CHAPTER 15

CUBE ROOTS AND THE IRRATIONAL NUMBERS ARISING FROM THEM.

158.

It has been shown how the cube is to be found from a given number, so also conversely that number can be found from a given number, which multiplied by itself three times, yields that same number : and in this context this number has been called its cube root. Thus the cube root of a given number is such a number, which is equal to the cube of the given number

159.

Thus if the given number is a proper cubic number, of the kind we found in the above chapter, thus the cube root is easy to find from that. Thus of 1, the cube root is 1 ; of 8 it is 2; of 27 it is 3; of 64 it is 4, and so forth.

Even thus too the square root of - 27 is - 3; of - 125 it is - 5. Also when the number is a fraction, thus the cube root of $\frac{8}{27}$ is $\frac{2}{3}$, and of $\frac{64}{343}$ it is $\frac{4}{7}$.Furthermore when it is a mixed number such as $2\frac{10}{27}$ which amounts to $\frac{64}{27}$ as a single fraction, thus the cube root of that is $\frac{4}{3}$ which is $1\frac{1}{3}$.

160.

But when the given number is not a proper cube, thus so that the cube root may be expressed neither by the cube root of a whole or of a fractional number ; thus 43 is not a cubic number, so it is impossible either for whole or fractional numbers to be indicated which makes the cube 43 precisely. But meanwhile still we know so much, that the cube root of that to be greater than 3, since the cube of that makes only 27, and still less than 4, because the cube from that is 64 already. Consequently we know that the desired cube root must be contained between the numbers 3 and 4.

161.

Now 3 would be required, because the cube root of 43 is greater than 3, and still a fraction to be added on so that one can get closer to the truth, but there the cube from that would contain a fraction always, as at no time could that itself become exactly 43. For example one could set the sought cubic root to be $3\frac{1}{2}$ or $\frac{7}{2}$, thus the cube from that would be $\frac{343}{8}$ or $42\frac{7}{8}$, consequently only an $\frac{1}{8}$ th smaller than 43.

162.

Therefore it is hence clear, that the cube root of 43 in no way can be expressed by whole numbers and fractions; but there nevertheless we have a broad idea of the size of the same, so one uses the same sign $\sqrt[3]{\ }$ put in place to show these before the given number, and is called the cube root, in order to distinguish it from the square root. Thus $\sqrt[3]{43}$ means the cube root of 43, that is, such a number, of which the cube is 43, or which multiplied by itself three times produces the number 43 itself.

163.

Hence it is clear, that such like expressions in now way can belong to rational numbers, but represent a special kind of irrational magnitudes. Also they have nothing in common with square roots, and it is not possible to express such a cube root through a square root, such as $\sqrt{12}$: then the square of $\sqrt{12}$ is 12 , so the cube from that is $12\sqrt{12}$ and thus still irrational, consequently neither can it be the case for 43 itself.

164.

But if the given number were a real cube, thus this becomes a rational expression, thus this becomes a rational expression, as $\sqrt[3]{1}$ becomes 1, $\sqrt[3]{8}$ becomes 2, and $\sqrt[3]{27}$ is as much as 3, and generally $\sqrt[3]{aaa}$ is the same as a.

165.

Should one multiply a cube root such as $\sqrt[3]{a}$ with another, as with $\sqrt[3]{b}$, thus the product is $\sqrt[3]{ab}$ *;* then we know, that the cube root of a product *ab* will be found, when one multiplies the cube root of the factor with the other. And just as, when $\sqrt[3]{a}$ shall be divided through by $\sqrt[3]{b}$, thus the quotient is $+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Hence it is understood, that $2\sqrt[3]{a}$ is as much as $\sqrt[3]{8a}$, since 2 is as much as $\sqrt[3]{8}$. Just as $3\sqrt[3]{a}$ is as much as $\sqrt[3]{27a}$, and $b\sqrt[3]{a}$ as much as $\sqrt[3]{abbb}$. Hence also conversely, when the number behind the sign has a factor which is a cube, the cube root of that can be placed before the sign: Thus $\sqrt[3]{64a}$ is as much as $\sqrt[3]{4a}$, and $\sqrt[3]{125a}$ as much as $5\sqrt[3]{a}$. Hence it follow, that $\sqrt[3]{16}$ is as much as $2\sqrt[3]{2}$, because 16 is equal to $8\cdot 2$.

167.

When the given number is negative, thus the cube root of that can be found without any such difficulty as we found above taking the square root, namely because the cubes of negative numbers are also negative, so also on the other hand the cube roots of negative numbers are negative. Thus, just as $\sqrt[3]{-8}$ is - 2, and $\sqrt[3]{-27}$ is - 3. Further $\sqrt[3]{-12}$ is the same as $-\sqrt[3]{12}$ and $\sqrt[3]{-a}$ thus becomes $-\sqrt[3]{a}$. From which one sees, thus that the sign (-) written behind the cube root sign, also the same can be written in front. Thus here we use without any difficulty, or as with directed or imaginary numbers, by which the square roots of negative numbers arise.

CHAPTER 16

CONCERNING POWERS OR POWERS IN GENERAL.

168.

If a number were multiplied by itself several times, thus the product will become a power. In German these can be expressed via the words for force [*i.e.* military power]. Now there a square is put in place, when a number is multiplied by itself twice, and a cube when the number is multiplied by itself three times, thus so are they understood for the squares and cubes [under several different German names for powers].

169.

Yet these powers make a number, however many times a number were multiplied by itself, which are distinguished from each other. Thus when a number is multiplied by itself twice, thus the product is called its second power, which thus is just as great as the square of that; if a number were multiplied three times by itself, thus that product is called the third power, which thus has the same meaning as the cube; further a number multiplied by itself four times, that product itself thus will be called the fourth power, which is commonly assigned the name biquadratic: from which one understands further, what the fifth, sixth, seventh power of a number means; which higher powers moreover are shown to be cared for without particular names.

170.

In order to explain these better, thus we note in the first place, all the powers of the number 1 always remain 1; thus because as many times as one multiplies 1 by itself, the product 1 remains always. Let us hence consider the powers of the number 2, thus we also write here the powers of the number 3 according to the order. Those proceed as follows :

Power	Of the number 2	Of the number 3
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

But the powers of 10 are especially noteworthy, namely

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,

because on that our whole art of reckoning is based. Besides it is to be noted, that in the small sets of numbers to be considered above, each can be considered as powers of the first number.

171.

We want to consider matters of a general kind, so that the powers themselves of the number a will behave in the following manner.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	*aa,*	*aaa,*	*aaaa,*	*aaaaa,*	*aaaaaa,*	etc.

But to write in this manner suffers from this inconvenience, that if the very highest power were desired to be written, one must indeed write down even the same letter many times, and it would be a still greater burden to fall upon the reader, to count the number of these letters, in order to know how great a power from that it was required to indicate. Thus, e.g. it would be very inconvenient to write the hundredth power in this way, and even lesser to be recognised.

172.

To remedy this inconvenience, one has introduced a general manner of writing these powers conveniently, which because of its wonderful benefit deserves to be explained most carefully. One attends namely to how one would wish to display from which e.g. the hundredth power, a little to the side of the right of the number 100 : Thus, a^{100} which is pronounced : a raised to the hundred, expressing the hundredth power of a. Whereby the number written above, as in our case 100, is accustomed to be called the *Exponents*, which names are most appropriate.

173.

For this kind implies also a^2, or a raised to 2, the second power of a, and looks after aa occasionally written instead; because both kinds are equally easy to write, and to be understood. On the other hand commonly aaa would be written instead of cube or the third power, yet a^3 can be written in this new manner, because through that more space will be saved. Even thus a^4 can express the fourth power, a^5 the fifth, and a^6 the sixth power from a.

174.

After this method, all the powers of the number a can be envisaged to have the following form,

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \text{etc.}$$

from which it can be seen, that after this method for the first term a, surely it would be more appropriate to have written a^1, so that the order can be made so much clearer in the blink of an eye. From that a^1 is nothing other than a because the unit indicates that the letter a should be written only once. Such a series of powers usually also can be called a geometric progression, because every single term is greater by just so much more than the preceding one.

175.

As any term can be found in this series of powers, if one multiplies the previous one by a, whereby the exponent will be exactly one greater ; so also from a given term the previous one can be found, if one divides through by a, as whereby the exponent will be diminished by one exactly. From this we see, that the previous term to the first term a^1 must be $\frac{a}{a}$, that is 1 : after the exponent itself must be just a^0 , as this strange property follows, that a^0 must always be 1, the number a may also be as large or small as it always can be, but even when a is zero, also 0° certainly makes 1.

176.

We can extend this series of powers still further backwards, and this indeed in a twofold way. In one way, we will always divide the term by a; but then also, in which we decrease the exponent by one, or we subtract one from that. And we are sure, that both methods still are completely equal. We want therefore to set out the above series from these two methods, which must be read backwards, or from the right to the left:

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
1st	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
2nd	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Whereby we come thus to an understanding of such powers of which the exponents shall be negative numbers ; and we can put in place the exact value to be shown. Hence we want to show what we have found :

Firstly a^0, is the same as 1.
a^{-1} " " " " $\frac{1}{a^1}$
a^{-2} " " " " $\frac{1}{aa}$ or $\frac{1}{a^2}$
a^{-3} " " " " $\frac{1}{aaa}$
a^{-4} " " " " $\frac{1}{aaaa}$ and so on.

178.

Whereby it is clear, how the powers of a product such as ab must be found. These themselves are namely :

$$ab \text{ or } a^1b^1,\ a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, \text{etc.}$$

Just as the powers of fractions are found, as from the fraction $\frac{a}{b}$ the following are the powers :

$$\frac{a^1}{b^1}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^5}{b^5}, \frac{a^6}{b^6}, \frac{a^7}{b^7} \text{ etc.}$$

179.

Finally also arises here the powers of negative numbers to be considered. Thus the negative number $-a$ is given, so that the powers are given from that following each other in order,

$$-a, +aa, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7, \text{ etc.},$$

From which it is apparent, that only these powers, for which the exponent numbers are odd, to become negative ; on the other hand these powers for which the exponents are even, are all positive. Thus the third, fifth, seventh, ninth powers, etc., have the negative sign −. Whereas the second, fourth, sixth, eighth, etc. powers all have the sign +.

CHAPTER 17

THE METHOD OF CALCULATING WITH POWERS.

180.

In respect of addition and subtraction there is nothing worthy of note here, in that the various powers are to be associated with the signs + and − only. Thus $a^3 + a^2$ is the sum of the third and second power of a ; and $a^5 - a^4$ is the remainder, if the fourth power may be taken from the fifth power, and both cannot be expressed shorter. But if equal powers arise, thus it is evident $a^3 + a^3$ can be written as $2a^3$ etc.

181.

But noteworthy changes arise from the multiplication of such powers. In the first place if a single power of a shall be multiplied by the number a itself, thus from this the following power arises, for which the exponent is 1 greater. Also a^2 multiplied by a gives a^3, and a^3 multiplied by a gives a^4 etc. Just as with those for which the exponents are negative, if the same shall be multiplied by a, one must only add the exponent 1 to that : Thus a^{-1} multiplied by a gives a^0 which is 1, which is clear from that, because a^{-1} is just as much as $\frac{1}{a}$ which multiplied by a gives $\frac{a}{a}$, which is 1. Just as with a^{-2}, if such shall be multiplied by a gives a^{-1}, which is $\frac{1}{a}$, and a^{-10} multiplied by a gives a^{-9}, and so on.

182.

But if a power shall be multiplied by aa, or with the second power, thus the exponent will be greater by 2; thus a^2 multiplied by a^2 gives a^4, and a^3 multiplied by a^2 gives a^5; further a^4 multiplied by a^2 gives a^6, and generally a^n multiplied by a^2 gives a^{n+2}. Just as with the negative exponents, as a^{-1} multiplied by a^2, gives a^1 which is a, from which it is clear, because a^{-1} is $\frac{1}{a}$, which multiplied by aa gives $\frac{aa}{a}$, which is a. just as a^{-2} multiplied by a^2 gives a^0, which is 1, further a^{-3} multiplied by a^2 gives a^{-1}.

183.

Just as it is clear, that if a power a should be multiplied by the third power of a, or should be multiplied by a^3, the exponent of the same must be increased by 3; or a^n multiplied with a^3 gives a^{n+3}. And generally if two powers of a should be multiplied by each other, so the product again is a power of a, for which the exponent is the sum of those exponents. Thus a^4 multiplied by a^5 gives a^9, and a^{12} multiplied by a^7 gives a^{19} etc.

184.

On this basis the high powers of particular numbers can be found fairly easily ; as if one wants for example to find the XXIVth power of 2, thus one would find the same, if the XIIth power were multiplied by the XIIth power, because 2^{24} is the same as 2^{12} multiplied by 2^{12}. But now 2^{12}, thus as we have seen above, is 4096: therefore one multiplies 4096 by 4096 and thus the product becomes 16777216, the power sought, namely to show 2^{24}.

185.

The following is to be noted by division. First if a power of a should be divided by a, thus its exponent becomes smaller by 1, or one must subtract 1 from. Thus a^5 divided through by a gives a^4, and a^0, that is 1, divided by a gives a^{-1} or $\frac{1}{a}$. Further a^{-3} divided by a gives a^{-4}.

186.

Next if a power of a were divided by a^2, thus one must deduct 2 from the exponent itself, and if one wished to divide the same by a^3, thus one must take 3 from its exponent 3. And thus generally any power of a always can be divided by another power of a, thus one must subtract the exponent of the second power from the exponent of the first power man. Thus a^{15} divided by a^7 gives a^8, and a^6 divided by a^7 gives a^{-1}. Further also a^{-3} divided by a^4 gives a^{-7}.

187.

From this it is easy to understand how powers of powers can be found, because such occurs through multiplication. Thus if one requires the second power or the square of a^3, so the same is a^6, and the third power, or the cube of a^4 will be a^{12} ; from which it is clear, that in order to find the square of a power, only the exponent itself must be doubled. Thus the square of a^n is a^{2n}, and the cube, or the third power of a^n will be a^{3n}. Just as the seventh power of a^n is found to be a^{7n}, and so forth.

188.

The square of a^2 is a^4 , that is the fourth power of *a,* which hence is the square of the square of *a*. Thus it is clear, why the fourth power is called a biquadratic or also the square of a square.

Further because the square of a^3 is a^6 , so usually the sixth power can be called the square of the cube. Finally also because the cube the cube of a^3 is a^9, that is the ninth power of *a,* as usual by the same reason can be called the cube of a cube. However, several names are not customary nowadays.

CHAPTER 18

ROOTS WITH RESPECT OF ALL POWERS.

189.

Because the square root of a given number is such a number, to which the square of the same is equal, and the cube root such a one, to which its cube is equal, so also can such roots be shown of every given number, from which the fourth or fifth, or any power of itself imposed is equal to the given number. In order to distinguish these different kinds of roots from each other, we will call the square root the second root, and the cube root named the third root, as that root for which the fourth power is equal to a given number, to be called its forth root, and that for which the fifth power of the same is equal to the number itself, its fifth root and so forth.

190.

As the second or square root is indicated by the sign $\sqrt{}$, and the third or cube root is indicated by this sign $\sqrt[3]{}$; thus usually one knows equally the fourth root by this sign $\sqrt[4]{}$, the fifth root by this sign $\sqrt[5]{}$, and thus to be indicated further; from which then it is clear, that after writing this square root sign that must be expressed as $\sqrt[2]{}$. But because the square root occurs most often, so for brevity the number 2 is left off the root sign, so when no figure is found in the square root sign, thus always in this way the square root is to be understood.

191.

In order to show how to put these in place, thus here we will put the different roots of the number *a*, and show their meaning.

$\sqrt{a}$ is the II$^{\text{nd}}$ root of a
$\sqrt[3]{a}$ " "III$^{\text{rd}}$ " " a
$\sqrt[4]{a}$ " "IV$^{\text{th}}$ " " a
$\sqrt[5]{a}$ " "V$^{\text{th}}$ " " a
$\sqrt[6]{a}$ " "VI$^{\text{th}}$ " " a etc.

Thus, that conversely the

II^{nd}	power	of	$\sqrt{a}$	is equal to a
III^{rd}	"	"	$\sqrt[3]{a}$	" " " a
IV^{th}	"	"	$\sqrt[4]{a}$	" " " a
V^{th}	"	"	$\sqrt[5]{a}$	" " " a
VI^{th}	"	"	$\sqrt[6]{a}$	" " " a etc.

192.

Now the number a may be large or small so that one can understand from that, why all the roots of these different orders must be understood.

Whereby it is to be observed, that if the number 1 were taken for a, all these roots remain 1 always, because all the powers of 1 always are 1.

But if the number a is greater than 1, thus also all the roots are greater than 1.

But if the number is smaller than 1, thus all its roots also are smaller than 1.

193.

If the number a is positive, thus one understands from that, which has been advanced above from the square and cube roots, also that only all the real roots can be shown, and consequently the numbers shall be real and feasible.

But if the number a is negative, so its second, fourth, sixth and general all its even roots become impossible, because all even powers both of positive and negative numbers always get the *plus* sign.

But conversely the third, fifth, seventh and generally all the odd roots become negative, because the odd powers of negative numbers are negative also.

194.

Thus we obtain from that an infinite number of new kinds of irrational or surd numbers, because so often the number a is without such a power indicated by the root, so often it is not possible for this root to be expressed by a whole number or a fraction, consequently these must belong in that class of numbers, which are called irrational numbers.

CHAPTER 19

THE EXPRESSION OF IRRATIONAL NUMBERS BY FRACTIONAL EXPONENTS

195.

We have shown in the last chapter about powers, that the square of any of these powers can be found, if one doubles their exponents, and that generally the square or the second power of a^n to be a^{2n}. Conversely from the power a^{2n} the square root is a^n, and consequently can be found, if one halves the exponents themselves or divides by 2.

196.

Thus, the square root of a^2 is a^1, the square root of a^4 is a^2, and the square root of a^6 is a^3 and so forth. Because now this is a general rule, thus one sees, if the square root of a^3

should be found, that itself becomes $a^{\frac{3}{2}}$. Just as the square root of a^5 is $a^{\frac{5}{2}}$.
Consequently the square root of the number a itself or the square root of a^1 is $a^{\frac{1}{2}}$. From which it is clear, that $a^{\frac{1}{2}}$ is just the same as $\sqrt{a}$, which new way of indicating the square root is to be noted well.

197.

Further we have seen, concerning how to find the cube of a power, such as a^n, one must multiply its exponent by 3, and thus the cube from that will be a^{3n}. Thus if in reverse, from the power a^{3n} the third or the cube root were desired to be found, as the same is a^n, and now it is necessary only to divide this exponent by 3. Thus the cube root of a^3 is a^1 or a, of a^6 the same is a^2, of a^9 the same is a^3 and so forth.

198.

This must now also be true, if the exponent itself cannot be divided by 3, and hence the cube root of a^2 shall be $a^{\frac{2}{3}}$. And of a^4 the same is $a^{\frac{4}{3}}$ or $a^{1\frac{1}{3}}$. Consequently also the cube root of the number a itself, that is of a^1, or the third root becomes $a^{\frac{1}{3}}$.
From which it is clear that $a^{\frac{1}{3}}$ is just the same as $\sqrt[3]{a}$.

199.

Just as it itself behaves for higher roots: and the fourth root of a will be $a^{\frac{1}{4}}$, which consequently is just as much as $\sqrt[4]{a}$. Likewise the fifth root of a is $a^{\frac{1}{5}}$, which is just the same as $\sqrt[5]{a}$, and this is also the case for all higher roots.

200.

One can now do without the whole root sign introduced a long time ago, and understand here instead the same fractional exponents employed, only at that time one had become accustomed to the former sign, and the same is come upon in all mathematical writings, so it is not advisable to do without the same completely. After all this new way is used frequently on a daily basis, as which makes the nature of the matter clear by itself. Then that $a^{\frac{1}{2}}$ can be rightly the square root of a is seen at once, if one only takes the square of that, which happens if one multiplies $a^{\frac{1}{2}}$ by $a^{\frac{1}{2}}$, then it is evident that a^1 which is a arises.

201.

Hence on sees also how all remaining fraction exponents must be understood ; as when one has $a^{\frac{4}{3}}$, so one must in the first place have taken the fourth power a^4 of the number a, and afterwards the cubic or the third root extracted, so that $a^{\frac{4}{3}}$ is just as much as, after the common manner, $\sqrt[3]{a^4}$. Just as the value of $a^{\frac{3}{4}}$ has been found, when one seeks initially the cube or the third power a , which is a^3 and afterwards one extracts the fourth root from the same : So that $a^{\frac{3}{4}}$ is just the same as $\sqrt[4]{a^3}$. Just as $a^{\frac{4}{5}}$ is the same as $\sqrt[5]{a^4}$ and so on.

202.

If the fraction, shown by the exponent, is greater than 1 so let the value itself also be given the following form. It may be given $a^{\frac{5}{2}}$, so this is the same as $a^{2\frac{1}{2}}$, which comes from this, if one multiplies a^2 by $a^{\frac{1}{2}}$. Now there $a^{\frac{1}{2}}$ is the same as $\sqrt{a}$, thus $a^{\frac{5}{2}}$ is the same as $a^2\sqrt{a}$. Even as $a^{\frac{10}{3}}$, that is $a^{3\frac{1}{3}}$ is the same as $a^3\sqrt[3]{a}$ *;* and $a^{\frac{15}{4}}$ that is $a^{3\frac{3}{4}}$ is just as much as $a^3\sqrt[4]{a}$. From which all the wonderful uses of the exponential fractions are made sufficiently clear.

203.

Also the same has its uses in fractions. As when $\frac{1}{\sqrt{a}}$ is given, as this is the same as $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. But we have seen above that such a fraction $\frac{1}{a^n}$ can be expressed by a^{-n}, consequently $\frac{1}{\sqrt{a}}$ can be expressed by $a^{-\frac{1}{2}}$. Just $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ shall be $a^{-\frac{1}{3}}$, and $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ will be changed into $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ from which arises a^2 multiplied by $a^{-\frac{3}{4}}$, which further is changed into $a^{\frac{5}{4}}$, that is $a^{1\frac{1}{4}}$ and that is further $a\sqrt[4]{a}$. Suchlike reductions relieve the exercise quite markedly.

204.

Finally it is still to be noted, that one such root can be envisaged in many ways. Since then $\sqrt{a}$ is the same as $a^{\frac{1}{2}}$ and $\frac{1}{2}$ in all these fractions $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$, etc., it can be changed into; thus it is clear that $\sqrt{a}$ is as much as $\sqrt[4]{a^2}$, in the equality too $\sqrt[6]{a^3}$, also in the equality $\sqrt[8]{a^4}$ and so forth. Just as $\sqrt[3]{a}$ is as much as $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ but thus also $\sqrt[6]{a^2}$ or $\sqrt[9]{a^3}$ or $\sqrt[12]{a^4}$. Hence one sees easily, that the number a itself, or a^1, can be expressed by the following root signs,

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ or } \sqrt[3]{a^3}, \text{ or } \sqrt[4]{a^4}, \text{ or } \sqrt[5]{a^5} \text{etc.}$$

205.

These arrived at by multiplication and division without doubt are to be put in place : as e.g. if $\sqrt[2]{a}$ with $\sqrt[3]{a}$ were supposed to be multiplied, so one writes instead of

$\sqrt[2]{a}$ that $\sqrt[6]{a^3}$, and instead of $\sqrt[3]{a}$ that $\sqrt[6]{a^2}$. Such forms one has equally in root signs, and hence gives the product $\sqrt[6]{a^5}$. Which also from that becomes clear because $a^{\frac{1}{2}}$ with $a^{\frac{1}{3}}$ multiplied gives $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. But now there is $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ equal to $\frac{5}{6}$ and thus the product $a^{\frac{5}{6}}$ or $\sqrt[6]{a^5}$. Should $\sqrt[2]{a}$ or $a^{\frac{1}{2}}$ be divided by $\sqrt[3]{a}$ or $a^{\frac{1}{3}}$, so one finds $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ that is also $a^{\frac{1}{6}}$, consequently $\sqrt[6]{a}$.

CHAPTER 20

ON THE DIFFERENT WAYS OF RECKONING AND THEIR GENERAL CONNECTION

206.

Previously we have discussed different ways of reckoning as addition, subtraction, multiplication and division, the raising of powers and the extraction of roots.

Therefore it will not provide any better enlightenment, than if we understand clearly the origins of these ways of calculating and the connections between themselves, so that one may understand whether still other suchlike kinds are possible or not.

To this end we need a new sign, which can be put in place instead of the previous way arising so frequently, the manner of saying, *is as much as*. Now this sign is $=$ and will be called *is equal to.* Thus if $a=b$ is written, so the meaning is, that *a* is to be just as much as *b,* or that *a* to be equal to *b* ; thus e.g. $3\cdot 5=15$.

207.

The first way of reckoning that comes to mind, is without debate addition, through which two numbers are added together, or the sums themselves can be found. It says accordingly *a* and *b* are two given numbers and their sum is indicated by the letter *c*, so one has $a+b=c$. Thus if both the numbers *a* and *b* are known, so the addition shows how one can find the number *c* can be found.

208.

One keeps this equation $a+b=c$, but now turn the question around, and ask if the numbers *a* and *c* are known, how shall one find the number *b*. Thus one asks what kind of number must be added to the number *a* , so that the number *c* arises: There shall be for example $a=3$ and $c=8$, so that it would be $3+b=8$, so it is clear that *b* will be found when one takes 3 from 8. Generally also in order to find *b*, thus one must subtract *a* from *c* and that becomes $b=c-a$. Then when *a* is added to that, thus one obtains $c-a+a$ which is *c.* Thus herein lies the source of subtraction.

209.

Subtraction thus arises when the question, which occurs by addition, is turned around. And there it can happen itself, that the number which can be subtracted, is greater than that from which the subtraction is made, e.g. 9 shall be taken from 5 : so we obtain from that the definition of a new kind of number, which are allowed to be negative, since $5-9=-4$.

210.

If many numbers, which are to be added together, are equal to each other, thus their sum is found through multiplication, and then called the product. Thus *ab* denotes the product, which arises when the number *a* is multiplied by the number *b*. If we now signify this product by the letter *c*, thus we have $ab=c$, and the multiplication informs us, if the numbers *a* and *b* are known, how one can find the number *c* from that.

211.

Let us now pose the following question: If the numbers *c* and *a* are known, how can one find the number *b* from that. Let there be, e. g. $a=3$ and $c=15$, so that $3b=15$ and it is asked, with what number must one multiply the number 3, so that 15 arises. This now happens through division the number *b* found from that generally, when one divides *c* by *a* ; from which consequently the equation arises $b=\frac{c}{a}$.

212.

Because now it can happen often, that the number *c* cannot actually let itself be divided by the number *a*, and just as equally the letter *b* must have a given value, so we are led on to a new kind of number, which are allowed to be fractions. Thus if we suppose $a=4$, and $c=3$, thus that becomes $4b=3$, so indeed one sees, that *b* can be without a whole number, but namely is a fraction, $b=\frac{3}{4}$.

213.

Now just as multiplication arises from addition, when five numbers are to be added together, equal to each other, so we want now also by assuming multiplication, that five equal numbers are to be multiplied by each other, and thereby we arrive at the power, which in a general manner are envisaged in this form a^b, whereby displayed, so that the number *a* must be multiplied so many times by itself, as the number *b* orders. Here it is noted as above, *a* to be the root, *b* the exponent and a^b the power allowed.

214.

Let us now indicate the power itself by the letter *c*, so we have $a^b=c$ wherein thus three letters arise *a, b, c*. Putting this in place ahead, as one sees in the theory of powers, if the root *a* together with the exponent *b* is known, from that the power itself, that is the letter *c* shall be determined. For example, let $a=5$, and $b=3$, thus then $c=5^3$: from which one sees that the third power of 5 must be taken, which is 125; thus $c=125$.

Here also one is informed, how from the root *a* and the exponent *b* the power *c* shall be found.

215.

Now also here let us see how the question can be turned around, or can be changed, thus so that from two of these three numbers *a, b, c,* the third to be found, which can be shown in two ways, as together with *c,* either *a* or *b* can be assumed as known. Whereby it is to be observed, that in the above cases only an alteration occurs with their addition or multiplication : because in the first case, where $a+b=c$, it is just the same if one takes either *a* or *b* together with *c,* for either taken to be known, as it is just the same, if I write $a+b$ or $b+a$; and the equation changes thus also with $ab=c$ or $ba=c$, where the letters *a* and *b* also can be interchange. Thus alone, nothing is found for the powers, in that in no way can a^b be put in place of b^a, which can be shown clearly from a single example; e.g. if $a=5$ and $b=3$ shall be put in place, thus $a^b=5^3=125$. Whereas $b^a=3^5=243$, which is very different from 125.

216.

From this it is clear, here really there are still two questions that can be asked, of which the first is : If besides the power *c,* the exponent *b* is given still, how one must find the root *a* from that. Again, the second question is, if besides the power *c,* still the root *a* is assumed to be known, how one should find the exponent *b* from that.

217.

In the above only the first of these two questions has been discussed in showing how to extract the root. Then if one has e.g. $b=2$ and $a^2=c$ so *a* must be such a number, whose square is equal to that *c*, and there will be $a=\sqrt{c}$. Just as if $b=3$ so one has $a^3=c$, that *a* must also be equal to the cube of the given number *c*, and that gives $a=\sqrt[3]{c}$. From this a general rule can be understood, how one can find *b* from both the letters *c* and *b*. Namely it will be $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

Thus now often it happens itself, that the given number *c* is not really such a power, whose root is requested, as is noted already above, that the requested root *a* can be expressed as a whole number or by a fraction. Now the same nevertheless must have its particular value, so from that we are to find a new way of obtaining numbers, called irrational or surd numbers; from which the diversity of the roots, thus indeed gives infinitely many ways. Also this deliberation leads us still to a particular way of finding numbers, which are impossible and imaginary, or called imagined numbers.

219.

We see also, that we still have a question remaining to be considered, namely if besides the power *c* the root for *a* can be assumed, how is one supposed to find the exponent from that ? This question will lead us onto the important lesson of logarithms, of which the benefit is so great to the whole of mathematic, that hardly any extended calculation can be brought about without the help of logarithms. We shall also explain this theory in the following chapter, where again we can be conducted through a whole new kind of numbers, which cannot be reckoned even once from the above irrational numbers.

CHAPTER 21

CONCERNING LOGARITHMS IN GENERAL

220.

Thus we consider this equation $a^b = c$, and note above all, that in the teaching a certain number will be determined at will from logarithms for the root *a*, also the same will keep the one and the same value always. Now if the exponent *b* also will be assumed, that the power a^b will be given equal to one number *c*, thus the exponent *b* will be called the logarithm of this number *c*, and in order to announce the same in the future I will use the letters log [Euler actually uses the Teutonic letter $\mathfrak{l}$, which is inconvenient for us here] which will be put in front of the number *c*; and thus one writes $b = \log c$, whereby it will be understood that *b* is equal to the logarithm of the number *c*, or the logarithm of *c* to be *b*.

221.

After the root *a* has once been discovered, so is the logarithm of each and every number *c*, nothing other than the exponent of that power of *a*, which is equal to the number *c*. Now in that case $c = a^b$ thus *b* is the logarithm of the power a^b. Now one puts $b = 1$, thus 1 is the logarithm of a^1 that is $\log a = 1$; one puts $b = 2$, thus 2 is the logarithm of a^2, that is $\log a^2 = 2$. Just as one has : $\log a^3 = 3,\ \log a^4 = 4,\ \log a^5 = 5$, and so on.

222.

One puts $b = 0$, thus 0 will be the logarithm of a^0 : but now $a^0 = 1$, and thus $\log 1 = 0$, just as one may like to assume the root *a*. Further putting $b = -1$, thus -1 is the logarithm of a^{-1}. But there is $a^{-1} = \frac{1}{a}$ thus one has $\log \frac{1}{a} = -1$. Just as one know that $\log \frac{1}{a^2} = -2,\ \log \frac{1}{a^3} = -3, \log \frac{1}{a^4} = -4$, etc.

223.

Hence it is clear how the logarithm of all powers of the root *a* and so also indeed of the fractions can be displayed, whose numerator $= 1$ but the denominator is a power of *a* ; in which cases the logarithms shall be whole numbers. For if one assumes fractions for *b*, thus the same become logarithms of irrational numbers ; if namely $b = \frac{1}{2}$ thus $\frac{1}{2}$ is the logarithm of $a^{\frac{1}{2}}$ or of $\sqrt{a}$. Hence one knows $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2}$. Just as $\log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ and $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, and so forth.

224.

But if the logarithm of another number *c* should be found, thus one sees easily, that the same can be either a whole number or a fraction. Meanwhile it must still give such an exponent, namely *b,* so that the power a^b will be equal to the given number *c*, and as then one has $b = \log c$. Consequently one has in the general case $a^{\log c} = c$

225.

Let us now consider another number *d*, whose logarithm likewise is indicated by $\log d$ so that $a^{\log d} = d$. Now one can multiply this formula by the previous one $a^{\log c} = c$, so one arrives at $a^{\log c + \log d} = cd$: but now the exponent is the logarithm of the power; consequently $\log c + \log d = \log cd$. However, dividing the first form by the latter thus one comes upon $a^{\log c - \log d} = \frac{c}{d}$. Consequently $\log c - \log d = \log \frac{c}{d}$.

226.

Hereby we are led to the two main properties of logarithms, the first of which consists of the equation $\log c + \log d = \log cd$, and from which we learn, that the logarithm of a product such as *cd* may be found, if one adds the logarithms of the factors together. The second property is contained in the equation $\log c - \log d = \log \frac{c}{d}$ and shows that the logarithm of a fraction can be found, if one takes the logarithm of the denominator from the logarithm of the numerator.

227.

And herein precisely stands the wonderful benefit which logarithms render to the art of reckoning. Because if it is desired to multiply or divide two numbers by each other, one has only to add or subtract the logarithms of the same. Moreover it is clear, to be much easier to add or subtract unequal numbers than to multiply or divide, especially if the numbers shall be very large.

228.

But still more important is the benefit for powers and the extraction of roots. Then if $d = c$, thus one has from the first property :
$\log c + \log c = \log cc$, thus $\log cc = 2\log c$. Just as one finds
$\log c^3 = 3\log c$ and $\log c^4 = 4\log c$, and generally $\log c^n = n\log c$.
For if one assumes a fractional number for *n*, thus one finds $\log c^{\frac{1}{2}}$,
thus, $\log \sqrt{c} = \frac{1}{2}\log c$; further for negative numbers $\log c^{-1}$ that is $\log \frac{1}{c} = -\log c$,
and $\log c^{-2}$, that is $\log \frac{1}{cc} = -2\log c$, and so forth.

229.

Thus if one has such tables, within which the logarithms of all numbers shall have been calculated, thus one can carry out the hardest calculations through the help from the same, where large unequal multiplications and divisions, as well as raising to powers and the extraction of roots to be found with far less labour, since for each number in these tables one can find its logarithm, as also for each single logarithm one can find the number itself. Therefore if one wants to find the square root of a given number *c*, thus one seeks the logarithm of the number *c* in the first place which is $\log c$, afterwards one takes the half, which is $\frac{1}{2}\log c$, and this is the logarithm of the square root sought: as the number belonging to this logarithm is the square root itself, and can be found in the table.

230.

We have seen above that the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. and consequently all the positive number logarithms are from the base *a* and its positive powers ; that is from numbers that shall be greater than one.

On the other hand the negative numbers such as -1, -2 etc. are the logarithms of the fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ etc. which are smaller than one, but nevertheless still greater than zero.

From this it follows, that if the logarithm is positive, the number shall be greater than one always; but if the logarithm is negative, so the number is less than one always, but still greater than 0. Consequently no logarithms can be displayed for negative numbers, or the logarithms of negative numbers are impossible and belong to the imagination or imaginary numbers.

231.

In order to illustrate these better, it will be useful to accept for the base *a* the number assigned and indeed that, according to which the usual logarithm tables are reckoned. Moreover thereupon the number 10 will be assumed for the base 10, because the whole art of reckoning is based on the same already. Again it is seen easily, that therefore any other number can be assumed, only that it is greater than 1 ; for then if one wants to put $a=1$, thus all the powers from that would be as $a^b=1$, and always to remain one, and never can be equal to any other number given number such as *c*.

CHAPTER 22

CONCERNING THE USUAL TABLES OF LOGARITHMS

232.

In these tables for the base to be set as notified, that is the root to be $a=10$; also the logarithm of any one number *c* is the exponent of this number, to which if the number 10 were raised, the power would equal the number. Or if the logarithm of the number *c* were indicated by the number log *c*, thus one has always $10^{\log c}=c$.

233.

We have noted already, that the logarithm of the number 1 to be 0 always, because $10^0=1$, also

$\log 1=0,\ \log 10=1,\ \log 100=2, \log 1000=3, \log 10000=4, \log 100000=5, \log 1000000=6$

and further,

$$\log\tfrac{1}{10}=-1,\ \log\tfrac{1}{100}=-2, \log\tfrac{1}{1000}=-3,$$
$$\log\tfrac{1}{10000}=-4, \log\tfrac{1}{100000}=-5, \log\tfrac{1}{1000000}=-6.$$

234.

Now as the logarithms themselves result from these main numbers, so it is much harder in order to find the logarithms of all the other numbers, which must be shown equally well in the tables. This is not yet the place to give enough instruction, how these are themselves to be found, hence we only want to note generally, what to observe arising from that.

235.

Now as it is, $\log 1 = 0$, and $\log 10 = 1$, so it is easy to reckon that of all the numbers between 1 and 10, their logarithms must be contained between 0 and 1, or they are greater than 0, and still smaller than 1.

Let us now consider the number 2, thus it is certain that its logarithm, which we want to indicate by the letter *x*, in order that $\log 2 = x$, to be greater than 0, and yet smaller than 1. Moreover it must be such a number, that 10^x will just be equal to 2.

One can see also that x must be much less than $\frac{1}{2}$, or that $10^{\frac{1}{2}}$ to be greater than 2, then besides if one takes the square, so the square of $10^{\frac{1}{2}}$ becomes $=10^1$; but the square of 2 becomes 4, also much smaller. Just as also $\frac{1}{3}$ for *x* is not too large, or $10^{\frac{1}{3}}$ is greater than 2. Then the cube of $10^{\frac{1}{3}}=10$, but the cube of 2 is only 8. Whereas $\frac{1}{4}$ assumed for *x* is too small: then $10^{\frac{1}{4}}$ is smaller than 2, because the fourth power of that one is 10 but from this one 16. From this one sees thus that *x* or the log 2 is less than $\frac{1}{3}$ and still greater than $\frac{1}{4}$, one can find for each other fraction which is between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$, if the same to be greater or smaller than . As $\frac{2}{7}$ is smaller than $\frac{1}{3}$ and greater than $\frac{1}{4}$, one wants to take $\frac{2}{7}$ for *x* so must $10^{\frac{2}{7}}=2$, but if this were the case, so also must the seventh power of each other be equal : But the seventh power of $10^{\frac{2}{7}}$ is $=10^2=100$, which must be equal to the seventh power of 2; now there the seventh power of $2=128$ and thus greater than the first one, thus also $10^{\frac{2}{7}}$ is smaller than 2 and also $\frac{2}{7}$ smaller than log 2: or log 2 is greater than $\frac{2}{7}$ and still smaller than $\frac{1}{3}$.

Such as fraction is $\frac{3}{10}$; now suppose there shall be $10^{\frac{3}{10}}=2$, so also must the tenth power of each other be equal : But the tenth power of $10^{\frac{3}{10}}=10^3=1000$, but the tenth power of $2=1024$; from which we conclude that $\frac{3}{10}$ is still too small, or that log 2 shall be greater than $\frac{3}{10}$ and yet smaller than $\frac{1}{3}$.

236.

This consideration serves to show, that log 2 itself has a certain size, because we know, that the same certainly is greater than $\frac{3}{10}$ and still smaller than $\frac{1}{3}$. Here we cannot go still further, and because we still do not know the true value, so we will use the letter x for the same, so that $\log 2 = x$, and show that if the same were found, how one can find from that the logarithm of innumerable other numbers; for which the other given equation serves $\log cd = \log c + \log d$, or that the logarithm of a product will be found, if one adds together the logarithms of the factors.

237.

Now since $\log 2 = x$ and $\log 10 = 1$, so we find $\log 20 = x + 1$, and $\log 200 = x + 2$, furthermore $\log 2000 = x + 3$ again $\log 20000 = x + 4$ and $\log 200000 = x + 5$ etc.

238.

Furthermore since $\log c^2 = 2\log c$, and $\log c^3 = 3\log c$, $\log c^4 = 4\log c$, etc. so we obtain from that $\log 4 = 2x$, $\log 8 = 3x$, $\log 16 = 4x$, $\log 32 = 5x$, $\log 64 = 6x$, etc. From here we find further

$$\log 40 = 2x + 1,\ \log 400 = 2x + 2,\ \log 4000 = 2x + 3,\ \log 40000 = 2x + 4 \text{ etc.}$$

$$\log 80 = 3x + 1,\ \log 800 = 3x + 2,\ \log 8000 = 3x + 3,\ \log 80000 = 3x + 4 \text{ etc.}$$

$$\log 160 = 4x + 1, \log 1600 = 4x + 2, \log 16000 = 4x + 3, \log 160000 = 4x + 4 \text{ etc.}$$

239.

Further it has been found that $\log \frac{c}{d} = \log c - \log d$, so one puts $c = 10$, and $d = 2$, and because $\log 10 = 1$ and $\log 2 = x$, thus we find $\log \frac{10}{2}$ that is $\log 5 = 1 - x$, therefore we obtain

$$\log 50 = 2 - x, \quad \log 500 = 3 - x,\ \log 5000 = 4 - x \quad \text{etc.}$$

further $\log 25 = 2 - 2x, \log 125 = 3 - 3x, \log 625 = 4 - 4x$ etc.

From that further we reach the following :

$$\log 250 = 3 - 2x, \log 2500 = 4 - 2x, \log 25000 = 5 - 2x \text{ etc.}$$

further $\log 1250 = 4 - 3x, \log 12500 = 5 - 3x, \log 125000 = 6 - 3x$ etc.

further $\log 6250 = 5 - 4x, \log 62500 = 6 - 4x, \log 625000 = 7 - 4x$

and so forth.

240.

Had one found the logarithm of 3 also, thus one can from that determine the logarithms of endlessly more numbers. We will put the letter y for log 3, and consequently we will have :

$$\log 30 = y + 1,\ \log 300 = y + 2,\ \log 3000 = y + 3, \text{ etc.}$$

$$\log 9 = 2y, \log 27 = 3y, \log 81 = 4y, \log 243 = 5y, \text{etc.}$$

further one can find from that:

$\log 6 = x + y, \log 12 = 2x + y, \log 18 = x + 2y,$

and also likewise $\log 15 = \log 3 + \log 5 = y + 1 - x$.

241.

We have seen above, that all numbers have arisen from the so-called prime numbers by multiplication. Thus if the logarithms of the prime numbers were known, so on can find the logarithms of all the other numbers merely by addition; as e.g. from the number 210 which is composed from the following factors, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, the logarithm will be $= \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7$; since equally the form $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, thus $\log 360 = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5$, from which it is apparent, how one can determine the logarithms of all the other numbers from the logarithms of the prime numbers. Thus in the construction of logarithmic tables, one has to make sure only about finding the logarithms of the prime numbers.

CHAPTER 23

THE MANNER OF EXPRESSING LOGARITHMS

242.

We have seen, that the logarithm of 2 is greater than $\frac{3}{10}$ and less than $\frac{1}{3}$; so that the exponent of 10 must fall between these two numbers, if the power shall become equal to that 2 : but one may well assume a fraction, which one can always do, so that the power will be an irrational number always, and always to be greater or less than 2, therefore the logarithm of 2 itself shall be expressed by such a small fraction. One must therefore be content to designate the value of that itself so precisely through approximation, that the error will be negligible. Therefore one applies oneself to the so called decimal fractions, for which the nature and consistency deserves to be explained clearly.

243.

One knows, that in the customary manner all the numbers are to be written with the ten figures

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

the same have their natural significance from the first place to the right hand only, and that from the second place their significance will be ten times greater 10, but the third by 100, from the fourth by 1000, and so forth of each following place to be 10 times greater than the previous.

Thus in this number 1765, the figure 5 stands on the first place to the right denotes the actual number 5, in the second place stands 6, but which indicates not 6, but $10 \cdot 6$ or 60; the figure 7 in the third place denotes means $100 \cdot 7$ or 700, and finally that 1 in the fifth place indicates 1000, and thus also one can pronounce this number, as one says :

One thousand, seven hundred and sixty five.

244.

We now know the meaning of the figures from the right to the left always to be 10 time greater, and consequently from the left to the right always to be 10 times smaller, so one can after this rule still go further and further back to the right hand, since then the meaning of the symbol always proceeds to be 10 times more small. But here one must mark the digit well, where the figures for these have the natural value, this is done by a comma, as it will be placed behind this digit. If one finds therefore this number written as 36, 54892, so the same thus is to be understood : firstly the symbol 6 has its natural meaning, and the digit 3 at the second place to the left 30. But after the comma the digit 5 means only $\frac{5}{10}$, the following 4 is $\frac{4}{100}$, the digit 8 indicates $\frac{8}{1000}$, the digit 9 is $\frac{9}{10000}$ and the digit 2 is $\frac{2}{100000}$; from which one sees, that the further these figures proceed to the right, their meanings become smaller always and finally so small, that they are regarded as nothing.

245.

This way of writing down numbers is called now a decimal fraction, and also in this way the logarithms in tables have been represented. There for example the logarithm of 2 will be expressed thus 0, 3010300. Whereby to be noted consequently, that because 0 stands before the comma, this logarithm amounts to no whole number, and that its value shall be

$$\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

One could even have left out the last two 0's, the same serve to show actually there is nothing present concerning these fractional parts. But one does not deny, that still smaller parts may follow, but which one can regard as nothing because of their smallness.

246.

One finds also the logarithm of 3 to be expressed by 0, 4771213; from which one sees, that the same to be without whole amounts, but that it consists of this fraction

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}.$$

But one must not believe, that this logarithm is expressed entirely exactly by this expression put in place. But still one knows so much, that the error surely is smaller than $\frac{1}{10000000}$, which also indeed is so small, that in most calculations one can leave it out of the reckoning.

247.

Following this method thus the logarithm of 1 is called 0,0000000, because the same is actually 0 is; but the logarithm of 10 is called 1,0000000, from which one know that the same to be just 1. But the logarithm of 100 is 2,0000000, or just 2, from which one sees that of the numbers between 10 and 100, or which are written with two figures, the logarithms must be contained between 1 and 2, and consequently are to be expressed by 1 and a decimal fraction. Thus $\log 50 = 1,6989700$, the same is thus 1 and still after that $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$. But from the numbers over one hundred as far as 1000 the logarithms contain 2 together with a decimal fraction put in place ; as

$\log 800 = 2,9030900$. From 1000 as far as 10000 the logarithms are greater than 3. From 10000 as far as 100000 greater than 4 and so forth.

248.

But with the numbers under 10, which are written only with one digit, the logarithm is still not whole, and therefore a 0 stands before the comma. Thus next to each given logarithm two parts are to be noted. The first stands before the comma and shows the whole, if such are present; but the other part shows the decimal fraction, which still must be attached to the whole part. Therefore it is clear that such a whole number is to be specified for the whole part of the logarithm, because the same is 0 for all numbers, which consist of a single number only. For numbers consisting of 2 digits, the same is 1. Further the same is 2 for those, consisting of 3 digits, and so on, the same always to be one less than the number of digits. If one requires the logarithm of 1766, thus one knows already, that the first or whole part of that must be 3.

249.

Therefore conversely, as soon as one looks at the first part of a logarithm, thus one knows of how many figures the number itself will consist, because the number of figures always is one greater than the whole part of the logarithm. Therefore if one had found this logarithm 6,4771213 for an unknown number, thus one knew equally that the same number consisted of 7 digits and thus must be greater than 1000000. Also this number is actually 3000000: since $\log 3000000 = \log 3 + \log 1000000$. But now $\log 3 = 0,4771213$ and $\log 1000000 = 6$, which two logarithms added together give $6,4771213$.

250.

For any one logarithm therefore the main part arises following the comma, the decimal fraction, which if it is known for one number, then can serve for many numbers. About showing these, we will consider the logarithm of the number 365 for which the first part without argument is 2, but for the other part, namely the decimal fraction, for brevity we will write the letter x, thus $\log 365 = 2 + x$; from this we obtain, if we multiply by ten continually, $\log 3650 = 3 + x; \log 36500 = 4 + x; \log 365000 = 5 + x.$ We can also go back and always divide by ten, thus we arrive at :

$$\log 36,5 = 1 + x;\ \log 3,65 = 0 + x;\ \log 0,365 = -1 + x;\ \log 0,0365 = -2 + x;$$
$$\log 0,00365 = -3 + x \text{ and so forth.}$$

251.

Now all these previous numbers, which arise from the digits 365, must have a 0 either after or before each another, whatsoever decimal fraction remains in their logarithm, and the difference itself to be found only in the whole number before the comma, which as we have seen also can be come negative, namely if the number shall be less than 1. Because now the ordinary calculator cannot well deal with negative numbers, so in this case the whole number of the logarithm may be increased by 10, and in place of

0 before the comma, one is used to writing 10, since then 9 comes about instead of −1; 8 arises instead of − 2; 7 arises instead of − 3, and so forth. But here nothing at all of the original whole number must be disturbed, in order that the whole number before the comma is taken to have increased by 10, from which one cannot conclude that the number contains either 10, 9 or 8 digits written at the beginning, especially that the first digit shall be either after the comma [i.e. the dec. point] for the first place, if 9 places are present, or after the second place, if 8 are present, or indeed after the third, if 7 stands at the beginning of the logarithm, etc. By such a method one finds the logarithm of the sines presented in tables.

[This amounts to saying 'move the decimal point 10 places to the right to get a non negative logarithm, and after the computation, move the point back again through the same number of places; or equivalently, multiply by 10, 100, 1000, etc., and subsequently divide by these number.]

252.

In the ordinary tables the decimal fractions for the logarithms consist of seven figures, from which also the last part indicates $\frac{1}{10000000}$, and one can be sure, that the same never differ from the true values by such a small part, which error commonly indicates nothing. But if one wishes to calculate more exactly, so the logarithms must present yet more than seven places, which happen in the large tables of *Vlacq*, where the logarithms have been calculated to ten places.

253.

Because no difficulty is had with the first part [*i.e.* the characteristic] of the logarithm, so the same will not be provided or displayed in the tables composed or displayed, but one finds in the same place only the seven figures of decimal fractions, which form the second part. In English Tables one finds the same thing for all numbers expressed as far as 100000 and if still larger numbers are forthcoming, thus small tables are prefixed from which one can estimate how much, on account of the following figures, must yet be added to the logarithm.

254.

Thus from this it is easy to understand, how one should take that forthcoming number back again from the logarithm found from the tables. In order to explain the matter better, thus we will multiply these numbers 343 and 2401 by each other. Since now the logarithms from that must be added, therefore the calculation thus becomes :

$$\left.\begin{array}{r}\log 343 = 2,5352941\\ \underline{\log 2401 = 3,3803922}\end{array}\right\}\text{add}$$

$$\left.\begin{array}{r}5,9156863\\ \underline{6847}\end{array}\right\}\text{subtract}$$

Gives thus 823543. 16

This sum is now the logarithm of the product sought, and from the same we know the first 5 places, that the product consists of 6 figures, which from the decimal fraction in the middle of the table 823543 is found, and this is truly the product sought.

255.

Since by extracting the root the logarithm especially affords an important advantage, thus we will explain this also by an example. It is supposed the square root of the number 10 be found. Since it is necessary thus only to divide the logarithm of 10 which is 1, 0000000 by 2, so the quotient 0, 5000000 is the logarithm sought of the root, itself from the table found to be 3, 16228 from which also the square is actually only around $\frac{1}{100000}$ greater than 10.

END OF THE FIRST SECTION.

CAPITEL 15

VON DEN CUBIC-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN

158.

Da gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche drei mal mit sich selbsten multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre *Cubic- Wurzel* genennetAlso ist die Cubic-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl, eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wann also die vorgegebene Zahl eine würckliche Cubic-Zahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubic-Wurzel davon zu finden. Also ist von 1, die Cubic-Wurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, und so fort.

Eben so ist auch von - 27, die Cubic-Wurzel - 3; von - 125 ist sie - 5. Wann auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubic-Wurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wann es eine vermischte Zahl ist als $2\frac{10}{27}$ welche in einen einzeln Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubic-Wurzel davon $\frac{4}{3}$ das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein würcklicher [i.e. wirklicher] Cubus ist, so läßt sich auch die Cubic-Wurzel davon, weder durch gantze, noch gebrochene Zahlen ausdrücken; also da 43 keine Cubic-Zahl ist, so kann unmöglich weder ingantzen noch gebrochenen Zahlen, eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wißen wir doch so viel, daß die Cubic Wurzeld avon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wißen wir, daß die verlangte Cubic-Wurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn müße.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubic-Wurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen so könnte man der Wahrheit näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemahls genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubic-Wurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$ so wurde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43 .

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubic-Wurzel aus 43 auf keinerley weise durch gantze Zahlen und Brüche ausdrücken laße; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich dieselben anzuzeigen dieses

Zeichens $\sqrt[3]{\ }$ so vor die gegebene Zahl gesetzet, und mit dem Worte Cubic-Wurzel ausgesprochen wird, um daßelbe von der Quadrat-Wurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$, die Cubic-Wurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche drei mal mit sich selbsten multiplicirt 43 hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keinesweges zu den Rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrational- Grössen darstellen. Sie haben auch mit den Quadrat-Wurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich eine solche Cubic-Wurzel durch eine Quadrat-Wurzel, als etwan $\sqrt{12}$ auszudrücken: dann da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$ und also noch irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein würcklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke Rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als *a.*

165.

Sollte man eine Cubic-Wurzel als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; dann wir wißen, daß die Cubic-Wurzel aus einem Product *ab* gefunden wird, wann man die Cubic-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wann $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Dahero begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Dahero auch umgekehrt, wann die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat der ein Cubus ist, die Cubic-Wurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $\sqrt[3]{4a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem $8\cdot 2$ gleich ist.

167.

Wann die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubic-Wurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bei den Quadrat-Wurzeln geschehen; weil nehmlich die Cubi von Negativ-Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubic-Wurzeln aus Negativ-Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als - 2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist - 3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen (-) so hinter dem Cubic-Wurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kannAlso werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bei den Quadrat-Wurzeln der Negativ-Zahlen geschehen.

CAPITEL 16

VON DEN POTESTÄTEN ODER POTENZEN ÜBERHAUPT

168.

Wann eine Zahl mehrmalen mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product eine *Potestät,* oder auch *Potenz,* bisweilen auch eine *Dignität* genennet. Auf Teutsch könnte dieser Nahme durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wann eine Zahl zwei mal mit sich selbsten multiplicirt wird, und ein Cubus wann die Zahl drei mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so sind so wohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Nahmen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie viel mal eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wann eine Zahl zwei mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweite Potestät, welche also eben so viel ist als das Quadrat davon;wird eine Zahl dreimal mit sich selbsten multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat; wird ferner eine Zahl vier mal mit sich selbsten multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennt, welche gemeiniglich mit dem Nahmendes Biquadrats belegt wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Nahmen zu führen pflegen.

170.

Um dieses beßer zu erläutern, so bemerken wir, erstlich daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben; weil so viele mal man auch 1 mit sich selbsten multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgendermaßen fort:

Potestäten	der Zahl 2	der Zahl 3
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907

XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merckwürdig, nehmlich

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,

weil sich darauf unsere gantze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu mercken, daß die kleinen darüber gesetzten Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl *a* folgender gestalt verhalten.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	*aa,*	*aaa,*	*aaaa,*	*aaaaa,*	*aaaaaa,*	etc.

Bei dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Un Bequemlichkeit, daß wann sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man eben denselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, umzu wißen die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben laßen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art solche Potestäten auszudrücken eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nemlich über der Zahl wovon z. E. die hundertste Potestät söll angezeigt werden, etwas seitwärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: Also a^{100} welches ausgesprochen wird, *a* elivirt oder erhaben zu Hundert, drückt die Hundertste Potestät von *a* aus. Die dabei oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der *Exponent* genennt zu werden, welche Nahmen wohl zu bemerken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder *a* elivirt zu 2, die zweite Potestät von *a* an, und pflegt auch bisweilen anstatt *aa* geschrieben zu werden; weil beide Arten gleich leicht zu schreiben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät *aaa,* nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von *a* aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl *a* folgendergestallt vorgestellt,

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \text{etc.}$$

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied *a,* gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augenfallen zu machen. Dahero ist a1 nichts anders als *a* weil die Unität anzeigt, daß der Buchstabe *a* nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine Geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so viel mal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wann man das vorhergehende mit *a* multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wann man jenes durch *a* dividirt, als wodurch der Exponent um eines verm in dert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müße das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0 , als woraus diese merckwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müße, die Zahl *a* mag auch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja so gar auch wenn *a* nichts ist, also daß 0° gewis 1 ausmacht.

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem wir immer das Glied durch *a* theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins verm in dern oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beiderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwerts vorstellen, welche auch rückwerts von der rechten zur lincken gelesen werden muß:

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
1te	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgender Gestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

a^{-1} " " " " $\frac{1}{a^1}$

a^{-2} " " " " $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

a^{-3} " " " " $\frac{1}{aaa}$

a^{-4} " " " " $\frac{1}{aaaa}$ und so fort.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müßen. Dieselben sind nemlich

$$ab \text{ oder } a^1b^1,\ a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, \text{etc.}$$

Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$$\frac{a^1}{b^1}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^5}{b^5}, \frac{a^6}{b^6}, \frac{a^7}{b^7} \text{ etc.}$$

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativ-Zahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativ-Zahl - a, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen,

$$-a, +aa, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7, \text{ etc.},$$

Woraus erhellet, daß nur diejenige Potestäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten grade sind, alle Positiv. Also haben die dritte, fünfte, siebente, neunte, Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen −.

Die zweite, vierte, sechste, achte, Potestäten hingegen alle das Zeichen +.

CAPITEL 17

VON DEN RECHNUNGS-ARTEN MIT DEN POTESTÄTEN

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und − verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summa von der dritten und zweiten Potestät des a ;und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wann von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beides kann nicht kürtzer ausgedrückt werden. Wann aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ etc.

181.

Bei der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich wann eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbsten multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponens um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt giebt a^4 etc. Eben so mit denjenigen deren Exponenten negativ sind, wann dieselben mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponens 1 addiren: Also a^{-1} mit a multiplicirt giebt a^0 das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist welches mit a multiplicirt: giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wann solches mit a multiplicirt werden sollen giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, und so fort.

182.

Wann aber eine Potestät mit aa, oder mit der zweiten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponens um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt giebt a^5; ferner a^4 mit a^2 multiplicirt giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativ-Exponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1 das ist a, welches daraus klar ist, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^2 multiplicirt giebt a^{-1}.

183.

Eben so ist klar, daß wann eine jegliche Potestät mit der dritten Potestät von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponens derselben um 3 vermehrt werden müße; oder a^n mit a^3 multiplicirt giebt a^{n+3}. Und überhaupt wann zwei Potestäten von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potestät von a, deren Exponens die Summaist von jenen Exponenten. Also a^4 mit a^5 multiplicirt giebt a^9, und a^{12} mit a^7 multiplicirt giebt a^{19} etc.

184.

Aus diesem Grund können die hohen Potestäten von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; als wann man zum Exempel die XXIVte Potestät von 2 haben wolte, so würde man dieselbe finden, wann man die XIIte Potestät mit der XIIte Potestät multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, so wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096 so wird das Product 16777216 die verlangte Potestät, nemlich 2^{24} anzeigen.

185.

Bei der Division ist folgendes zu mercken. Erstlich wann eine Potestät von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt giebt a^{-4}.

186.

Wann hernach eine Potestät von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt was für eine Potestät auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt giebt a^{-7}.

187.

Hieraus ist leicht zu begreiffen wie Potestäten von Potestäten gefunden werden müßen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wann man die zweite Potestät, oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potestät, oder der cubus von a^4 wird seyn a^{12} ; woraus erhellet, daß um das Quadrat einer Potestät zu finden, der Exponent derselben nur verdoppelt werden müße. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus, oder die dritte Potestät von a^n wird seyn a^3 . Eben so wird auch die siebente Potestät von a^n gefunden a^{7n}, und so fort.

188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4 , das ist die vierte Potestät von a, welche dahero das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potestät ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potestätein Quadrato-Cubus genennt zu werden. Endlich auch weil der Cubus. von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potestät von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genennt zu werden.Mehrere Nahmen sind heut zu Tage nicht üblich.

CAPITEL 18

VON DEN WURZELN IN ABSICHT AUF ALLE POTESTÄTEN

189.

Weil die Quadrat-Wurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubic-Wurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solcheWurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andre Potestät derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadrat-Wurzeldie zweite Wurzel, und die Cubic-Wurzel die dritte Wurzel nennen, da dann diejenige Wurzel deren vierte Potestät einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel heißen wird, und diejenige deren fünfte Potestät derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel und so fort heißen wird.

190.

Wie die zweite oder Quadrat-Wurzel durch das Zeichen $\sqrt{\ }$, und die dritte oder Cubic-Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet wird; so pflegt man gleicher weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{\ }$, die fünfteWurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{\ }$, und so weiter anzuzeigen; woraus dann klar ist, daß nach dieser Schreib-Art das Zeichen der Quadrat-Wurzel als $\sqrt[2]{\ }$ ausgedruckt werden sollte. Weil aber die Quadrat-Wurzeln am öftesten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzel-Zeichen weggelaßen. Daher wann in dem Wurzel-Zeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadrat-Wurzel verstanden werden.

191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$ ist die IIte Wurzel von a
$\sqrt[3]{a}$ " "IIIte " " a
$\sqrt[4]{a}$ " "IVte " " a
$\sqrt[5]{a}$ " "Vte " " a
$\sqrt[6]{a}$ " "VIte " " a u.s.w.

.
Also, daß hinwiederum die

IIte Potestät von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist
IIIte " " $\sqrt[3]{a}$ " a " "
IVte " " $\sqrt[4]{a}$ " a " "
Vte " " $\sqrt[5]{a}$ " a " "
VIte " " $\sqrt[6]{a}$ " a " " u.s.f.

192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müßen.

Wobei zu mercken, daß wann für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potestäten von 1 immer 1 sind.

Wann aber die Zahl a größer ist as 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

193.

Wann die Zahl a positiv ist, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubic-Wurzeln angeführt worden, daß auch alle übrigeWurzeln würcklich angezeigt werden können, und folglich würckliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweiten, vierten, sechsten und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potestäten so wohl von Positiv- als Negativ-Zahlen immer das Zeichen *plus* bekommen.

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potestäten von Negativ-Zahlen auch negativ sind.

194.

Wir erhalten also daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational oder Surdischen Zahlen, weil so oft die Zahl a keine solche würckliche Potestät ist als die Wurzel anzeiget, so offt ist es auch nicht möglich diese Wurzel durch gantze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehöret dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrational-Zahlen genennt werden.

CAPITEL 19

VON DER AUSDRÜCKUNG DER IRRATIONAL-ZAHLEN DURCH GEBROCHENE EXPONENTEN

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeiget, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wann man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweite Potestät von a^n sey a^{2n}. Dahero ist hinwiederum von der Potestät a^{2n} die Quadrat-Wurzel a^n, und wird folglich gefunden, wann man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

196.

Also ist von a^2 die Quadrat-Wurzel a^1, von a^4 ist die Quadrat-Wurzel a^2, und von a^6 ist die Quadrat-Wurzel a^3 und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wann die Quadrat-Wurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbsten oder von a^1 wird die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadrat-Wurzel anzudeuten wohl zu bemerken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müße, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}. Wann also rückwärts, von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubic Wurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubic Wurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3 und so fort.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wann sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubic-Wurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbsten, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel is als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzel-Zeichen gäntzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen, allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnet ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam dieselben gäntzlich abzuschafen. Doch wird heut zu Tag diese neue Art auch häuffig gebraucht, als welche die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Dann daß $a^{\frac{1}{2}}$ würcklich die Quadrat-Wurzel von *a* sey, sieht man gleich, wann man nur das Quadrat davon nimt, welches geschieht wann man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da dann offen Bahr herauskommt a^1 das ist *a*.

201.

Hieraus ersieht man auch wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müßen; als wann man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl *a* erstlichihre vierte Potestät a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wann man erstlich den Cubum oder die dritte Potestät von *a* sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: Also daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$ Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$ und so weiter.

202.

Wann der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1 so läßt sich der Werth auch folgender Gestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wann man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$ eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$ das ist $a^{3\frac{3}{4}}$ ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wann vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ wird; seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ woraus entspringet a^2 multiplicirt mit

$a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$ und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar mercklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu mercken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Arten kann vorgestellt werden. Dann da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$, etc., verwandelt werden kann; so ist klar das $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, im gleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$ im gleichen auch $\sqrt[8]{a^4}$ und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$ oder $\sqrt[9]{a^3}$ oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzel-Zeichen könne ausgedruckt werden,

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ oder } \sqrt[3]{a^3}, \text{ oder } \sqrt[4]{a^4}, \text{ oder } \sqrt[5]{a^5} \text{ etc.}$$

205.

Dieses kommt bei der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wann $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solcher gestalt hat man gleiche WurzelZeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$ und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Solte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ das ist also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

CAPITEL 20

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN UND IHRER VERBINDUNG ÜBERHAUPT

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungs-Arten als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu beßerer Erleuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungs-Arten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redens-Art, *ist so viel als,* gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun und wird ausgesprochen *ist gleich.* Also wann geschrieben wird $a = b$, so ist die

Bedeutung, daß *a* eben so viel sey als *b*, oder das *a* dem *b* gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungs-Art, welche sich unserm Verstand darstelt, ist ohnstreitigdie Addition, durch welche zwei Zahlen zusammen addirt, oder die Summa derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach *a* und *b* die zwei gegebenen Zahlen und ihre Summa werde durch den Buchstaben *c* angedeutet, so hat man $a+b=c$. Also wann die beiden Zahlen *a* und *b* bekant sind, so lehrt die Addition wie man daraus die Zahl *c* finden soll.

208.

Man behalte diese Vergleichung $a+b=c$, kehre aber jetzt die Frageum, und frage wann die Zahlen *a* und *c* bekannt sind, wie man die Zahl *b*finden soll.Man fragt also was man für eine Zahl zu der Zahl *a* addiren müße, damitdie Zahl *c* herauskomme: Es sey z. E. $a=3$ und $c=8$, also daß $3+b=8$ seyn müßte, so ist klar, daß *b* gefunden wird, wann man 3 von 8 subtrahirt. Überhaupt also um *b* zu finden, so muß man *a* von *c* subtrahiren und da wird $b=c-a$. Dann wann *a* darzu addirt wird, so bekommt man $c-a+a$ das ist *c*.Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also wann die Frage, welche bei der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige von der sie abgezogen werden soll: als wann z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begrif von einer neuen Art Zahlen, ·welche negativ genennt werden, weil $5-9=-4$.

210.

Wann viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summa durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdann das Product. Also bedeutet *ab* das Product, welches entsteht wann die Zahl *a* mit der Zahl *b* multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben *c* andeuten, so haben wir $ab=c$, und die Multiplication lehrt, wann die Zahlen *a* und *b* bekant sind, wie man daraus die Zahl *c finden* solle.

211.

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wann die Zahlen *c* und *a*bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl *b* finden. Es sey z. E. $a=3$ und $c=15$, so daß $3b=15$ und es wird gefragt, mit was für einer Zahl man3 multipliciren müße, damit 15 herauskomme. Dieses geschieht nun durch die Division und wird dahero überhaupt die Zahl *b* gefunden, wann man *c*durch *a* dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b=\frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl *c* nicht würcklich durch die Zahl *a* theilen laße, und gleich wohl der Buchstaben *b* einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennt werden. Also wann wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine gantze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nehmlich $b = \frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wann viele Zahlen die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bei der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selber multiplicirt werden müße, als die Zahl b anweiset. Hier wird wie oben gemeldet a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potestät genennet.

214.

Laßet uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$ worinn also drei Buchstaben *a, b, c,* vorkommen. Dieses voraus gesetzt, so wird in der Lehre von .den Potestäten gezeiget, wie man, wann die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestätselbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also das $c = 5^3$: woraus man sieht daß von 5 die dritte Potestät genommenwerden müße, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b die Potestät c finden soll.

215.

Laßet uns nun auch hier sehen wie die Frage umgekehrt, oder verändert werden kann, also daß aus zweien von diesen dreyen Zahlen *a, b, c,* die dritte gefunden werden soll, welches auf zweierley Art geschehen kann, indem nebst dem *c,* entweder a oder *b,* für bekant angenommen wird. Wobei zu mercken, daß in den obigen Fällen bei der Addition und Multiplication nur eine Veränderung stattfindet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist ob man nebst dem *c,* noch *a,* oder *b,* für bekant annimt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfals verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht statt bei den Potestäten, indem vor *ab* keinesweges gesetzt werden kann *ba,* welches aus einem einigen Exempel leicht zu ersehen; wann z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier würcklich noch zwei Fragen angestelt werden können, wovon die erste ist: Wann nebst der Potestät *c,* noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll. Die zweite Frage aber ist, wann nebst der Potestät *c,* noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwei Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzel. Dann wann man z. E. $b=2$ und $a^2=c$ hat so muß *a* eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem *c* gleich sey, und da wird $a=\sqrt{c}$. Eben so wann $b=3$ so hat man $a^3=c$, da muß also der Cubus von *a* der gegebenen Zahl *c* gleich seyn, und da erhält man $a=\sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beiden Buchstaben *c* und *b* den Buchstaben *a* finden b müße. Es wird nemlich seyn $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl *c* nicht würcklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemercket worden, daß die verlangte Wurzel *a* weder in gantzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine gantz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrigen sey, nemlich wann außer der Potestät *c* noch die Wurzel *a* für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in dergantzen Mathematic so groß ist, daß fast keine weitlaufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf gantzneue Arten von Zahlen, welche nicht einmahl zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

CAPITEL 21

VON DEN LOGARITHMEN ÜBERHAUPT

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b=c$, und bemerken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel *a* eine gewiße Zahlnach Belieben festgestellet werde, also daß dieselbe immer einerley Werth behalte. Wann nun der Exponent *b* also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl *c* gleich werde, so wird der Exponent *b* der Logarithmus dieser Zahl *c* genennt, und um dieselben anzuzeigen werde ich mich in zukumfft des Zeichens eines teutschen *l* bedienen, welches der Zahl *c* vorgesetzt wird; und also schreibt man $b=\log c$ wodurch angedeutet wird, daß *b* gleich sey dem Logarithmus der Zahl *c*, oder der Logarithmus von *c* sey *b*.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmahl festgestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c, nichts anders als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$ so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1 das ist $\log a = 1$; setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\log a^2 = 2$. Eben so wird man haben:
$\log a^3 = 3,\ \log a^4 = 4,\ \log a^5 = 5$, und so ferner.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0 : nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\log 1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will. Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$ also hat man
$\log \frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\log \frac{1}{a^2} = -2,\ \log \frac{1}{a^3} = -3, \log \frac{1}{a^4} = -4$, etc.

223.

Hieraus erhellet wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zehler $= 1$ der Nenner aber einePotestät von a ist, können angezeigt Werden; in welchen Fällen die Logarithm engantze Zahlen sind. Nimmt man aber fur b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrational-Zahlen; ann nemlich $b = \frac{1}{2}$ so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$ oder von $\sqrt{a}$. Dahero bekommt man $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ .Eben so $\log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, und so fort.

224.

Wann aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden sollen, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine gantze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponent geben, nemlich b, so daß die Potestät a^5 der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = \log c$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{\log c} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfals durch $\log d$ angedeutet wird also daß $a^{\log d} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{\log c} = c$, so bekommt man $a^{\log c + \log d} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $\log c + \log d = \log cd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere so bekommt man $a^{\log c - \log d} = \frac{c}{d}$. Folglich wird
$\log c - \log d = \log \frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwei Haupt-Eigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $\log c + \log d = \log cd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als *cd* gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweite Eigenschaft ist in der Gleichung $\log c - \log d = \log \frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daßder Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wann man von dem Logarithmus des Zehlers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227.

Und eben hierin bestehet der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil wann. zwei Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, man nur nöthig habe die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offen Bar, daß es ungleich veil leichter sey Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit wann die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bei den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Dann wann $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $\log c + \log c = \log cc$, also ist $\log cc = 2\log c$. Eben so bekommt man $\log c^3 = 3\log c$ und $\log c^4 = 4\log c$, und allgemein $\log c^n = n\log c$. Nimmt man nun für *n* gebrochene Zahlen an, so bekommt man $\log c^{\frac{1}{2}}$, das ist $\log \sqrt{c} = \frac{1}{2}\log c$; ferner auch für Negativ-Zahlen $\log c^{-1}$ das ist $\log \frac{1}{c} = -\log c$, und $\log c^{-2}$ das ist $\log \frac{1}{cc} = -2\log c$ und so fort.

229.

Wann man also solche Tabellen hat, wo rinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwerste Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mitleichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahlihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbsten, finden kann. Also wann man aus einer Zahl *c* die Quadrat-Wurzel findensoll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl *c* welcher ist $\log c$, hernach nimmt man davon die Hälfte welche ist $\frac{1}{2}\log c$, und diese ist der Logarithmus von der gesuchten Quadrat-Wurzel: allso die Zahl die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadrat-Wurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. und folglich alle Positiv-Zahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten; das ist von Zahlen die größer sind als Eins.

Hingegen die Negativ-Zahlen als -1, -2 etc. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ etc. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch größer als nichts.

Hieraus folgt, daß wann der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als 0. Folglich können für Negativ-Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von Negativ-Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses beßer zu erläutern, wird dienlich seyn für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen und zwar diejenige, nach welcher die üblichen Logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die gantze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andre Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; dann wann man a 1 setzen wollte, so würden alle Potestäten davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl als c gleich werden können.

CAPITEL 22

VON DEN ÜBLICHEN LOGARITHMISCHEN TABELLEN

232.

In diesen Tabellen wird wie gemeldet zum Grund gelegt, daß die Wurzel $a = 10$ sey; also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchen wann die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder wann der Logarithmus der Zahl c durch log$c$ angedeutet wird, so hat man immer $10^{\log c} = c$.

233.

Wir haben schon bemercket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$, also ist
$\log 1 = 0,\ \log 10 = 1,\ \log 100 = 2, \log 1000 = 3, \log 10000 = 4, \log 100000 = 5, \log 1000000 = 6$
ferner

$$\log\tfrac{1}{10} = -1,\ \log\tfrac{1}{100} = -2, \log\tfrac{1}{1000} = -3,$$
$$\log\tfrac{1}{10000} = -4, \log\tfrac{1}{100000} = -5, \log\tfrac{1}{1000000} = -6.$$

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Haupt-Zahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwerer die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleich wohl in den Tabellen müßen angezeigt werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, dahero wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabei zu beobachten vorkommt.

235.

Da nun $\log 1 = 0,$ und $\log 10 = 1$, so ist leicht zu erachten daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, ihre Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müßen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1.

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, allso daß $\log 2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen daß x viel kleiner seyn müße als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, dann wann man beiderseits die Quadraten nimmt, so wir das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$; das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: dann $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist von diesem aber 16. Hieraus sieht man also daß x oder der log 2 kleiner ist als $\frac{1}{3}$ und doch größer als $\frac{1}{4}$ man kann auch für einen jeden andern Bruch der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{4}$, wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn, wann aber dieses wäre, so müßen auch die siebente Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potestät von 2 $= 128$ und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2 und also $\frac{2}{7}$ kleiner als log 2: oder log 2 ist größer als $\frac{2}{7}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potestät $= 1024$; woraus wir schließen daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß log2 größer sey als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet um zu zeigen, daß log 2 seine bestimmte Größe habe, weil wir wißen, daß derselben gewis größer ist als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wißen so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $\log 2 = x$, und zeigen wann derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen die Logarithmen finden könne; worzu die oben gegebene Gleichung dienet $\log cd = \log c + \log d$, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.

237.

Da nun $\log 2 = x$ und $\log 10 = 1$, so bekommen wir $\log 20 = x+1$, und $\log 200 = x+2$, ferner $\log 2000 = x+3$ weiter $\log 20000 = x+4$ und $\log 200000 = x+5$ u. s. f.

238.

Da ferner $\log c^2 = 2\log c$, und $\log c^3 = 3\log c$, $\log c^4 = 4\log c$, etc. so erhalten wir daher $\log 4 = 2x$, $\log 8 = 3x$, $\log 16 = 4x$, $\log 32 = 5x$, $\log 64 = 6x$, etc.. Hieraus finden wir ferner

$$\log 40 = 2x+1,\ \log 400 = 2x+2,\ \log 4000 = 2x+3,\ \log 40000 = 2x+4 \text{ etc.}$$
$$\log 80 = 3x+1,\ \log 800 = 3x+2,\ \log 8000 = 3x+3,\ \log 80000 = 3x+4 \text{ etc.}$$
$$\log 160 = 4x+1, \log 1600 = 4x+2, \log 16000 = 4x+3, \log 160000 = 4x+4 \text{ etc.}$$

239.

Da ferner gefunden worden $\log \frac{c}{d} = \log c - \log d$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $\log 10 = 1$ und $\log 2 = x$, so bekommen wir $\log \frac{10}{2}$ das ist $\log 5 = 1-x$ daher erhalten wir

$$\log 50 = 2-x,\quad \log 500 = 3-x,\ \log 5000 = 4-x \quad \text{etc.}$$

ferner $$\log 25 = 2-2x, \log 125 = 3-3x, \log 625 = 4-4x \text{ etc.}$$

Daher gelangen wir weiter zu folgenden:

$$\log 250 = 3-2x, \log 2500 = 4-2x, \log 25000 = 5-2x \text{ etc.}$$

ferner $$\log 1250 = 4-3x, \log 12500 = 5-3x, \log 125000 = 6-3x \text{ etc.}$$

ferner $$\log 6250 = 5-4x, \log 62500 = 6-4x, \log 625000 = 7-4x$$

und so fort.

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden so könnte man daher noch von unendlich viel mehrern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für log 3 setzen, und daher würden wir haben:

$$\log 30 = y+1,\ \log 300 = y+2,\ \log 3000 = y+3,\ \text{etc.}$$
$$\log 9 = 2y, \log 27 = 3y, \log 81 = 4y, \log 243 = 5y, \text{etc.}$$

daher kan man noch weiter finden: $\log 6 = x+y, \log 12 = 2x+y, \log 18 = x+2y$, imgleichen auch $\log 15 = \log 3 + \log 5 = y+1-x$.

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Prim-Zahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wann nun die Logarithmen der

Prim-Zahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210 welche aus folgenden Factoren besteht, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, wird seyn der Logarithmus $=\log 2+\log 3+\log 5+\log 7$; gleicher gestalt da $360=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5=2^3\cdot 3^2\cdot 5$, so wird $\log 360=3\log 2+2\log 3+\log 5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Prim-Zahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bei Verfertigung der LogarithmischenTabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Prim-Zahlen gefunden werden.

CAPITEL 23

VON DER ART DIE LOGARITHMEN VORZUSTELLEN

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwei Brüchen fallen müße, wann die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrational-Zahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, dahero sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmercklich werde. Hierzu bedienet man sich der so genannten Decimal-Brüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlich erklärt zu werden verdient.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art alle Zahlen mit den zehn Ziffern zu

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweiten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5 die auch würcklich 5 bedeutet, auf der zweiten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern $10\cdot 6$ oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet $100\cdot 7$ oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

244.

Wie nun von der rechten zur lincken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von der lincken zur rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da dann die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mahl kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Wert haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wann man dahero diese Zahl geschrieben findet als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweiten Stelle von der lincken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$ die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9 $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2 $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie vor nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken heißt nun ein Decimal-Bruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. E. der Logarithmus von 2 also ausgedruckt 0, 3010300. Wobei folglich zu mercken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Gantzes betrage, und daß sein Werth sey

$$\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

Man hätte also wohl die zwei hintersten 0 weglaßen können, allein dieselben dienen um zu zeigen daß von diesen Theilgen würcklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilgen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinigkeit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0, 4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Gantzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestallt gantz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch würcklich so klein ist, daß man ihn inden meisten Rechnungen aus der Acht laßen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0, 0000000, weil derselbe würcklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1, 0000000, woraus man erkennt, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2, 0000000, oder just 2, woraus zu sehen daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwei Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müßen, und folglich durch 1 und einen Decimal-Bruch ausgedrückt werden. Also ist $\log 50 = 1,6989700$, derselbe ist also 1 und noch über das $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$.
Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimal-Bruch; als $\log 800 = 2,9030900$. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Gantzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bei einem jeden Logarithmus sind also zwei Theile zu bemerken. Der erste steht vor dem Comma und zeigt die Gantzen an, wann dergleichen vorhanden; der andre Theil aber zeigt die Decimal-Brüche an, die zu dem Gantzen noch gesetzt werden müßen. Also ist es leicht den ersten oder gantzenTheil des Logarithmus einer jeglichen Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wann man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder gantze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, so bald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weis man aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der gantze Theil des Logarithmus. Wann man also für eine unbekante Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man so gleich daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müße als 1000000. Diese Zahl ist auch würcklich 3000000: dann $\log 3000000 = \log 3 + \log 1000000$. Nun aber ist $\log 3 = 0,4771213$ und $\log 1000000 = 6$, welche zwei Logarithmus zusammen addirt geben 6, 4771213.

250.

Bei einem jeglichen Logarithmus kommt also die Hauptsach auf den nach dem Comma folgenden Decimal-Bruch an, welcher wann er einmahl bekant ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten deßen erster Theil ohnstreitig 2 ist, für den andern Theil aber, nemlich den Decimal-Bruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben *x* schreiben, also daß $\log 365 = 2 + x$ *;* hieraus er ..halten wir, wann wir immerfort mit 10 multipliciren, $\log 3650 = 3 + x; \log 36500 = 4 + x; \log 365000 = 5 + x.$ Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren so bekommen wir

$$\log 36,5 = 1 + x;\ \log 3,65 = 0 + x; \log 0,365 = -1 + x; \log 0,0365 = -2 + x;$$

$$\log 0,00365 = -3 + x \text{ und so ferner.}$$

251.

Vor alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimal-Bruch in ihren Logarithmus und der Unterscheid befindet sich nur in der gantzen Zahl vordem Comma, welche wie wir gesehen auch negativ werden kann, wann nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativ-Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die gantze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann anstatt - 1 bekommt 9; anstatt - 2 bekommt man 8; anstatt - 3 bekommt man 7, und so fort. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelaßen werden, daß die gantze Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8

Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wann 9 vorhanden, oder auf der zweiten Stelle, wann 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wann 7 am Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimal-Brüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilgen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgesteilet werden, welches in den großenVLACQ ischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimal-Bruchs, welche den zweiten Theil ausmachen. In den Englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wann größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelgen beigefügt woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müße.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache beßer zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müßen, so kommt die Rechnung also zu stehen.

$$\left.\begin{array}{r} \log 343 = 2,5352941 \\ \underline{\log 2401 = 3,3803922} \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5,9156863 \\ \underline{\qquad\qquad\qquad 6847} \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$\text{Giebt allso } 823543. \qquad 16$$

Diese Summa ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimal-Bruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist würcklich das gesuchte Product.

255.

Da bei Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der

Zahl 10 die Quadrat-Wurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10 welcher ist 1, 0000000 durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0, 5000000 der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Dahero die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3, 16228 wovon auch würcklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilichen größer ist als 10.

ENDE DES ERSTEN ABSCHNITTS