CHAPTER 9

ON THE ADDITION AND SUBTRACTION OF FRACTIONS

94.

If the fractions have equal denominators, thus little difficulty is had for the same to be added or subtracted, in so far as $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ is as much as $\frac{5}{7}$ and $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ is as much as $\frac{2}{7}$. In this case one merely performs the addition and subtraction of the numerators alone, and writes the common denominator beneath. Therefore

$$\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100} \text{ makes as much as } \frac{9}{100};$$
$$\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50} \text{ is thus as much as } \frac{36}{50} \text{ or } \frac{18}{25};$$
$$\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20} \text{ is thus as much as } \frac{16}{20} \text{ or } \frac{4}{5};$$

just as also $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ makes $\frac{3}{3}$ or 1, that is a whole, and $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ makes $\frac{0}{4}$ that is nothing, or 0.

95.

But if the fractions do not have equal denominators, thus it is possible always to transform the same into others of equal value, the denominators of which are equal. Therefore if these fractions $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ are given and shall be added together, thus it is to consider that $\frac{1}{2}$ is as much as $\frac{3}{6}$ and $\frac{1}{3}$ as much as $\frac{2}{6}$ thus we have instead of the above these fractions $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$ which give $\frac{5}{6}$. Further $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ is just as the above, only that the *minus* sign stands between, therefore $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ gives $\frac{1}{6}$. Further these fractions are given $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$. Because here $\frac{3}{4}$ is as great as $\frac{6}{8}$, thus we put here in the same place $\frac{6}{8}$, and $\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ gives $\frac{11}{8}$ or $1\frac{3}{8}$. If one asks how much $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$ make taken together, thus one writes only instead of the same $\frac{4}{12}$ and $\frac{3}{12}$, thus becoming $\frac{7}{12}$.

96.

If more than two fractions are given, such as : $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, which are required to be brought to a common denominator, thus everything comes to this, that one must find a number, which itself can be divided by all these denominators. Now 60 is such a number, which gives the common denominator. Therefore we will have $\frac{30}{60}$ in place of $\frac{1}{2}$, $\frac{40}{60}$ in place of $\frac{2}{3}$, $\frac{45}{60}$ in place of $\frac{3}{4}$, $\frac{48}{60}$ in place of $\frac{4}{5}$, $\frac{50}{60}$ in place of $\frac{5}{6}$. Now it is wished to add these fractions together $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}$, thus to make the number of the same denominator taken together $\frac{213}{60}$, or whole 3 and $\frac{33}{60}$, or $3\frac{11}{20}$.

97.

Everything here comes from this, that one can transform two fractions of unequal denominators into another, the denominators of which are equal to each other. In order to perform this in a general manner, the proposed fractions thus shall be $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$. Now one multiplies the first fraction above and below by *d,* thus one finds $\frac{ad}{bd}$, which fraction is just as large as $\frac{a}{b}$. Then one multiplies the other fraction as the first above and below by *b,* thus one finds instead of the same $\frac{bc}{bd}$, and thus now the denominators are equal ; but the sum of the same is $\frac{ad+bc}{bd}$, and their difference is $\frac{ad-bc}{bd}$. Thus if these fractions are presented, $\frac{5}{8}$ and $\frac{7}{9}$, thus one finds instead of the same, $\frac{45}{72}$ and $\frac{56}{72}$, the sum of which makes $\frac{101}{72}$, but the difference $\frac{11}{72}$.

98.

Here also the question arises for consideration, which of two given fractions is to be the larger or smaller than the other ? For example, which of these two fractions $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{7}$ is the greater? To this end one must only bring both the fractions to an equal denominator, and there one finds for the first $\frac{14}{21}$ and for the second $\frac{15}{21}$, from which it is obvious, that $\frac{5}{7}$ is greater than $\frac{2}{3}$, and indeed by $\frac{1}{21}$. Further if these two fractions are given $\frac{3}{5}$ and $\frac{5}{8}$, thus one obtains instead of these the fractions $\frac{24}{40}$ and $\frac{25}{40}$, from which it is apparent that $\frac{5}{8}$ to be more than $\frac{3}{5}$, but only by $\frac{1}{40}$.

99.

If a fraction may be taken from a whole number, such as $\frac{2}{3}$ from 1, thus one must write only $\frac{3}{3}$ instead of 1, one then sees thus to be equal, that $\frac{1}{3}$ remains left over. Just as thus $\frac{5}{12}$ taken from 1 leaves $\frac{7}{12}$. But should one take $\frac{3}{4}$ from 2, thus one writes for 2 only 1 and $\frac{4}{4}$, since then 1 and $\frac{1}{4}$ remains left over. By the way it is known, that if a fraction shall be added to a whole number, plainly one only writes the same after that ; as $\frac{2}{3}$ added to 6 gives $6\frac{2}{3}$.

100.

It happens occasionally also, that 2 or more fractions to be added together amounts to more than a whole number, which then must be observed: as $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, or $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ gives $\frac{17}{12}$, which thus is as much as $1\frac{5}{12}$. Just as if more whole numbers and fractions shall be added together, thus first one adds the fractions and then their sum contains 1 or more whole numbers, thus the same afterwards must be added to the whole numbers; e.g. there was $3\frac{1}{2}$ and $2\frac{2}{3}$ to be added; thus in the first place the fractions $\frac{3}{6}$ and $\frac{4}{6}$ taken together make $\frac{7}{6}$, or $1\frac{1}{6}$, which with the whole number amounts to 6 and $\frac{1}{6}$.

CHAPTER 10
ON MULTIPLICATION AND DIVISION

101.

If a fraction shall be multiplied with a whole number, thus one multiplies from that only the numerator, and leaves the denominator without change;
thus :

2 times $\frac{1}{2}$ makes $\frac{2}{2}$,or a whole;

2 times $\frac{1}{3}$ makes $\frac{2}{3}$; further 3 times $\frac{1}{6}$ makes $\frac{3}{6}$ or $\frac{1}{2}$;

4 times $\frac{5}{12}$ makes $\frac{20}{12}$, or 1 and $\frac{8}{12}$, or $1\frac{2}{3}$.

One infers the rules from this, that a fraction will be multiplied by a whole number, if either one multiples the numerator by that number, or if one divides the whole number by the denominator, which latter, it is involved, shortens the calculation. E.g. there shall be $\frac{8}{9}$ multiplied by 3, thus if the numerator shall be multiplied by the whole number there arises from this $\frac{24}{9}$, which thus is as much as $\frac{8}{3}$; but if I let the numerator be unchanged and divide the denominator 9 by 3, thus I arrive upon $\frac{8}{3}$ also; that is 2 and $\frac{2}{3}$. Just as $\frac{13}{24}$ multiplied by 6 gives $\frac{13}{4}$ or $3\frac{1}{4}$.

102.

Therefore generally, if a fraction $\frac{a}{b}$ shall be multiplied by c, thus one arrives at $\frac{ac}{b}$. Whereby it is to be noted, that if the whole number is just equal to the denominator, as then the product is equal to the numerator, therefore :

$\frac{1}{2}$ taken twice gives 1;

$\frac{2}{3}$ mult. by 3 gives 2;

$\frac{3}{4}$ mult. by 4 gives 3;

and generally, if the fraction $\frac{a}{b}$ shall be multiplied by the number b, thus a shall be the product, from which the principle has been shown above already ; then there $\frac{a}{b}$ expresses the quotient, if the dividend a shall be divided by the divisor b, and to be known equally, that the quotient multiplied by the divisor must give the dividend, thus it is clear that $\frac{a}{b}$ multiplied by b must give the number a.

103.

Since we have shown now, how one can multiply a fraction by a whole number; thus we must see also, how a fraction is to be divided by a whole number, before we can understand the multiplication of a fraction with another fraction. But it is clear, that if I shall divide the fraction $\frac{2}{3}$ by 2, $\frac{1}{3}$ from this there comes, just as how in that case, since $\frac{6}{7}$ divided by 3 must arrive at $\frac{2}{7}$. Whereby it is clear, that one must divide only the numerator by the whole number, since then the denominator remains unchanged.

Therefore :

$\frac{12}{25}$ div. by 2 gives $\frac{6}{25}$ and

$\frac{12}{25}$ div. by 3 gives $\frac{4}{25}$ and

$\frac{12}{25}$ div. by 4 gives $\frac{3}{25}$, and so forth.

104.

The rule therefore has little difficulty in practice, but only if the numerator lets itself be divided by the proposed number : for if this cannot be done, thus it is to be noted, that one can change the fraction into an infinite number of other forms, among which one indeed must find such, the numerator of which lets itself be divided by the given number. Therefore if $\frac{3}{4}$ were to be divvied by 2, thus one must change this fraction into $\frac{6}{8}$, thus it gives $\frac{3}{8}$, when it is divided by 2.

As a general rule, if the fraction $\frac{a}{b}$ shall be divided by c, thus one changes the same into this $\frac{ac}{bc}$, the numerator of which ac divided by c gives a, therefore the sought quotient is $\frac{a}{bc}$.

105.

From this we observe, that if a fraction such as $\frac{a}{b}$, is required to be divided by a whole number c, one only needs to multiply the denominator b by the whole number and to leave the numerator without change. Therefore, $\frac{5}{8}$ divided by 3 gives $\frac{5}{24}$, and $\frac{9}{16}$ divided by 5 gives $\frac{9}{80}$. But if the numerator itself can be divided by a whole number, thus the calculation will be easier. As, $\frac{9}{16}$ divided by 3 gives $\frac{3}{16}$. But after that manner $\frac{9}{48}$. Yet still this fraction is as much as that $\frac{3}{16}$. Then 3 by 3 is 9, and 3 by 16 is 48.

106.

Now we are in a position to show, how a fraction $\frac{a}{b}$ shall be multiplied by another fraction $\frac{c}{d}$. One must consider only, that $\frac{c}{d}$ is as much as c divided by d : and therefore it is necessary only initially to multiply the fraction $\frac{a}{b}$ by c, since then $\frac{ac}{b}$ arises ; after that to divide by d, since then it gives $\frac{ac}{bd}$: and from that this rule emerges, that about multiplying two fractions with one another one need only in the first place multiply the numerators together, and secondly also besides the denominators to be multiply together Therefore :

$\frac{1}{2}$ mult. by $\frac{2}{3}$ gives $\frac{2}{6}$ or $\frac{1}{3}$; further

$\frac{2}{3}$ mult. by $\frac{4}{5}$ mult. gives $\frac{8}{15}$; and

$\frac{3}{4}$ mult. by $\frac{5}{12}$ mult. gives $\frac{15}{48}$ or $\frac{5}{16}$ etc.

107.

Now it is still needed to show, how a fraction shall be divided by another fraction ; whereby to note in the first place, that if the fractions have equal denominators, the division can be proposed for the numerators only : because for example $\frac{3}{12}$ into $\frac{9}{12}$ divides just as many times, as 3 into 9, that is 3 times. From this $\frac{8}{12}$ shall be divided by $\frac{9}{12}$, thus one must only divide 8 by 9 divide, which gives $\frac{8}{9}$. Further $\frac{6}{20}$ goes 3 time into $\frac{18}{20}$; $\frac{7}{100}$ into $\frac{49}{100}$ gives 7 times ; $\frac{6}{25}$ into $\frac{7}{25}$ gives $\frac{6}{7}$; just as $\frac{3}{7}$ by $\frac{4}{7}$ gives $\frac{3}{4}$.

108.

But if the fractions do not have equal denominators, thus one knows how the same can be brought to have equal denominators. For example, one may divide the fraction $\frac{a}{b}$ by $\frac{c}{d}$, thus one may bring these fractions in the first place to equal denominators, and since one knows how to divide the number $\frac{ad}{bd}$ by $\frac{bc}{bd}$, from that just as much must come from this, as if one divides the first numerator *ad* by the second *bc*: Consequently the quotient sought will be $\frac{ad}{bc}$.

From here this the rule emerges: one must multiply the numerator of the dividend by the denominator of the divisor, and the denominator of the dividend by the numerator of the divisor, thus those give the product of the numerator and these the divisor for the given quotient.

109.

Therefore if one wished to divide $\frac{5}{8}$ by $\frac{2}{3}$, thus one finds according to this rule, $\frac{15}{16}$ for the quotient. Further if $\frac{3}{4}$ were to be divided by $\frac{1}{2}$, thus one finds $\frac{6}{4}$ or $\frac{3}{2}$, that is 1 and $\frac{1}{2}$. Further if the fraction $\frac{25}{48}$ were divided by $\frac{5}{6}$, thus one finds $\frac{150}{240}$ or $\frac{5}{8}$.

110.

One is accustomed to use this rule for division in a more convenient manner following the form proposed. One inverts the fraction, by which one wants to divide, while one writes its denominator above, and its numerator below, and multiplies the fraction which is required to be divided, by this inverted fraction, thus on obtains the quotient sought. Therefore $\frac{3}{4}$ divided by $\frac{1}{2}$, is just as much as $\frac{3}{4}$ multiplied by $\frac{2}{1}$, from which $\frac{6}{4}$ arises or $1\frac{1}{2}$. Just as $\frac{5}{8}$ divided by $\frac{2}{3}$ is just as much as $\frac{5}{8}$ multiplied by $\frac{3}{2}$, from which there arises $\frac{15}{16}$; further $\frac{25}{48}$ divided by $\frac{5}{6}$, gives just as much as $\frac{25}{48}$ multiplied by $\frac{6}{5}$, since then $\frac{150}{240}$ or $\frac{5}{8}$ arises.

One therefore sees generally, that on dividing by the fraction $\frac{1}{2}$ is just as much as multiplying by $\frac{2}{1}$ that is by 2 ; and dividing by $\frac{1}{3}$ is just as much as multiplying by $\frac{3}{1}$, that is by 3.

111.

Therefore if the number 100 shall be divided by $\frac{1}{2}$, thus it gives 200 ; and 1000 divided by $\frac{1}{3}$ gives 3000. Further if 1 shall be divided by $\frac{1}{1000}$, thus 1000 comes about ; and 1 divided by $\frac{1}{100\,000}$ gives 100000; from which one can understand, that a division which has been done by 0, must give an unending amount, because if one divides 1 by this small fraction $\frac{1}{100\,000\,000}$, the great number 1000 000 000 arises.

112.

If a fraction shall be divided by itself, thus the same part of itself is understood to be taken, so that the quotient shall be 1, because each number divided by itself gives 1 : this is known just from our rule : as if e.g. $\frac{3}{4}$ shall be divided by $\frac{3}{4}$ thus one must multiply $\frac{3}{4}$ by $\frac{4}{3}$ since then there becomes $\frac{12}{12}$,that is 1. And if $\frac{a}{b}$ were to be divided by $\frac{a}{b}$, thus one multiplies $\frac{a}{b}$ by $\frac{b}{a}$ since then $\frac{ab}{ab}$ arises that is 1.

113.

There still remains an way of reckoning to explain, which is often used. For example one asks what the half of $\frac{3}{4}$ shall be, thus which will be said as much as by one multiplying $\frac{3}{4}$ by $\frac{1}{2}$. Just as if one asks, what $\frac{2}{3}$ of $\frac{5}{8}$ shall be, thus one multiplies $\frac{5}{8}$ by $\frac{2}{3}$, since then $\frac{10}{24}$ is found ; and $\frac{3}{4}$ of $\frac{9}{16}$ is just as much as $\frac{9}{16}$ multiplied by $\frac{3}{4}$ and amounts to $\frac{27}{64}$. Which is well to note, since this kind of reckoning often arises.

114.

Finally because here it is necessary to consider the signs + and −, which above have been established for whole numbers. Therefore : $+\frac{1}{2}$ multiplied by $-\frac{1}{3}$, gives $-\frac{1}{6}$; and $-\frac{2}{3}$ multiplied by $-\frac{4}{5}$, gives $+\frac{8}{15}$. Further $-\frac{5}{8}$ divided by $+\frac{2}{3}$, gives $-\frac{15}{16}$; and $-\frac{3}{4}$ divided by $-\frac{3}{4}$, gives $+\frac{12}{12}$ or $+1$.

CHAPTER 11

SQUARED NUMBERS

115.

If a number shall be multiplied by itself, thus the product will be called a *square*, just as in regard of which the number, from which it emerged, will be called its *square root*.

Therefore if one, for example, multiplies 12 by 12, thus the product is a square number 144, of which the root is the number 12.

The reason for this nomenclature is taken from geometry, where the contents of a square has been found, if one multiplies the same side by itself.

116.

Therefore all the square numbers will be found by multiplication, namely if one multiplies the square root by itself.

Thus because 1 multiplied by 1 gives 1, thus 1 is the square of 1.

Further 4 is the square of the number 2; and whereas 2 is the square root of 4.

Just as 9 is the square of 3, and 3 the square root of 9. Therefore we will work out the squares of the natural numbers, and the following table in place here, in which the numbers or roots have been placed in the first row, but the squares in the second row.

Numbers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Squares	1	4	9	1 6	2 5	3 6	4 9	6 4	8 1	10 0	12 1	14 4	16 9	19 6	22 5	25 6	28 9

117.

With these, the order progressing according to the square numbers, we notice at once a beautiful property, which is present there within these, that if one takes each one from the following, the remainders progress in the following order :

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \text{etc.}$$

which always increases by two, and all the odd numbers are presented according to their order.

118.

The square of fractions are found in the same way, namely if one multiplies a fraction by itself. Therefore the square of $\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{4}$,

the square of $\frac{1}{3}$ is $\frac{1}{9}$, of $\frac{2}{3}$ the square is $\frac{4}{9}$,

the square of $\frac{1}{4}$ is $\frac{1}{16}$, of $\frac{3}{4}$ the square is $\frac{9}{16}$, and so forth

Namely one must only divide the square of the numerator by the square of the denominator, thus the squares of the fractions are known. Therefore $\frac{25}{64}$ is the square of the fraction $\frac{5}{8}$ and conversely $\frac{5}{8}$ is the root of $\frac{25}{64}$.

119.

If one wants to find the square of a mixed number, which consists of a whole number and a fraction, thus one must only bring the same into a single fraction, and take the square of that. Thus in order to find the square of $2\frac{1}{2}$, thus in the first place $2\frac{1}{2}$ is as much as $\frac{5}{2}$, and consequently the square is $\frac{25}{4}$ which works out to be $6\frac{1}{4}$. Therefore $6\frac{1}{4}$ is the square of $2\frac{1}{2}$. Just as in order to find the square of $3\frac{1}{4}$, thus one notes that $3\frac{1}{4}$ thus is as much as $\frac{13}{4}$,of which the square is $\frac{169}{16}$, which makes 10 and $\frac{9}{16}$. We want for example, to consider the squares which increase by a quarter from 3 to 4, as:

Number 3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Square 9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

From which one can easily verify, that if the root contains a fraction, the square of the same always contains a fraction. Thus if the root is $1\frac{5}{12}$,thus the square itself may be found $\frac{289}{144}$,which is $2\frac{1}{144}$, and therefore it is only a little greater than 2.

120.

In a general manner, if the root is *a*, thus the square is *aa:* further from the root 2*a* the square is 4*aa.* From this one sees, that if the root shall be taken 2 times greater, the square becomes 4 times greater. Further if from the root 3*a* the square is 9*aa,* and from the root 4*a* the square is 16*aa* and so on. But if the root be called *ab,* thus its square shall be *aabb,* and if *abc* is the root, thus its square is *aabbcc.*

121.

Therefore if the root consists of 2 or more factors, thus one must multiply together the squares of each, and conversely, if the square consists of 2 or more factors, each of which is a square, thus one takes the roots of the same to be multiplied by each other. Therefore since 2304 is as much as $4\cdot 16\cdot 36$; thus the square root of which is $2\cdot 4\cdot 6$, that is 48, and in that case 48 is the square root of 2304, as $48\cdot 48$ makes just as much as 2304.

122.

Now we want to consider also the signs *plus* and *minus*, what the situation is with the same signs in squares. It appears at once that if the root has the sign $+$, or is a positive number, suchlike as we have taken so far, the square itself also must be positive number, because $+$ multiplied by $+$ gives $+$. Therefore the square of $+a$ shall be $+aa$. But if the root were a negative number, such as $-a$, thus its square will be $+aa$, just as if the root were $+a$; therefore $+aa$ is the square of $+a$ as well as of $-a$; and therefore from a given square two square roots can be given, one of which is positive, and the other negative. Therefore the square root of 25 is thus $+5$, as well as -5, because $+5$ multiplied by $+5$, and also -5 multiplied by -5 gives $+25$.

CHAPTER 12

SQUARE ROOTS AND FROM WHICH IRRATIONAL NUMBERS ARISE.

123.

From the above it is clear, that the square root of a given number is nothing other than such a number, of which the square is the given number. Therefore the square root of 4 is 2, of 9 it is 3, of 16 it is 4 etc. whereby it is to be noted, that the roots can be written with a plus sign as well as with a negative sign. Thus from the number 25, the square root is $+5$, as well as -5, because -5 multiplied by -5 amounts to $+25$ just as well as $+5$ multiplied by $+5$.

124.

Therefore if the aforementioned number is a square number thus as long as it is had in the memory, thus the square root is easy to find: as, if the given number were 196 thus one knows, that the square root of that is 14. With fractions it is likewise not difficult, and it is clear from the above, that the square root of the fraction $\frac{25}{49}$ shall be $\frac{5}{7}$, because one thus must know only the square root of the numerator as well as of the denominator. If the given number is a mixed number such as $12\frac{1}{4}$ thus one can bring the same to a single fraction, namely $\frac{49}{4}$ of which the square root $\frac{7}{2}$ is obvious, or $3\frac{1}{2}$, which thus is the square root of $12\frac{1}{4}$.

125.

But if the given number is not a square, as for example 12, thus also it is not possible to find or to be given a number the square root from that, which is a number which multiplied by itself , amounts to just 12. But meanwhile we know still, that the square root of 12 is greater than 3, because $3\cdot 3$ makes 9 only, but is still smaller than 4, because $4\cdot 4$ still makes 16 ; we know very well also, that the same must be smaller than $3\frac{1}{2}$, because the square of $3\frac{1}{2}$ is more than 12, then $3\frac{1}{2}$ is $\frac{7}{2}$ and the square of which is $\frac{49}{4}$ or $12\frac{1}{4}$. We know very well this root to be taken still closer to $3\frac{7}{15}$ because the square of $3\frac{7}{15}$ or $\frac{52}{15}$ makes $\frac{2704}{225}$; therefore $3\frac{7}{15}$ is still a little too great, since $\frac{2704}{225}$ is about $\frac{4}{225}$ greater than 12.

126.

Now because $3\frac{1}{2}$ and also $3\frac{7}{15}$ is still a little greater than the square root of 12, thus one would like to think, that if one were to add a number a little smaller to 3 instead of the fraction $\frac{7}{15}$, the square of which could be exactly 12.

Let us therefore take $3\frac{3}{7}$, because $\frac{3}{7}$ is at least a little smaller than $\frac{7}{15}$. Now thus $3\frac{3}{7}$ is as much as $\frac{24}{7}$, of which the square is $\frac{476}{49}$, and therefore is a little smaller than 12. Since 12 amounts to $\frac{588}{49}$, thus $\frac{12}{49}$ is still a little too small. Thus from this we see, that $3\frac{3}{7}$ is too small, but $3\frac{7}{15}$ is too large. One can therefore assume $3\frac{5}{11}$, because $\frac{5}{11}$ is greater than $\frac{3}{7}$ and still smaller than $\frac{7}{15}$. Now since $3\frac{5}{11}$ brought into a fraction shall be $\frac{38}{11}$, thus the square of that is $\frac{1444}{121}$. But 12 brought to this denominator gives $\frac{1452}{121}$,from which it is clear, that $3\frac{5}{11}$ is still too small and that only by about $\frac{8}{121}$. Now one would want to put in place the root to be $3\frac{6}{13}$, because $\frac{6}{13}$ is a little greater than $\frac{5}{11}$, thus the square from that would become $\frac{2025}{169}$; but 12 brought to this denominator gives $\frac{2028}{169}$. Therefore $3\frac{6}{13}$ is still a little too small, but only by $\frac{3}{169}$, still $3\frac{7}{15}$ is there a little too large.

127.

But it is easily understood, that we want to put in place a fraction after 3, the square of which must always itself contain a fraction, and therefore can never amount to 12 exactly. Therefore, we know without being concerned, that the square root of 12 is greater than $3\frac{6}{13}$ but yet smaller than $3\frac{7}{15}$,thus we must still admit, that it is not possible to find such a fraction between two these two fractions, which added to 3, would express the square root of 12 exactly. Meanwhile one can still not say, that the square root of 12 per se was undetermined, but it follows from what has been mentioned only to some extent, that the same cannot be expressed by fractions, and on no account has it necessarily a determined size.

128.

Hereby we have been let to a new kind of number, which in no way lets itself be expressed by fractions and equally well have a defined magnitude, as we have seen from the square root of 12. This new kind of number now are to be called *irrational numbers*, and such arise, as often as one wants to find the square root of a number, which is not a square. Therefore because 2 is not a square, thus the square root of 2, or that number, which multiplied by itself brings forth 2 exactly, is an irrational number. Sometimes also such numbers are accustomed to be called *surds*.

129.

Now although such irrational numbers cannot themselves be considered as fractions, thus we have a thorough idea of the sizes. If for example, the square root of 12 thus may still appear to be hidden, thus we know still that the same is such a number, which multiplied by itself produces just 12. And this property is sufficient, to give us a thorough understanding of this number, primarily since we can always get closer to the true value itself..

130.

Because we now have a sufficient understanding of suchlike irrational numbers, thus one avails oneself of a certain sign to indicate the square root of such numbers, which are not square numbers. This sign now has the form, $\sqrt{\ }$ and will be called the square root. Thus $\sqrt{12}$ indicates this number, which multiplied by itself gives 12, or the square root of 12. Just as $\sqrt{2}$ indicates the square root of 2; $\sqrt{3}$ the square root of 3; further $\sqrt{\frac{2}{3}}$ the square root of $\frac{2}{3}$, and generally $\sqrt{a}$, indicates the square root of the number *a*. Thus whenever one wishes to indicate the square root of a number which is not a perfect square, thus one makes use of this sign $\sqrt{\ }$, which will be written for the number itself.

131.

The above mentioned idea of the square root leads us at once along a path to represent the usual idea of calculating with the same irrational numbers. Namely because the square root of 2 by itself must give 2, thus we know, that if $\sqrt{2}$ shall be multiplied by $\sqrt{2}$, necessarily 2 arises from this; just as $\sqrt{3}$ multiplied by $\sqrt{3}$ gives 3; and $\sqrt{5}$ by $\sqrt{5}$ gives 5; in the same manner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ multiplied by $\sqrt{\frac{2}{3}}$ gives $\frac{2}{3}$ and generally $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{a}$ gives *a*.

132.

But if $\sqrt{a}$ should be multiplied with $\sqrt{b}$, thus the product is $\sqrt{ab}$, because above we have seen, that if a square has factors, there the roots also arise from the roots of the factors. Therefore one finds the square root from the product *ab,* that is $\sqrt{ab}$, if one multiplies the square root of *a,* that is $\sqrt{a}$, by the square root of *b,* that is $\sqrt{b}$. From this it appears at once that if *b* were equal to *a*, since $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{b}$ gave $\sqrt{ab}$. But now $\sqrt{aa}$ clearly is *a* because *aa* is the square of *a.*

133.

Just as, if $\sqrt{a}$ should be divided through by $\sqrt{b}$, thus one obtains $\sqrt{\frac{a}{b}}$ from which itself it can happen, that in the quotient the irrationality may vanish. Thus if $\sqrt{18}$ shall be divided by $\sqrt{8}$, thus one obtains $\sqrt{\frac{18}{8}}$. But $\frac{18}{8}$ is the same as $\frac{9}{4}$, and the square root of $\frac{9}{4}$ is $\frac{3}{2}$.

134.

If the number, for which the root sign $\sqrt{\ }$ is put in place, is itself a square, thus itself lets the root from that be expressed in the customary manner. Thus $\sqrt{4}$ is just as much as 2; $\sqrt{9}$ is 3; $\sqrt{36}$ is 6; and $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ is $\sqrt{\frac{49}{4}}$ that is $\frac{7}{2}$ or $3\frac{1}{2}$. In these cases the irrationality is only apparent, and falls away from these.

135.

It is also easy to multiply such irrational numbers with ordinary numbers. Thus 2 by $\sqrt{5}$, is as much as $2\sqrt{5}$; and $\sqrt{2}$ multiplied by 3 gives $3\sqrt{2}$; but because 3 is as much as $\sqrt{9}$, thus also $\sqrt{9}$ by $\sqrt{2}$ multiplied gives the following form, namely $\sqrt{18}$. Thus that

$\sqrt{18}$ is just as much as $3\sqrt{2}$. Just as $2\sqrt{a}$ is as much as $\sqrt{4a}$, and $3\sqrt{a}$ as much as $\sqrt{9a}$. And in a general manner $b\sqrt{a}$ is as much as the square root of *bba* or $\sqrt{abb}$ *;* from which one sees, that if the number, which stands behind that sign, contains a square in itself, the root from that can be put before the sign ; as $b\sqrt{a}$ instead of $\sqrt{abb}$. After these the following reductions are clear :

$\sqrt{8}$,or $\sqrt{2\cdot 4}$, is thus as much as $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, " $\sqrt{3\cdot 4}$, " " " " $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, " $\sqrt{2\cdot 9}$, " " " " $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, " $\sqrt{6\cdot 4}$, " " " " $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, " $\sqrt{2\cdot 16}$, " " " " $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, " $\sqrt{3\cdot 25}$, " " " " $5\sqrt{3}$ and so forth.

136.

With division there is just the condition: $\sqrt{a}$ divided by $\sqrt{b}$, gives $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ that is $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

In just this way $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ is as much as $\sqrt{\frac{8}{2}}$, or $\sqrt{4}$, or 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ is $\sqrt{\frac{18}{2}}$, or $\sqrt{9}$, or 3. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ is $\sqrt{\frac{12}{3}}$, or $\sqrt{4}$, or 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ is $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, or $\sqrt{\frac{4}{2}}$, or $\sqrt{2}$. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ is $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, or $\sqrt{\frac{9}{3}}$, or $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ is $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, or $\sqrt{\frac{144}{6}}$, or $\sqrt{24}$, or $\sqrt{6\cdot 4}$, that is $2\sqrt{6}$.

137.

In addition and subtraction nothing appears especially noticeable, because the numbers are to be joined only with a *plus* and *minus*. As $\sqrt{2}$ added to $\sqrt{3}$ gives $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; and $\sqrt{3}$ taken away from $\sqrt{5}$ gives $\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

138.

Finally it is still to be observed, that, for the difference of these so-called irrational numbers, the ordinary numbers, both whole as well as all fractions, are accustomed to be called rational numbers named.

So when the discussion is about rational numbers, thus at all times from that not only whole numbers are to be understood, but only fractions.

CHAPTER 13

CONCERNING IMPOSSIBLE OR IMAGINARY NUMBERS WHICH ARISE FROM THE SAME SOURCE.

139.

We have already seen above, that the squares of positive as well as of negative numbers always are positive, or arise with a plus sign; as $-a$ multiplied by $-a$ gives $+aa$, just as when one multiplies $+a$ by $+a$. And from that we had in the last chapter all the numbers, of which the square roots were extracted were required to be considered as positive.

140.

If from that it arises, that the square root may be wished to draw from a negative number, thus indeed one must find oneself in a great embarrassment, because no number can be specified, of which the square would be a negative number. For if one asks for example the square root of the number -4, thus one wants to have such a number, which multiplied by itself gives -4. For this number sought is neither $+2$ nor -2, indeed $+2$ as well as -2, multiplied by itself always gives $+4$ gives, and not -4.

141.

Therefore one realizes from this, that the square root of a negative number itself can neither a positive nor a negative number, because the squares of all the negative number become positive, or receive the $+$ sign ; therefore the required root must be of a whole particular kind of number, in as far as the same can neither be considered to be positive nor negative numbers.

142.

Now already it has been shown above that the positive numbers are all greater than 0 ; whereas the negative numbers all are less than nothing or 0; also, that all which are greater than nothing expressed by positive numbers; but everything which is smaller than nothing, will be expressed by negative numbers: thus we see, that the square roots of negative numbers shall be neither greater than zero nor less than zero. Neither indeed are they nothing, because 0 multiplied by 0 gives 0 and thus no negative number.

143.

Because now all possible numbers, what one may want to introduce always, shall be either greater or less than 0, or around 0 itself; thus it is clear, that the square roots of negative numbers not once can be found among possible numbers: therefore we must say that these are impossible numbers. And this circumstance leads us to the definition of such numbers, which are by their nature are impossible, and commonly imaginary numbers, or imagined figures, are included because they are found only in the imagination instead.

144.

Therefore all these expressions $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. signify such improper or imaginary numbers, because from that the square roots of negative numbers can be indicated.

From which one claims also with every right that they are neither greater nor less than zero; and also not once themselves zero, as from which reason therefore they may be considered to be improper.

145.

But all the same they can represent our understanding, and find a place in our imagination; therefore they have become known simply as imaginary numbers. But notwithstanding these numbers such as e.g. $\sqrt{-4}$, are after their nature completely improper, yet we have still sufficient belief in them, that is as far as we know, that through such a representation, of a number will when multiplied by itself will, produce the product -4 ; and this belief is sufficient concerning these numbers to be handled properly in calculation.

146.

Now that, what we are to know in the first place about such improper numbers, as for example, of $\sqrt{-3}$, consists of this, that the square of that, or the product which emerges, when $\sqrt{-3}$ will be multiplied by $\sqrt{-3}$, gives -3, even just as $\sqrt{-1}$ multiplied by $\sqrt{-1}$ gives -1. And generally when one multiplies $\sqrt{-a}$ with $\sqrt{-a}$ or the square is taken of $\sqrt{-a}$, thus it gives $-a$.

147.

Then $-a$ is just as much as $+a$ multiplied by -1, and the square root of a product can be found, when one multiplies the square roots of the factors by each other, thus the root from a multiplied by -1 or $\sqrt{-a}$ is the same as $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{-1}$. But now $\sqrt{a}$ is a proper number, therefore it leaves these unfeasible numbers, which occur in that, and $\sqrt{-1}$ always arising. On this account thus $\sqrt{-4}$ is the same as $\sqrt{4}$ multiplied by $\sqrt{-1}$: but $\sqrt{4}$ is 2, thus $\sqrt{-4}$ is the same as $2\sqrt{-1}$, and $\sqrt{-9}$ thus the same as $\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$, that is $3\sqrt{-1}$, and $\sqrt{-16}$ as much as $4\sqrt{-1}$.

148.

Since further $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{b}$, gives $\sqrt{ab}$, so will $\sqrt{-2}$ multiplied by $\sqrt{-3}$ give $\sqrt{6}$. Even thus $\sqrt{-1}$ multiplied by $\sqrt{-4}$ gives $\sqrt{4}$, that is 2. Hence one sees that two improper numbers multiplied together brings forth a feasible or real number. But when $\sqrt{-3}$ is multiplied by $\sqrt{+5}$, thus there becomes $\sqrt{-15}$. Or one real number multiplied by another improper number, always gives some improper number.

149.

Just as the matter behaves also for division. Then $\sqrt{a}$ divided by $\sqrt{b}$ gives $\sqrt{\frac{a}{b}}$, thus $\sqrt{-4}$ divided by $\sqrt{-1}$ gives $\sqrt{+4}$, and $\sqrt{+3}$ divided by $\sqrt{-3}$ will give $\sqrt{-1}$. Further 1 divided by $\sqrt{-1}$, gives $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ that is $\sqrt{-1}$ because 1 is the same as $\sqrt{+1}$:

[Note that $\sqrt{\frac{+1}{-1}\times\frac{-1}{-1}}=\sqrt{-1};$ but $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\times\sqrt{\frac{+1}{-1}}=-\sqrt{-1}$, hence Euler's conclusion is incorrect.]

150.

But the above note is always true, that the square-root of any one of these always has a double value, or can have taken a negative value as well as a positive value, for example $\sqrt{4}$, thus is $+2$ also -2, and generally for the square-root of *a* both $+\sqrt{a}$ as well as $-\sqrt{a}$ can be written, so this applies also for the imaginary numbers ; and the square-root of $-a$, is $+\sqrt{-a}$ as well as $-\sqrt{-a}$, whereby one can put in place the signs $+$ and $-$ before the $\sqrt{\ }$ sign, as one must distinguish well between those and the sign that comes after the $\sqrt{\ }$ sign.

151.

Finally, a doubt must be raised still, which consists of this, that as suchlike imaginary numbers appear to have no benefit whatsoever to have it appear, and this theory could be regarded as the mere object of a vain speculation. All the same, it is in fact, of the greatest importance, with frequently occurring questions, from which equally one cannot know whether they shall be a solution or not. Now if the same solution were from such imaginary numbers, thus it is a sure sign, that the question to be imaginary. To explain this with an example, thus let us consider this question: It is wished to divide the number 12 into two such parts, of which the product makes 40. If one now solves this question according to the rules, thus one finds for the two parts sought $6+\sqrt{-4}$, and $6-\sqrt{-4}$ which therefore shall be imaginary, and from this one knows also, that this question can be solved with imaginary numbers. But if one wants the number 12 to be divided into two such parts, for which the product was 35, so it is obvious, that these parts would be 7 and 5.

CHAPTER 14

CUBIC NUMBERS

152.

When a number is multiplied by itself three times, or the square once by the same number, thus the product will be a cube or called a cubic number. Thus the cube *aaa* is the number which arises from the number *a*, when the number *a* is multiplied by itself namely by *a,* and that square itself *aa* is multiplied once by the number *a*. Thus the cubes of the natural numbers are as follows :

Numbers	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubes	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

153.

If we consider the differences from these cubic numbers, just as happens with the square numbers, taking into consideration, in that we subtract each one from the following, thus we find the following series of numbers, where still we can find no order,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

but if we take the further difference from the same, thus we obtain the following series of numbers which always evidently appear to be increasing by 6 ; as :

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

In such a manner one can find easily the cubes of fractions also : thus from $\frac{1}{2}$ the cube $\frac{1}{8}$; from $\frac{1}{3}$ it is $\frac{1}{27}$, from $\frac{2}{3}$ it is $\frac{8}{27}$. One may now besides take the cube of the numerator and the denominator. Thus from the fraction $\frac{3}{4}$ the cube will be $\frac{27}{64}$.

155.

If the cube were to be found from a mixed number, thus in the first place the same must be changed into a single fraction, as then the calculation used will be easy. Thus it will become easy to find the cube from the number $1\frac{1}{2}$: since then $1\frac{1}{2}$ is brought to a single fraction $\frac{3}{2}$, thus the cube of $\frac{3}{2}$ to be $\frac{27}{8}$ that is 3 and $\frac{3}{8}$. Just as from the number $1\frac{1}{4}$ or $\frac{5}{4}$ the cube is $\frac{125}{64}$, that is 1 and $\frac{61}{64}$. Further from the number $3\frac{1}{4}$ or $\frac{13}{4}$ the cube is $\frac{2197}{64}$, which gives $34\frac{21}{64}$.

156.

Then from the number a the cube is aaa , thus from the number ab the cube will be $aaabbb$; from which one sees, that if the number has two or more factors, the cube will be found from that, when one multiplies the cube from each factor with each other. Thus for example : since 12 is as much as $3\cdot 4$, hence one multiplies the cube of 3 which is 27, by the cube of 4, which is 64, thus one finds 1728, and this is the cube of 12. Further from this it is clear, that the cube of $2a$ is $8aaa$ and thus is 8 times greater than the cube of a; just as the cube of $3a$ is $27aaa$ and also 27 times greater than the cube of a.

157.

Now we draw the signs + and − into consideration, for as that itself if clear, that from a positive number a the cube must be $+aaa$ and consequently must be positive also. But if from a negative number, such as $-a$, the cube is to be taken, as one takes the square in the first place, which is $+aa$, and such that it must be multiplied once by $-a$, so the cube sought will become $-aaa$ and consequently will be negative too. From that it is a quite different consideration with cubes than with squares, which always come out positive. Thus from -1, the cube is -1, from -2, the cube is -8; from -3 it is -27, and so forth.

CAPITAL 9

Wann die Brüche gleiche Nenner haben, so hat es keine Schwierigkeit dieselben zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall verrichtet man die Addition und Subtraction bloß allein an den Zehlern, und schreibt den gemeinen Nenner darunter. Also macht

$$\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100} \text{ so viel as } \frac{9}{100};$$
$$\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50} \text{ ist so viel as } \frac{36}{50} \text{ oder } \frac{18}{25};$$
$$\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20} \text{ ist so viel as } \frac{16}{20} \text{oder } \frac{4}{5};$$

eben so auch $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein gantzes, und $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$ das ist nichts, oder 0.

95.

Wann aber die Bruche nicht gleiche Nenner haben, so ist es allezeit möglich dieselben in andere von gleichem W erth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn diese Bruche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind und zusammen addirt werden sollen, so ist zu erwegen daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$ wir haben also anstatt der vorigen diese Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$ welche geben $\frac{5}{6}$. Ferner $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ist wie das obige, nur daß das Zeichen *minus* darzwischen steht, also $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seyen ferner gegeben diese Brüche $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$. Weil hier $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wann man fragt wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$ und so kommt $\frac{7}{12}$.

96.

Wann mehr als zwey Bruche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, welche zu gleichen Nennern gebracht werden sollen, so kommt alles darauf an, daß man eine Zahl finde, welche sich durch alle diese Nenner theilen laße. Eine solche ist nun 60, welche den gemeinen Nenner abgiebt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$, $\frac{30}{60}$ diesen, anstatt $\frac{2}{3}$, $\frac{40}{60}$ diesen, anstatt $\frac{3}{4}$, $\frac{45}{60}$ diesen, anstatt $\frac{4}{5}$, $\frac{48}{60}$ diesen, anstatt $\frac{5}{6}$, $\frac{50}{60}$ diesen. Sollen nun d1ese Bruche $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, zusammen addirt werden so machen die Zehler derselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 gantze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

97.

Es kommt hier alles darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf eine allgemeine Art zu verrichten, so seyen die vorgegebene Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplieire man den ersten Bruch oben und unten mit *d,* so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist als $\frac{a}{b}$. Den andern Bruch multiplieire man wie den ersten oben und unten mit *b,* so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$ und sind also die Nenner jetzt gleich; die Summa aber derselben is t $\frac{ad+bc}{bd}$, und ihr Differenz is $\frac{ad-bc}{bd}$. Wann also diese Brüche vorgelegt sind $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summa $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ macht.

98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer, oder kleiner sey als der andere? Z. E. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche zu gleichen Nennern bringen, und da bekommt man für den erstern $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus offenbar ist, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wann ferner diese zwey Brüche gegeben sind $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet daß $\frac{5}{8}$ to mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

99.

Wann ein Brttch von einer gantzen Zahl abgezogen werden soll, als $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man dann so gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, bleibt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2, abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da dann 1 und $\frac{1}{4}$ t übrig bleibt. Übrigens ist bekannt, daß wann ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man denselben nur schlechthin dahinter schreibe; als $\frac{2}{3}$ zu 6, addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Gantzes ausmachen, welches sodann bemerckt werden muß: als $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so wann mehrere gantze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche und wann ihre Summa 1 oder mehr gantze enthält, so werden dieselben hernach mit den gantzen Zahlen addirt z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren; so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusamemen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Gantzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

CAPITEL 10

VON DER MULTIPLICATION UND DIVISION

101.

Wann ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zehler, und läßt den Nenner ahnverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$,oder ein Gantzes;

2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2}$;

4 by $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt wird, wann man entweder den Zehler damit multiplicirt oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wann es angeht, die Rechnung abkürtzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ es mit 3, multiplicirt werden, so kommt wenn der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; laße ich aber den Zehler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt giebt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

102.

Überhaupt also, wann ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu mercken, daß wann die gantze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zehler gleich werde, also :

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1;

$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2;

$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3;

und allgemein, wann der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; dann da $\frac{a}{b}$ den Quotus ausdruckt, wann das Dividend a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt das Dividend geben müße, so ist klar daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt die Zahl a geben müße..

103.

Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicire; so müßen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine gantze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß wann ich den Bruch $\frac{1}{3}$, durch 2 dividiren soll $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ herauskommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zehler durch die ganze Zahl theilen müße, da dann der Nenner ahnverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$ und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wann sich nur der Zehler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: wann aber dieses nicht angeht, so ist zu, bemercken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müßen, deren Zehler sich durch die gegebene Zahl theilen laße. Also wann $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, wann es durch 2 dividirt wird $\frac{3}{8}$.
Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ is divided by c, durch c dividirt werden soll, so verwandele man denselben in diesen $\frac{ac}{bc}$, deßen Zehler ac durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105.

Hieraus ersehen wir, daß wann ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine gantze Zahl c dividiret werden soll, man nur nöthig habe den Nenner b mit dieser gantzen Zahl zu multipliciren und den Zehler ohnverändert zu laßen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividiret giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt giebt $\frac{9}{80}$. Wann sich aber der Zehler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als, $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mahl 3 ist 9, und 3 mahl 16 ist 48.

106.

Nun sind Wir 1m Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$. multiplicirt werden soll. Man darf nur bedencken·, daß $\frac{c}{d}$ iso viel ist als c getheilt durch d: und also hat man nur. nöthig den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ herauskommt; hernach durch d zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$: giebt: und hieraus entspringt diese Regul, daß um zwey Brüche mit einander zu multipliciren man nur nöthig habe erstlieh die Zehler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren. Also :

$\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$; ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u.s.f.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobei erstlieh zu mercken, daß wann die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zehlern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so viel mal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Dahero wann $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal ; $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal ; $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$; eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weis man wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$, dividiren, so bringe man erstlieh diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$, zu dividiren, wo dann eben so viel heraus kommen muß, als wann man den ersten Zehler *ad* durch den letztem *bc* dividiret: Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regul: man muß den Zehler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zehler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zehler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wann also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$, dividiret werden soll, so bekommt man nach dieser Regul $\frac{15}{16}$ sum Quotient. Wann ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, der Bruch $\frac{6}{4}$ or $\frac{3}{2}$, that is 1 and $\frac{1}{2}$. Wann ferner $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$, dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110.

Man pflegt diese Regul für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen. Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zehler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgeakehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$, from which comes $\frac{6}{4}$ or $1\frac{1}{2}$. Just as $\frac{5}{8}$ divided by $\frac{2}{3}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{5}{8}$ multiplied by $\frac{3}{2}$, multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$ ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$, dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{5}{6}$, multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$ das ist mit 2 multiplicirt; und durch $\frac{1}{3}$ dividirt ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multiplicirt.

111.

Wann dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$, dividirt werden soll, so giebt es 200 ; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ gives 3000. dividirt giebt 3000. Wann ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$, dividirt, giebt 100000; woraus man begreiffen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müße, weil wann man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{100\,000}$ dividirt, giebt 100000; woraus
man begreiffen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müße, weil wann man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{100\,000\,000}$, dividiret, die große Zahl 1 000 000 000 herauskommt.

112.

Wann ein Bruch durch sich selbsten dividiret werden soll, so versteht sich von selbsten, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses weißt auch unsere Regul: als wann z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$, dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$ da dann kommt $\frac{12}{12}$,das ist 1. Und wann $\frac{a}{b}$ were durch $\frac{a}{b}$, dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$ da dann $\frac{ab}{ab}$ das ist 1 herauskommt.

113.

Es ist noch übrig eine Redens-Art zu erklären, welche öfters gebraucht wird. Z. E. man frägt was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so wann man frägt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$, multipliciren, da dann kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu mercken, so oft diese Redens-Art vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und - eben das zu bemercken, was oben bey den gantzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

CAPITEL 11

VON DEN QUADRAT-ZAHLEN

115.

Wann eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product ein *Quadrat* genennet, so wie in Ansehung deßen die Zahl, daraus es entstanden, seine *Quadrat- Wurtzel* genennt wird.

Also wann man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wann man die Seite deßelben mit sich selbsten multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadrat-Zahlen durch die Multiplication gefunden, wann man nehmlich die Wurtzel mit sich selbsten multipliciret.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die QuadratW
urtzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadrat-Wurtzel von 9.

Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurtzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestelt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Bey diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadrat-Zahlen bemercken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß wann man eine jede von der folgenden subtrahiret, die Reste in folgender Ordnung fortgehen:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \text{ etc.}$$

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wann man nemlich einen Bruch mit sich selbsten multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$, von $\frac{2}{3}$ ist das Quadrat $\frac{4}{9}$,

von $\frac{1}{4}$ ist das Quadrat $\frac{1}{16}$, von $\frac{3}{4}$ ist das Quadrat $\frac{9}{16}$, und so ferner.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zehlers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die W urtzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wann man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer gantzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einem einzelnen Bruch bringen, und das Quadrat da von nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$, zu finden, so ist erstlieh $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$ welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$, zu finden, so bemerke man daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$, ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$. ausmacht. Wir wollen z. E. die Quadraten welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen betrachten, als:

Zahlen 3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quad. 9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß wann die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wann die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, welches ist $\frac{289}{144}$ so wird das Quadrat derselben gefunden $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

A.uf eine allgemeine A.rt, wann die Wurzel *a* ist, so ist das Quadrat *aa:*ferner von der Wurzel 2a ist das Quadrat *4aa.* Hieraus sieht man, daß wann die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel 3 *a* das Quadrat 9 *a a,* und von der Wurzel 4 *a* ist das Quadrat 16 *aa* und so weiter. Heißt aber die Wurzel *ab,* so ist ihr Quadrat *aabb,* und wann *abc* die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat *aabbcc.*

121.

Wann daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factaren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wann das Quadrat aus 2 oder mehrern Factaren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als 4 ·16 · 36; so ist die Quadrat-Wurzel davon 2 · 4 · 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadrat-Wurzel von 2304, weil 48 · 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen *plus* und *minus* erwegen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewantniß habe. Es erhellet sogleich daß wann die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine Positiv-Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das

Quadrat derselben auch eine Positiv-Zahl seyn müße, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von $+ a$ seyn $+ aa$. Wann aber die Wurzel eine Negativ-Zahl ist, als $- a$, so wird ihr Quadrat seyn $+ aa$, eben so als wann die Wurzel $+ a$ wäre; folglich ist $+ aa$ eben so wohl das Quadrat von $+ a$ als von $- a$; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadrat-Wurzeln angegeben werden, deren eine Positiv, die andere Negativ ist. Also ist die QuadratWurzel von 25 so wohl + 5, als -5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch - 5 mit - 5 multiplicirt + 25 giebt.

CAPITEL 12

VON DEN QUADRAT-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN FROM THEM

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadrat-Wurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4 u.s.w. wobey zu mercken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadrat-Wurzel so wohl + 5, als -5, weil -5 mit - 5 multiplicirt eben so wohl + 25 ausmacht, als + 5 mit + 5 multiplicirt.

124.

Wann dahero die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist und man die QuadratZahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadrat-Wurzel zu finden: als, wann die vorgegebene Zahl 196 wäre so weiß man, daß die Quadrat Wurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-Wurzel sey $\frac{5}{7}$, weil man nur so wohl von dem Zehler, als von dem Nenner die Quadrat-
Wurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vennischte Zahl als $12\frac{1}{4}$ so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$ wovon die Quadrat-Wurzel offenbar $\frac{7}{2}$, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadrat-Wurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist, auch nicht möglich die Quadrat-Wurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wißen wir doch, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als 3, weil $3 \cdot 3$ nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil $4 \cdot 4$ schon 16 macht; wir wißen so gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müße als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, dann $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$ und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können so gar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$ dann das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, dann $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadrat-Wurzel von 12, so möchte man dencken, daß wann man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas wenigs kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{476}{49}$, und also kleiner ist als 12. Dann 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einem Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht giebt $\frac{1452}{121}$,woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesen Nenner gebracht bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich aber leicht begreiffen, daß was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich faßen müße, und also niemahls genau 12 betragen könne. Also, ohngeacht wir wißen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$ doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$,so müßen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey zwischen diesen zwei Brüchen, einen solchen ausfündig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadrat-Wurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 an und für sich selbsten unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ohngeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

Hiedurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken laßen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadrat-Wurzel aus der Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun *Irrational-Zahlen* genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadrat-Wurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadrat-Wurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbsten multiplicirt genau 2 hervorbringt, eine Irrational-Zahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen *Surdisehe* genennt zu werden.

129.

Ohngeacht sich nun solche Irrational-Zahlen durch keinen Bruch vorstellen laßen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Dann z. E. die Quadrat-Wurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wißen wir doch daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen könen.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrational-Zahlen haben, so bedienet man sich eines gewißen Zeichens, um die Quadrat-Wurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur, $\sqrt{\ }$ und wird mit dem Wort Quadrat-Wurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbsten multiplicirt 12 giebt, oder die Quadrat-Wurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadrat-Wurzel aus 2; $\sqrt{3}$ die Quadrat-Wurzel aus 3; ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadrat-Wurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, deutet die Quadrat-Wurzel aus der Zahl a an. So offt man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadrat-Wurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{\ }$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obgemeldete Begriff von diesen Irrational-Zahlen führt uns sogleich auf einen Weg die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nemlich die Quadrat-Wurzel aus 2 mit sich selbsten multiplicirt 2 geben muß, so wißen wir, daß wann $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 herauskomme; eben so $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$ und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt giebt a.

132.

Wann aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß wann ein Quadrat Factores hat, die Wurzel da von auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadrat-Wurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wann man die QuadratWurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadrat-Wurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich daß wann b dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a weil aa das Quadrat ist von a.

133.

Eben so, wann $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividiret werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$ wobei es sich zutragen kann, daß im Quotus die Irrationalität verschwinde. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadrat-Wurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wann die Zahl, vor welche das Wurzel-Zeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$ das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbsten weg.

135.

Es ist auch leicht solche Irrational-Zahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$, so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt folgende Form, nemlich $\sqrt{18}$. Also daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadrat-Wurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß wann die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesezt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{abb}$. Diesem nach werden folgende Reductionen klar seyn:

$$
\begin{array}{llll}
\sqrt{8}, & \text{oder} \sqrt{2\cdot 4}, & \text{ist so viel als} & 2\sqrt{2}. \\
\sqrt{12}, & \text{"} \quad \sqrt{3\cdot 4}, & \text{" " " "} & 2\sqrt{3}. \\
\sqrt{18}, & \text{"} \quad \sqrt{2\cdot 9}, & \text{" " " "} & 3\sqrt{2}. \\
\sqrt{24}, & \text{"} \quad \sqrt{6\cdot 4}, & \text{" " " "} & 2\sqrt{6}. \\
\sqrt{32}, & \text{"} \quad \sqrt{2\cdot 16}, & \text{" " " "} & 4\sqrt{2}. \\
\sqrt{75}, & \text{"} \quad \sqrt{3\cdot 25}, & \text{" " " "} & 5\sqrt{3} \text{ und so fort.}
\end{array}
$$

136.

Mit der Division hat es eben die Bewantniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \text{ ist } \sqrt{\frac{18}{2}}, \text{ oder } \sqrt{9}, \text{ oder } 3. \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \text{ ist } \sqrt{\frac{12}{3}}, \text{oder } \sqrt{4}, \text{oder } 2.$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ ist } \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}, \text{ oder } \sqrt{\frac{4}{2}}, \text{ oder } \sqrt{2}. \quad \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ ist } \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}, \text{oder } \sqrt{\frac{9}{3}}, \text{oder } \sqrt{3}.$$

$$\frac{12}{\sqrt{6}} \text{ ist } \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}, \text{oder } \sqrt{\frac{144}{6}}, \text{oder } \sqrt{24}, \text{ oder } \sqrt{6\cdot 4}, \text{das ist } 2\sqrt{6}.$$

137.

Bei der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemerken vor, weil die Zahlen nur mit *plus* und *minus* verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

138.

Endlich ist noch zu merken, daß, zum Unterschied dieser sogenannten Irrational-Zahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl ganze als Brüche, *Rational- Zahlen* genennt zu werden pflegen.

Wann also von Rational-Zahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche vVerstanden.

CAPITEL 13

VON DEN AUS EBEN DIESER QUELLE ENTSPRINGENDEN OHNMÖGLICHEN ODER IMAGINÄREN ZAHLEN

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten so wohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben so wohl $+aa$ giebt, als wann man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadrat-Wurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wann es sich dahero zuträgt, daß aus einer Negativ-Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativ-Zahl wäre. Denn wann man z. E. die Quadrat-Wurzel von der Zahl -4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder $+2$ noch -2, indem so wohl $+2$ als -2, mit sich selbsten multiplicirt allemal $+4$ giebt, und nicht -4.

141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadrat-Wurzel von einer Negativ-Zahl weder eine Positiv- noch Negativ-Zahl seyn könne, weil auch von allen Negativ-Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen $+$ bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer gantz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativ-Zahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerckt worden, daß die Positiv-Zahlen alle größer sind, als nichts oder 0; die Negativ-Zahlen hingegen alle kleiner sind, als nichts oder 0; also, daß alles was größer ist als nichts, durch PositivZahlen; alles aber was kleiner ist als nichts, durch Negativ~Zahlen ausgedrückt wird: so sehen wir, daß die Quadrat-Wurzeln aus Negativ-Zahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0 und also keine Negativ-Zahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müßen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich *Imaginäre Zahlen,* oder *eingebildete Zahlen* genennt werden, weil sie blos allein in der Einbildung statt finden.

144.

Dahero bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. solche ohnmögliche oder Imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen angezeigt werden.

Von diesen behauptet man also mit allem Recht daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müßen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstand dargestellt, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch blos eingebildete Zahlen genennt werden. Ungeacht aber diese Zahlen als z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar ohnmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wißen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbsten multiplicirt zum Produkt -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen ohnmöglichen Zahlen, als z. E. von $\sqrt{-3}$, wißen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product welches herauskommet, wann $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$ mult. -1. Und überhaupt wann man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die QuadratWurzel aus einem Product gefunden wird, wann man die Quadrat-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses ohnmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man daß zwei ohnmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche, oder würckliche Zahl hervorbringen. Wann aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$ multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Dann da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$. Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$ weil 1 so viel ist, als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerckung allezeit statt findet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder so wohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\sqrt{4}$, so wohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadrat-Wurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dieses auch bei den unmöglichen Zahlen; und die Quadrat-Wurzel aus $-a$, ist so wohl $+\sqrt{-a}$ als $-\sqrt{-a}$, wobei man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{\ }$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen so hinter dem $\sqrt{\ }$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß da dergleichen Zahlen ohnmöglich sind, dieselben auch gantz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man so gleich nicht wißen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wann nun die Auflösung derselben auf solche ohnmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst ohnmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwei solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache. Wann man nun diese Frage nach den Regeln auflößt, so findet man für die zwei gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$ welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage ohnmöglich könne aufgelößt werden. Wolte man aber die Zahl 12 in zwei solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

CAPITEL 14
VON DEN CUBIC-ZAHLEN

152.

Wann eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmahls mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein *Cubus* oder eine *Cubic-Zahl* genennet. Also ist von der Zahl a der Cubus aaa, welcher entsteht, wann die Zahl a mit sich selbsten nemlich mit a, und das Quadrat derselben aa nochmals mit der Zahl a multiplicirt wird. Also sind die Cubi von den natürlichen Zahlen folgende,

Zahlen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubus	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

153.

Wann wir bei diesen Cubic-Zahlen ihre Differenzen, wie bei den QuadratZahlen geschehen, in Betrachtung ziehen, indem wir eine jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Reihe von Zahlen wobei wir noch keine Ordnung bemerken,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wann wir aber von denselben noch ferner die Differenzen nehmen, so erhalten wir folgende Reihe Zahlen welche offenbar immer um 6 steigen; als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

Solcher gestalt wird man auch leicht die Cubos von Brüchen finden können: also von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$; von $\frac{1}{3}$ est er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ er $\frac{8}{27}$. Man darf nemlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubos nehmen. Also vom Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

155.

Wann von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen einzeln Bruch verwandelt werden, da dann die Rechnung leicht angestellet wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubum zu finden: dann da $1\frac{1}{2}$ zu einen einzeln Bruch gebracht $\frac{3}{2}$, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$ das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$ Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab der Cubus seyn $aaabbb$; woraus man sieht, daß wann die Zahl zwei oder mehr Factores hat, der Cubus davon gefunden werde, wann man die Cubos von jeglichen Factoren mit einander multiplicirt.

Also z. E.: weil 12 so viel ist als $3 \cdot 4$, so multiplicirt man den Cubus von 3 welcher ist 27, mit dem Cubus von 4, welcher ist 64, so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von *2a* ist *8aaa* und also 8mal größer, als der Cubus von *a;* eben so ist von 3*a* der Cubus 27*aaa* und also 27mal größer als der Cubus von *a*.

157.

Ziehen wir nun auch die Zeichen $+$ und $-$ in Betrachtung, so ist für sich klar, daß von einer Positiv-Zahl *a* der Cubus $+aaa$ und folglich auch Positiv seyn müße. Wann aber von einer Negativ-Zahl, als $-a$, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist $+aa$, und da solches nochmals mit *a* multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus seyn $-aaa$ und wird folglich auch Negativ seyn. Dahero es mit den Cubis eine gantz andere Bewantniß hat als mit den Quadraten, welche allezeit Positiv herauskommen. Also ist von -1, der Cubus -1, von -2, der Cubus -8; von -3 ist er -27, und so fort.