FIRST BOOK ; SECTION 1

ON THE DIFFERENT ARTS OF RECKONING BY SIMPLE PROPORTIONS

CHAPTER 1

THE GENERAL MATHEMATICAL STUDY

1.

In the first place, anything which is capable of some increase or decrease, or which still allows itself to have something added on or taken away, is called a magnitude.

Therefore a sum of money is a magnitude, because it lets more be added on or taken away.

Similarly, also a weight is a magnitude, and other things likewise.

2.

There are so very many different kinds of variables that it would be very difficult to do an numeration of these ; and from that the various parts of mathematics come about, any one of these is concerned with a particular kind of variable, and therein lies the origin of the different parts of mathematics, each of which employing a particular kind of magnitude. Mathematics in general is none other than the science of these quantities, and which allows the means to be found, of how one should measure the same.

3.

Now we are unable to measure or to determine a single quantity, without looking at another quantity of the same kind, and by noting the relation of one to the other.

So when the size of a sum of money should be determined, so will a certain piece of money, e.g. a gulden, a ruble, a dollar, a ducat, and the like, be taken as known, and shown how many similar pieces are included in reporting the sum.

Just as when the magnitude of a weight is required to be measured, then a certain weight such as e.g. a pound, one hundredweight, or an ounce, and the like may be taken for the known amount, and this shows how many are contained in the previous weight.

But should a length or a distance be measured, thus one takes care of that with a certain known length, such as by using a known foot.

4.

By definition, or by measuring magnitudes of all kinds, it is therefore important, that in the first place a certain known magnitude of some kind will be fixed in place (which shall be called the measure or the unit) and so depends entirely on our choice ; after that, one must determine what kind of relation this specified magnitude bears to this measure, so that the relation is only a number, whereby one magnitude stands against another, which is chosen for the unit.

5.

Hence it is clear, that all such magnitudes can be expressed by numbers, and thus the basis of all mathematical knowledge must be set within that discipline of numbers, and all the art of reckoning, so thereby knowing how to find the ways of counting exactly, to draw out carefully, and to understand completely.
This fundamental part of mathematics will be known as analysis or algebra.

6.

In analysis thus numbers alone merely are to be considered, through which the magnitudes are indicated, without worrying oneself about the particular kinds of magnitudes, as that happens in the other part of mathematics.

7.

Arithmetic or the art of reckoning handles numbers in particular, but it extends alone only to the kind of reckoning which occur often in ordinary life, analysis however, undertakes in a general way all the cases that can have a place in the teaching and calculation of numbers.

CHAPTER 2

EXPLANATION OF THE SIGNS + PLUS AND – MINUS

8.

When it is required to add a number to another given number in place, that is indicated by the sign $+$, which is put before the second number and is called *plus*.
Thus by 5 + 3 will be implied, that to the number 5 still 3 is be added, since one knows there, that 8 comes out ; just as e.g.

$$12+7 \text{ is } 19\text{ ; } 25+16 \text{ is } 41 \text{ and } 25+41 \text{ is } 66 \text{ etc.}$$

9.

By this sign + plus more numbers also to be connected can be taken care of, e.g. whereby 7 + 5 + 9 will become shown, so that to the number 7 still 5, and to this still 9 shall be added, which constitutes 21. Therefore one understands what this next formula indicates, as:

$$8+5+13+11+1+3+10,$$

namely, the sum of all these numbers, which amounts to 51

10.

As this is clear by itself, it has to be noted still that numbers are indicated in a general way by letters, such as *a, b, c, d,* etc., so when you write $a+b$, this means the sum of both numbers which now are expressed by *a* and *b*, and the same numbers can be as large or as small as they wish. Also $f+m+b+x$ means the sum of the numbers which are indicated by these letters.

In any one case, when one knows merely what numbers are indicated by those letters, the sum or the value of such like formulas can be found by the arithmetic.

11.

When on the other hand from one number another is to be removed, or subtracted, so such will be indicated by the sign - minus, which is so much less and which is put before the number to be taken away: So $8-5$ signifies that from the number 8 the number 5 is to be taken away, since then what is known as 3 is left behind. Just as $12-7$ is as much as 5, and $20-14$ is as much as 6, etc.

12.

It can also happen that from a number more numbers should also be subtracted together, as e.g.:

$$50-1-3-5-7-9$$

What is to be understood thus: first one takes 1 away from 50, 49 remain ; from that 3 is taken away, 46 remain ; of which 5 away, 41 remain ; from which 7 away, 34 remain ; from which the last 9 taken away, leaves 25, which is the value of the given formula. But there the numbers 1, 3, 5, 7, 9, all together should be taken away, so it's just as much as when to their sum namely 25 at once is taken from 50, since then, as before, 25 remain left.

13.

It is so easy also to determine the value of such formulas, in which both the signs + plus and - minus occur; such as e.g.

$$12-3-5+2-1 \text{ is as much as } 5.$$

Or one allows only the sum of those numbers to have themselves only the + sign taken especially: to make 14, and from that to have the sum of the other numbers, which are 3, 5, 1, which is 9 to subtract, there then will be found 5 as before.

14.

Therefore it is clear, that it does not depend on the order of the numbers come upon set out here, but rather that one can put the same as it pleases, as long as each one only maintains the preceding sign ; so, instead of the above form one can set down

$$12+2-5-3-1,\ \text{or}\ \ 2-1-3-5+12,\ \text{or}\ \ 2+12-3-1-5\,;$$

although note that in the above formula, the + sign must be put in front before the number 12.

15.

When one now makes the calculation in general, instead of with actual numbers, letters are needed, so that one can understand the significance from that, as e.g.

$$a-b-c+d-\ e,$$

that these numbers expressed by the letters *a* and *d* become added together, and from that the remaining *b, c, e,* which have the $-$ sign taken together must be taken away.

16.

Here also the main point appears, what sign any one number has in place before itself; hence one looks after the numbers with their preceding sign in algebra, as an individual magnitude to be considered, and those which themselves have the $+$ sign before, to be called affirmative or positive magnitudes ; but those which themselves have the – sine before, to be called negating or negative magnitudes.

17.

This can be explained nicely by the way in which the assets of a person are accustomed to be displayed, because that which actually they have is printed by positive numbers with the plus sign +, but what is owed by negative numbers with the minus sign –. So when someone has 100 rubles, but 50 of that is owing, their assets will be $100-50$, or what is the same thing, $+100-50$, which is 50

18.

Now that the negative numbers can be considered as debt, so far as the positive numbers show the real possessions, one can say that the negative numbers are less than nothing, so if one has nothing else in assets and still 50 rubles is owed from that, he must really have 50 rubles less than nothing, and then if someone should present him with 50 rubles in order to pay his debts, he would then only have nothing, since he now had more than before.

19.

So now without argument the positive numbers are greater than zero, and the negative numbers are less than nothing. But the positive figures arise when you first put 0 or nothing in place, continually one is added to be put in place and from that the sequence of natural numbers arises, namely

$$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7+8+9+10\,,$$

and so on ad infinitum.

But this series can be continued backwards, and always one more removed, so arises the following series of negative numbers

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -\ 7, -8, -9, -10,$$

and so forth without end.

20.

All these numbers, both positive as well as negative, lead to the known names of the whole numbers, which are thus either greater or less than nothing. One calls the same *integers* to be distinguished from fractional numbers, and still many other different kinds of numbers which will be treated below. Then there, for example, 50 is one greater than 49, and one can understand easily that between 49 and 50 still endless intermediate numbers can be found indefinitely, which are all greater than 49, but still less than 50. One can imagine to this end two lines only, one of which is 50 feet, but the other is 49 feet long, so one can understand easily that infinitely other lines can be drawn, which are all longer than 49 but shorter than 50 feet.

21.

This concept of the negating or of negative values is to be noted most carefully, because is the equally over all algebra of the greatest importance. Here it suffices to observe in advance that this formula e.g.

$$+\ 1-1,\ \ +2-2,\ \ +3-3,\ \ +4-4, \text{ and so forth,}$$

all are as much as 0, or nothing; further, that e.g. $+2-5$ equals -3, because when someone has 2 rubles, and he is 5 rubles in debt, not only has he nothing, but still remains 3 rubles in debt ; just as

$$7-12 \quad \text{equals } -5$$
$$25-40 \text{ equals } -15.$$

22.

Precisely this is observed also when letters are used in a general way instead of numbers, then there is always equal to 0 or nothing. Afterwards if one wants to know what e.g. $+a-b$ means, so to two cases are to be considered.

The 1st case is when a is greater than b, here one subtracts b from a, and the remainder kept is the value sought.

The 2nd case is when a is less than b, here one subtracts a from b, and the remainder is taken negatively, or the *minus* sign $-$ indicates the value sought.

CHAPER 3

MULTIPLICATION BY SIMPLE MAGNITUDES

23.

When two or more like numbers are to be added together, the sum itself may thus also be expressed in a shorter way :

$a+a$	equals $2\cdot a$, and
$a+a+a$	" $3\cdot a$, further
$a+a+a+a$	" $4\cdot a$, and so on.

From which the idea of multiplication originates, namely that

$2\cdot a$ equals 2 by a, and
$3\cdot a$ equals 3 by a, further
$4\cdot a$ equals 4 by a, and so on.

24.

So that when one number expressed by a letter shall be multiplied by any other number, the number merely will be written before the letter; thus,

a multiplied by 20 is $20a$, and
b multiplied by 30 is $30b$, etc.

A single c is such a form, taken once, or $1c$, which equals c.

25.

Such products can be multiplied still further by other numbers, thus e.g.

2 by $3a$ makes $6a$
3 by $4b$ makes $12b$
5 by $7x$ makes $35x$,

which can be multiplied still further by numbers at will.

26.

When the number with which it is wished to multiply, shall also be represented by a letter, so must it be put directly in front of the other characters, so when b is to be multiplied by a, thus the product is called ab, and pq is the product that arises when one multiplies the number q by p. If you wish to multiply pq still further by a thus apq comes about.

27.

Here it should be noted well, that also the order in which the letters are put in place to one another does not matter; for indeed ab is equal to ba, or b and a multiplied together, just makes so much as a multiplied by b. To understand this one must only know the numbers for a and b, as 3 and 4 taken themselves in turn, so that 3 times 4 is as much as 4 times 3

28.

When instead of the letters which are written directly after each other, actual numbers are to be put in place, then it is seen easily that the same cannot be written immediately after one other. Then if you wanted to write 34 for 3 times 4, such would not be twelve but thirty-four. If a multiplication were to be indicated by mere numbers in such a manner, one should place a point between the same: So $3\cdot 4$ is 3 times 4, that is 12, just as $1\cdot 2$ is equal to 2 and $1\cdot 2\cdot 3$ equals 6; also $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 56$ is 1344, and $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$ is 3628800 etc.

29.

Also from this it emerges now what a formula such as $5\cdot 7\cdot 8\cdot abcd$ means; namely, 5 is multiplied in the first place by 7, and that product further by 8, this product afterwards by a, and this again by b, then by c, and finally multiplied by d ; whereby note, that instead of $5\cdot 7\cdot 8$, the value of which can be written as 280, namely the number 5 times 7 is 35, and 8 times 35 is 280 .

30.

Further it is to be noted, that such formulas that originate from the multiplication of more numbers, are to be known as products. But numbers or letters, which are separate, it is customary to call factors.

31.

Until now we have treated only positive numbers, and there is no doubt that the products arising hence shall be none other than positive :
: taking $+a$ multiplied by $+b$ gives $+ab$ without argument ; but what comes out, when $+a$ shall be multiplied by $-b$ or $-a$ with b, demands a special discussion.

32.

In the first place, we will multiply $-a$ by 3, or $+3$; because now $-a$ can be seen as a debt, so it is evident when this debt is multiplied by 3, it must become likewise 3 times bigger, thus the product sought is $-3a$. Thus even when $-a$ shall be multiplied by *b*, that is $+b$, thus $-ba$ comes out of this, or equally $-ab$. From this we make this rule, that when a positive magnitude shall be multiplied by a negative magnitude, the product becomes negative ; from which this rule is made, + with plus give + or *plus*. Whereas + multiplied with $-$, or $-$ with + gives $-$ or *minus.*

33.

Now there is still this case remaining to determine : namely when $-$ may be multiplied by $-$, or $-a$ with $-b$. In the first place it is clear, that this product looked at in terms of the letters shall be called *ab* ; but whether the + sign or $-$ sign shall be put by that is unclear still.

But now, I say, the sign cannot be $-$. Then $-a$ multiplied by $+b$ gives $-ab$, and also $-a$ multiplied by $-b$ cannot also give what $-a$ with $+b$ gives, thus it must be that the opposite comes about that, which namely is called $+ab$. Forthwith this rule arises, $-$ multiplied by $-$ again gives + just as + with +.

34.

These rules may be summarised briefly and expressed carefully in these words : Two like signs multiplied by each other give +, but two unlike signs give $-$. So when for example these numbers

$$+a,\ \ -b,\ \ -c,\ \ +d$$

should be multipled, so in the first place $+a$ by $-b$ gives by mulriplcation $-ab$, this with $-c$, gives $+abc$, and this finaly with $+d$, gives $+abcd$.

35.

From that the matter of understanding the sign can be had without difficulty, so it remains still to show how two numbers, that themselves are products already, should be multiplied with each other. When the number *ab* should be multiplied by the number *cd*, so that the product is *abcd,* and so when one first puts in place *ab* by *c,* and then, whatever one found by multiplication, further is multiplied by *d*. Or also , when one for example should multiply the number 36 by 12: because 12 is 3 by 4, so now one notes in the first place 36 to multiply by 3 and from that found, namely 108 to multiply further by 4. From that there arises :

432, which is the same as 12 by 36.

36.

But if one wants to multiply $5ab$ with $3cd$, so one can put together also $3cd\ 5ab$: but here that does not depend on the order the numbers multiply each other, so one puts the mere numbers carefully first and writes the product $5 \cdot 3abcd$ for that, or $15abcd$, because 5 by 3 is equal to 15.

Even so when $12pqr$ should be multiplied by $7xy$, so there is left $12 \cdot 7pqrxy$, or $84pqrxy$.

CHAPTER 4

CONCERNING THE NATURE OF WHOLE NUMBERS WITH REGARD TO THEIR FACTORS

37.

We have noted that a product originates from 2 or more numbers multiplied together. These numbers have been called the factors of that number.

Thus the factors of this product *abcd* shall be the numbers *a, b, c, d.*

38.

Now if one takes all whole numbers into consideration, in so far as the same may be produced by the multiplication of two or more numbers, thus one can find out soon, that some numbers cannot be produced at all by multiplication and hence have no factors, while others can be produced by two or more numbers multiplied together, and consequently may have two or more factors ; thus there is :

4 equals $2 \cdot 2$, further 6 equals $2 \cdot 3$, and
8 equals $2 \cdot 2 \cdot 2$, further 27 equals $3 \cdot 3 \cdot 3$, and
10 equals $2 \cdot 5$, and so forth.

39.

Whereas the numbers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. do not let themselves be represented in such a form through factors, it would then be that one would be taken to help, and for example 2 would become $1 \cdot 2$. With that multiplied by 1 alone, the number will not be changed, so 1 will not be shown among the factors.

All these numbers now, which can become presented by factors, as : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. will be known as one-factor or *prime* numbers; the rest of the numbers but which let themselves be presented through factors as : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc. will be called *composite* numbers.

40.

The one factor or prime numbers deserve also besides to be given special consideration, because these can be put in place without any mutiplication of two or more numbers by each other. Whereby this especially is odd, that when the same become written in order, as : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc., no special order is perceived in them, but the same may soon show an increase, or hardly any increase. And up to now it has no rule, from which the same can be traced to depart.

41.

But composite numbers, which let themselves be shown through factors, all spring from the above prime factors, so that all the factors from that are prime numbers. Then whenever a factor without a prime number, but were composite still, so one could express the same further through two more factors , to be prime numbers. So when the number 30 were expressed by $5\cdot 6$, so 6 is without prime numbers except $2\cdot 3$, and so 30 can be expressed by $5\cdot 2\cdot 3$, or by $2\cdot 3\cdot 5$, where all the factors are prime numbers.

42.

Now one considers all composite numbers, such as which have been set down before through prime numbers, so one finds therein a greater difference, in that some have only 2 two such-like factors, others 3 or more : also as we have just seen

4 equals $2\cdot 2$	6 equals $2\cdot 3$
8 " " " $2\cdot 2\cdot 2$	9 " " " $3\cdot 3$
10 " " " $2\cdot 5$	12 " " " $2\cdot 3\cdot 2$
14 " " " $2\cdot 7$	15 " " " $3\cdot 5$
16 " " " $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	and so forth.

.

43.

Hereupon one is allowed to understand, how from any number one can find their simple factors.

So when the number 360 was given, so that one had in the first place for the same $2\cdot 180$. But now 180 is just as much as $2\cdot 90$ and 90 equals $2\cdot 45$ and 45 equals $3\cdot 15$ and finally15 equals $3\cdot 5$. Subsequently the number 360 can be seen in terms of the following simple factors : $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$, as which numbers all multiplied by one another, produce the number 360.

44.

From this we see also, that the prime numbers do not allow themselves to be divided by another numbers, and on the other hand the composite numbers allow themselves to be separated into their simple fractions, when one searches for all simple factors, through which the same let themselves be divided. Only here does division become needed, the rules of which in the following chapter shall become clear.

CHAPTER 5

DIVISION BY EASY MAGNITUDES

45.

When a number is to be divided into 2, 3, or more equal parts, such as happens through division, which determines to teach the magnitude of such a part. So if the number 12 is to be divided into 3 equal parts, one finds through division, that such a part be 4. One makes use of certain properties. The number one wishes to decompose, that is called the *Dividend* or the number being divided; the number of parts becomes the divisor, or known as the divider. But the size of such a part, which will have been found by division, maintains the *Quotus* or called the *Quotient* : thus for the example cited 12 is the dividend, or the number being divided, 3 the divisor, or the divider, and 4 the quotient.

46.

So when one divides a number by 2 or cuts it into 2 equal parts, so must such a part, which is the quotient taken twice, amount to just the prescribed number ; also when a number is to be divided by 3, as the quotient taken three times must amount to the same number ; indeed generally the dividend always comes out if one multiplies the quotient by the divisor.

47.

Therefore, division can be described thus also, that one may seek such a number for the quotient, which multiplied by the divisor just produces the dividend number. So when for example 35 should be divided by 5, we investigated a number multiplied by 5 which produces 35. This number is therefore 7 because 5 times 7 makes 35. We are accustomed to handle in this type of expression: 5 in 35 I have 7 times, then 5 times 7 is 35

48.

One therefore puts the dividend to stand for a product, of which one of the factors is equal to the divisor, since then the other factor indicates the quotient. So if I should wish to divide 63 by 7, I look for a product, of which 7 is a factor and the other is procured so, that if it may be multiplied by 7, 63 come out exactly right. Such is now $7\cdot 9$, and so 9 is the quotient, which arises when one divides 63 by 7.

49.

When, therefore, a number *ab* of a general kind is to be divided by *a*, the quotient *b* is apparent, because *a* multiplied by *b* makes the dividend. From this it is clear that when *ab* must be divided by *b*, the quotient will become *a*.

So generally in all examples of divisions, when one divides the dividend by the quotient, the divisor must come forth as 24 divided by 6 gives 4, so also vice versa 24 divided by 4 gives 6.

50.

As now everything depends on that, you imagine that the dividend be 2 factors, one of which is to be equal to the divisor, because then the other shows the quotient, one can readily understand the following example. In the first place, the dividend abc divided through by a gives bc, because a multiplied by bc makes abc, just as when abc is divided by b, then ac arises, and dividing abc by b gives ac. From this, $12mn$ divided by $3m$ gives $4n$, because $4n$ multiplied by $3m$ makes $12mn$: but just as if this same number were divided by 12, so mn arises.

51.

Because each single number a can be printed with $1a$, or a, so from this it is evident that if one has to divide a or $1a$ by 1, then the same number a arises for the quotient. On the other hand, when the very same number a or la to be divided by a, then the quotient becomes 1.

52.

But it does not always happen that one can represent the dividend as a product of two factors, one of which is equal to the divisor, and in such cases, the division cannot be achieved in this way. Then when to divide e.g. 24 by 7, as the number 24 has no factor of 7, because $7 \cdot 3$ is only 21, and therefore is too small, whereas $7 \cdot 4$ is already 28, and therefore is too large and that is: therefore one sees that the quotient must be greater than 3, but still less than 4. Therefore, in order to determine the same precisely, a different kind of numbers must be taken to help, namely fractions are to be included, which are treated in the following chapter.

53.

But before one progresses to fractions, so one is content for the quotient to accept the next lowest whole number, but thereby to determine the remainder, which remains spare, so one says 7 into 24 I have 3 times, but the remainder to be 3, because 3 times 7 makes 21 only, so it is too small by 3. Just as the following examples are to be understood, as:

$$\begin{array}{r|r|l}
6 & 34 & 5 \\
 & 30 & \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{r}{4} &
\end{array}$$

namely the divisor is 6,
the dividend is 34,
the quotient is 5
the remainder is 4

$$\begin{array}{r|r|l}
9 & 41 & 4 \\
 & 36 & \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{4} & \multicolumn{1}{r}{5} &
\end{array}$$

and here the divisor is 9
the dividend 41
the quotient 4
the remainder is 5

In such examples where a remainder is left over the following rule is to be noted.

54.

In the first place, that when one multiplies the divisor with the quotient, and the remainder still is added to the product, then the dividend must arise, and that way you wont to rehearse the division, whether or not they had quite expected. So in the first of the last two examples, we multiplied, is 30, add 4 to the remainder, is just the dividend 34 Also in the last example of when to multiplying the divisor 9 with the quotient 4 and 36 product still added the remaining 5, one gets the dividend 41.

55.

Finally, this is also necessary with respect to the signs + plus and – minus to note that when $+ab$ shall be divided by $+a$, the quotient will be $+b$, which is clearly evident. But when $+ab$ shall be divided by $-a$, the quotient will become $-b$, because $-a$ multiplied by $-b$ gives $+ab$. Furthermore, when the dividend is $-ab$, and it shall be divided by the divisor $+a$, the quotient is $-b$ because $+a$ multiplied by $-b$ gives $-ab$, which is the dividend. Finally should the dividend $-ab$ be divided by the divisor $-a$, the quotient will be $+b$, because $-a$ multiplied by $+b$ becomes $-ab$.

56.

So division allows the same rules for the signs + and – as we have to remember until now for multiplication, namely:
+ by + gives + ; + by – gives – ; – by + gives – ; + by – gives –;
or briefly, equal signs give *plus*, but unequal *minus*.

57.

So when $18pq$ is to be divided by $-3p$ so that the quotient becomes $-6q$;
also: $-30xy$ divided by $+6y$ gives $-5x$
also: $-54abc$ divided by $-9b$ gives $+6ac$, because $-9b$ multiplied with $+6ac$ gives $-6\cdot 9abc$, or $-54abc$, which may be enough for division with simple variables for now. Therefore, we want to proceed to the explanation of fractions, after which we still have something to be noted regarding the nature of numbers, with regard to divisors.

CHAPTER 6

THE PROPERTIES OF WHOLE NUMBERS IN RELATION TO THEIR DIVISORS

58.

Since we have seen that some numbers can be divided by certain divisors, but not others, it is necessary to come to a more particular understanding about numbers, to pay close attention to this difference, so that those numbers themselves can be specified which are divisible by their divisors from those which cannot be so divisible, and at the same time considering the remainder, which is left over by these latter dividers.
To do this, we consider the divisors :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc.

59.

In the first place the numbers are to be divided by 2; hence the numbers which let themselves be so divided throughout, are the following:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, etc,, which then always increase by 2 and so forth. These numbers are generally known as *even* numbers. Whereas the remaining numbers
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, etc., which do not let themselves be divided by 2, with 1 only left remaining, are accustomed to be called *odd numbers*, and so are always either one greater or one less smaller than the even numbers. The even numbers now can all be defined in this general formula $2a$, because when one takes for a all the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc, one by one, from that all the even numbers arise. Whereas all the odd numbers are included in this formula $2a+1$, because $2a+1$ is 1 greater than the even number $2a$.

60.

Secondly. The divisor shall be 3, so all the numbers which follow let themselves be divided thus :
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, etc.,
which can be represented by the formula $3a$. Then $3a$, divided by 3
gives a for the quotient, without a remainder ; but the remaining numbers, if one wants to divide them by 3, leave either 1, or 2, for the remainder left, and so are of two kinds.
Those which leave only 1 only, are the following:
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, etc.,
and are contained in this formula $3a+1$. Those of the other kind which leave 2 over are the following:
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, etc.
which are all contained in the formula $3a+2$: so that all these numbers are contained either in the formula $3a$, or in this $3a+1$, or finally in this $3a+2$.

61.

When further the divisor is 4, so all the numbers shall be the following, which allow themselves to be divided thus:

4, 8, 12, 16, 20, 24, etc.

which always increase by 4, and shall be contained in the formula $4a$. But the remaining numbers, which do not let themselves be divided by 4, either leave a remainder of 1 and shall be 1 greater than those, namely:

1, 5, 9, 13,17, 21, 25, etc.

which consequently shall be contained in this formula $4a+1$. Or they leave 2 for the remainder, as:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, etc.

and shall be contained in the formula $4a+2$.
Or finally 3 remains for the left over remainder, such shall be the following numbers:
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, etc.
and they shall be contained in this formula $4a+3$, so that all these numbers shall be contained in one of these four formulas

$$4a,\ 4a+1,\ 4a+2,\ 4a+3 .$$

62.

Just as it behaves in the case is with the divisor 5, since all the numbers which can thus divide, are included in the formula $5a$; but those that this does not allow divide, are either: $5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3,$ or $5a+4$, And so we can progress further to all greater divisors.

63.

Now it comes to the point, which was brought forwards above concerning the resolution of numbers into their simple factors, because any number, of which the factors themselves shall be either: 2, or 3, or 4, or 5, or 7, or any single number found, can also be divided by the same : there for example 60 is as just the same as : $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, so it is clear, that 60 itself can be divided by 2, 3 and also 5.

[Lagrange, in the French edition, adds rules without derivations, showing that certain given numbers are divisible by certain factors.

Thus : a number is divisible by 2 if its last digit is even; by 4 if its last 2 digits are divisible by 4; …. by 8 if last three digits are divisible by 8; and in general it is divisible by 2^n if its last n digits are divisible by 2^n.

Again, a number is divisible by 3 if the sum of the digits is divisible by 3 and by 6 if also the last digit is even; a number is divisible by 9 if the sum of the digits is divisible by 9; a number is divisible by 5 if the last digit is either 0 or 5; a number is divisible if the sum of the even digits shall be equal to the sum of the odd digits.]

64.

Since thereafter in general the formula *abcd* is divisible not only now by *a, b*, *c* and *d*, but also by the following

ab, ac, ad, bc, bd, cd, and also by
abc, abd, acd, bcd, and finally by
abcd, which is allowed to be divided by itself,

so 60 itself, that is $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$, not only can be divided by the simple numbers, but also equally can be divided by numbers that are made up of two simple together, namely by 4, 6, 10, 15, and also by that of three simple factors, that is, 12, 20, 30, and finally also by 60 itself.

65.

When also one has represented any arbitrary number by its simple factors, so it is very easy to display all of those numbers, which can divide the same number. Then you may first place only every one of the simple factors taken take for yourself, afterwards, two, three, four, and so on with each other until you get to multiply the given number itself.

66.

Above all else this is to be remembered here, that every number lets itself be divided by 1, so as also every number lets itself be divide by itself, so that each number has at least two parts or divisors, namely, 1 and itself ; now which numbers besides these two parts, having no other, are precisely those which were listed above as simple or prime numbers.
All composite numbers also have 1 and each themselves, but yet have other divisors, as can be seen from the following table, where all their division have been placed under each number.

Table

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 9 18	1 19	1 2 4 5 20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.						p.		p.	

67.

Yet realizing finally that 0 may be regarded as such a number, which can divide through by all sorts of numbers, because when 0 is divided by any number such as a, the quotient always is 0, then $0\times a$, or $0a$ is 0: because it is well to note also that any number multiplied by 0 will result in nothing.

CHAPTER 7

ABOUT FRACTIONS IN GENERAL

68.

If a number, as for example 7, does not allow itself be divided into parts by another, such as 3, thus of this it only can be understood that the quotient cannot allow itself to be expressed by a whole number, but in no other way does this mean that it is not possible to form an idea of having that quotient.

One is required to put in place a line, which is 7 feet long, thus no one can have doubts, that this line cannot be divided into 3 equal parts, and to have an idea of the size of one part.

69.

Now since one has clearly the idea of a quotient, which can come about in such cases, although it is itself not a whole number, thus we are hereby directed to a different kind of number, which are to be known as *fractions* or *fractional numbers.*

Therefore we have in the above mentioned example, were 7 shall be divided by 3, a clear idea of the quotient arises from that and one is accustomed to designate the same in such a manner $\frac{7}{3}$; where the upper number 7 is put in place which is the dividend, and the lower number 3 put in place is the divisor.

70.

Therefore if in a general way the number a shall be divided by the number b, thus the quotient will be indicated by $\frac{a}{b}$, which shall become known as a fraction in this manner of writing; from which one cannot obtain a better idea of such a fraction $\frac{a}{b}$, than that by saying, it will indicate the quotient which occurs, if one divides the upper number by the lower number. Whereby it is still to be indicated, that equally for all fractions, the lower number is accustomed to be called the *denominator,* while the upper number is the *numerator*.

71.

In the above mentioned fraction $\frac{7}{3}$, which will be spoken about as seven thirds, 7 is the numerator and 3 the denominator. Thus in the same way, these fractions are called :

$\frac{2}{3}$ two thirds, $\frac{3}{4}$ three quarters,
$\frac{3}{8}$ three eights $\frac{12}{100}$ twelve hundredths.

But the number $\frac{1}{2}$ will be known as a half, instead of one second ; then properly $\frac{1}{2}$ is the quotient, which arises, if 1 were cut into two equal parts, since then we can have such a part known as a half.

[From this it would appear that the idea of sharing something equally occurred far earlier in the development of language than for the other fractions.]

72.

In order to learn the nature of fractions correctly, in the first place we will consider this kind, where the upper number or numerator is equal to the lower number or denominator, such as $\frac{a}{a}$. Because now the quotient will be indicated from that, which arises, if on divides a by a : thus it is clear, that this quotient is simply 1, consequently this fraction $\frac{a}{a}$ is as much as 1, or there shall be a complete equality between the following numbers :

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{ etc.},$$

all being equal to each other, and each is itself as much as 1, or all are one.

73.

Now since each single fraction, of which the denominator is equal to the numerator, works out to be one, thus all fractions for which the numerator shall be less than its denominator, shall be less than one. For if I shall divide a smaller number by a larger number, thus it always comes out less than 1 ; if e.g. a line of 2 ft, may be cut into 3 equal parts, thus without dispute one part shall be less than one foot, from which clearly it follows that $\frac{2}{3}$ shall be less than 1, and this on this very account, because the numerator 2 is smaller than the denominator 3.

74.

If on the other hand the numerator shall be greater than the denominator, thus the value of the fraction is greater than one. Therefore $\frac{3}{2}$ is more than 1, because $\frac{3}{2}$ is as great as $\frac{2}{2}$

and $\frac{1}{2}$ again. But now $\frac{2}{2}$ is as large as 1, consequently $\frac{3}{2}$ is as great as $1\frac{1}{2}$ namely the whole and a half again. Just as there shall be:

$\frac{4}{3}$ is as much as $1\frac{1}{3}$; further $\frac{5}{3}$ is as much as $1\frac{2}{3}$; and further $\frac{7}{3}$ shall be as great as $2\frac{1}{3}$.

And generally in these cases one is required to divide the upper number by the lower number, and to the quotient still a fraction in addition to be put in place, of which the remainder is the numerator, but the denominator is the divisor. Therefore for the fraction $\frac{43}{12}$,on divides 43 by 12 and 3 becomes the quotient and 7 for the remainder, therefore $\frac{43}{12}$ is as great as $3\frac{7}{12}$.

75.

From this one sees, how fractions of which the numerators are greater than their denominators, can be resolved into two members, from which the first becomes a whole number but the other a fraction, of which the numerator is smaller than the denominator, called *improper fractions*, because they realize more than one whole number within themselves. On the other hand such are the *proper fractions*, of which the numerators are smaller than the denominators, and the value of which is less than one, or less than a whole number.

76.

It is customary to represent the nature of fractions themselves by yet another method, through which the matter becomes somewhat enlightened: For example if one works out the fraction $\frac{3}{4}$, thus it is clear that the same is 3 times greater than $\frac{1}{4}$. But now the importance of the fraction $\frac{1}{4}$ consists in that, that if one divides 1 into 4 equal parts, one such part shows the same value ; if one adds together three such parts, thus the value of the ratio $\frac{3}{4}$ is obtained.

Just as one can consider in a like manner some other fraction such as $\frac{7}{12}$ if one cuts 1 into 12 equal parts, thus making 7 equal parts of the fraction presented.

77.

The above names mentioned of the numerator and denominator also originate from this presentation. Because then in the above fraction $\frac{7}{12}$ the lower number 12 indicates that 1 must be divided into 12 equal parts, and therefore denotes this part, thus the same properly can be called the denominator. [The German *Nenner* indicates a common property, but this meaning is lost in translation.]

But the above number, namely 7, indicates, that for the value of the fraction 7 equal parts must be taken together, and therefore the same as it were sums these, thus the upper number is called the numerator [in German *Zahler*]

78.

Now we consider the fractions, for which the numerator is 1, as such contain the other reason, because one can understand easily what $\frac{3}{4}$ shall be, if one knows what $\frac{1}{4}$ is, thus the following fractions are similar :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \text{etc.}$$

Hereby it is to be noted, that these fractions always become smaller ; since as a whole is cut into more parts, thus the smaller the parts become also, therefore $\frac{1}{100}$ is smaller than $\frac{1}{10}$; and $\frac{1}{1000}$ is smaller than $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ is smaller than $\frac{1}{1000}$ and $\frac{1}{100000}$ is smaller than $\frac{1}{10000}$.

79.

From this one now sees, that the greater such a denominator becomes, the value of the same fraction must become less and less. Now the question may be posed, whether the denominator cannot be taken to be so great, that the whole fraction vanishes and becomes zero ? But this disagrees with law, since in however many parts one may divide 1, e.g. the length of a foot, thus the parts yet still keep a certain size always and consequently are not equal to nothing.

80.

It is quite true, that if one divides the length of one foot into more than 1000 equal parts, the parts at last can no longer be distinguished by the eye. But as soon as they are viewed through a good microscope, thus they appear so large, that easily anew they can be divided into 100 and still more parts.

But here we are not talking about what we can do, or about what can actually be done, and what the eye can still discern, but rather of that which is itself possible. And that is however certain, that also thus so great a denominator may be taken, the fraction may not disappear completely, or into nothing, or be transformed into 0.

81.

Because now one, as far as the denominator may be increased, can never completely arrive at zero, therefore the fractions still always retain a little size, and thus the above progression of fractions always can be continued further without end, thus one commonly says, that the denominator must be infinitely great, if finally the fraction should become

0 or nothing. Then the word *infinite* here just says thus that one can never come to an end with the fractions announced.

82.

Now in order to put this idea in place, which is indeed firmly established, thus one designates for that this sign ∞, which indicates an infinitely great number: and thus one can say, that this fraction $\frac{1}{\infty}$ to be actually nothing, as on that account, because such a fraction never can become nothing, as long as the denominator cannot be made indefinitely great.

83.

This idea of an infinite number is thus to be noted very carefully, because our first understanding is based on the same, and in the following shall be of the greatest importance. This allows already beautiful consequences to be drawn, which deserves our attention, since this fraction $\frac{1}{\infty}$ indicates the quotient, if one divides this dividend 1 by the divisor ∞. Now we know already, that if one divides the dividend 1 by the quotient, which is $\frac{1}{\infty}$ or 0 as we have seen, as then the divisor come from this, namely ∞; therefore we have a new idea about the infinite, namely that the same arises if one divides 1 by 0 ; consequently one can say basically, that 1 divided by 0 gives an indefinitely great number or indicated by ∞.

84.

It is still necessary here to clear out of the way a fairly common error, as many claim that an infinitely great amount cannot become greater. But this idea cannot be consistent with the above correct principles.

Since there $\frac{1}{0}$ indicates an infinite number, and $\frac{2}{0}$ without strife is twice as great thus it is clear, that also an infinite number can be twice as great as another.

CAPITAL 8

ON THE PROPERTIES OF FRACTIONS

85.

As we have seen, that each of these numbers,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{ and so forth,}$$

amounts to one whole and consequently all are equal to each other ; thus the following fractions,

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \text{etc.}$$

also are equal to each other, because each one of the same works out equal to the whole number two : then any numerator is given divided by the denominator 2. Thus just as all these fractions,

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \text{etc.}$$

equal each other, because the value of any one works out as 3.

86.

The value of each single fraction can be represented equally in an infinite number of forms. Because if one thus multiplies both the numerator as well as the denominator by the very same number, thus taken as you wish, thus the fraction always keeps the very same value. Therefore all these fractions are equal to one another,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \text{etc.},$$

and each one is just $\frac{1}{2}$. In the same way all these fractions also,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}, \text{etc.}$$

are equal to each other, and each one is as much as $\frac{1}{3}$. Finally these also,

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \text{etc.}$$

equal each other ; therefore in a general way the fraction $\frac{a}{b}$ can be represented as follows :

$$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}, \text{and so on further,}$$

each one of which is just as large as the first $\frac{a}{b}$.

87.

In order to understand these, one must only write a certain letter such as c for the value of the fraction $\frac{a}{b}$ of such a form that c shall be the quotient, if one divides a by b. But now it has been shown, that if one multiplies the quotient c by the divisor b the dividend a must come from this.

Now since c multiplied by b gives a, thus c multiplied by $2b$ will give $2a$, and c multiplied by $3b$ will give $3a$; and thus in general c multiplied by mb must give ma.

Further one can make from this a division example and divide the product ma by a factor mb, thus the quotient must be equal to the other factor c : but now ma divided by mb gives the fraction $\frac{ma}{mb}$, consequently the value is c. But because c is equal to the value of the fraction $\frac{a}{b}$, thus it is evident that the fraction $\frac{ma}{mb}$ to be equal to the fraction $\frac{a}{b}$, and one may put in place a number m as desired.

88.

Now since equally a fraction can be put in place in an endless number of forms, of which each single one has exactly the same value, thus there is no dispute, that a simplest one of each can be considered, which consists of the smallest numbers ; since $\frac{2}{3}$ stands for each of the following fractions, $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18},$ and so forth, which can be put in place according to our free choice, thus no one should well doubt, that from that the form $\frac{2}{3}$ to be the simplest among all to be understood. Now hereby this question arises, how one can bring in a fraction, that is not expressed in its smallest numbers, e.g. $\frac{8}{12}$ in terms of its smallest form, namely $\frac{2}{3}$.

89.

This question will be easy to resolve, if one considers that any one fraction holds its own value, thus if both its numerator as well as its denominator are multiplied by a single number. From this it follows, that if one divides both the numerator and the denominator of a fraction by the same number, the fraction always contains just the same value. This will be easier to be seen from the general form $\frac{na}{nb}$. Then if one divides both the numerator na and the denominator nb by the number n, thus the fraction $\frac{a}{b}$ appears, which is equal to that, as has been shown already above.

90.

Now in order to bring a predetermined fraction into its smallest form, thus one must find such numbers, whereby both the numerator and denominator can be divided. Now such a number is called a *common divisor*, and as long as one can designate a common divisor between the numerator and denominator, thus such a fraction can be brought into a smaller form ; but if no common divisor besides 1 finds a greater place, thus the fraction has already been brought into its smallest form.

91.

In order to show this we consider the fraction $\frac{48}{120}$. Thus here one sees easily, that the numerator and denominator can themselves be divided by 2, as from that the fraction $\frac{24}{60}$ arises. Both these allow themselves to be divided once more by 2 and the division gives the following fraction $\frac{12}{30}$, where 2 again is a common divider and $\frac{6}{15}$ comes out. But here it is clear, that the numerator and denominator still let themselves be divided by 3, from which the fraction $\frac{2}{5}$ arises, which is equal to the above, and finds itself in the smallest form, because the numbers 2 and 5 neither have a common divisor besides 1, from which the numbers can become no smaller.

92.

This property of fractions, that if one multiplies or divides both the numerator as well as the denominator with some number, the value of the fraction remains unchanged, is of the greatest importance and commonly from that the whole teaching of fractions is founded on that. For example, it lets two fractions not well suited for addition or subtraction from each other, before one has put the same into another form, the denominators of which are equal to each other ; which shall be treated in the following chapter.

93.

Here we will only yet note, that also all the numbers can be represented in the form of fractions. Thus for example 6 is as much as $\frac{6}{1}$,because 6 divided by 1 also gives 6. And hence these forms still emerge,

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{etc.}$$

which all themselves express the same value, namely 6.

DES ERSTEN THEILS ERSTER ABSCHNITT

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN MIT EINFACHEN GRÖSSEN

CAPITEL 1

VON DEN MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN ÜBERHAUPT

1.

Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genennt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Diesemnach ist eine Sma Gelds eine Größe, weil sich dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Ingleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzehlen laßen; und daher entstehen die verschiedene Theile der Mathematic, deren eine jegliche mit einer besondern Art von Größen beschäftiget ist, indem die Mathematic überhaupt nichts anders ist als eine Wißenschaft der Größen, und welche Mittel ausfündig [= ausfindig] macht, wie man dieselben ausmeßen soll.

3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmeßen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimt [= annimmt], und das Verhältniß anzeiget [= verhältnis anzeigen], worinnen eine jegliche Größe, von eben der Art, gegen derselben steht.

Also wann die Größe einer Sma Gelds bestimmt werden soll, so wird ein gewißes Stück Geld als z.E. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Ducaten und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt wie viel dergleichen Stücke in gemeldeter Sma Gelds enthalten sind.

Eben so wann die Größe eines Gewichts bestimt werden soll, so wird ein gewißes Gewicht als z. E. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemeßen werden, so pfleget man sich darzu einer gewißen bekannten Länge, welche ein Fuß genennet wird, zu bedienen.

4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmeßungen der Größen von allen Arten, kommt es also darauf an, daß erstlich eine gewiße bekannte Größe von gleicher Art fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird) und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach daß man bestimme in was für einem Verhältniß die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

5.

Hieraus ist klar,daß sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken laßen, und also der Grund aller Mathematischen Wißenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungs-Arten, so dabey vorkommen können, genau in Erwegung ziehe, und vollstandig abhandele.

Dieser Grundtheil der Mathematic wird die Analytic oder Algebra genennet.

6.

In der Analytic werden also blos allein Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeiget werden, ohne sich urn die besondere Art der Größen zu bekümmern , als welches in den übrigen Theilen der Mathematic geschiehet.

7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die Arithmetic oder Rechenkunst, allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewiße Rechnungs-Arten, welche im gemeinen Leben öffters vorkommen; hingegen begreift die Analytic auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und derselben Berechnung auch immer vorfallen mag.

CAPITEL 2

ERKLÄRUNG DERER ZEICHEN + PLUS UND – MINUS

8.

Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + ange deutet, welches der Zahl vorgesetzt und *plus* ausgesprochen wird. Also wird durch 5 + 3 angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man dann weis, daß 8 heraus komme; eben so z. E. 12 + 7 ist 19; 25 + 16 ist 41 und 25 + 41 ist 66 etc.

9.

Durch dieses Zeichen +*plus* pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. E. 7 + 5 + 9 wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und über dieses noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus versteht man was nachstehende Formel bedeutet, als:

$$8+5+13+11+1+3+10,$$

nemlich die Summa aller dieser Zahlen, welche beträgt 51.

10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu mercken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als *a, b, c, d,* etc. angedeutet werden, wann man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch *a* und *b* ausgedruckt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn als sie wollen. Eben so bedeutet $f+m+b+x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedruckt werden.

In einem jeglichen Fall also, wann man nur weis, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.

11.

Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen *minus* angedeutet, welches so viel als weniger ist, und derselben Zahl welche weggenommen wird, vorgesetzt wird: Also bedeutet 8 5 daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann wie bekannt ist 3 übrig bleibt. Eben so ist $12-7$ so viel als 5, und $20-14$ so viel als 6, etc.

12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen sollen zugleich subtrahiret werden, als z. E. :

$$50-1-3-5-7-9\,.$$

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der vorgegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wann man ihre Summe nemlich 25 auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, In welchen beyde Zeichen +*plus* und - *minus* vorkommen; als z. E.

$$12-3-5+2-1$$

ist so viel als 5. Oder man darf nur die Summe derer Zahlen die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

$12+2$ machen 14, und davon die Summe aller Zahlen die haben, welche sind 3, 5, 1, das ist 9 abziehen, da dann wie vorher gefunden wird 5.

14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man dieselben nach Belieben versetzen könne, wann nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kan man setzen

$$12+2-5-3-1, \text{ oder } 2-1-3-5+12, \text{ oder } 2+12-3-1-5;$$

wobey aber zu mercken daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß.

15.

Wann nun die Sache allgemein zu machen, anstatt der würcklichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon, als z. E. $a-b-c+d-e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben *a* und *d* ausgedruckte Zahlen hergelegt werden, und davon die übrigen *b, c, e,* welche das Zeichen - haben insgesammt weggenommen werden müßen.

16.

Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen, als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen; diejenigen aber welche das Zeichen - vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet.

17.

Dieses läßt sich schön durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person pflegt angezeigt zu werden; da dasjenige, was sie Würcklich besitzt durch positive Zahlen mit dem Zeichen +*plus,* dasjenige aber was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen -*minus* ausgedruckt wird. Also wann jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn 100 - 50, oder welch~s einerley, + 100-50, das ist 50.

18.

Da nun die negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positive Zahlen die würckliche Besitzungen anzeigen, so kann man sagen, daß die negative Zahlen weniger sind als nichts; also wenn einer nichts im Vermögen hat und noch darzu 50 Rub. schuldig ist, so hat er würcklich 50 Rub. weniger als nichts; dann wann ihm jemand 50 Rub. schencken sollte um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch jetzt mehr hatte als vorher.

19.

Wie nun die positive Zahlen ohnstreitig größer als nichts, so sind die negative Zahlen kleiner als nichts. Die positive Zahlen aber entstehen, wann man erstlich zu 0, oder nichts, immerfort eines zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nehmlich

$$0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9,+10,$$

und so fort ins unendliche. Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

und so fort ohne Ende.

20.

Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Nahmen der gantzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind als nichts. Man nennt dieselbe gantze Zahlen um sie von den gebrochenen, und noch vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden wird, zu unter scheiden. Dann da zum Exempel 50 um ein gantzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittel-Zahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, deren eine 50 Fuß, die andre aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreiffen, daß man unendlich viel andre Linien ziehen kan, welche alle länger als 49 und doch kürtzer als 50 Fuß sind.

21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so viel sorgfaltiger zu bemercken, da derselbe in der gantzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird genung seyn zum voraus zu bemercken, daß diese Formel, z. E.

$$+1-1, \ +2-2, \ +3-3, \ +4-4, \text{ u.s.f., u. s. f.}$$

alle so viel sind als 0, oder nichts; ferner, daß z.Ex. $+2-5$ so viel ist als -3, weil wann einer 2 Rbl. hat, und 5 Rbl. schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rbl. schuldig; eben so ist

$$7-12 \text{ so viel als } -5$$
$$25-40 \text{ so viel als } -15.$$

22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wann auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da dann immer $+a-a$ so viel ist als 0 oder nichts. Hernach wann man wißen will, was z. E. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwegen.

Der 1 te ist, wann a größer als b, da subtrahiret man b von a, und der Rest positiv genommen ist der gesuchte Werth.

Der 2te ist, wann a kleiner als b, da subtrahiret man a von b, und der Rest negativ genommen, oder das Zeichen *minus*- vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

CAPITEL 3

VON DER MULTIPLICATION MIT EINFACHEN GRÖSSEN

23.

Wann zwey, oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürtzere Art ausdrücken also ist:

$a+a$ so viel als $2\cdot a$, und
$a+a+a$ " " " $3\cdot a$, ferner
$a+a+a+a$ " " " $4\cdot a$, und so weiter.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, nehmlich da

$2\cdot a$ so viel ist, als 2 mal a, und
$3\cdot a$ so viel als, 3 mal a, ferner
$4\cdot a$ so viel als, 4 mal a, u.s.fort.

24.

Wann also eine durch einen Buchstaben ausgedruckte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl blos vor den Buchstaben geschrieben; also,
a mit 20 mult. giebt $20a$, und
b mit 30 mult. giebt $30b$, etc.
Solcher gestalt ist ein c, einmahl genommen, oder $1c$, so viel als c.

25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multipliciret werden, als z. E.
2 mal $3a$ macht $6a$
3 mal $4b$ macht $12b$
5 mal $7x$ macht $35x$,
welche noch ferner mit Zahlen nach Belieben können multipliciret werden.

26.

Wann die Zahl mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben vorgestelt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wann b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product ab, und pq ist das Product welches entsteht wann man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man $p\,q$ noch ferner mit a multipliciren so kömmt heraus apq.

27.

Hiebey ist wohl zu mercken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben ankomme, indem *ab* eben so viel ist als *ba;* oder *b* und *a* mit einander multiplicirt, macht eben so viel als *a* mit *b* multiplicirt. Um dieses zu begreifen darf man nur für *a* und *b* bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbsten: nehmlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

28.

Wann anstatt der Buchstaben welche unmittelbar an einander geschrieben sind, würckliche Zahlen sollen gesetzt werden, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Dann wann man vor 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölff sondern vier und dreissig heißen. Wann derowegen eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punct zwischen dieselben zu setzen: also $3\cdot 4$ bedeutet 3 mal 4, das ist 12, eben so ist $1\cdot 2$ so viel als 2 und $1\cdot 2\cdot 3$ ist 6; ferner $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ ist 1344 und $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$ ist 3628800 u. s. f.

29.

Hieraus ergiebt sich nun auch was eine solche Formul $5\cdot 7\cdot 8\cdot abcd$ bedeute; nehmlich 5 wird erstlich mit 7 multipliciret, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit *a,* und dieses wieder mit *b,* sodann mit *c,* und endlich mit *d* multipliciret; wobey zu mercken, daß anstatt $5\cdot 7\cdot 8$, der Werth davon, nemlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35, ist 280, geschrieben werden kan.

30.

Ferner ist zu mercken, daß solche Formeln die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genennt werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factores zu nennen.

31.

Bis hierher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positive seyn sollten: nehmtich $+a$ mit $+b$ multipliciret giebt ohnstreitig $+ab$*;* was aber herauskomme, wann $+a$ mit $-b$ oder $-a$ mit *b* multipliciret werde, erfordert eine besondere Erörterung.

32.

Wir wollen erstlich $-a$ mit 3, oder $+3$, multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese Schuld 3mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müße, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn.

Eben so wann $-a$ mit b das ist $+b$ multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen $-ba$, oder welches einerley $-ab$. Hieraus machen wir den Schluß, daß wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher diese Regul gemacht wird, + mit + giebt + oder *plus.* Hingegen +mit −, oder − mit + multipliciret giebt − oder *minus.*

33.

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nahmlieh wann − mit − multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, *ab;* ob aber das Zeichen + oder − dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kan es nicht das Zeichen − seyn. Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht diese Regul, − mit − multiplicirt giebt + eben so wohl als + mit +.

34.

Diese Regeln pflegen zusammengezogen und kürtzlich mit diesen Worten ausgedruckt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multipliciret geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben −. Wann also zum Ex. diese Zahlen

$$+a,\ \ -b,\ \ -c,\ \ +d$$

mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich $+a$ mit $-b$ mult. $-ab$, dieses mit $-c$, giebt $+abc$, und dieses endlich mit $+d$, giebt $+abcd$.

35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen wie zwey Zahlen, die schon selbsten Producte sind, mit ein an der multiplicirt werden sollen. Wann die Zahl *ab* mit der Zahl *cd* multiplicirt werden soll, so ist das Product *abcd,* und entsteht also wann man erstlich *ab* mit *c,* und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit *d* multiplicirt. Oder also , wann man z. E. die Zahl 36 mit 12 multipliciren soll: weil 12 ist 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36 erstlich mit 3 zu multipliciren und das gefundene, nemlich 108 ferner mit 4 zu multipliciren. Da man dann erhält:

432, welches so viel ist als 12 mahl 36.

36.

Wollte man aber 5*ab* mit 3*cd* multipliciren, so könte man auch wohl setzen 3*cd* 5*ab:* da es aber hier eben nicht auf die Ordnung derer mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloße Zahlen zuerst zu setzen und schreibt für das Product $5 \cdot 3abcd$, oder $15abcd$, weil 5 mahl 3 so viel ist als 15.

Eben so wann $12pqr$ mit $7xy$ multiplicirt werden sollte, so erhält man $12 \cdot 7pqrxy$, oder $84pqrxy$.

CAPITEL 4

VON DER NATUR DER GANTZEN ZAHLEN IN ABSICHT AUF IHRE FACTOREN

37.

Wir haben bemerckt, daß ein Product aus 2 oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die *Factores* davon genennt.

Also sind die Factores des Products *abcd* die Zahlen *a, b, c, d.*

38.

Zieht man nun alle gantze Zahlen in Betrachtung, in so fern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen können und also keine Factoren haben, andere aber aus 2 und auch mehr Zahlen mit einander mult. entstehen können, folglich 2 oder mehr Factores haben; also ist:

4 so viel als $2 \cdot 2$, ferner 6 so viel als $2 \cdot 3$, und
8 so viel als $2 \cdot 2 \cdot 2$, ferner 27 so viel als $3 \cdot 3 \cdot 3$, und
10 so viel als $2 \cdot 5$, und so fort.

39.

Hingegen laßen sich die Zahlen
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. nicht Solchergestalt durch Factores vorstellen, es wäre dann daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. E. 2 durch $1 \cdot 2$ vorstellen wollte. Allein da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht unter die Factores gezehlt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factores vorgestellt werden können, als:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. werden *einfache* Zahlen, oder *Prim-Zahlen* genennt; die übrigen Zahlen aber welche sich durch Factores vorstellen laßen als:
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc. heißen *zusammengesetzte* Zahlen.

40.

Die einfache oder Prim-Zahlen verdienen also besonders wohl in Erwegung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder -mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey insonderheit dieses merckwürdig ist, daß wann dieselben der Ordnung nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, u. s. f. darinnen keine gewiße Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen. Und es hat auch bisher kein Gesetze, nach welchen dieselben fortgiengen, ausfindig gemacht werden können.

41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen laßen, entspringen alle aus den obigen Prim-Zahlen, so das alle Factores davon Prim .. Zahlen sind. Dann wann je ein Factor keine Prim-Zahl, sondern schon zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch 2 oder mehr Factores, die Prim-Zahlen wären, vorstellen können. Also wann die Zahl 30 durch $5 \cdot 6$ vorgestellt wird, so ist 6 keine Prim-Zahl sondern $2 \cdot 3$, und also kan 30 durch $5 \cdot 2 \cdot 3$, oder durch $2 \cdot 3 \cdot 5$, vorgestellt werden, wo alle Factores Prim-Zahlen sind.

42.

Erwegt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch PrimZahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinnen ein großer Unter schied, indem einige nur 2 dergleiche Factores haben, andere 3 oder mehr: also ist wie wir schon gesehen

4 so viel als	$2 \cdot 2$	6 so viel als	$2 \cdot 3$
8 " " "	$2 \cdot 2 \cdot 2$	9 " " "	$3 \cdot 3$
10 " " "	$2 \cdot 5$	12 " " "	$2 \cdot 3 \cdot 2$
14 " " "	$2 \cdot 7$	15 " " "	$3 \cdot 5$
16 " " "	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	und so fort.	

.

43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeglichen Zahl ihre einfache Factores finden soll.

Also wann die Zahl 360 vorgegeben wäre, so hat man für dieselbe erstlich $2 \cdot 180$. Nun aber ist 180 so viel als $2 \cdot 90$ und 90 so viel als $2 \cdot 45$ und 45 so viel als $3 \cdot 15$ und endlich 15 so viel als $3 \cdot 5$. Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factores vorgestellt: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt, die Zahl 360 vorbringen.

44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Prim-Zahlen durch keine andre Zahlen theilen laßen, und hingegen die zusammengesetzten Zahlen am fügliebsten in ihre einfache Factores aufgelößet werden, wann man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen laßen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel die Regeln erklärt werden sollen.

CAPITEL 5
VON DER DIVISION MIT EINFACHEN GRÖSSEN

45.

Wann eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also wann die Zahl 12 in 3 gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey. Man bedienet sich aber dabey gewißer Nahmen. Die Zahl die zertheilt werden soll, heißt das *Dividend* oder die zu theilende Zahl; die Anzahl der Theile wird der *Divisor,* oder *Theiler* genennt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der *Qüotus* oder *Quotient* genennt zu werden: also ist dem angeführten Exempel nach

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl,
3 der Divisor, oder Theiler, und
4 der Quotus, oder Quotient.

46.

Wann man also eine Zahl durch 2 theilt oder in 2 gleiche Theile zerschneidet, so muß ein solcher Theil, das ist der Quotus zweymal genommen, just die vorgegebene Zahl ausmachen; eben so wann eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, so muß der Quotus 3 mal genommen dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend herauskommen, wann man den Quotus und den Divisor mit einander multiplicirt.

47.

Dahero wird auch die Division also beschrieben, daß man für den Quotient eine solche Zahl suche, welche mit dem Divisor multiplicirt just die zu theilende Zahl hervorbringe. Also wann zum Exempel 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt 35 herausbringe. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7 35 ausmacht. Man pflegt sich dabey dieser Redens-Art zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; dann 5 mal 7 ist 35.

48.

Man stellt sich demnach das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, da dann der andere Factor den Quotienten anzeigt. Wann ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7 und der andere also beschaffen ist, daß wann derselbe mit dieser 7 multipliciret wird, genau 63 herauskommen. Ein solches ist nun $7 \cdot 9$, und deswegen ist 9 der Quotus, welcher entspringt wenn man 63 durch 7 dividirt.

49.

Wann dahero auf eine allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt

werden soll, so ist der Quotus offen3ar *b,* weil *a* mit *b* multiplicirt das Dividend *ab* ausmacht. Hieraus ist klar, daß wann man *ab* durch *b* dividiren soll, der Quotus *a* seyn werde.
Also überhaupt in allen Divisions-Exempeln wann man das Dividend durch den Quotus dividirt, so muß der Divisor herauskommen: als da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50.

Wie nun alles darauf ankommt, daß man das Dividend durch 2 Factores vorstelle, deren einer dem Divisor gleich sey, weil alsdann der andere den Quotus anzeigt, so wird man die folgende Exempel leicht verstehen. Erstlieh das Dividend *abc* durch *a* dividirt giebt *bc,* weil *a* mit *bc* multiplicirt *abc* ausmacht; eben so wann *abc* durch *b* dividirt wird, so kommt *ac* heraus; und *abc* durch *ac* dividirt giebt *b*. Hernach 12mn durch *3m* dividirt giebt 4n, weil *3m* mit *4n* multiplicirt *12mn* ausmacht: wann aber eben diese Zahl 12m *n* durch 12 dividirt werden sollte, so Würde *mn* herauskommen.

51.

Weil eine jede Zahl *a* durch 1 *a,* oder ein *a,* ausgedruckt werden kann, so ist hieraus offen3ahr, daß wann man *a* oder 1 *a* durch 1 theilen soll, alsdann eben dieselbe Zahl *a* für den Quotus heraus komme. Hingegen wann eben dieselbe Zahl *a* oder la durch *a* getheilet werden soll, so wird der Quotus 1 seyn.

52.

Es geschiehet aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von 2 Factoren vorstellen könne, deren einer dem Divisor gleich sey, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerckstelligen. Dann wann ich z. E. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24, weil 7 · 3 erst 21, und also zu wenig, hingegen 7 · 4 schon 28, und also zu viel ausmacht: doch sieht man hieraus daß der Quotus größer seyn müße als 3, und doch kleiner als 4. Dahero um denselben genau zu bestimmen eine andere Art von Zahlen, die Brüche genennt werden, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich für den Quotus die nächst kleinere gantze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 hab ich 3 mal,, der Rest aber sey 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, so um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, als:

6	34	5 nemlich der Divisor ist 6,
	30	das Dividend ist 34,
	4	der Quotient ist 5
		der Rest ist 4
9	41	4 und hier ist der Divisor 9
	36	das Dividend 41

$4 \quad \overline{5}$ der Quotient 4
der Rest 5.

In solchen Exempeln wo ein Rest übrig bleibt ist folgende Regul zu mercken.

54.

Erstlieh daß wann man den Theiler mit dem Quotus multipliciret und zum Product noch den Rest addirt, alsdann das Dividend heraus kommen müße; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht. Also in dem ersten der zwey letztem Exempel, multiplicirt man $6 \cdot 5$, ist 30, dazu den Rest 4 addirt, kommt just das Dividend 34. Ebenfalls in dem letzten Exempel, wann man den Theiler 9 mit dem Quotus 4 multiplicirt und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

55.

Letztlich ist hier auch noch nöthig in Ansehung der Zeichen *plus* + und *minus*- anzumerckeri, daß wann $+ab$ durch $+ a$ dividirt wird, der Quotus $+ b$ seyn werde, welches für sich klar ist. Wann aber $+ab$ durch $- a$ dividirt werden soll, so wird der Quotus $- b$ seyn, weil $- a$ mit $- b$ mult. $+ab$ ausmacht. Wann ferner das Dividend $-ab$ heißt, und durch den Theiler $+ a$ dividirt werden soll, so wird der Quotus $- b$ seyn, weil $+ a$ mit $- b$ mult. $- ab$ giebt, das ist das Dividend. Soll endlich das Dividend ab durch den Divisor $- a$ getheilt werden, so wird der Quotus $+ b$ seyn, weil $- a$ mit $+ b$ multiplicirt $- ab$ ausmacht.

56.

Es finden also in der Division für die Zeichen + und - eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemercket haben, nehmlich:
+ durch + giebt +; + durch - giebt - durch + giebt -; - durch giebt +;
oder kürtzer, gleiche Zeichen geben *plus*, ungleiche aber *minus*.

57.

Wann also $18\,pq$ durch $- 3\,p$ dividiret werden soll so wird der Quotient
$- 6q$ seyn;
ferner: $- 30xy$ durch $+ 6y$ dividirt giebt $- 5x$
ferner: $- 54abc$ durch $- 9\,b$ div. giebt $+ 6\,ac$, weil $- 9\,b$ mit $+ 6\,ac$ mult.
$-6 \cdot 9abc$, oder $- 54abc$ giebt; welches für di~ Division mit einfachen Größen genung seyn mag. Dahero wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemercket haben.

CAPITEL 6
VON DEN EIGENSCHAFTEN DER GANTZEN ZAJILEN IN ANSEHUNG IHRER THEILER

58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewiße Divisores theilen laßen, andere aber nicht, so ist zur Erkänntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemercken, und diejenigen Zahlen die sich durch irgend einen Divisor theilen laßen, von denjenigen die sich dadurch nicht theilen laßen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumercken; zu welchem Ende wir die Divisores,
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
und so fort, betrachten wollen.

59.

Es sey erstlieh der Divisor 2; die Zahlen also, welche sich dadurch theilen laßen, sind folgende:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.
welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesamt *gerade Zahlen* genennt.
Hingegen die übrigen Zahlen
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.
welche sich durch 2 nicht theilen laßen, ohne daß nicht 1 im Reste bliebe, werden *ungerade Zahlen* genennt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die gerade Zahlen. Die gerade Zahlen können nun alle in dieser allgemeinen Formel 2a begriffen werden, weil wann man für a nach und nach alle Zahlen annimt, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f., daraus alle gerade Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in dieser Formel $2a + 1$ enthalten, weil $2a + 1$ um 1 größer ist als die gerade Zahl $2a$.

60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3, so sind alle Zahlen welche sich dadurch theilen laßen folgende:
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.
welche durch diese Formel $3a$ vorgestellt werden können. Dann $3a$, durch 3 dividirt giebt a zum Quotus, ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wann man sie durch 3 theilen will, laßen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig, und sind also von zweyerley A.rt. Die welche 1 übrig laßen, sind folgende:
1, 4, 7, 10, 1B, 16, 19, u. s. f.
und sind in dieser Formel $3a + 1$, enthalten. Die von der andern A.rt welche 2 übrig laßen sind folgende:
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, u. s. f.
welche alle in dieser Formel $3a+ 2$, enthalten sind: also daß alle Zahlen

entweder in der Formel $3a$, oder in dieser $3a + 1$, oder in dieser $3a + 2$, enthalten sind.

61.

Wann ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen laßen, folgende:
4, 8, 12, 16, 20, 24, u. s. f.
welche immer um 4 steigen, und in der Formel $4a$ enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich durch 4 nicht theilen laßen, laßen entweder 1 zum Rest und sind um 1 größer als jene, nehmlich:
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, u. s. f.
welche folglich in dieser Formel $4a + 1$, enthalten sind. Oder sie laßen 2 zum Rest, als:
2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, u. s. f.
und sind in der Formel $4a + 2$, enthalten.
Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, solche Zahlen sind folgende:
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u.s.f.
und sind in dieser Formel $4a+3$, enthalten, so daß alle Zahlen In einer von diesen vier Formeln
$4a,\ 4a+1, 4a+2,\ 4a+3$,
enthalten sind.

62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen laßen, in der Formel 5a enthalten sind; diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen laßen, sind entweder:
$5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3,$ oder $5a+4$, und so kan man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63.

Hierbey kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfache Factores vorgebracht worden, weil eine jegliche Zahl, unter deren Factoren sich entweder:
2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,
oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt: da zum Exempel
60 so viel ist als: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$,
so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3 und auch durch 5 theilen laße.

64.

Da hernach überhaupt die Formel *abcd* sich nicht nur durch *a* und *b* und *c* und *d,* sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner auch durch
abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch
abcd, das ist durch sich selbst, theilen läßt,

so läßt sich gleichfals 60 das ist $2\cdot2\cdot3\cdot5$, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwey einfachen zusammen gesetzt sind, nehmlich durch 4, 6, 10, 15, ferner auch durch die welche aus dreien bestehen, als 12, 20, 30, und endlich auch durch 60, das ist durch sich selbst.

65.

Wann man also eine jegliche beliebige Zahl durch ihre einfache Factores vorgestellt hat, so ist es sehr leicht alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Dann man darf nur erstlieh einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach, je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren bis man auf die vorgegebene Zahl selbst kommt.

66.

Vor allen Dingen ist hier zu mercken, daß sich eine jede Zahl durch 1 theilen laße, so wie sich auch eine jede Zahl durch sich selbst theilen läst; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisores hat, nemlich 1, und sich selbsten; welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern, keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben sind einfache oder Prim-Zahlen genennt worden.
Alle zusammen gesetzte Zahlen aber haben außer 1 und sich selbsten, noch andere Divisores, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler sind gesetzt worden.

Tafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 9 18	1 19	1 2 4 5 20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.						p.		p.	

67.

Endlich ist noch zu mercken daß 0 als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle möglichen Zahlen theilen läßt; weil wann man 0 durch eine jegliche Zahl als *a* theilen soll, der Quotus immer 0 ist, dann 0 mal *a*, oder 0 *a* ist 0: weil es wohl zu mercken ist, daß eine jede Zahl mit 0 multiplicirt nichts heraus bringe.

CAPITEL 7

VON DEN BRÜCHEN ÜBERHAUPT

68.

Wenn sich eine Zahl als zum Ex. 7 durch eine andere als 3 nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine gantze Zahl ausdrucken läßt, keines weges aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich sein sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskommt machen kan, obgleich derselbe keine gantze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche *Brüche* oder *gebrochene Zahlen* genennt werden.

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die obengesetzte Zahl 7 das Dividend und die untengesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

70.

Wann also auf eine allgemeine Art die Zahl a, durch die Zahl b, getheilt werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreibart ein Bruch genennt wird; dahero man sich keinen beßern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotus angezeigt, welcher entspringe, wann man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu mercken, daß bey allen dergleichen Brüchen, die untere Zahl der *Nenner,* die obere aber der *Zahler* genennt zu werden pflegt.

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte Sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zahler und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel $\frac{3}{4}$ drey Viertheil
$\frac{3}{8}$ drey Achtel $\frac{12}{100}$ zwölff Hunderttheil

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennet ein halbes, anstatt ein zweytel; dann eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher heraus kommt, wann man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann wie bekandt ein solcher Theil ein halbes genennt wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlieh diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zahler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$ Weil nun dadurch der Quotus angedeutet wird, der heraus kommt, wann man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist, folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein Gantzes, daher sind folgende Brüche

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{ u.s.f.}$$

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Gantzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, deßen Zahler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zahler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Dann wann ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kommt weniger als 1 heraus; wann z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil ohnstreitig kleiner seyn als ein Fuß, dahero offenbar daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zahler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wann hingegen der Zahler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$: und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$ nehmlich ein Gantzes und noch ein halbes. Eben so ist:

$$\frac{4}{3} \text{ so viel als } 1\tfrac{1}{3}\text{ ; ferner } \frac{5}{3} \text{ so viel als } 1\tfrac{2}{3}\text{ ; weiter } \frac{7}{3} \text{ so viel als } 2\tfrac{1}{3}.$$

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, deßen Zahler der Rest, der

Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12 und bekommt 3 zum Quotus und 7 zum Rest, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche deren Zahler größer sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelößt werden können, wovon das erste eine gantze Zahl ausmacht das andre aber ein Bruch, deßen Zahler kleiner ist als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zahler größer ist als der Nenner, *unächte Brüche* genennt, weil sie eins, oder mehr Gantze in sich begreifen. Hingegen sind die *ächten Brüche* solche, deren Zahler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Gantzes.

76.

Man plfegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erleutert wird: Wann man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinnen, daß wann man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wann man daher solcher drey Theile zusammennimt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kan man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als $\frac{7}{12}$ wann man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruchs aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwehnten Nahmen des Zahlers und Nenners entsprungen. Dann weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilt werden müße, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genennt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 7, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müßen, und also dieselbe gleichsam darzehlet, so wird die obere Zahl der Zahler genennt.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zahler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift was $\frac{3}{4}$ sind, wann man weis was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \text{u.s.f.}$$

Hierbey ist zu mercken, daß diese Brüche immer kleiner werden; dann in je mehr Theile ein Gantzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$; und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müße. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gäntzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint, dann in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewiße Größe und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß wann man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gut Mikroscopium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilichen könnten zertheilt werden. Hier ist aber die Rede keinesweges was wir verrichten können, oder von dem was würcklich kan verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewis, daß so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gäntzlich zu nichts kommt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die obengesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne End fortgesetzt werden kann, so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wann endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Dann das Wort *unendlich* will hier eben so viel sagen als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings festgegründet ist, vorzustellen, so bedienet man sich dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein würckliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemahlen Nichts werden kan, so lange der Nenner noch nicht ins unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemercken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkäntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es laßen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmercksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeigt, wann man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wißen wir schon, daß wann man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$ oder 0 wie wir gesehen haben, dividiret, alsdann der Divisor nemlich ∞ heraus komme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme wann man 1 durch 0 dividiret; folglich kan man mit Grund sagen, daß 1 durch 0 dividiret eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

84.

Hier ist nöthig noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Weg zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich großes könne weiter nicht vermehret werden. Dieses aber kan mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Dann da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2mal größer werden könne.

CAPITEL 8

VON DEN EIGENSCHAFFTEN DER BRÜCHE

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{ und so fort,}$$

ein Gantzes ausmache und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \text{ u.s.f.}$$

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey gantze ausmacht: dann es giebt der Zahler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \text{ u.s.f.}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruchs auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wann man so wohl den Zahler als den Nenner eines Bruchs mit eben derselben Zahl, so nach Belieben genommen werden kan, multipliciret, so behält der Bruch immer eben denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \text{ u.s.f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}, \text{ u.s.f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{3}$. Ferner auch diese,

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \text{ u.s.f.}$$

einander gleich; weswegen auf eine allgemeine Art dieser Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten kann vorgestellt werden,

$$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}, \text{ und so ferner,}$$

davon ein jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

87.

Um dieses zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als *c,* schreiben, dergestalt, daß *c* der Quotus sey, wann man *a* durch *b* dividirt. Nun aber ist gezeigt worden, daß wann man den Quotus *c* mit dem Divisor *b* multiplicirt das Dividend heraus kommen müße.

Da nun *c* mit *b* multiplicirt *a* giebt, so wird *c* mit *2b* multiplicirt *2a* geben, und *c* mit *3b* multiplicirt wird *3a* geben; und also überhaupt *c* mit *mb* multiplicirt muß *ma* geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisions- Exempel und dividirt das Product *ma* durch den einen Factor *mb,* so muß der Quotus dem andern Factor *c* gleich seyn: nun aber giebt

ma durch mb dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, deßen Werth folglich c ist. Weil aber c dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, was man für eine will.

88.

Da nun ein jeglicher Bruch durch unendlich viele Formen kan vorgestellt werden, von welchen eine jede eben denselben Werth enthält, so ist ohnstreitig, daß derjenige am leichtesten zu begreiffen sey, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; als da anstatt $\frac{2}{3}$ ein jeder von folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18},$ und so fort nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl niemand zweiffeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ dennoch am leichtesten unter allen zu begreiffen sey. Hierbey kommt nun diese Frage vor, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, als z. E. $\frac{8}{12}$ in seine kleinste Form, nemlich in $\frac{2}{3}$ bringen könne.

89.

Diese Frage wird leicht aufzulösen seyn, wann man bedencket, daß ein jeder Bruch seinen Werth behalte, wenn so wohl sein Zahler als Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt wird. Denn daher erfolgt, daß wann man auch den Zahler und Nenner eines Bruchs durch eben dieselbe Zahl dividiret, der Bruch immer eben denselben Werth behalte. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersehen. Dann wann man so wohl den Zahler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividiret, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon oben gezeigt worden.

90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, so muß man solche Zahlen finden können, wodurch sich so wohl der Zahler, als der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird ein *gemeiner Theiler* genennt, und so lang man zwischen dem Zahler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kan, so lang läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wann aber kein gemeiner Theiler außer 1 weiter statt findet, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91.

Um dieses zu erläutern wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man so gleich, daß sich Zahler und Nenner durch 2 theilen laßen, als woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beyde laßen sich nun noch einmahl durch 2 theilen und giebt die Theilung folgenden Bruch $\frac{12}{30}$, wo 2 abermahlen ein gemeiner Theiler ist und $\frac{6}{15}$ herauskommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zahler und Nenner noch durch 3 theilen laße, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinen Theiler haben außer 1, wodurch aber die Zahlen nicht kleiner werden.

92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß wann man so wohl den Zahler als Nenner mit eben der Zahl entweder multiplicirt oder dividiret, der Werth des Bruchs ohnverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und wird gemeiniglich darauf die gantze Lehre von den Brüchen gegründet. Es laßen sich z.E. zwey Brüche nicht wohl zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

93.

Hier wollen wir nur noch bemercken, daß auch alle gantze Zahlen in Form eines Bruchs vorgestellt werden können. Also ist zum Exempel 6 so viel als $\frac{6}{1}$,weil 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen,

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{u.s.f.}$$

welche alle eben denselben Werth, nemlich 6, in sich haben.