is $p=1$ and $q=4$, from which we obtain $y=0$ and $x=1$, from which again nothing new is found there.

144.

This formula shall be another example : $1+8xx+x^4$ where $a=1$, $c=8$ and $e=1$. After a small inspection the case $x=2$ is given ; then on taking $h=2$ thus $k=7$, now putting $x=2+y$, and the root $7+py+qyy$ thus there must become $p=\frac{32}{7}$, and $q=\frac{272}{343}$; from which we obtain $y=-\frac{5880}{2911}$ and $x=-\frac{58}{2911}$, where the negative sign can be discarded. But from this example it is to be noted, that because the last term was already a square, and thus must remain a square in the new formula, the root can only be assumed according to the third case.

Therefore it shall be as before, $x=2+y$, thus we have

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32+32y+8yy \\ 16+32y+24yy+8y^3+y^4 \\ \hline 49+64y+32yy+8y^3+y^4 \end{array}$$

which now can be made into a square in several ways; then initially the root can be put to be $7+py+yy$, thus so that our formula must be equal to this square

$49+14py+14yy+ppyy+2py^3+y^4$; now the second term may be made to vanish in the latter formula, if we put $2p=8$, or $p=4$; since then the remainder divided by y gives

$$64+32y=14p+14y+ppy=56+30y,$$

and therefore $y=-4$ and $x=-2$, or $x=+2$, which is itself the known case.

But on assuming p thus, so that the second term vanishes, thus there becomes $14p=64$ and $p=\frac{32}{7}$; since then the remaining terms divided by yy give $14+pp+2py=32+8y$ or $\frac{1710}{49}+\frac{64}{7}y=32+8y$, and therefore $y=-\frac{71}{28}$, consequently $x=-\frac{15}{28}$, or $x=+\frac{15}{28}$, which value makes our formula into a square, of which the root is $\frac{1441}{784}$.

Since also $-yy$ is the last of the roots, thus the square root of that can be put $7+py-yy$, or the formula itself becomes equal to this square $49+14py-14yy+ppyy-2py^3+y^4$. Now in order to remove the last but one of the terms, we put $8=-2p$, or $p=-4$, thus the remainder divided by y gives $64+32y=14p-14y+ppy=56+2y$, from which we have $y=-4$ as above.
But if we let the second term vanish, thus there becomes $64=14p$ and $p=\frac{32}{7}$; the remainder divided by yy gives $32+8y=-14pp-2py$, or $32+8y=\frac{338}{49}-\frac{64}{7}y$, from which there becomes $y=-\frac{71}{28}$ and $x=\pm\frac{15}{28}$, which is the same as the above.

145.

Just as one can deal with the general formula

$$a+bx+cxx\ dx^3+ex^4,$$

if a case is known, namely $x=h$, since the same will be a square, namely kk : as then we put $x=h+y$, thus we obtain a formula of just as many terms of which the first shall be kk; now the root of that can be put as $k+py+qyy$, and both p and q can be determined of such a form that the second and third terms vanish, thus giving a simple equation with the last term divided by y^3, from which y and consequently also x can be found.

Only such cases fail here, where the newly found value of x is the same as the known value $x=h$, since then as nothing new is found. In such cases it is either the formula in itself to be impossible, or some another case must be guessed, where the same is a square.

146.

Thus only to this extent is the solution of square root numbers known, since namely powers cannot exceed higher than the fourth. Therefore in such a formula should the fifth or a still higher power of x arise, thus the artifices at this time shall not be sufficient to provide a solution of that, even if also a case were known. In order to show this more carefully thus we consider the formula $kk+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5$, where the first term is already a square, now we would like to put the root of that as before to be $k+px+qxx$ and thus to determine p and q, so that the second and third terms vanish, in order that nevertheless three terms remain, which divided by x^3 would give a quadratic equation, from which x would be determined from its new [*i.e.* irrational] square roots . But should one put the root to be $k + px + qxx + rx^3$ thus the square rises as far as the sixth power, thus so that if p, q, and r were to be determined at once, so that the second, third, and fourth terms vanish, then still the fourth, fifth and sixth powers would still remain left over, which divided by x^4 would lead further to a quadratic equation, and thus could not be resolved without a square root. Therefore we are compelled to abandon at this stage how formulas are to become squares. We will therefore move on to cube-root numbers.

CAPITEL 6

VON DEN FÄLLEN IN GANZEN ZAHLEN DA DIE FORMEL $axx+b$ EIN QUADRAT WIRD

79.

Wir haben schon oben gewiesen wie solche Formeln $a+bx+cxx$ verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und dahero begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form $axx+b$ einzuschräncken, wobey es darauf ankommt, daß für *x* nur gantze Zahlen gefunden werden sollen aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, dann wäre sie unmöglich so könnten nicht einmahl Brüche für *x,* geschweige denn gantze Zahlen, statt finden.

80.

Man setze also diese Formel $axx+b=yy$, da dann beyde Buchstaben *x* und *y* gantze Zahlen seyn sollen, weil *a* und *b* dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in gantzen Zahlen wiße oder errathen habe, dann sonsten würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte. Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde wann man setzt $x=f$, und wollen das Quadrat durch *gg* andeuten, also daß $aff+b=gg$ wo demnach *f* und *g* bekante Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

81.

Da nun schon gefunden worden $af+b=gg$, und über dieses auch seyn soll $axx+b=yy$, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um zu bekommen $axx-aff=yy-gg$, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt $a(x+f)(x-f)=(y+g)(y-g)$; man multiplicire beyderseits mit *pq,* so hat man $apq(x+f)(x-f)=pq(y+g)(y-g)$; um nun diese Gleichheit heraus zu bringen mache man diese Vertheilung

$$ap(x+f)=q(y+g) \text{ und } q\left(x-f\right)=p(y-g),,$$

und aus diesen beyden Gleichungen suche man die beyden Buchstaben *x* und *y;* die erste durch *q* dividirt giebt $y+g=\frac{apx+apf}{q}$*;* die andere durch *p* dividirt giebt $y-g=\frac{qx-qf}{p}$; diese von jener subtrahirt giebt $2g=\frac{(app-qq)x+(app+qq)f}{pq}$ mit *pq* multiplicirt wird $2pqg=\left(app-qq\right)x+(app+qq)f$, und dahero

$$x=\frac{2gpq}{app-qq}-\frac{(app+qq)f}{app-qq},$$

und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app-qq} - \frac{(app+qq)fq}{(app-qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey erstere Glieder den Buchstaben *g*, welche zusammen gezogen geben $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$; die beyden andern enthalten den Buchstaben *f* und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpg}{app-qq}$; dahero wir erhalten

$$y = \frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}.$$

82.

Diese Arbeit scheinet unserm Endzweck gar nicht gemäß zu sein, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für *x* und *y* gantze Zahlen finden sollten, und es würde auf eine neue Frage ankommen was man für *p* und *q* für Zahlen annehmen müßte damit die Brüche wegfallen? welche Frage noch schwerer scheint als unsere Haupt-Frage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgrif angewendet werden, wodurch wir leicht zu unserm Endzweck gelangen: dann da hier alles in gantzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{app+qq}{app-qq} = m$ und $\frac{2pq}{app-qq} = n$, damit man habe $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir *m* und *n* nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müßen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende laßt uns ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden

$$mm = \frac{aap^4+2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4} \text{ und } nn = \frac{4ppqq}{aap^4-2appqq+q^4}$$

dahero bekommen wir:

$$mm - ann = \frac{aap^4+2appqq+q^4-4appqq}{aap^4-2appqq+q^4} = \frac{aap^4-2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4} = 1.$$

83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen *m* und *n* also beschaffen seyn müßen, daß $mm = ann+1$. Da nun *a* eine bekante Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn eine solche gantze Zahl für *n* zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach *m* die Wurzel ist, und so bald man eine solche gefunden, und über dieses auch die Zahl *f* gefunden, daß $aff + b$ ein Quadrat werde nemlich *gg*, so bekommt man vor *x* und *y* folgende Werthe in gantzen Zahlen

$$x = ng - mf, \text{ und } y = mg - naf ,$$

und dadurch wird $axx + b = yy$.

84.

Es ist vor sich klar, daß wann einmahl *m* und *n* gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat *nn* doch einerley bleibt.

Um dahero *x* und *y* in gantzenZahlen zu finden, auf daß $axx + b = yy$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nemlich sey $aff + b = gg$; so bald dieser Fall bekant ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $ann+1=mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung soll gegeben werden. Ist nun dieses geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nemlich $x=ng+mf$ und $y=mg+naf$, da dann seyn wird $axx+b=yy$.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen der für bekant angenommen worden und schreibt $ng+mf$ anstatt f und $mg+naf$ anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen weiter, wann sie für f und g gesetzt werden, andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, also daß wann man anfänglich nur einen solchen Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85.

Die Art wie wir zu dieser Auflösung gelanget sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonders Glück haben weggeschaft werden können, es wird dahero gut seyn noch einen andem kürtzem Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

86.

Da seyn soll $axx+b=yy$ und man schon gefunden hat $aff+b=gg$, so giebt uns jene Gleichung $b=yy-axx$, diese aber $b=gg-aff$, folglich muß auch seyn $yy-axx=gg-aff$, und jetzt kommt alles darauf an, daß man aus den bekanten Zahlen f und g die unbekanten x und y finden soll: da dann so gleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wann man setzt $x=f$ und $y=g$; allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer den der schon für bekant genommen wird.

Wir wollen demnach setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, oder daß da sey $ann+1=mm$, dahero wird nun $mm-ann=1$, damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $gg-aff$ so muß auch seyn

$$yy-axx=(gg-aff)(mm-ann)=ggmm-affmm-aggnn+aaffnn.$$

Laßt uns zu diesem Ende setzen $y=gm+afn$, so bekommen wir:

$$ggmm+2afgmn+aaffnn-axx=ggmm-affmm-aggnn+aaffnn,$$

wo sich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben und wir also bekommen

$$axx=affmm+aggnn+2afgmn,$$

welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx=ffmm+ggnn+2fgmn$, welche Formel offenbar ein Quadrat ist, daraus wir erhalten $x=fm+gn$, welches eben die Formeln sind die wir vorher gefunden haben.

87.

Es wird nun nöthig seyn diese Auflösung durch einige Exempel zu erläutern.

I. Frage: Man suche alle gantze Zahlen für *x,* also daß $2xx-1$ ein Quadrat werde, oder daß sey $2xx-1=yy$?

Hier ist $a=2$ und $b=1$, der erste Fall so in die Augen fallt ist nun wann man nimmt $x=1$ und $y=1$. Aus diesem bekanten Falle haben wir nun $f=1$ und $g=1$; es wird aber ferner erfordert eine solche Zahl für *n* zu finden, daß $2nn+1$ ein Quadrat werde nemlich *mm,* solches geschiehet nun wann $n=2$ und $m=3$, dahero wir aus einem jeden bekanten Fall *f* und *g* diese neue finden $x=3f+2g$, und $y=3g+4f$; da nun der erste bekante Fall ist $f=1$ und $g=1$, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x=f=1$	5	29	169	
$y=g=1$	7	41	239	etc.

88.

II. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadrat Zahlen sind?

Es sey *z* die Drey-Ecks-Wurzel, so ist das Drey-Eck $\frac{zz+z}{2}$ welches ein Quadrat seyn soll Die Wurzel davon sey *x,* so muß seyn $\frac{zz+z}{2}=xx$. Man multiplicire mit 8 so wird $4zz+4z=8xx$ und beyderseits 1 addirt, giebt $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$. Es kommt also darauf an, daß $8xx+1$ ein Quadrat werde, und wann man setzt $8xx+1=yy$, so wird $y=2z+1$, und also die gesetzte Drey-Eck-Wurzel $z=\frac{y-1}{2}$.

Hier ist nun $a=8$, und $b=1$, und der bekannte Fall fält so gleich in die Augen, nemlich $f=0$ und $g=1$. Damit ferner werde $8nn+1=mm$, so ist $n=1$ und $m=3$; dahero bekommt man $x=3f+g$ und $y=3g+8f$, und $z=\frac{y-1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen:

$x=f=0$	1	6	35	204	1189	
$y=g=1$	3	17	99	577	3363	
$z=\frac{y-1}{2}=0$	1	8	49	288	1681	etc.

89.

III. Frage: Man suche alle Fünf-Ecks-Zahlen welche zu gleich QuadratZahlen sind?

Die Fünf-Ecks-Wurzel sey $=z$, so ist das Fünf-Eck $=\frac{3zz-z}{2}$, so dem Quadrat *xx* gleich gesetzt werde; dahero wird $3zz-z=2xx$; man multiplicire mit 12 und addire 1, so wird $36zz-12z+1=24xx+1=(6z-1)^2$.

Setzt man nun $24xx+1=yy$, so ist $y=6z-1$ und $z=\frac{y+1}{6}$; da nun hier $a=24$, $b=1$, so ist der bekannte Fall $f=0$ und $g=1$. Da hernach seyn muß $24nn+1=mm$, so nehme man $n=1$ und da wird $m=5$, dahero erhalten wir $x=5f+g$ und $y=5g+24f$, und

$z=\frac{y+1}{6}$; oder auch $y=1-6z$, so wird ebenfalls $z=\frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden:

$x=f=0$	1	10	99	980
$y=g=1$	5	49	485	4801
$z=\frac{y+1}{6}=\frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z=\frac{1-y}{6}=0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Frage: Man suche alle Quadrate in gantzen Zahlen, welche sieben mal genommen und dazu 2 addirt wiederum Quadrate werden?

Hier wird also gefordert, daß seyn soll $7xx+2=yy$, wo $a=7$ und $b=2$; der bekante Fall fällt so gleich in die Augen, wann $x=1$ und dann ist $x=1$ und $y=g=3$. Nun betrachte man die Gleichung $7nn+1=mm$, und da findet man leicht $n=3$ und $m=8$; dahero erhalten wir $x=8f+3g$ und $y=8g+21f$, woraus die folgenden Werthe für x und y gefunden werden:

$x=f=1$	17	271
$y=g=3$	45	717

91.

V. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich fünfeckigte Zahlen sind?

Es sey die Drey-Ecks-Wurzel $=p$ und die Fünf-Ecks-Wurzel $=q$, so muß seyn $\frac{pp+p}{2}=\frac{3qq-q}{2}$, oder $3qq-q=pp+p$; hieraus suche man q, und da $qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, so wird $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3}\right)}$, das ist $q=\frac{1\pm\sqrt{(12pp+12p+1)}}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12pp+12p+1$ ein Quadrat werde, und das in gantzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p=\frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12pp=3xx-6x+3$ und $12p=6x-6$, dahero $12pp+12p+1=3xx-2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Setzen wir demnach $3xx-2=yy$, so haben wir daraus $p=\frac{x-1}{2}$ und $q=\frac{1+y}{6}$; da nun die gantze Sache auf die Formel $3xx-2=yy$ ankommt, so ist $a=3$ und $b=-2$, und der bekante Fall $x=f=1$ und $y=g=1$; hernach haben wir für diese Gleichung, $mm=3nn+1$: $n=1$ und $m=2$, daraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Da also ist $x=2f+g$ und $y=2g+3f$, so wird:

$x=f=1$	3	11	41

$y = g = 1$	5	19	71
$p = 0$	1	5	20
$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder $q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nemlich auch $q = \frac{1-y}{6}$.

92.

Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wann eines vorhanden war: man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formeln anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese $axx + bx + c = yy$, und hievon sey schon dieser Fall bekant $aff + bf + c = gg$.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird

$$a(xx - ff) + b(x - f) = yy - gg,$$

welche also durch Factores ausgedrückt werden kann

$$(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g).$$

Man multiplicire beyderseits mit *pq*, so wird

$$pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g),$$

welche in diese zwey zergliedert werden

$$\text{I.)}\ p(x - f) = q(y - g), \quad \text{II.)}\ q(ax + af + b) = p(y + g).$$

Man multiplicire die erste mit *p*, die andere mit *q*, und subtrahire jenes von diesem, so kommt $(aqq - pp)x + (aqq + pp)f + bqq = 2gpq$, daraus finden wir

$$x = \frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}.$$

Aus der ersten Gleichung ist

$$q(y - g) = p(x - f) = p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{2afqq}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}\right);$$

also

$$y - g = \frac{2gpp}{aqq-pp} - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp},$$

und dahero

$$y = g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right) - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}.$$

Um diese Brüche wegzubringen, so setze man wie oben geschehen

$$\frac{aqq+pp}{aqq-pp} = m \ \text{ und } \ \frac{2pq}{aqq-pp} = n,$$

so wird

$$m + 1 = \frac{2aqq}{aqq-pp} \ \text{ und also } \ \frac{qq}{aqq-pp} = \frac{m+1}{2a};$$

also wird seyn

$$x = ng - mf - b\tfrac{(m+1)}{2a} \text{ und } y = mg - naf - \tfrac{1}{2}bn,$$

wo die Buchstaben *m* und *n* eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nemlich daß $mm = ann + 1$.

93.

Solcher Gestalt sind aber die für *x* und *y* gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben *b* enthaltende Glieder Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Genüge leisten. Allein es ist zu mercken, daß wann man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer gantze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen *p* und *q* finden kann. Dann man nehme *p* und *q* dergestalt an, daß $pp = aqq + 1$; da nun $aqq - pp = -1$, so fallen daselbst die Brüche von selbsten weg, und da wird

$$x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq \text{ und } y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq,$$

weil aber in dem bekanten Fall $aff + bf + c = gg$ nur das Quadrat *gg* vorkommt, so ist es gleich viel ob man dem Buchstaben *g* das Zeichen + oder − giebt; man schreibe also −*g* anstatt + *g*, so werden unsere Formeln seyn:

$$x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq \text{ und } y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq,$$

da dann gewis seyn wird $axx + bx + c = yy$.

Man suche z. E. diejenigen Sechs-Eck- Zahlen, welche zu gleich Quadrate sind? Da muß dann seyn $2xx - x = yy$, wo $a = 2$, $b = -1$ und $c = 0$; der bekante Fall ist hier offenbar $x = f = 1$ und $y = g = 1$.

Da hernach seyn muß $pp = 2qq + 1$, so wird $q = 2$, und $p = 3$; dahero wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	etc.

94.

Wir wollen aber bey der ersten Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwegung ziehen, wo die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird in gantzen Zahlen.

Es sey demnach $axx + b = yy$ und hierzu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich daß man einen Fall wiße, wo dieses geschiehet: derselbe sey nun $aff + b = gg$.

Zweytens daß man solche Zahlen für *m* und *n* wiße, daß $mm = ann + 1$, wozu in folgendem Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach gleicher Gestalt neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender Gestalt vorstellen wollen:

$x = f$	A	B	C	D	E	
$y = g$	P	Q	R	S	T	etc.

wo $A = ng + mf$	$B = nP + mA$	$C = nQ + mB$	$D = nR + mC$	
und $P = mg + anf$	$Q = mP + anA$	$R = mQ + anB$	$S = mR + anC$	etc.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann als man will.

95.

Nach dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen ohne zugleich die untere zu wißen, noch die untere ohne die obere zu wißen. Man kann aber leicht eine Regel angeben die obere Reihe allein fortzusetzen ohne die untere zu wißen, welche Regel auch für die untere Reihe gilt ohne daß man nöthig hätte die obere zu wißen.

Die Zahlen nemlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewißen Progression fort wovon man ein jedes Glied z. E. E aus den zwey vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Dann da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, das ist $E = 2mnR + annC + mmC$, so wird, weil $nR = D - mC$, gefunden $E = 2mD - mmC + annC$ oder $E = 2mD - (mm - ann)C$; da aber $mm = ann + 1$ also $mm - ann = 1$, so haben wir

$$E = 2mD - C,$$

woraus erhellet wie eine jede dieser obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Dann da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, so wird $T = mS + annR + amnC$.

Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben giebt,

$$T = 2mS - R,$$

also daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet als die obere.

Man suche z. E. alle gantze Zahlen x, daß da werde $2xx - 1 = yy$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$; ferner damit $mm = 2nn + 1$, so wird $n = 2$ und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nemlich ein jedes Glied sechsmal genommen weniger dem vorhergehenden giebt das folgende; dahero die für x verlangte Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

1, 5, 29, 169, 985, 5741 etc.

Woraus man sieht daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch Brüche gelten laßen, so würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

CAPITEL 7

VON EINER BESONDERN METHODE DIE FORMEL $ann+1$ ZU EINEM QUADRAT IN GANTZEN ZAHLEN ZU MACHEN

96.

Was in dem vorigen Capitel vorgetragen worden, kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wann man nicht im Stande ist für eine jegliche Zahl *a* eine solche gantze Zahl *n* zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, oder daß man bekomme $mm = ann+1$.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur setzen dürfte $m = 1+\frac{np}{q}$. Dann da wird $mm = 1+\frac{2np}{q}+\frac{nnpp}{qq} = ann+1$, wo sich beyderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch *n* theilen laßen, da dann mit *qq* multiplicirt kommt $2pq + npp = anqq$, daraus gefunden wird $n = \frac{2pq}{aqq-pp}$, woraus unendlich viel Werthe für *n* gefunden werden können. Da aber *n* eine gantze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts, dahero eine gantz andere methode gebraucht werden muß, um dieses zu finden.

97.

Vor allen Dingen aber ist zu mercken, daß wann $ann+1$ ein Quadrat in gantzen Zahlen werden soll, *a* mag eine Zahl seyn was man vor eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Dann erstlich werden alle Fälle ausgeschloßen, wo *a* eine negative Zahl ist; hernach werden auch alle die Fälle ausgeschloßen, wo *a* selbst eine QuadratZahl ist, weil alsdann *ann* ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber + 1 in gantzen Zahlen ein Quadrat seyn kann. Dahero muß unsere Formel also eingeschränckt werden, daß der Buchstabe *a* weder eine negative noch eine Quadrat Zahl sey; so oft aber *a* eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann allezeit für *n* eine solche gantze Zahl gefunden werden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde.

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Capitel, unendlich viel andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber ist es genung, eine einige und zwar die kleinste ausfündig zu machen.

98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engeländer, Namens PELL, eine gantz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl *a*, sondern nur für einen jeglichen Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach von den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen daß $2nn+1$ ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{(2nn+1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadrat-Wurzel größer seyn werde als n, doch aber kleiner als $2n$. Man setze dahero dieselbe $= n + p$ so wird p gewis kleiner seyn als n. Also haben wir $\sqrt{(2nn+1)} = n + p$ und dahero $2nn+1 = nn+2np+pp$, woraus wir nun n suchen wollen. Da nun ist $nn = 2np + pp - 1$ so wird $n = p + \sqrt{(2pp-1)}$.

Es kommt also darauf an, daß $2pp-1$ ein Quadrat werde, welches geschiehet wann $p=1$ und hieraus findet man $n=2$ und $\sqrt{(2nn+1)} = 3$. Wäre dieses letztere nicht so gleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2pp-1)}$ größer als p und dahero n größer als $2p$, so setze man $n = 2p + q$, da dann wird $2p + q = p + \sqrt{(2pp-1)}$ oder $p + q = \sqrt{(2pp-1)}$, hievon die Quadrate genommen, kommt $pp + 2pq + qq = 2pp - 1$ oder $pp = 2pq + qq + 1$ und daraus wird $p = q + \sqrt{(2qq+1)}$, also muß $2qq+1$ ein Quadrat seyn, welches geschiehet wann $q = 0$ dahero $p=1$ und $n=2$. Aus diesem Exempel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99.

Es sey nun $a=3$, so daß die Formel $3nn+1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3nn+1)} = n + p$, da wird $3nn+1 = nn+2np+pp$ und $2nn = 2np + pp - 1$ und daraus $n = \frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$; da nun $\sqrt{(3pp-2)}$ größer als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p, so setze man $n = p + q$, da wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp-2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3pp-2)}$; hiervon die Quadrate genommen, wird $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$ oder $2pp = 4pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 2pq + 2qq + 1$, dahero $p = q + \sqrt{(3qq+1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich und also $q = 0$ leistet ein Genüge, daraus wird $p=1$ und $n=1$, also $\sqrt{(3nn+1)} = 2$.

100.

Nun sey $a=5$, um diese Formel $5nn+1$ zu einem Quadrat zu machen, davon die Wurzel größer ist als $2n$: dahero setze man $\sqrt{(5nn+1)} = 2n + p$ da wird $5nn+1 = 4nn+4np+pp$ und daraus $nn = 4np + pp - 1$; dahero $n = 2p + \sqrt{(5pp-1)}$. Weil nun $\sqrt{(5pp-1)}$ größer ist als $2p$, so ist auch n grösser als $4p$; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q\sqrt{(5pp-1)}$ oder $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; dahero $pp = 4pq + qq + 1$ und also $p = 2q + \sqrt{(5qq+1)}$; dieser geschieht ein Genüge wann $q = 0$, folglich $p=1$ und $n=4$; dahero $\sqrt{(5nn+1)} = 9$.

101.

Es sey ferner $a=6$, um $6nn+1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6nn+1)}=2n+p$, so wird $6nn+1=4nn+4np+pp$ oder $2nn=4np+pp-1$ und dahero $n=p+\frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$ oder $n=\frac{2p+\sqrt{(6pp-2)}}{2}$ also n größer als $2p$, man setze deswegen $n=2p+q$, so wird $4p+2q=2p+\sqrt{(6pp-2)}$ oder $2p+2q=\sqrt{(6pp-2)}$. Die Quadrate genommen, wird $4pp+8pq+4qq=6pp-2$ oder $2pp=8pq+4qq+2$, das ist $pp=4pq+2qq+1$, woraus gefunden wird $p=2q+\sqrt{(6qq+1)}$; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q=0$ gesetzt werden kann, daraus dann wird $p=1$ und $n=2$, also $\sqrt{(6nn+1)}=5$.

102.

Es sey weiter $a=7$ und $7nn+1=mm$; es ist also m größer als $2n$, dahero setze man $m=2n+p$, so wird $7nn+1=4nn+4np+pp$ oder $3nn=4np+pp-1$, daraus gefunden wird $n=\frac{2p+\sqrt{(7pp-3)}}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$ und also größer als p, so setze man $n=p+q$, so wird $p+3q=\sqrt{(7pp-3)}$, die Quadrate genommen $pp+6pq+9qq=7pp-3$; $6pp=6pq+9qq+3$, oder $2pp=2pq+3qq+1$, daraus kommt $p=\frac{q+\sqrt{(7qq+2)}}{2}$. Da nun hier p größer ist als $\frac{3q}{2}$, also größer als q, so setze man $p=q+r$, so wird $q+2r=\sqrt{(7qq+2)}$, die Quadrate genommen $qq+4qr+4rr=7qq+2$ oder $6qq=4qr+4rr-2$ oder $3qq=2qr+2rr-1$ daraus gefunden wird $q=\frac{r+\sqrt{(7rr-3)}}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q=r+s$, da wird $2r+3s=\sqrt{(7rr-3)}$. Die Quadrate genommen: $4rr+12rs+9ss=7rr-3$, oder $3rr=12rs+9ss+3$ und $rr=4rs+3ss+1$; also $r=2s+\sqrt{(7ss+1)}$.
Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s=0$, und da bekommt man $r=1,\ q=1,\ p=2$ und $n=3$, daraus $m=8$.

Diese Rechnung kann folgender Gestalt sehr abgekürtzt werden, welches auch in andern Fällen statt findet.

Da $7nn+1=mm$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m=3n-p$, so wird $7nn+1=9nn-6np+pp$ oder $2nn=6np-pp+1$, und daraus $n=\frac{3p+\sqrt{(7pp+2)}}{2}$, also ist n kleiner als $3p$, deswegen setze man $n=3p-q$, so wird $3p-2q=\sqrt{(7pp+2)}$ und die Quadrate genommen

$$9pp-12pq+4qq=7pp+2,\ \text{oder}\ 2pp=12pq-4qq+2\ \text{und}\ pp=6pq-2qq+1,$$

daraus wird $p=3q+\sqrt{(7qq+1)}$. Hier kann man nun so gleich setzen $q=0$, da wird $p=1,\ n=3,$ und $m=8$ wie vorher.

103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, also daß $8nn + 1 = mm$ und dahero *m* kleiner als 3*n*, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, oder $nn = 6np - pp + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, dahero man setzen kann $p = 0$, da kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104.

Gleicher Gestalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl *a,* wann dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem solchen Wurzel-Zeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. E. zu dieser $\sqrt{(att + 1)}$, da man dann nur setzen darf $t = 0$, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf wann man zurück geht, erhält man einen Werth für *n,* daß $ann + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl *a,* wovon man doch keine gewiße Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geschwind, kommt man aber zu $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger und dahero wird es gut seyn diesen Fall allhier auszuführen.

105.

Es sey demnach $a = 13$ also daß seyn soll $13nn + 1 = mm$. Weil nun *mm* größer ist als 9*nn,* und also *m* größer als 3*n*, so setze man $m = 3n + p$, da wird
$13nn + 1 = 9nn + 6np + pp$, oder $4nn = 6np + pp - 1$, daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(13pp - 4)}}{4}$, dahero *n* größer als $\frac{6}{4}p$ und also größer als *p*.
Man setze allso $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13pp - 4)}$; die Quadrate genommen $13pp - 4pp + 8pq + 16qq$, dahero $12pp = 8pq + 16qq + 4$, oder durch 4 getheilt $3pp = 2pq + 4qq + 1$ und daraus $p = \frac{q + \sqrt{(13qq + 3)}}{3}$. Hier ist *p* größer als $\frac{p + 3q}{3}$, also größer als *q;* man setze demnach $p = q + r$, so wird $2q + 3r = \sqrt{(13qq + 3)}$, das Quadrat genommen $13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, das ist $9qq = 12qr + 9rr - 3$, durch 3 dividirt $3qq = 4qr + 3rr - 1$, daraus wird $q = \frac{2r + \sqrt{(13rr - 3)}}{3}$. Hier ist *q* größer als $\frac{2r + 3r}{3}$ und also *q* größer als *r*; dahero setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13rr - 3)}$, das Quadrat genommen $13rr - 3 = rr + 6rs + 9ss$, oder $12rr = 6rs + 9ss + 3$, durch 3 dividirt wird $4rr = 2rs + 3ss + 1$ und daraus $r = \frac{s + \sqrt{(13ss + 4)}}{4}$. Hier ist *r* größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder *s,* dahero setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = \sqrt{(13ss + 4)}$, das Quadrat genommen $13ss + 4 = 9ss + 24st + 16tt$ und also $4ss = 24st + 16tt - 4$, durch 4 dividirt $ss = 6st + 4tt - 1$, daraus wird $s = 3t + \sqrt{(13tt - 1)}$. Also ist *s* größer als $3t + 3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = \sqrt{(13tt - 1)}$, das Quadrat genommen $13tt - 1 = 9tt + 6tu + uu$ und daraus $4tt = 6tu + uu + 1$ und $t = \frac{3u + \sqrt{(13uu + 4)}}{4}$, wo *t* größer als

$\frac{6u}{4}$ und also größer als *u*. Man setze deswegen $t = u + v$, so wird $u + 4v = \sqrt{(13uu + 4)}$; das Quadrat genommen $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$ und $12uu = 8uv + 16vv - 4$, durch 4 dividirt $3uu = 2uv + 4vv - 1$ daraus $u = \frac{v+\sqrt{(13vv-8)}}{3}$, wo *u* größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als *v*, deswegen setze man $u = v + x$, so wird $2v + 3x = \sqrt{(13vv - 3)}$; das Quadrat genommen $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$ oder $9vv = 12vx + 9xx + 3$, durch 3 dividirt $3vv = 4vx + 3xx + 1$, daraus man findet $v = \frac{2x+\sqrt{(13xx+3)}}{3}$, wo *v* größer ist als $\frac{5x}{3}$ und allso größer als *x*, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13xx + 3)}$, die Quadrate genommen $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$ oder $12xx = 6xy + 9yy - 3$, durch 3 dividirt $4xx = 2xy + 3yy - 1$ und $x = \frac{y+\sqrt{(13yy-4)}}{4}$, wo *x* größer ist als *y;* deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13yy - 4)}$, die Quadrate genommen $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$ oder $4yy = 24yz + 16zz + 4$, durch 4 dividirt $yy = 6yz + 4zz + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13zz + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist so setze man $z = 0$, und da bekommt man rückwerts gehend, wie folget:

$z = 0$	$u = v + x = 3$ $u= v+x=3$	$q = r + s = 71$
$y = 1$	$t = u + v = 5$	$p = q + r = 109$
$x = y + z = 1$	$s = 6t + u = 33$	$n = p + q = 180$
$v = x + y = 2$	$r = s + t = 38$	$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach 0 die kleinste gantze Zahl für *n,* daß $13nn + 1$ ein Quadrat werde.

106.

Aus diesem Exempel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden könne. Dann unter den größern Zahlen hat man oft nöthig wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bei der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, dahero es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen *a* bis auf 100 die Werthe der Buchstaben *m* und *n* vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl *a* die gehörige Buchstaben *m* und *n* hernehmen könne.

107.

Inzwischen ist zu mercken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für *m* und *n* allgemein gefunden werden können; dieses geschiehet aber nur bey denen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadrat-Zahl, welches zu zeigen der Mühe werth seyn wird.

108.

Es sey demnach $a = ee - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadrat-Zahl, und da seyn soll $(ee-2)nn+1 = mm$, so ist offenbar *m* kleiner als *en,* deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(ee-2)nn+1 = eenn - 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = \frac{ep+\sqrt{(eepp-2pp+2)}}{2}$, wo so gleich in die Augen fällt, daß wann man nimmt $p = 1$, das Wurzelzeichen wegfalle und da seyn werde $n = e$ und $m = ee-1$. Wäre z. E. $a = 23$, wo $e = 5$, so wird $23nn+1 = mm$, wann $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wann nemlich $a = ee-2$, so wird $ann+1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee-1$.

109.

Es sey nun auch $a = ee-1$ nemlich um 1 weniger als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn soll $(ee-1)nn+1 = mm$. Da nun hier wieder *m* kleiner ist als *en,* so setze man $m = en - p$, so wird $(ee-1)nn+1 = eenn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$; wo das Wurzelzeichen wegfalt, wann $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2ee-1$. Dieses ist auch leicht zu sehen. Dann da $a = ee-1$ und $n = 2e$, so wird $ann+1 = 4e^4 - 4ee + 1$, welches das Quadrat ist von $2ee-1$. Es sey z. E. $a = 24$ also daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24nn+1 = 2401 = (49)^2$.

110.

Es sey nun auch $a = ee+1$, oder um 1 größer als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn soll $(ee+1)nn+1 = mm$, wo *m* augenscheinlich größer ist als *en,* deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(ee+1)nn+1 = eenn + 2enp + pp$ oder $nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$ wo $p = 1$ genommen werden kann, und da wird $n = 2e$ und $m = 2ee+1$; dieses ist auch leicht einzusehen, dann da $a = ee+1$ und $n = 2e$, so ist $ann+1 = 4e^4 + 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee+1$. Es sey z. E. $a = 17$ also daß $e = 4$, und da wird $17nn+1 = mm$, wann $n = 8$ und $m = 33$.

111.

Es sey endlich $a = ee+2$, oder um 2 größer als eine Quadrat-Zahl, also soll seyn $(ee+2)nn+1 = mm$, wo *m* offenbar größer ist als *en,* dahero setze man $m = en + p$, so wird $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp + pp - 1$ und daraus $n = \frac{ep+\sqrt{(eepp+2pp-2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = ee+1$. Dieses fällt auch so gleich in die Augen, dann da $a = ee+2$ und $n = e$, so ist $ann+1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee+1$. Es sey z. E. $a = 11$ also daß $e = 3$, so wird seyn $11nn+1 = mm$, wann $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man setzen

$a=83$ so ist $e=9$, und es wird $83nn+1=mm$, wann man nimmt $n=9$ und $m=82$.

Tabelle enthält folgende Fehler:

für $a=53$, $m=66251$, statt $m=66249$;

für $a=58$, $n=2564$, statt $n=2574$; " $a=58$ $n=2564$

für $a=85$, $m=285771$, statt $m=285769$;

Tabelle
welche für einen jeglichen Werth von a die kleinste Zahlen m und n angiebt,
allso daß $mm=ann+1$

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	37	12	73	69	936	7775
3	1	2	38	6	37	70	30	251
5	4	9	39	4	25	71	413	3480
6	2	5	40	3	19	72	2	17
7	3	8	41	320	2049	73	267000	2281249
8	1	3	42	2	13	74	430	3699
10	6	19	43	531	3482	75	3	26
11	3	10	44	30	199	76	6630	57799
12	2	7	45	24	161	77	40	351
13	180	649	46	3588	24335	78	6	53
14	4	15	47	7	48	79	9	80
15	1	4	48	1	7	80	1	9
17	8	33	50	14	99	82	18	163
18	4	17	51	7	50	83	9	82
19	39	170	52	90	649	84	6	55
20	2	9	53	9100	66249	85	30996	285769
21	12	55	54	66	485	86	1122	10405
22	42	197	55	12	89	87	3	28
23	5	24	56	2	15	88	21	197
24	1	5	57	20	151	89	53000	500001
26	10	51	58	2574	19603	90	2	19
27	5	26	59	69	530	91	165	1574
28	24	127	60	4	31	92	120	1151
29	1820	9801	61	226153980	1766319049	93	1260	12151
30	2	11	62	8	63	94	221064	2143295
31	273	1520	63	1	8	95	4	39
32	3	17	65	16	129	96	5	49
33	4	23	66	8	65	97	6377352	62809633
34	6	35	67	5967	48842	98	10	99
35	1	6	68	4	33	99	1	10

CAPITEL 8
VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3)}$
RATIONAL ZU MACHEN

112.

Wir schreiten hier fort zu einer Formel da *x* zu der dritten Potestät ansteiget, um hernach bis zur vierten weiter zu gehen, ohngeacht diese beyde Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müßen.

Es soll also diese Formel $a+bx+cxx+dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und zu diesem Ende geschickte Werthe für *x* in Rational-Zahlen gesucht werden; dann da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst nur gebrochene Zahlen für *x* zu finden, und man ist genöthiget sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in gantzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu mercken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für *x* zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmahl zu unendlich viel Auflösungen leitet.

113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a+bx+cxx$ unendlich viel Fälle giebt, da die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel statt, wo nicht einmahl an eine Auflösung zu gedencken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat ; dahero man blos allein für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfündig machen kann, aus welcher nachgehends auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, also daß man solcher Gestalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwischen geschieht es aber doch öfters, daß wann gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. Also daß in solchen Fällen nur eine einzige statt findet, welcher Umstand besonders zu bemercken ist, weil in dem vorhergehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viel neue gefunden werden können.

114.

Wann also eine solche Formel $a+bx+cxx+dx^3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden wo dieses geschieht; ein solcher aber fallt am deutlichsten in die Augen, wann das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $ff+bx+cxx+dx^3$, welche offenbahr ein Quadrat wird, wann man setzt $x=0$.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen, und sehn wie aus dem bekannten Fall $x=0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne; zu diesem Ende kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

115.

Es sey demnach diese Formel $1+2x-xx+x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel von diesem Quadrat also an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey demnach die Quadrat-Wurzel $1+x$, davon das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen Wir

$$1+2x-xx+x^3 = 1+2x+xx,$$

wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung herauskommt $xx=-xx+x^3$ oder $x^3=2xx$, welche durch xx dividirt so gleich giebt $x=2$, woraus unsere Formel wird $1+4-4+8=9$.

Gleichergestalt wann diese Formel $4+6x-5xx+3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man erstlich die Wurzel $=2+nx$ und suche n also daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun wird

$$4+6x-5xx+3x^3 = 4+4nx+nnxx,$$

so muß seyn $4n=6$ und also $n=\frac{3}{2}$, woher diese Gleichung entspringt $-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$ oder $3x^3=\frac{29}{4}xx$, dahero $x=12$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, deßen Wurzel seyn wird $2+\frac{3}{2}x=\frac{45}{8}$.

116.

Der zweyte Weg bestehet darinn, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f+gx+hxx$, welche also beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen.

Es sey z. E. diese Formel gegeben $1-4x+6xx-5x^3$, hievon setze man die Wurzel $1-2x+hxx$ da dann seyn soll

$$1-4x+6xx-5x^3 = 1-4x+4xx+2hxx-4hx^3+hhx^4;$$

hier fallen die zwey erste Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß seyn $6=2h+4$ und also $h=1$, daraus bekommen wir $-5x^3=-4x^3+x^4$, wo durch x^3 dividirt wird: $-5=4+x$ und $x=-1$.

117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wann das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f+px$, wo f die Quadrat-Wurzel des ersten Glieds ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nemlich $cxx+dx^3$ mit $ppxx$ verglichen werden muß, da dann die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth vor x angiebt, welcher seyn wird $x=\frac{pp-c}{d}$.

Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder und setzt dieselbe $f+px+qxx$, wann nemlich $a=ff$, und bestimmt p und q dergestallt, daß die drey ersten Glieder beyderseits verschwinden, welches also geschiehet: Da

$$ff+bx+cxx\ dx^3 = ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pq^3+qqx^4$$

so muß seyn $b=2fp$ also $p=\frac{b}{2f}$ und $c=2fq+pp$ also $q=\frac{c-pp}{2f}$; und die übrige Gleichung $dx^3=2pqx^3+qqx^4$ läßt sich theilen, und wird daraus

$$x=\frac{d-2pq}{qq}.$$

118.

Inzwischen kann es öfters geschehen, daß obgleich $a=ff$ dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus dieser Formel $ff+dx^3$ zu ersehen, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Dann setzt man nach der ersten die Wurzel $=f+px$, also daß seyn soll $ff+dx^3=ff+2fpx+ppxx$, so muß seyn $0=2fp$ und $p=0$, dahero bekommt man $dx^3=0$, und daraus $x=0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $=f+px+qxx$, also daß seyn soll

$$ff+dx^3 = ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4$$

so muß seyn $0=2fp$ und $p=0$, ferner $0=2fq+pp$, und also $q=0$ dahero man bekommt $dx^3=0$ und wiederum $x=0$.

119.

In solchen Fällen ist nun nichts anders zu thun, als daß man sehe ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man dann aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht wann gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen so soll diese Formel $3+x^3$ ein Quadrat seyn, da nun solches geschiehet wann $x=1$, so setze man $x=1+y$ und da bekommt man diese

$4+3y+3yy+y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2+py$, so wird $4+3y+3yy+y^3=4+4py+ppyy$; wo um das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3=4p$, und also $p=\frac{3}{4}$, alsdann wird $3+y=pp$ und $y=pp-3=\frac{9}{16}-\frac{48}{16}=-\frac{39}{16}$, folglich $x=-\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $=2+py+qyy$, so wird $4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$, wo um das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3=4p$, oder $p=\frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3=4q+pp$, also $q=\frac{3-pp}{4}=\frac{39}{64}$; so haben wir $1=2pq+qqy$, und daraus $y=\frac{1-2pq}{qq}$ oder $y=\frac{352}{1521}$, folglich $x=\frac{1873}{1521}$.

120.

Nun wollen wir auch zeigen, wann man schon einen solchen Werth gefunden hat, wie man daraus weiter einen andern neuen finden soll? Dieses wollen wir auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf diese Formel anwenden $a+bx+cxx+dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde wann $x=f$, und daß alsdann sey
$a+bf+cff+df^3=gg$.
Hierauf setze man $x=f+y$, so erhält man diese neue Formel:

$$\begin{array}{l} a \\ +bf + by \\ +cff + 2cfy + cyy \\ +df^3 + 3dffy + 3dfyy + dy^3 \\ \hline gg + (b+2cf+3dff)y + (c+3df)yy + dy^3 \end{array}$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, also daß die beyden obigen Methoden angewandt werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden; nemlich $x=f+y$.

121.

Bisweilen hilfft es aber auch nichts, wann man gleich einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1+x^3$, welche ein Quadrat wird, wann man setzt $x=2$. Dann setzt man diesem zu folge $x=2+y$, so kommt diese Formel heraus $9+12y+6yy+y^3$, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon nach der ersten Regel die Wurzel $=3+py$, so wird $9+12y+6yy+y^3=9+6py+ppyy$; wo seyn muß

$12 = 6p$ und $p = 2$; alsdann wird $6 + y = pp = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + 6qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$ wo seyn muß erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$, hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; dahero $y = 3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschloßen werden kann; dann wollte man setzen $x = -1 + z$, so käme diese Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß diese Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne außer diesen drey Fällen:

$$\text{I.) } x = 2,\ \text{II.) } x = 0,\ \text{III.) } x = -1,$$

welches aber auch aus andern Gründen bewiesen werden kann.

122.

Zur Uebung wollen wir noch diese Formel betrachten $1 + 3x^3$, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird

$$\text{I.)} x = 0,\ \text{II.)} x = 1,\ \text{III.)} x = 2,$$

und wir wollen sehen, ob wir noch andere solche Werthe finden können?
Da nun bekandt daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$; und da bekommt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9yy + 3y^3$, davon sey die Wurzel $2 + py$ also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$, wo seyn muß $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$; die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$ und $y = -\frac{21}{16}$; folglich $x = -\frac{5}{16}$, da dann $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel ist $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$; wollte man nun weiter setzen $x = -\frac{5}{16} + z$, so wurde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen $2 + py + qyy$ also daß seyn soll

$$4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + 4qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4,$$

so mußte erstlich seyn $9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$; hernach $9 = 4q + pp = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Glieder wird $3 = 2pq + qqy = \frac{567}{128} + qqy$, oder $567 + 128qqy = 384$, oder $128qqy = -183$, das ist $126 \cdot \frac{63}{64} y = -183$, oder $42 \cdot \frac{63}{64} y = -61$, dahero $y = -\frac{1952}{1323}$, folglich $x = -\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der obigen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

123.

Hier haben wir aus dem bekandten Fall $x=1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen wann man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitlauffige Bruche gerathen wurde.

Dahero hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x=2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches ohnezweifel ein Zeichen ist von der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode.

Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x=2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x=2+y$, also daß diese Formel ein Quadrat seyn soll $25+36y+18yy+3y^3$; hievon sey die Wurzel nach der ersten Methode $5+py=-\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$, so wird

$$25+36y+18yy+3y^3=25+10py+ppyy,$$

und also $36=10p$ oder $p=\frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern, durch yy dividirt, $18+3y=pp=\frac{324}{25}$, und daher $y=-\frac{42}{25}$, und $x=\frac{8}{25}$, daraus wird $1+3x^3$ ein Quadrat davon die Wurzel ist $5+py=-\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5+py+qyy$, so wird

$$25+36y+18yy+3y^3=25+10py+10qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4;$$

wo um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen seyn muß $36=10p$, $q=\frac{18}{5}$ oder $p=\frac{18}{5}$; hernach $18=10q+pp$, und $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{126}{25}$, und $q=\frac{63}{125}$, die übrigen Glieder, durch y^3 getheilt, geben $3=2pq+qqy$, oder $qqy=3-2pq=-\frac{393}{625}$; also $y=-\frac{3275}{1323}$ und $x=-\frac{629}{1323}$.

124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grund es gantz leicht ist so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel geschieht $1-x-xx+x^3$, wo auf eine allgemeine Art genommen werden kann $x=nn-1$, und da n eine jegliche beliebige Zahl bedeutet.

Dann wann $n=2$, so wird $x=3$, und unsere Formel $1-3-9+27=16$. Nimmt man $n=3$, so wird $x=8$ und unsere Formel $=1-8-64+512=441$.

Es ereignet sich aber hier ein gantz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu dancken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wann wir unsere Formel in Factores auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich dieselbe durch $1-x$ theilen laße und der Quotient seyn werde $1-xx$, welcher weiter aus diesen Factoren besteht $(1+x(1-x)$; also daß unsere Formel diese Gestalt erhält:

$$1-x-xx+x^3=\left(1-x\right)(1+x)(1-x)=(1-x)^2(1+x).$$

Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1+x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt wann $1+x$ ein Quadrat ist so wird auch $(1-x)^2(1+x)$ ein Quadrat, man darf also nur setzen $1+x=nn$, so bekommt man so gleich $x=nn-1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerckt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125.

Bey einer jeden gegebenen Formel ist es demnach sehr gut dieselbe in Factores aufzulösen, wann es nemlich möglich ist.

Wie dieses anzustellen sey, ist schon oben angezeigt worden; man setzt nemlich die gegebene Formel $=0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, da dann eine jede Wurzel z. E. $x=f$, einen Factor $f-x$ dargiebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler sind der bloßen Zahl.

126.

Dieser Umstand trifft auch ein bey unserer allgemeinen Formel

$$a+bx+cxx+dx^3,$$

wann die zwey ersten Glieder wegfallen, also daß $cxx+dx^3$ ein Quadrat seyn soll; dann alsdann muß auch nothwendig diese Formel durch das Quadrat xx dividirt, nemlich $c+dx$ ein Quadrat seyn, da man dann nur setzen darf $c+dx=nn$, um zu bekommen $x=\frac{nn-c}{d}$, welche auf einmahl unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

127.

Wann man bey dem Gebrauch der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wolte um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale. Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die vorgegebene Formel $ff+bx+cxx+dx^3$, und man setze die Wurzel davon $=f+px$, so wird

$$ff+bx+cxx+dx^3 = ff+2fpx+ppxx,$$

wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt geben $b+cx+dxx=2fp+ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird wie folget

$$x=\frac{pp-c+\sqrt{(p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd)}}{2d}.$$

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

CAPITEL 9

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ ex^4)}$ RATIONAL ZU MACHEN

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zu gleich unsere Untersuchung über die Quadrat-Wurzel-Zeichen endigen müßen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadrate machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wann das erste Glied a ein Quadrat; der andere, wann das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall wann das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f+px$ setzen , und p so bestimmen, daß die beyden erste Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch xx theilen ließen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neu es Wurzel-Zeichen erfordern. Man muß also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f+px+qxx$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, da dann nur eine einfache Gleichung heraus kommt, aus welcher x ohne WurzelZeichen bestimmt werden kann.

130.

Man setze dahero die Wurzel $= f+px+qxx$, also daß seyn soll

$$ff+bx+cxx+dx^3+ ex^4 = ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+ qqx^4$$

wo die ersten Glieder von selbsten wegfallen; für die zweyten setze man $b=2fp$, oder $p=\frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn $c=2fq+pp$, oder $q=\frac{c-pp}{2f}$ ist dieses geschehen, so laßen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung $d+ex=2pq+qqx$: woraus gefunden wird

$$x=\frac{d-2pq}{qq-e}, \text{ oder } x=\frac{2pq-d}{e-qq}.$$

131.

Es ist aber leicht zu sehen daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wann das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wann so wohl $b=0$ als $c=0$, weil alsdann $p=0$ und $q=0$; folglich $x=\frac{d}{-e}$, woraus aber gemeiniglich nichts neues gefunden werden kann, dann in diesem Fall wird offenbahr $dx^3+ex^4=0$, und allso unsere Formel dem Quadrat *ff* gleich. Insonderheit aber, wann auch $d=0$, so kommt $x=0$, welcher Werth nichts weiter hilft, dahero diese Methode für solche Formel $ff+ex^4$ keine Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet sich auch, wann $b=0$ und $d=0$, oder wann das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel diese Gestalt hat $ff+cxx+ex^4$; dann da wird $p=0$ und $q=\frac{e}{2f}$, woraus gefunden wird $x=0$, welcher Werth so gleich in die Augen fallt und zu nichts weiter führet.

132.

II.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}.$$

Diese Formel könnte so gleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man setzet $x=\frac{1}{y}$, dann weil alsdann diese Formel $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{y^2}+\frac{d}{y^3}+\frac{gg}{y^4}$ ein Quadrat sein müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrat y^4 multiplicirt ein Quadrat bleiben; alsdann aber bekommt man diese Formel

$$ay^4+by^3+cyy+dy+gg,$$

welche rückwerts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon also ansetzen $gxx+px+q$, oder umgekehrt $q+px+gxx$, da dann

$$a+bx+cxx+dx^3+ggx^4=qq+2pqx+2gqxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

weil sich nun hier die fünfte Glieder von selbsten aufheben, so bestimme man erstlich *p*, also daß sich auch die vierte Glieder aufheben, welches geschieht wann $d=2gp$ oder $p=\frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter *q*, also daß sich auch die dritten Glieder aufheben welches geschieht wann $c=2gq+pp$, oder $q=\frac{c-pp}{2g}$; ist dieses geschehen, so geben die zwey ersten Glieder diese Gleichung $a+bx=qq+2pqx$, woraus gefunden wird

$$x=\frac{a-qq}{2pq-b},\ \text{oder } x=\frac{qq-a}{b-2pq}.$$

133.

Hier ereignet sich wiederum der oben angeführte Mangel, wann das zweyte und vierte Glied fehlt, oder wann $b=0$ und $d=0$; dann da wird $p=0$ und $q=\frac{c}{2g}$, hieraus also $x=\frac{a-qq}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führet als der Werth $x=0$ im erstern Fall; dahero diese Methode bey solchen Gleichungen $a+cxx+ggx^4$ gar nicht gebraucht werden kann.

134.

III.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}.$$

Es ist klar daß bey dieser Formel beyde obige Methoden angebracht werden können, dann da das erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel setzen $f+px+qxx$ und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel auch setzen $q+px+gxx$, und die drey letzten Glieder verschwinden machen, da man dann zwey Werthe für *x* heraus bringt.

Allein man kann auch diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln, die derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzt man die Wurzel $f+px+gxx$, und bestimmt *p* also daß die zweyten Glieder wegfallen, weil nemlich sein soll:

$$ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4=ff+2fpx+2fgxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

so mache man $b=2fp$ oder $p=\frac{b}{2f}$, und weil alsdann nicht nur die ersten und letzten Glieder sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen durch *xx* dividirt diese Gleichung $c+dx=2fg+pp+2gpx$, woraus gefunden wird

$$x=\frac{c-2fg-pp}{2gp-d}\ \text{oder } x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}.$$

Hier ist insonderheit zu mercken daß da in der Formel nur das Quadrat *gg* vorkommt, die Wurzel davon *g* so wohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für *x* erhält, nemlich

$$x=\frac{c+2fg-pp}{-2gp-d} \text{ oder } x=\frac{pp-2fg-c}{d+2gp}.$$

135.

Es giebt auch noch ein anderer Weg diese Formel aufzulösen: man setzt nemlich wie vorhero die Wurzel $= f+px+gxx$, bestimmt aber p dergestalt, daß die vierten Glieder sich einander aufheben nemlich man setzt in der obigen Gleichung $d=2gp$ oder $p=\frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit g dem letzten wegfällt, so geben die übrigen durch x dividirt diese einfache Gleichung $b+cx=2fp+2fgx+ppx$, woraus man findet

$$x=\frac{b-2fp}{2fg+pp-c};$$

wobey zu mercken daß weil in der Formel nur das Quadrat ff vorkommt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, also daß auch seyn wird

$$x=\frac{b+2fp}{pp-2fg-c}$$

also daß auch hieraus zwey neue Werthe für x gefunden werden und folglich durch die bisher erklärte Methode in allem sechs neue Werthe heraus gebracht worden.

136.

Hier ereignet sich aber auch wiederum der verdrießliche Umstand, daß wann das zweyte und vierte Glied mangelt, oder $b=0$ und $d=0$, kein tüchtiger Werth für x erausgebracht werden kann, und also die Auflösung dieser Formel $ff+cxx+ggx^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Dann weil $b=0$ und $d=0$, so hat man für die beyde Arten $p=0$, und dahero giebt die erste $x=\frac{c-2fg}{0}$, die andere Art aber $x=0$, aus welchen beyden nichts weiter gefunden werden kann.

137.

Dieses sind nun die drey Formeln auf welche die bisher erklärten Methoden angewandt werden können; wann aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x errathen hat durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Laßt uns demnach setzen, man hätte schon gefunden daß unsere Formel ein Quadrat werde wann man setzt $x=h$, also daß $a+bh+chh+dh^3+eh^4=kk$, so darf man nur setzen $x=h+y$, so bekommt man eine neue Formel in welcher das erste Glied seyn wird kk und also ein Quadrat, dahero der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandelung kann auch gebraucht werden, wann man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. E. $x=h$ gefunden hat; dann da darf man nur setzen $x=h+y$, so erhält man eine neue Gleichung auf welche die obige Methode angewandt werden könne: da man dann aus dem schon gefundenen Werthe für x andere neue herausbringen kann, und mit diesen neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren und also immer mehr neue Werthe für x ausfindig machen.

138.

Insonderheit aber ist von den schon öfters gemeldeten Formeln wo das zweyte und vierte Glied mangelt zu mercken, daß keine Auflösung von denselben zu haben ist, wofern man nicht schon eine gleichsam erratben hat; wie aber alsdann zu verfahren sey, wollen wir bey dieser Formel $a+ex^4$ zeigen, als welche sehr oft vorzukommen pflegt.

Wir wollen also setzen man habe schon einen Werth $x=h$ errathen, also daß da sey $a+eh^4=kk$, um nun daraus noch andere zu finden setze man $x=h+y$, so wird diese Formel ein Quadrat seyn müßen

$$a+eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$$

das ist $kk+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$ welche zu der ersten Art gehöret; man setze dahero die Quadrat-Wurzel davon $k+py+qyy$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrat

$$kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$$

wo erstlich p und q so bestimmt werden müßen daß auch die zweyten Glieder wegfallen, weswegen seyn muß $4eh^3=2kp$ und also $p=\frac{2eh^3}{k}$; ferner $6ehh=2kq+pp$, dahero $q=\frac{6ehh-pp}{2k}$, oder $q=\frac{3ehhkk-2eeh^6}{k^3}$, oder $q=\frac{ehh\left(3kk-2eh^4\right)}{k^3}$; folglich da $eh^4=kk-a$, so wird $q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$; hernach geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt $4eh+ey=2pq+qqy$, woraus gefunden wird

$$y=\frac{4eh-2pq}{qq-e},$$

wovon der Zehler in diese Form $y=\frac{4ehk^4-4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner da $eh^4=kk-a$, in dieser verwandelt wird $\frac{4ehk^4-4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh\left(-akk+2a^2\right)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}$. Der Nenner aber $qq-e$ wird $=\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2-ek^6}{k^6}$, und dieses wird $=\frac{e\left(3ak^4-4a^3\right)}{k^6}=\frac{ea\left(3k^4-4aa\right)}{k^6}$, woraus der gesuchte Wert seyn wird

$$y=\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}\cdot\frac{k^6}{ea\left(3k^4-4aa\right)},\ \text{das ist } y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$$

und dahero

$$x=\frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa},\ \text{oder}\ \frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}.$$

Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel, nemlich $a+ex^4$, ein Quadrat davon die Wurzel seyn wird $k+py+qyy$, so zu dieser Form gebracht wird:

$$k+\frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa}+\frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{\left(3k^4-4aa\right)^2},$$

weil aus den obigen ist

$$p=\tfrac{2eh^3}{k}, \text{ und } q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}, \text{ und } y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}.$$

139.

Wir wollen bey dieser Formel $a+ex^4$ noch stehen bleiben und weil der Fall $a+eh^4=kk$ bekandt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen weil so wohl $x=-h$ als $x=+h$, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art verwandeln wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Solches geschieht wann wir setzen $x=\frac{h(1+y)}{1-y}$, welcher Kunstgrif öfters gute Dienste thut, also wird unsere Formel:

$$\frac{a(1-y)^4+ek^4(1+y)^4}{(1-y)^4} \text{ oder } \frac{kk+4(kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^3+kky^4}{(1-y)^4};$$

hiervon setze man die Quadrat-Wurzel nach dem dritten Fall $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, also daß der Zähler unserer Formel gleich seyn muß diesem Quadrat

$$kk+2kpy-2kkyy+ppyy-2kpy^3+kky^4.$$

Man mache daß die zweyten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $4kk-8a=2kp$, oder $p=\frac{2kk-4a}{k}$; die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $6kk+4(kk-2a)y=-2kk+pp-2kpy$, oder $y(4kk-8a+2kp)=pp-8kk$, da nun $p=\frac{2kk-4a}{k}$, und $pk=2kk-4a$, so wird $y(8kk-16a)=\frac{-4k^4-16akk+16aa}{kk}$, folglich $y=\frac{-k^4-4akk+4aa}{kk(2kk-4a)}$; um nun daraus x zu finden, so ist erstlich $1+y=\frac{k^4-8akk+4aa}{kk(2kk-4a)}$, und denn zweytens $1-y=\frac{3k^4-4aa}{kk(2kk-4a)}$ also $\frac{1+y}{1-y}=\frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}$; folglich bekommen wir

$$x=\frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}\cdot h,$$

welches aber der nemliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Formel gegeben $2x^4-1$, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a=-1$ und $e=2$, der bekante Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird, ist wann $x=1$: also ist $h=1$ und $kk=1$, das ist $k=1$; hieraus erhalten wir also sogleich diesen neuen Werth $x=\frac{1+8+4}{3-4}=-13$, weil aber von x nur die vierte Potestät vorkommt, so kann man auch setzen $x = +\ 13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekant an, so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für *x* gefunden wird, nemlich

$$x = \tfrac{32628o8641+456968+4}{9788425923-4} \cdot 13 \;= \tfrac{3263265613}{9788425919} \cdot 13, \text{ also wird } x = \tfrac{42422462969}{9788425919}.$$

141.

Auf gleiche Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cxx + ex^4$ betrachten, und für den bekanten Fall, da dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, also daß $a + chh + eh^4 = kk$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x = h + y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ chh + 2chy + cyy \\ eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline kk + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^3 + ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist: man setze demnach die Quadrat-Wurzel davon $k + py + qyy$, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll

$$kk + 2kpy + 2kqyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4;$$

nun bestimme man *p* und *q* also daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, worzu erfordert wird, erstlich daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch+2eh^3}{k}$, hernach aber daß $c + 6ehh = 2kq + pp$, oder $q = \frac{c+6ehh-pp}{2k}$; alsdann geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung $4eh + ey = 2pq + qqy$, daraus gefunden wird $y = \frac{4eh-2pq}{qq-e}$ und daraus ferner $x = h + y$; in welchem Fall die Quadrat-Wurzel aus unsere Formel seyn wird $k + py + qyy$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekanten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann demnach solcher Gestalt so weit fortgehen als man will.

142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1 - xx + x^4$ wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekante Fall fällt so gleich in die Augen nemlich $x = 1$, also daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzt man nun $x = 1 + y$, und die Quadrat-Wurzel unserer Formel $= 1 + py + qyy$, so muß erstlich seyn $p = 1$ und hernach $q = 2$; hieraus wird gefunden $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekante Fall ist, und also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = \pm 1$.

143.

Es sey ferner diese Formel zum Exempel gegeben $2-3xx+2x^4$, wo $a=2, c=-3$ und $e=2$. Der bekante Fall giebt sich auch sogleich, nemlich $x=1$: es sey demnach $h=1$, so wird $k=1$; setzt man nun $x=1+y$ und die Quadrat-Wurzel $1+py+qyy$, so wird $p=1$ und $q=4$, daraus erhalten wir $y=0$ und $x=1$, woraus wieder nichts neu es gefunden wird.

144.

Ein anderes Exempel sey diese Formel $1+8xx+x^4$ wo $a=1$, $c=8$ und $e=1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x=2$; dann nimmt man $h=2$ so wird $k=7$, setzt man nun $x=2+y$, und die Wurzel $7+py+qyy$ so muß seyn $p=\frac{32}{7}$, und $q=\frac{272}{343}$; hieraus erhalten wir $y=-\frac{5880}{2911}$ und $x=-\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen *minus* weggelaßen werden kann. Bey diesem Exempel aber ist zu mercken, daß weil das letzte Glied schon vor sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Fall angenommen werden kann.

Es sey demnach wie vorher $x=2+y$ so bekommen wir

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32+32y+8yy \\ 16+32y+24yy+8y^3+y^4 \\ \hline 49+64y+32yy+8y^3+y^4 \end{array}$$

welche jetzt auf mehrerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann; dann erstlich kann man die Wurzel $7+py+yy$ setzen, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll $49+14py+14yy+ppyy+2py^3+y^4$; nun kann man die letzt ohn eine Glieder verschwinden machen, wann man setzt $2p=8$, oder $p=4$; da dann die übrigen durch y dividirt geben

$$64+32y=14p+14y+ppy=56+30y,$$

und daher $y=-4$ und $x=-2$, oder $x=+2$, welches der bekante Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweyten Glieder wegfallen, so wird $14p=64$ und $p=\frac{32}{7}$; da dann die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $14+pp+2py=32+8y$ oder $\frac{1710}{49}+\frac{64}{7}y=32+8y$, und daher $y=-\frac{71}{28}$, folglich $x=-\frac{15}{28}$, oder $x=+\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, davon die Wurzel ist $\frac{1441}{784}$.

Da auch $-yy$ die Wurzel ist des letzten Glieds, so kann man die Quadrat-Wurzel davon also setzen $7+py-yy$, oder die Formel selbst diesem Quadrat gleich $49+14py-14yy+ppyy-2py^3+y^4$. Um nun die letzt ohn eine Glieder wegzubringen setze man $8=-2p,$ oder $p=-4$, so geben die übrigen durch y dividirt $64+32y=14p-14y+ppy=56+2y$, daraus wird $y=-4$ wie oben.
Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64=14p$ und $p=\frac{32}{7}$; die übrigen aber durch yy dividirt geben $32+8y=-14pp-2py$, oder $32+8y=\frac{338}{49}-\frac{64}{7}y$, daraus wird $y=-\frac{71}{28}$ und $x=\pm\frac{15}{28}$, welches mit dem obigen einerley ist.

145.

Eben so kann man verfahren mit der allgemeinen Formel

$$a+bx+cxx\ dx^3+ex^4,$$

wann ein Fall, nemlich $x=h$, bekant ist, da dieselbe ein Quadrat, nemlich *kk*, wird: dann alsdann setze man $x=h+y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern davon das erste seyn wird *kk;* wird nun die Wurzel davon gesetzt $k+py+qyy$, und man bestimmt *p* und *q* dergestalt daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten durch y^3 dividirt eine einfache Gleichung, woraus *y* und folglich auch *x* bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von *x* mit dem bekanten $x=h$ einerley ist, weil alsdann nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird.

146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadrat-WurzelZeichen, da nemlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von *x* vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen so betrachte man diese Formel $kk+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist, wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k+px+qxx$ und *p* und *q* so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus *x* durch ein neues Wurzel-Zeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel setzen $k+px+qxx+rx^3$ so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, allso daß wann gleich *p, q,*und *r* so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzel-Zeichen aufgelößt werden könnte. Dahero wir genöthiget sind hiemit die Formeln die ein Quadrat seyn sollen zu verlaßen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzel-Zeichen fortschreiten.