THE SECOND PART OF THE FIRST VOLUME.

ON THE VARIOUS METHODS OF CALCULATING WITH COMPOSITE MAGNITUDES

CHAPTER 1

ADDITION WITH COMPOSITE MAGNITUDES

256.

If two or more formulas, which consist of several terms, are to be added together, then occasionally the addition can be attended to by a certain sign only to be indicated, in as far as one can enclose each formula in brackets and the same can be joined by a + sign. Thus, if the formulas $a+b+c$ and $d+e+f$ are to be added, the sum also can be shown

$$(a+b+c)+(d+e+f)$$

257.

Such form indicates nothing but the addition to be carried out. But it is self-evident, that in order that the same be carried out, the brackets are to be removed: since then the number $d+e+f$ shall be added to the first, as such happens when one writes in the first place $+d$, then $+e$ and finally $+f$, since then the sum will be :

$$a+b+c+d+e+f.$$

Even these need to be watched, for if a term has the sign −, as which thus must then be written also with its sign.

258.

In order to make these more clear, we will consider an example in pure numbers, and to add yet $15-6$ to the formula $12-8$. Thus in the first place 15 is added, so one has $12-8+15$; but too much has been added, because only 15-6 should be add, and it is clear that 6 too much has been added; thus this 6 is taken away again or also further it is written with its sign, so that one has the true sum

$$12-8+15-6.$$

From which it is apparent, that the sums are found, when all the terms are written together, and each one with its sign.

259.

When accordingly this $d-e-f$ is yet to be added to this formula $a-b+c$, thus, the following sum will be expressed

$$a-b+c+d-e-f.$$

whereby it will be well to note, that here it does not at all depend on the order of the terms arising, but the same can be moved among themselves as it pleases, provided each one keeps its proposed sign. Thus the above sum can also be written:

$$c-e+a-f+d-b.$$

260.

Thus there is not the slightest difficulty with addition, as long as the terms appear to be alike always. Thus when to this formula $2a^3+6\sqrt{b}-4\log c$ still this one $5\sqrt[5]{a}-7c$ should be added, so the sum will be:

$$2a^3+6\sqrt{b}-4\log c+5\sqrt[5]{a}-7c,$$

from which it is clear that these terms are to be the sum, and it is permitted as wished that these terms also can be moved amongst themselves, as long as each retains its sign.

261.

But also too it happens often, that such a form found for the sum can be contracted into a far shorter form, in that sometimes two or more terms can cancel each other out entirely. As when in the sum these terms $+a-a$, or such as $3a-4a+a$ arise. Also sometimes two or several terms can be brought into one, as for example :

$$3a+2a=5a,\ 7b-3b=+4b,\ -6c+10c=+4c$$
$$5a-8a=-3a,\ -\ 7b+b=-6b,\ -3c-4c=-7c$$
$$2a-5a+a=-2a,\ -3b-5b+2b=-6b.$$

This abbreviation thus is found instead, as so often two or more terms considered in the letters become one only. On the other hand $2aa+3a$ itself allows nothing to be contracted, and $2b^3-b^4$ also allows no abbreviation.

262.

We will thus consider some examples of this kind. In the first place these two formulas $a+b$ and $a-b$ are to be added together, since then following the above rule there arises $a+b+a-b$, but now $a+a=2a$ and $b-b=0$, consequently the sum is $=2a$; which example shows the following truth very well :

If the difference of two numbers $(a-b)$ is to be added to their sum $(a+b)$, thus twice the greater number arises.

One can still consider the following examples :

$$\begin{array}{c}3a-2\mathrm{b}-c\\ \underline{5b-6c+a}\\ 4a+3b-7c\end{array}\qquad\begin{array}{c}a^3-2aab+2abb\\ \underline{-aab+2abb-b^3}\\ a^3-3aab+4abb-b^3\end{array}$$

CHAPTER 2

SUBTRACTION WITH COMPOSITE MAGNITUDES

263.

If one wants to consider subtraction only, thus each formula is enclosed in a pair of brackets, and that which is be taken away will have the sign − attached before. Thus if from this formula $a-b+c$ this one $d-e+f$ must be taken away, so the sought remainder will be indicated thus

$$\left(a-b+c\right)-\left(d-e+f\right)$$

as from which clearly it is desired, that the last formula can be taken away from the first.

264.

But in order to perform subtraction correctly, it is to be observed in the first place, that if from one magnitude such as a another positive magnitude such as $+b$ shall be taken away, thus $a-b$ will be found.

But if a negative number such as $-b$ shall have been taken from a , $a+b$ will be obtained, because a negative amount has been taken away, which is just the same as something added on.

265.

Let us now consider, how this formula $b-d$ must be taken from the formula $a-c$; thus in the first place b must be taken away *b*, that gives $a-c-b$*;* but we have taken away too much, as we should only take away $b-d$, and according to that *d* too much: thus we must add on this *d* again, since we then have :

$$a-c-b+d;$$

from which this rule follows clearly, that the terms of that formula which are to be subtracted must be written with the opposite signs added on.

266.

It is thus through the help of this rule that subtractions can be performed quite easily, in that the formula from which it is desired to subtract, to be written down in order, but that formula, which it is desired to subtract, with opposite or contrary sign attached. Thus in the first example since from $a-b+c$ this formula $d-e+f$ must be taken away, thus one has:

$$a-b+c-d+e-f.$$

In order to make this clear with pure numbers, thus on taking this formula $6-2+4$ from $9-3+2$, since there arises

$$9-3+2-6+2-4=0,$$

which also can be seen to be equal; then

$$9-3+2=8,\ 6-2+4=8,\ \text{and } 8-8=0.$$

267.

Since now subtraction itself has been done without further difficulty, thus it is necessary still to observe, that if in the remainder found two or more terms arise, which are the same in respect of the letters, the abbreviation can be made from the same rules, which were given above for division.

268.

It is supposed of $a+b$, by which the sum of two numbers will be indicated, that their difference $a-b$ shall be subtracted, thus there arises in the first place $a+b-a+b$; but now $a-a=0$ and $b+b=2b$, consequently the remainder $2b$ is found, that is twice the smaller number b taken.

269.

For further understanding we will include yet several examples:

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$	$a^3+3aab+3abb+b^3$	$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$
$bb-ab+aa$	$2b+4c-6a$	$a^3-3aab+3abb-b^3$	$\sqrt{a}-3\sqrt{b}$
$2ab$	$9a-6b+c$	$6aab+2b^3$	$+5\sqrt{b}$

CHAPTER 3

ON MULTIPLICATION WITH COMPOSITE QUANTITIES

270.

When such a single multiplication shall be indicated only, thus each of the formulas, which are to be multiplied by the other, be enclosed in brackets, and either without a sign or with a point placed between each other.

Thus when both these formulas $a-b+c$ and $d-e+f$ shall be multiplied by each other, such a product will be indicated by the form:
$(a-b+c)\cdot(d-e+f)$ or $(a-b+c)(d-e+f)$. This form will be used very often, because it can be seen from that equally, what has been put together in place for the factors of such a product.

271.

But in order to show how one such multiplication actually must work, thus initially it is to be noted, that if such a formula $a-b+c$ for example shall be multiplied by 2, every single term must be multiplied by 2, and thus from this arises

$$2a-2b+2c.$$

But this applies also for all numbers. Thus if the same formula shall be multiplied by d thus there is obtained :

$$ad-bd+cd.$$

272.

Here we have assumed, that the number d shall be positive; but if a negative number such as $-e$ shall be used to multiply, so the above given rule is to be observed, namely that two unequal signs multiplied together gives −, but two equal signs gives + . Therefore there becomes:

$$-ae+be-ce.$$

273.

Now in order to show how a formula, it may be simple such as *A,* or complex such as $d-e$ shall be multiplied, thus initially we will examine pure numbers, and assume, that *A* shall be multiplied by $7-3$. Now here it is clear, that four times *A* is sought: now initially seven times *A* is taken, to that three times *A* must be taken away from that. Thus generally also if one multiplies by $d-e$, so initially *A* is multiplied by *d* and afterwards by *e* and the latter product is taken from the former, thus so that $dA-eA$ arises. Let us now put $A=a-b$ which shall be multiplied by $d-e$, so that we obtain:

$$\begin{array}{l} dA=ad-bd \\ \underline{eA=ae-be\qquad} \\ ad-bd-ae+be \end{array}$$

which is the product required.

274.

Since now we have found the product $(a-b)\cdot(d-e)$, and we are convinced of the truth, thus we will examine the form of the following examples carefully:

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{d-e\qquad\qquad} \\ ad-\ bd-ae+be \end{array}$$

from which we see, that each single term of the above formula must be multiplied by each single term of the formula below; and that on account of the signs the above rule must be observed strictly, and hereby the rule is confirmed anew, if anyone perhaps should have had any doubts about that.

275.

It will be easy to work out the following examples according to this rule:
$a+b$ shall be multiplied by $a-b$:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ aa+ab \\ \underline{\quad -ab-bb} \\ aa-bb. \end{array}$$

the product will be $aa-bb$.

276.

Thus if for a and b designated numbers as wished can be put in place, so this example leads us to the following truth : when the sum of two numbers is multiplied by their difference, thus that product is the difference of their squares, which also can be expressed: $(a+b)(a-b)=aa-bb$; consequently again the difference between two square numbers is a product always, so it allows itself to be divided by the sum and difference of the roots, and thus cannot be a prime number.

[Provided the difference is not equal to 1, of course.]

277.

Let us now work out the following example:

$$\text{I.)}\quad \begin{array}{l} 2a-3 \\ \underline{a+2} \\ 2aa-3a \\ \underline{\qquad +4a-6} \\ 2aa+a-6 \end{array}$$

$$\text{II.)}\quad \begin{array}{l} 4aa-6a+9 \\ \underline{2a\ +3} \\ 8a^3-12aa\ +18a \\ \underline{\qquad +12aa-18a\ +27} \\ 8a^3+27 \end{array}$$

$$\text{III.)}\quad \begin{array}{l} 3aa-2ab-bb \\ \underline{2a-4b} \\ 6a^3-4aab-2abb \\ \underline{\qquad -12aab+8abb+4b^3} \\ 6a^3-16aab+6abb+4b^3 \end{array}$$

$$\text{IV.)}\quad \begin{array}{l} aa+2ab+2bb \\ \underline{aa-2ab+2bb} \\ a^4+2a^3b+2aabb \\ \qquad -2a^3b-4aabb-4ab^3 \\ \underline{\qquad\qquad +2aabb+4ab^3+4b^4} \\ a^4+4b^4 \end{array}$$

$$\text{V.)}\quad \begin{array}{l} 2aa-3ab-4bb \\ \underline{3aa-2ab+bb} \\ 6a^4-9a^3b-12aabb \\ \qquad -4a^3b+6aabb+8ab^3 \\ \underline{\qquad\qquad +2aabb-3ab^3-4b^4} \\ 6a^4-13a^3b-4aabb+5ab^3-4b^4 \end{array}$$

$$\text{VI.)}\quad \begin{array}{l} aa+bb+cc-ab-ac-bc \\ \underline{a+b+c} \\ a^3+abb+acc-aab-aac-abc \\ \quad -abb \qquad +aab \qquad -abc+b^3+bcc-bbc \\ \underline{\qquad -acc \qquad +aac-abc \qquad -bcc+bbc+c^3} \\ a^3-3abc+b^3+c^3 \end{array}$$

278.

If more than two formulas are required to be multiplied by each other, thus one understands easily that after two of these have been multiplied together, the product gradually must be multiplied by the others, and that it will be equal to just as much, as one can observe for any given order in the multiplication. It can be supposed, for example, the following product is to be found composed from four factors :

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a+b) & (aa+ab+bb) & (a-b) & (aa-ab+bb) \end{array}$$

thus initially the factors I and II are multiplied:

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad +aab+abb+b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3+2aab+2abb+b^3 \end{array}$$

After that one multiples III and IV :

$$\begin{array}{ll} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3-aab+abb \\ & \quad -aab+abb-b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3 \end{array}$$

Now it still remains to multiply that product I. II. by this one III. IV.,

$$\begin{array}{rl} \text{I. II.} & =a^3+2aab+2abb+b^3 \\ \text{III. IV.} & =a^3-2aab+2abb-b^3 \\ & a^6+2a^5b+2a^4bb+a^3b^3 \\ \hline & -2a^5b-4a^4bb-4a^3b_3-2aab^4 \\ & +2a^4bb+4a^3b^3+4aab^4+2ab^5 \\ & -a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 \\ \hline & a^6-b^6 \end{array}$$

which now is the product sought.

279.

Let us now change the order for this example, and initially multiply the I^st^ formula by the III^rd^ and then the II^nd^ by the IV^th^.

I. III.

$$\begin{array}{ll} \text{I.}\quad a+b & \text{II. } aa+ab+bb \\ \underline{\text{III.}\quad a-b} & \underline{\text{IV. } aa-ab+bb} \\ aa\ +ab & a^4+a^3b+aabb \\ \underline{-ab\ -bb} & \quad -a^3b-\ aabb-ab^3 \\ \text{I.III} = aa-bb & \underline{\qquad\qquad +aabb+ab^3+b^4} \\ & \text{II.IV.}\ = a^4+aabb+b^4 \end{array}$$

Now it still remains to multiply that product II. IV. by this one I. III. :

$$\begin{array}{l} \text{II. IV.}\ = a^4+aabb+b^4 \\ \underline{\text{I. III.}\ = aa-bb} \\ \qquad a^6+a^4bb+aab^4 \\ \underline{\qquad\qquad -a^4bb-aab^4-b^6} \\ \qquad a^6-b^6 \end{array}$$

which is the sought product.

280.

We want the calculation after yet another order put in place and multiply initially I. by IV. and then II. by III. :

$$\begin{array}{ll} \text{IV.}\ aa-\ ab+bb & \text{II. } aa+ab+bb \\ \underline{\text{I.}\quad a+b} & \underline{\text{III.}\quad a-b} \\ a^3-aab+abb & a^3+aab+abb \\ \underline{\quad +aab-abb+b^3} & \underline{\qquad -aab-\ abb-b^3} \\ \text{I. IV.}\ = a^3+b^3 & \text{II. III.}\ = a^3-b^3 \end{array}$$

Now it still remains to multiply the product I.IV. by II. III.

$$\begin{array}{l} \text{I. IV.}\ = a^3+b^3 \\ \underline{\text{II.III.}\ = a^3-b^3} \\ \qquad a^6+a^3b^3 \\ \underline{\qquad\quad -a^3b^3-b^6} \\ \qquad a^6-b^6 \end{array}$$

281.

It is worth the trouble to illustrate this example with numbers. Hence let there be $a=3$ and $b=2$; so that one has $a+b=5$ and $a-b=1$; further $aa=9$, $ab=6$, $bb=4$. Thus $aa+ab+bb=19$ and $aa-ab+bb=7$. Consequently this product sought will be : $5\cdot 19\cdot 1\cdot 7$, which is 665.
But $a^6=729$ and $b^6=64$, consequently $a^6-b^6=665$, as we have seen already.

CHAPTER 4

ON DIVISION BY COMPOSITE MAGNITUDES

282.

If one wants only to show division, thus that is served either by the usual signs of fractions, in that the dividend is written above the line and the divisor below the line ; or both are enclosed in brackets, and one writes the divisor after the dividend with a colon between. Thus if $a+b$ were to be divided by $c+d$, thus the quotient according to the first method would be expressed by $\frac{a+b}{c+d}$.

But after the other method thus by $(a+b):(c+d)$; both ways will be called $a+b$ divided by $c+d$.

283.

If a composite formula shall be divided simply, thus each single term will be divided, e.g.

$$6a-8b+4c \text{ divided by 2, gives } 3a-4b+2c$$

and

$$(aa-2ab):(a)=a-2b.$$

Just as

$$(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb,$$

further

$$(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc,$$

and

$$(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c \text{ etc.}$$

etc.

284.

If some single term of the dividend does not let itself be divided, thus the resulting quotient will be shown by a fraction. Thus if $a+b$ shall be divided by a, the quotient will become $1+\frac{b}{a}$.

Further

$$(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}.$$

If further $(2a+b)$ shall be divided by 2, thus there is obtained $1+\frac{b}{2}$; whereby it is to be noted, that $\frac{1}{2}b$ can be written instead of $\frac{b}{2}$, because $\frac{1}{2}$ times b is just as much as $\frac{1}{2}b$. Just as $\frac{b}{3}$ is the same as $\frac{1}{3}b$ and $\frac{2b}{3}$ is the same as $\frac{2}{3}b$ etc.

285.

But if the divisor itself is a composite magnitude, the division has more difficulty, because the same often can happen where really it is not expected to appear ; then when the division as such cannot begin, so one must be content as shown above to consider the quotient as a fraction ; hence we will show here just such cases were the actual division begins.

286.

According to that, it shall be supposed the dividend $ac-bc$ be divided by the divisor $a-b$: the quotient accordingly thus must be provided, that if the divisor $a-b$ be multiplied by that, the dividend $ac-bc$ arises. Now it is seen clearly, that c must be put into the quotient *c*, because otherwise *ac* cannot emerge. Now in order to see if *c* is the complete quotient, thus one must multiply the divisor with that and see if the whole dividend emerges or only a part of the same? But in our case if $a-b$ shall be multiplied by *c*, then we obtain $ac-bc$, which is that dividend itself : consequently *c* is the whole quotient. And moreover so that this is clear

$$(aa+ab):(a+b)=a,$$

and $$(3aa-2ab):(3a-2b)=a,$$

further $$(6aa-9ab):(2a-3b)=3a.$$

287.

In such a way a part of the quotients can be found. Then if with itself multiplied by the divisor the dividend is still not complete, thus the remainder likewise to be divided by the divisor, as then a part of the quotient is produced. We proceed in such a way until the whole quotient is established.

E.g. we will divide $aa+3ab+2bb$ by $a+b$; since now it is at once clear that the quotient must contain the term *a*, because otherwise *aa* cannot appear. But if the divisor $a+b$ shall be multiplied by *a*, thus $aa+ab$ appears, which taken away from the dividend decreases to $2ab+2bb$, which thus still must be divided by $a+b$, where at once it can be seen, that 2*b* must be present in the quotient. But now *2b* multiplied by $a+b$ gives simply $2ab+2bb$; consequently $a+2b$ is the sought quotient, which multiplied by the divisor $a+b$ gives the dividend. This whole operation consequently can be seen to have the form

$$\begin{array}{l} a+b)\ aa+3ab+2bb\ (a+2b \\ \underline{aa+ab\qquad\qquad} \\ \quad +2ab+2bb \\ \underline{\quad +2ab+2bb} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

288.

In order to make this operation easy, thus one chooses a part of the divisor, so here we write, *a*, which is written in the first place, and writes after this letter the dividend is written in such an order, that the highest power *a* of the same will be put first, as is seen from the following example:

$$
\begin{array}{l}
a-b)\ a^3-3aab+3abb-b^3(aa-2ab+bb \\
\qquad \underline{a^3-aab} \\
\qquad\quad -2aab+3abb \\
\qquad\quad \underline{-2aab+2abb} \\
\qquad\qquad\quad +abb-b^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{+abb-b^3} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a+b)\ aa-bb\ (a-b & 3a-2b)\ 18aa-8bb\ (6a+4b \\
\qquad \underline{aa+ab} & \qquad \underline{18aa-12ab} \\
\qquad\quad -ab-bb & \qquad\qquad +12ab-8bb \\
\qquad\quad \underline{-ab-bb} & \qquad\qquad \underline{+12ab-8bb} \\
\qquad\qquad 0 & \qquad\qquad\qquad 0 \\
\hline
a+b)\ a^3+b^3(aa-ab+bb & 2a-b)8a^3-b^3(4aa+2ab+bb \\
\qquad \underline{a^3+aab} & \qquad \underline{8a^3-4aab} \\
\qquad\quad -aab\ +b^3 & \qquad\quad +4aab-b^3 \\
\qquad\quad \underline{-aab-abb} & \qquad\quad \underline{+4aab-2abb} \\
\qquad\quad +abb+b^3 & \qquad\qquad\quad +2abb-b^3 \\
\qquad\quad \underline{+abb+b^3} & \qquad\qquad\quad \underline{+2abb-b^3} \\
\qquad\qquad 0 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
aa-2ab+bb)\ a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4\,(aa-2ab+bb \\
\underline{a^4-\ 2a^3b+aabb} \\
-2a^3b+5aabb-4ab^3 \\
\underline{2a^3b+4aabb-2ab^3} \\
+aabb-2ab^3+b^4 \\
\underline{+aabb-2ab^3+b^4} \\
0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
aa-2ab+4bb)\ a^4+4aabb+16b^4\,(aa+2ab+4bb \\
\underline{a^4-2a^3b\ \ +4aabb} \\
+2a^3b+16b^4 \\
\underline{+2a^3b-4aabb+8ab^3} \\
+4aabb-8ab^3+16b^4 \\
\underline{+4aabb-8ab^3+16b^4} \\
0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
aa-2ab+2bb)\ a^4+4b^4\ \ (aa+2ab+2bb \\
\underline{a^4-2a^3b+2aabb} \\
+2a^3b-2aabb+4b^4 \\
\underline{+2a^3b-4aabb+4ab^3} \\
+2aabb-4ab^3+4b^4 \\
\underline{+2aabb-4ab^3+4b^4} \\
0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1-2x+xx)1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3xx-\ x3 \\
\underline{1-2x+xx\qquad\qquad\qquad} \\
\quad -3x+9xx-10x^3 \\
\underline{\quad -3x+6xx-3x^3\qquad\qquad} \\
\qquad\quad +3xx-7x^3+5x^4 \\
\underline{\qquad\quad +3xx-6x^3+3x^4} \\
\qquad\qquad\qquad -x^3\ +2x^4-x^5 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad -x^3\ +2x^4-x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

CHAPTER 5

ON THE RESOLUTION OF FRACTIONS IN INFINITE SERIES.

289.

If the dividend cannot be divided by the divisor, so the quotient, as has been seen above, will be expressed by a fraction.

Thus if 1 shall be divided by $1-a$, then the fraction $\frac{1}{1-a}$ arises. Meanwhile division can still be used through that rule given above and thus far it will be done continuously, since then the true quotient, though equal in a different form, must arise.

290.

In order to see this thus let us actually divide the dividend 1 by the divisor $1-a$ as follows :

$$
\begin{array}{l}
1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \\
\underline{\quad +1-a} \\
\text{Rem.}+a
\end{array}
\qquad\qquad
\text{or}\ \begin{array}{l}
1-a)\ \ 1\ \ (1+a+\frac{aa}{1-a} \\
\underline{\quad +1-a\quad} \\
\qquad +a \\
\underline{\qquad +a-aa} \\
\text{Rem.}\ +aa
\end{array}
$$

In order that still more formulas can be found, thus it is necessary to divide aa by $1-a$ as

$$\begin{array}{l} 1-a)\ aa\ (aa+\frac{a^3}{1-a} \\ \underline{aa-a^3} \\ \quad +a^3 \end{array} \qquad \text{further} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ \underline{a^3-a^4} \\ \quad +a^4 \end{array}$$

$$\text{further} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ a^4\ (a^4+\frac{a^5}{1-a} \\ \underline{a^4-a^5} \\ \quad +a^5 \ \text{etc.} \end{array}$$

291.

Hence we see, that the fraction $\frac{1}{1-a}$ can be expressed in terms of a by all the following formulas :

$$\text{I.)}\ 1+\frac{a}{1-a}, \qquad \text{II.)}\ 1+a+\frac{aa}{1-a}, \qquad \text{III.)}\ 1+a+aa+\frac{a^3}{1-a},$$

$$\text{IV.)}\ 1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}, \qquad \text{V.)}\ 1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}\ \text{etc.}$$

The first formula $1+\frac{a}{1-a}$ is considered. Now there is 1, as well as $\frac{1-a}{1-a}$; consequently $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

For the second formula $1+a+\frac{aa}{1-a}$ the whole part $1+a$ can be taken to the denominator $1-a$, so there comes about $\frac{1-aa}{1-a}$, since $\frac{+aa}{1-a}$ gives $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, that is $\frac{1}{1-a}$. For the third formula $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, the whole part taken to the divisor $1-a$ gives $\frac{1-a^3}{1-a}$, thereupon the fraction $\frac{a^3}{1-a}$ added makes $\frac{1}{1-a}$*;* from which it is clear that all these formulas in the proceeding are as the given fraction $\frac{1}{1-a}$.

292 .

Therefore such a form can be extended as far as wished, without it being necessary to widen the calculation. Thus there will be

$$\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+\mathrm{a}^7+\frac{a^8}{1-a}.$$

Thus one can always proceed further, without ever stopping, and whereby the fraction presented $\frac{1}{1-a}$ can be expanded into an infinite series, which is :

$$1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}\ \text{ etc.}$$

And from this endless series one can rightly maintain, that its value to be just the same as the fraction $\frac{1}{1-a}$.

293.

This might appear at first to be quiet marvelous ; however it is to be understood through the consideration of some cases : In the first place there shall be $a = 1$, so our series becomes $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ etc . as far as infinity, which the fraction $\frac{1}{1-1}$, that is $\frac{1}{0}$, shall be equally. But we have noted already above, that $\frac{1}{0}$ is a number of infinite magnitude, and here this will be confirmed anew in the most elegant manner.
But if there is put $a = 2$ thus our series becomes

$$= 1+2+4+8+16+32+64 \text{ etc.}$$

to infinity, of which the value should become $\frac{1}{1-2}$, that is -1; which in the first instant appears to be absurd.

But it is to be observed, that if one wants stop at some term in the above series, besides always a fraction must still be put in place.
Thus if e.g. we stop by 64, so must we add still to this

$$1+2+4+8+16+32+64$$

the fraction $\frac{128}{1-2}$, that is $\frac{128}{1-2} = -128$, from which there results $127-128$, that is -1.

But if we keep going forwards without end, the fraction can no longer be considered, as on the other hand, at no time do we stop or stand still.

[In which case two infinite quantities must be taken from each other, which process is undefined.]

294.

This is therefore is to be observed, if a number greater than 1 may be assumed for *a*. But if a number less than 1 is assumed for *a*, thus everything can be understood easily.

For example, let $a = \frac{1}{2}$ thus $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ is found, which consequently shall be equal to the indefinite series:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128} \text{ etc.}$$

Then taking only two terms thus one has $1+\frac{1}{2}$, and so $\frac{1}{2}$ is still lacking . Taking three terms thus one has $1\frac{3}{4}$, still lacking $\frac{1}{4}$; taking four terms one has $1\frac{7}{8}$, still lacking $\frac{1}{8}$: from which it is seen, that less is lacking, consequently if one continues without end, so nothing at all must be missing.

295.

Putting $a = \frac{1}{3}$ thus our fraction is $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 3 = 1\frac{1}{2}$,

thus consequently the series is equal to $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ etc. Taking two terms thus one has $1\frac{1}{3}$, still lacking $\frac{1}{6}$. Taking three terms thus one has $1\frac{4}{9}$ still lacking $\frac{1}{18}$. Taking four terms thus one has $1\frac{13}{27}$, still lacking $\frac{1}{54}$. Since now the error always is three times smaller, thus the same must disappear finally.

296.

Let us put $a = \frac{2}{3}$ thus the fraction $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, but the series becomes :

$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ etc. indefinitely. Initially taking two terms, $1\frac{2}{3}$, thus still lacking $1\frac{1}{3}$, taking three terms $2\frac{1}{9}$ thus still lacking $\frac{8}{9}$, taking four terms $2\frac{11}{27}$ thus still lacking $\frac{16}{27}$.

297.

Let $a = \frac{1}{4}$, thus the fraction becomes $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$, but the series becomes

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ etc. Taking two terms, $1\frac{1}{4}$, thus still short by $\frac{1}{12}$;
taking three terms one has $1\frac{5}{16}$, still short by $\frac{1}{48}$ etc.

298.

In a like manner this fraction $\frac{1}{1+a}$ also can be expanded in an endless series, if the numerator 1 is actually divided by the denominator $1+a$, as follows:

$$\begin{array}{lllllll}
1+a) & 1 & (1-a+aa-a^3+a^4 \\
 & \underline{1+a} \\
 & -a \\
 & \underline{-a-aa} \\
 & \quad +aa \\
 & \quad \underline{+aa+a^3} \\
 & \qquad -a^3-a^4 \\
 & \qquad \underline{+a^4 \quad} \\
 & \qquad +a^4+a^5 \\
 & \qquad \underline{\quad -a^5 \text{ etc.}}
\end{array}$$

Therefore our fraction $\frac{1}{1+a}$ actually is equal to this infinite series:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 \text{ etc.}$$

299.

Putting $a = 1$ thus this remarkable comparison arises :

$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1$ etc.

indefinitely ; which appears absurd: if one stops anywhere with -1, thus this series gives 0; but if one stops anywhere with 1, thus the same gives 1. Even from this alone the matter can be understood, because if one endlessly proceeds and one must stop neither at -1 nor at $+1$, thus neither can 1 nor 0 arise but something in between, which is $\frac{1}{2}$.

300.

Further let $a=\frac{1}{2}$ thus our fraction becomes $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, to which consequently this infinite series $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ etc. will be equal. Taking two terms thus one has $\frac{1}{2}$, so that it is too small by $\frac{1}{6}$. Taking three terms thus one has $\frac{3}{4}$ which is too much by $\frac{1}{12}$; Taking two terms thus one has $\frac{5}{8}$, which is too small by $\frac{1}{24}$ etc.

301.

By putting $a=\frac{1}{3}$ thus our fraction becomes $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$, which consequently will be equal to this infinite series $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$ etc. Taking two terms thus there is $\frac{2}{3}$, that is deficient by $\frac{1}{12}$. Taking three terms thus one has $\frac{7}{9}$, too great by $\frac{1}{36}$. Taking four terms one has $\frac{20}{27}$, too little by $\frac{1}{108}$, and so forth.

302.

The fraction $\frac{1}{1+a}$ can be expanded out in yet another way, in that 1 can be divided by $a+1$, namely :

$$
\begin{array}{l}
a+1)\;\; 1 \;\; (\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \text{ etc.}\\
\underline{1+\frac{1}{a}}\\
\quad -\frac{1}{a}\\
\quad \underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}}\\
\qquad +\frac{1}{aa}\\
\qquad \underline{+\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}}\\
\qquad\quad -\frac{1}{a^3}\\
\qquad\quad \underline{-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}}\\
\qquad\qquad +\frac{1}{a^4}\\
\qquad\qquad \underline{+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}}\\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^5} \text{ etc.}
\end{array}
$$

Consequently our fraction $\frac{1}{a+1}$ is equal to this infinite series
$\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$ etc. Putting $a=1$ thus this series becomes
$1-1+1-1+1-1+1-1$ etc. $=\frac{1}{2}$ as above. Putting $a=2$ thus the series becomes
$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ etc.

303.

In a similar manner one can resolve generally this fraction $\frac{c}{a+b}$ into a series,

$$
\begin{array}{l}
a+b)\;\; c \;\; (\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4} \text{ etc.}\\
\underline{c+\frac{bc}{a}}\\
\quad -\frac{bc}{a}\\
\quad \underline{-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}}\\
\qquad +\frac{bbc}{aa}\\
\qquad \underline{+\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}}\\
\qquad\quad -\frac{b^3c}{a^3}
\end{array}
$$

From which we have this comparison

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\text{ etc., indefinitely.}$$

Let $a=2,\ b=4,$ and $c=3$, thus we have

$$\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2+4}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12\text{ etc.}$$

Let $a=10,\ b=1$ and $c=11$, thus we have

$$\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}\text{ etc.}$$

Taking only one term, thus one has $\frac{11}{10}$, which is too much by $\frac{1}{10}$. Taking two terms, thus one has $\frac{99}{100}$ which is too small by $\frac{1}{100}$. Taking three terms thus one has $\frac{1001}{1000}$, which is too large by $\frac{1}{1000}$ etc.

304.

If the divisor consists of more parts, thus the division may be continually carried out indefinitely in the same manner.

As if this fraction $\frac{1}{1-a+aa}$ were given, thus the infinite series equal to the same can be found equally:

$$1+a+aa)\ 1\ \ (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7\text{etc.}$$
$$\underline{1-a+aa}$$
$$+a-aa$$
$$\underline{+aa-aa+a^3}$$
$$-a^3$$
$$\underline{-a^3+a^4-a^5}$$
$$-a^4+a^5$$
$$\underline{-a^4+a^5-a^6}$$
$$+a^6$$
$$\underline{+a^6-a^7+a^8}$$
$$+a^7-a^8$$
$$\underline{+a^7-a^8+a^9}$$
$$-a^9\ \text{etc.}$$

Hence we have this comparison:

$$\frac{1}{1+a-aa}=1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10} \text{ etc.}$$

without end. Taking here $a=1$ thus this series arises

$$1=1+1-1-1+1+1-1-1+1+1 \text{ etc}.$$

which series itself $1-1+1-1+1$ etc. comprises twice that already found, since now the above mentioned series was equal to $\frac{1}{2}$, thus it is little wonder that we find $\frac{2}{2}$ or 1 for the value of this series we have determined.

Putting $a=\frac{1}{2}$ thus this equation arises :

$$\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512} \text{ etc.}$$

Putting $a=\frac{1}{3}$ thus this equation arises, as

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} \text{ or } \frac{9}{7}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729} \text{ etc.}$$

Taking four terms here, thus $\frac{104}{81}$ arises, which is smaller than $\frac{9}{7}$ by $\frac{1}{567}$.

Further putting $a=\frac{2}{3}$, this equation thus arises

$$\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729} \text{ etc.}$$

which series must be equal to the above ; thus subtracting the above mentioned from this one comes upon : $0=\frac{1}{3}-\frac{7}{27}-\frac{15}{81}+\frac{63}{729}$ etc. which becomes $-\frac{2}{81}$ for four terms.

305.

All fractions can be expanded out in such a form into an infinite series, which not only can be of great assistance, but also that itself is of the greatest interest, that an infinite series, without having considered the same ever to stop, nevertheless can have a particular value. Also the most important discoveries have been derived from the same source, therefore this subject matter deserves so much more to be studied with the greatest possible attention.

CHAPTER 6

ON THE SQUARES OF COMPOSITE MAGNITUDES

306.

If the square of a composite magnitude shall be found, thus it is required only to multiply the same by itself, and the product shall be the square from that.
Thus the square of $a+b$ will be found as follows :

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ aa+ab \\ \underline{\quad +ab+bb} \\ aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

If therefore the square root consists of two parts, which are to be added together, as $a+b$, thus the square consists I. of the squares of each part namely *aa* and *bb,* II. but still in addition twice the product of each part namely 2*ab,* and the whole sum $aa+2ab+bb$ is the square of $a+b$.
E.g. let $a=10$ and $b=3$, so that the square of 13 shall be found; such will be therefore $=100+60+9=169$.

308.

Now the help of this formula lets the squares of reasonably large numbers be found easily, if the same shall be separated into two parts.
Thus, in order that the square of 57 can be found, this number is divided into the parts $50+7$; hence the square shall be :

$$2500+700+49=3249.$$

309.

Hence it is seen, that the square of $a+1$ will be $aa+2a+1$; since now the square of *a* is *aa,* thus the square of $a+1$ will be found if one adds $2a+1$ to that, whereby it is to be noted that $2a+1$ is the sum of both roots *a* and $a+1$; since thus the square of 10 is 100 so will the square of 11 be $=100+21$, and since the square of 57 is 3249, so will the square of 58 be $=3249+115=3364$. And further the square of $59=3364+117=3481$. Yet again the square of $60=3481+119=3600$ etc.

310.

The square of a composite magnitude, such as $a+b$, thus is indicated by $(a+b)^2$; therefore we have $(a+b)^2=aa+2ab+bb$, from which the following equations will be derived :

$$(a+1)^2 = aa+2a+1,\ (a+2)^2 = aa+4a+4,$$
$$(a+3)^2 = aa+6a+9,\ (a+4)^2 = aa+8a+16,$$

and so on.

311.

If the root were $a-b$ so its square will be $= aa-2ab+bb$, which therefore is composed from the squares of each part, but from which twice the product be taken away.
E.g. let $a=10$ and $b=1$ thus the square of 9 is $=100-20+1=81$.

312.

Since now we have this equation $(a-b)^2 = aa-2ab+bb$, thus there will be $(a-1)^2 = aa-2a+1$; the square of $a-1$ also will be found, if $2a-1$ is taken from aa, which is the sum of both roots a and $a-1$.
E.g. let $a=50$ thus $aa=2500$ and $a-1=49$, there

$$49^2 = 2500-99 = 2401.$$

313.

This can also be explained through fractions, as if the root is taken $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ (which constitute 1) thus the square will be :

$$\tfrac{9}{25}+\tfrac{4}{25}+\tfrac{12}{25}=\tfrac{25}{25} \text{ which is 1.}$$

Further the square of $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (which is $\frac{1}{6}$) will be $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

314.

If the root is composed from more terms, thus the square can be composed in a similar manner : Thus from $a+b+c$ the square will be found, as follows :

$$\begin{array}{l}
a+b+c \\
\underline{a+b+c} \\
aa+ab+ac \qquad\quad +bc \\
\underline{\quad +ab+ac \quad +bb+bc \;\; +cc} \\
aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc
\end{array}$$

from which it can be seen, that in the first place the same is composed from the square of each part of the root, and after that from twice the product of each two parts with each other.

315.

In order to show this by an example, thus we will dissect the number 256 into these three parts $200+50+6$; therefore the square of that shall be composed from the following parts :

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536
65536	

and this is obviously equal to $256\cdot 256$.

316.

If some terms in the root shall be negative, thus the square will be found after this same rule, only if one pays attention to the double products given, which each arises with a single sign. Thus from $a-b-c$ the square will be : $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$. If thus the number 256 hence will be divided up into $300-40-4$, so there arises:

Positive Theile	Negative Theile
+90000	−24000
1600	2400
320	−26400
16	
+91936	
−26400	
65536.	

The square of 256, as above.

DES ERSTEN THEILS ZWEYTER ABSCHNITT.

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN MIT ZUSAMMENGESETZTEN GROSSEN

CAPITEL 1

VON DER ADDITION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

256.

Wann zwey oder mehr Formeln, welche aus viel Gliedern bestehen zusammen addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewiße Zeichen angedeutet zu werden, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also wann diese Formel $a+b+c$ und $d+e+f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summa also angezeigt:

$$(a+b+c)+(d+e+f)$$

257.

Solcher gestalt wird die Addition nur angedeutet nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß um dieselbe zu vollziehen man nur nöthig habe die Klammern wegzulaßen: dann da die Zahl $d+e+f$ zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches wann man erstlich $+d$ hernach $+e$ und endlich $+f$ hinzuschreibt, da dann die Summa seyn wird:

$$a+b+c+d+e+f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wann einige Glieder das Zeichen−hätten, als welche so dann gleichfals mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in puren Zahlen betrachten, und zu der Formel $12-8$ noch diese $15-6$ addiren. Man addire also erstlich 15, so hat man $12-8+15$; man hat aber zu viel addirt, weil man nur 15-6 addiren sollte, und es ist klar daß man 6 zu viel addiret habe; man nehme also diese 6 wieder weg oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summa

$$12-8\ +15-6.$$

Woraus erhellet, daß die Summa gefunden wird, wann man alle Glieder, ein jedes mit seinem Zeichen, zusammen schreibt.

259.

Wann demnach zu dieser Formel $a-b+c$ noch diese $d-e-f$ addirt werden soll, so , wird die Summa folgender Gestalt ausgedrückt

$$a-b+c+d-e-f.$$

wobey wohl zu bemercken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern dieselben nach Belieben unter einander versetzt werden können, wann nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summa auch also geschrieben werden:

$$c-e+a-f+d-b.$$

260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wann zu dieser Formel $2a^3+6\sqrt{b}-4\log c$ noch diese $5\sqrt[5]{a}-7c$ addirt werden sollte, so würde die Summa seyn:

$$2a^3+6\sqrt{b}-4\log c+5\sqrt[5]{a}-7c,$$

woraus erhellet daß dieses die Summa sey, und es auch erlaubt ist diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wann nur ein jedes sein Zeichen behält.

261.

Ofters trägt es sich aber zu, daß die solchergestalt gefundene Summa weit kürtzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gäntzlich aufheben. Als wann in der Summa diese Glieder $+a-a$, oder solche $3a-4a+a$ vorkämen. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in einem gebracht werden, wie z. E.

$$3a+2a=5a,\ 7b-3b=+4b, -6c+10c=+4c$$
$$5a-8a=-3a, -\ 7b+b=-6b, -3c-4c=-7c$$
$$2a-5a+a=-2a, -3b-5b+2b=-6b.$$

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2aa+3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen und $2b^3-b^4$ läßt sich auch nicht abkürtzen.

262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a+b$ und $a-b$, da dann nach obiger Regel herauskommt $a+b+a-b$, nun aber ist $a+a=2a$ und $b-b=0$, folglich ist die Summa $=2a$; welches Exempel folgende sehr nützliche Wahrheit anzeiget:

Wann zu der Summa zweyer Zahlen $(a+b)$ ihre Differenz $(a-b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgende Exempel:

$$\begin{array}{c}3a-2\mathrm{b}-c\\ \underline{5b-6c+a}\\ 4a+3b-7c\end{array}\qquad\begin{array}{l}a^3-2aab+2abb\\ \underline{-aab+2abb-b^3}\\ a^3-3aab+4abb-b^3\end{array}$$

CAPITEL 2

VON DER SUBTRACTION MIT ZUSAMMENGESE~rZTEN GRÖSSEN

263.

Wann man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige welche abgezogen werden soll wird mit Vorsetzung des Zeichen − an diejenige angehänget von welcher sie ab gezogen werden soll. Also wann von dieser Formel $a-b+c$ diese $d-e+f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet

$$(a-b+c)-(d-e+f)$$

als woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

264.

Um aber die Subtraction würcklich zu vollziehen, so ist vor das erste zu mercken, daß wenn von einer Größe als a eine andre positive Größe als $+b$ abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a-b$.

Wann aber eine negative Zahl als $-b$ von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a+b$, weil eine Schuld wegnehmen, eben so viel ist als etwas schencken.

265.

Laßt uns nun setzen, man soll von dieser Formel *a c,* diese $b-d$ subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, da bekommt man $a-c-b$; wir haben aber zu viel weggenommen, dann wir sollten nur $b-d$ wegnehmen, und das um d zu viel: wir müßen also dieses d wieder hinzusetzen, da wir dann erhalten

$$a-c-b+d;$$

woraus sich diese Regel offenbahr ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen mit verkehrten Zeichen hinzugeschrieben werden müßen.

266.

Durch Hülfe dieser Regel ist es also gantz leicht die Subtraction zu verrichten, indem die Formel von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit verkehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Also im ersten Exempel da von $a-b+c$ diese Formel $d-e+f$ abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a-b+c-d+e-f.$$

Um dieses mit puren Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9-3+2$, diese Formel $6-2+4$, da bekömmt man

$$9-3+2-6+2-4=0,$$

welches auch so gleich in die Augen fällt; dann

$$9-3+2=8,\ 6-2+4=8,\ \text{und } 8-8=0.$$

267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemercken, daß wann in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürtzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a+b$, wodurch die Summa zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a-b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich $a+b-a+b$; nun aber ist $a-a=0$ und $b+b=2b$, folglich ist der gesuchte Rest 2b, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$	$a^3+3aab+3abb+b^3$	$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$
$bb-ab+aa$	$2b+4c-6a$	$a^3-3aab+3abb-b^3$	$\sqrt{a}-3\sqrt{b}$
$2ab$	$9a-6b+c$	$6aab+2b^3$	$+5\sqrt{b}$

CAPITEL 3

VON DER MULTIPLICATION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

270.

Wann eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multipliciret werden sollen in Klammern eingeschloßen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punckt an einander gehängt. Also wann diese beyde Formeln $a-b+c$ und $d-e+f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solcher Gestalt angezeiget: $(a-b+c)\cdot(d-e+f)$ oder $(a-b+c)(d-e+f)$. Diese Art wird sehr häuffig gebraucht, weil man daraus so gleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen wie eine solche Multiplication würcklich angestellt werden müße, so ist erstlich zu mercken, daß wann eine solche Formel $a-b+c$ z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müße, und also herauskomme

$$2a-2b+2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wann also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll so bekommt man:

$$ad-bd+cd.$$

272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey; wann aber mit einer Negativ-Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt −, zwey gleiche aber + geben. Dahero bekommt man:

$$-ae+be-ce.$$

273.

Um nun zu zeigen wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte als $d-e$ multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A mit $7-3$ multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt wann man mit $d-e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also daß herauskommt $dA-eA$.
Laßt uns nun setzen $A=a-b$ welches mit $d-e$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA=ad-bd \\ \underline{eA=ae-be\qquad} \\ ad-bd-ae+be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product $(a-b)\cdot(d-e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications Exempel folgender Gestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{d-e\qquad\qquad} \\ ad-\ bd-ae+be \end{array}$$

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müße; und daß wegen der Zeichen die obengegebene Regul gäntzlich Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, Wann etwann jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regul wird es also leicht seyn folgendes Exempel auszurechnen:

$a+b$ soll multiplicirt werden mit $a-b$:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ aa+ab \\ \underline{\quad -ab-bb} \\ aa-bb. \end{array}$$

das Product wird seyn $aa-bb$.

276.

Wann also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wann die Summa zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellt werden: $(a+b)(a-b)=aa-bb$;
folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadrat-Zahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzeln, und ist also keine Prim-Zahl.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

I.)
$$\begin{array}{l} 2a-3 \\ \underline{a+2} \\ 2aa-3a \\ \underline{\quad +4a-6} \\ 2aa+a-6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{l} 4aa-6a+9 \\ \underline{2a\ +3} \\ 8a^3-12aa\ +18a \\ \underline{\quad +12aa-18a\ +27} \\ 8a^3+27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{l} 3aa-2ab-bb \\ \underline{2a-4b} \\ 6a^3-4aab-2abb \\ \underline{\quad -12aab+8abb+4b^3} \\ 6a^3-16aab+6abb+4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{l} aa+2ab+2bb \\ \underline{aa-2ab+2bb} \\ a^4+2a^3b+2aabb \\ \quad -2a^3b-4aabb-4ab^3 \\ \underline{\qquad +2aabb+4ab^3+4b^4} \\ a^4+4b^4 \end{array}$$

V.)
$$\begin{array}{l} 2aa-3ab-4bb \\ \underline{3aa-2ab+bb} \\ 6a^4-9a^3b-12aabb \\ \quad -4a^3b+6aabb+8ab^3 \\ \underline{\qquad +2aabb-3ab^3-4b^4} \\ 6a^4-13a^3b-4aabb+5ab^3-4b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{VI.)}\ aa+bb+cc-ab-ac-bc \\
\underline{\quad a+b+c \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
a^3+abb+acc-aab-aac-abc \\
\quad -abb \quad +aab \quad -abc+b^3+bcc-bbc \\
\underline{\qquad -acc \quad +aac-abc \quad -bcc+bbc+c^3} \\
a^3-3abc+b^3+c^3
\end{array}$$

278.

Wann mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht daß nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müße, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darin beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factores besteht, gefunden werden :

$$\begin{array}{cccc}
\text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\
(a+b) & (aa+ab+bb) & (a-b) & (aa-ab+bb)
\end{array}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{ll}
\text{II.} & aa+ab+bb \\
\underline{\text{I.}} & \underline{a+b \qquad\qquad\qquad} \\
 & a^3+aab+abb \\
 & \underline{\quad +aab+abb+b^3} \\
\text{I. II.} & a^3+2aab+2abb+b^3
\end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{ll}
\text{IV.} & aa-ab+bb \\
\text{III.} & \underline{a-b \qquad\qquad\qquad} \\
 & a^3-aab+abb \\
 & \underline{\quad -aab+abb-b^3} \\
\text{111. IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3
\end{array}$$

Nun ist also noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

$$\begin{array}{r}
\text{I. II.} = a^3 + 2aab + 2abb + b^3 \\
\text{III. IV.} = a^3 - 2aab + 2abb - b^3 \\
\hline
a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3b^3 \\
\hline
-2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b_3 - 2aab^4 \\
+2a^4bb + 4a^3b^3 + 4aab^4 + 2ab^5 \\
-a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6 \\
\hline
a^6 - b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und so dann die II. mit der IV. multipliciren
I. III.

$$\begin{array}{l}
\text{I.}\quad a+b \\
\text{III.}\quad a-b \\
\hline
aa + ab \\
-ab - bb \\
\hline
\text{I.III} = aa - bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{II.}\ aa+ab+bb \\
\text{IV.}\ aa-ab+bb \\
\hline
a^4 + a^3b + aabb \\
-a^3b - aabb - ab^3 \\
+aabb + ab^3 + b^4 \\
\hline
\text{II.IV.} = a^4 + aabb + b^4
\end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{r}
\text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4 \\
\text{I. III.} = aa - bb \\
\hline
a^6 + a^4bb + aab^4 \\
-a^4bb - aab^4 - b^6 \\
\hline
a^6 - b^6
\end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

$$\begin{array}{ll} \text{IV. } aa - ab + bb & \text{II. } aa + ab + bb \\ \underline{\text{I. } \quad a + b} & \underline{\text{III. } a - b} \\ a^3 - aab + abb & a^3 + aab + abb \\ \underline{\quad + aab - abb + b^3} & \underline{\quad - aab - abb - b^3} \\ \text{I. IV. } = a^3 + b^3 & \text{II. III. } = a^3 - b^3 \end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product I.IV. mit II. III. zu multipliciren

$$\begin{array}{l} \text{I. IV. } = a^3 + b^3 \\ \underline{\text{II.III. } = a^3 - b^3} \\ \quad a^6 + a^3b^3 \\ \underline{\qquad - a^3b^3 - b^6} \\ \quad a^6 - b^6 \end{array}$$

281.

Es ist der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$; so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $aa = 9,\ ab = 6,\ bb = 4$. Also ist $aa + ab + bb = 19$ und $aa - ab + bb = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt: $5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7$, welches ist 665.

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon gesehen haben.

CAPITEL 4

VON DER DIVISION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

282.

Wann man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man das Dividend über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt ; oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividend mit darzwischen gesetzten zwey Punckten. Also wann $a + b$ durch $c + d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber also $(a + b) : (c + d)$; Beydes wird ausgesprochen $a + b$ getheilt durch $c + d$.

283.

Wann eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. E.

$6a-8b+4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a-4b+2c$

und $$(aa-2ab):(a)=a-2b.$$

Eben so $$(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb,$$

ferner $$(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc,$$

und $$(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c \text{ etc.}$$

etc.

284.

Wann sich etwan ein Glied des Dividends nicht theilen laßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wann $a+b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotient $1+\frac{b}{a}$.

Ferner $$(aa-ab+bb):(aa)=1-\tfrac{b}{a}+\tfrac{bb}{aa}.$$

Wann weiter $(2a+b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $1+\frac{b}{2}$; wobey zu mercken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$ mal b so viel ist als $\frac{1}{2}b$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$ und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ etc.

285.

Wann aber der Divisor selbst eine zusammen gesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters würcklich geschehen kann wo es nicht zu vermuthen scheint; dann wann die Division nicht angeht so muß man sich begnügen den Quotienten wie oben gemeldet durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten wo die Division würcklich angeht.

286.

Es soll demnach das Dividend $ac-bc$ durch den Divisor $a-b$ getheilt werden: der Quotient muß demnach also beschaffen seyn, daß wann der Divisor $a-b$ damit multiplicirt wird, das Dividend $ac-bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotus c stehen muß, weil sonsten nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen ob c der völlige Quotus ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen ob das gantze Dividend herauskomme oder nur ein Theil deßelben? In unserm Fall aber wann a-b mit c multiplicirt wird, so bekommen wir $ac-bc$, welches das Dividend selbsten ist: folglich ist c der völlige Quotus. Eben so ist klar daß und ferner

$$(aa+ab):(a+b)=a,$$

und $$(3aa-2ab):(3a-2b)=a,$$

ferner $$(6aa-9ab):(2a-3b)=3a.$$

287.

Auf solche Art findet man gewis einen Theil des Quotienten. Dann wann derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht das Dividend erschöpft so muß man das übrige gleichfals noch durch den Divisor theilen, da man dann wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestallt verfährt man bis man den gantzen Quotient erhalte.

Wir wollen z. E. $aa+3ab+2bb$ durch $a+b$ theilen; da ist nun so gleich klar daß der Quotient das Glied a enthalten müße, weil sonsten nicht aa herauskommen könnte. Wann aber der Divisor $a+b$ mit a multiplicirt wird, so kommt $aa+ab$, welches vom Dividend abgezogen $2ab+2bb$ nachläßt, welches also noch durch $a+b$ getheilt werden muß, wo sogleich in die Augen fällt, daß im Quotient $2b$ stehen müsse. Nun aber $2b$ mit $a+b$ multiplicirt, giebt just $2ab+2bb$; folglich ist der gesuchte Quotient $a+2b$, welcher mit dem Divisor $a+b$ multiplicirt das Dividend giebt. Diese gantze Operation wird folgender Gestalt vorgestellt

$$\begin{array}{l} a+b)\ aa+3ab+2bb\ (a+2b \\ \underline{aa+ab\qquad\quad} \\ \quad +2ab+2bb \\ \underline{\quad +2ab+2bb} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, als wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt und nach diesem Buchstaben schreibt man auch das Dividend in solcher Ordnung, daß die höchsten Potestäten von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{l} a-b)\ a^3-3aab+3abb-b^3(aa-2ab+bb \\ \quad \underline{a^3-aab\qquad\qquad\quad} \\ \qquad -2aab+3abb \\ \qquad \underline{-2aab+2abb\quad} \\ \qquad\qquad\quad +abb-b^3 \\ \qquad\qquad\quad \underline{+abb-b^3} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b)\ aa-bb\ (a-b \\ \underline{aa+ab} \\ \quad -ab-bb \\ \quad \underline{-ab-bb} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a-2b)\ 18aa-8bb\ (6a+4b \\ \underline{18aa-12ab} \\ \quad +12ab-8bb \\ \quad \underline{+12ab-8bb} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b)\ a^3+b^3(aa-ab+bb \\ \underline{a^3+aab} \\ \quad -aab\ +b^3 \\ \quad \underline{-aab-abb} \\ \quad +abb+b^3 \\ \quad \underline{+abb+b^3} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a-b)8a^3-b^3(4aa+2ab+bb \\ \underline{8a^3-4aab} \\ \quad +4aab-b^3 \\ \quad \underline{+4aab-2abb} \\ \qquad +2abb-b^3 \\ \qquad \underline{+2abb-b^3} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa-2ab+bb)\ a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4(aa-2ab+bb \\ \underline{a^4-\ 2a^3b+aabb} \\ \quad -2a^3b+5aabb-4ab^3 \\ \quad \underline{2a^3b+4aabb-2ab^3} \\ \qquad +aabb-2ab^3+b^4 \\ \qquad \underline{+aabb-2ab^3+b^4} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa-2ab+4bb)\ a^4+4aabb+16b^4(aa+2ab+4bb \\ \underline{a^4-2a^3b\ \ +4aabb} \\ \quad +2a^3b+16b^4 \\ \quad \underline{+2a^3b-4aabb+8ab^3} \\ \qquad +4aabb-8ab^3+16b^4 \\ \qquad \underline{+4aabb-8ab^3+16b^4} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
aa-2ab+2bb)\ a^4+4b^4 \quad (aa+2ab+2bb \\
\underline{a^4-2a^3b+2aabb\qquad\qquad} \\
\quad +2a^3b-2aabb+4b^4 \\
\underline{\quad +2a^3b-4aabb+4ab^3} \\
\qquad\qquad +2aabb-4ab^3+4b^4 \\
\underline{\qquad\qquad +2aabb-4ab^3+4b^4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1-2x+xx)1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5 \ (1-3x+3xx-\ x3 \\
\underline{1-2x+xx\qquad\qquad} \\
-3x+9xx-10x^3 \\
\underline{-3x+6xx-3x^3\qquad} \\
\quad +3xx-7x^3+5x^4 \\
\underline{\quad +3xx-6x^3+3x^4} \\
\qquad -x^3 \ +2x^4-x^5 \\
\underline{\qquad -x^3 \ +2x^4-x^5} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

CAPITEL 5

VON DER AUFLÖSSUNG DER BRÜCHE IN UNENDLICHEN REIHEN

289.

Wann sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt. Also wann 1 durch $1-a$ getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Reguln angestellt und so weit man will fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotus, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß

290.

Um dieses zu zeigen so laßt uns das Dividend 1 würcklich durch den Divisor $1-a$ theilen wie folget:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \\ \underline{\ +1-a\ } \\ \text{Rest} +a \end{array} \qquad \text{oder}\quad \begin{array}{l} 1-a)\ \ 1\ \ (1+a+\frac{aa}{1-a} \\ \underline{+1-a\qquad} \\ \quad +a \\ \underline{\quad +a-aa} \\ \ \text{Rest}\ +aa \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch $1-a$ als

$$\begin{array}{l} 1-a)\ aa\ (aa+\frac{a^3}{1-a} \\ \underline{aa-a^3} \\ \quad +a^3 \end{array} \qquad \text{ferner}\quad \begin{array}{l} 1-a)\ \ a^3\ \ (a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ \underline{a^3-a^4} \\ \quad +a^4 \end{array}$$

$$\text{ferner}\ \ \begin{array}{l} 1-a)\ \ a^4\ \ (a^4+\frac{a^5}{1-a} \\ \underline{a^4-a^5} \\ \quad +a^5\ \ \text{etc.} \end{array}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ ausgedruckt werden kann a durch alle folgende Formen

$$\text{I.)}\ 1+\frac{a}{1-a}, \qquad \text{II.)}\ 1+a+\frac{aa}{1-a}, \qquad \text{III.)}\ 1+a+aa+\frac{a^3}{1-a},$$
$$\text{IV.)}\ 1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}, \quad \text{V.)}\ 1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}\ \text{etc.}$$

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1, so viel als $\frac{1-a}{1-a}$ folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{aa}{1-a}$ bringe man den gantzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ geibt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$. Für die dritte Form $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$ giebt der gantze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292 .

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen als man will, ohne daß man weitet· nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \mathrm{a}^7 + \frac{a^8}{1-a}.$$

Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelößt, welche ist:

$$1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} \text{ etc.}$$

ins unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheinet anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ etc. bis ins unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemercket, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.
Wann man aber setzt $a = 2$ so wird unsere Reihe

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ etc.}$$

bis ins unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist -1; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu mercken, daß wann man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.
Also wann wir z. E. bey 64 still stehen, so müßen wir zu

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{1-2} = -128$ hinzusetzen, woraus entsteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man stehet aber hingegen auch niemals still.

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wann für *a* größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für *a* kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Dann nimmt man nur zwey Glieder so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$: woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wann man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a=\frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=3=1\frac{1}{2}$,
dahero folgende Reihe gleich ist $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ etc. liche. Nimmt man zwey Glieder so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{4}{9}$ fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a=\frac{2}{3}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$, die Reihe aber wird :
$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$ so fehlt noch $1\frac{1}{3}$, nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$ so fehlt noch $\frac{8}{9}$, nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$ so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

297.

Es sey $a=\frac{1}{4}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ etc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$ so fehlt noch $\frac{1}{12}$;
nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{5}{16}$ fehlt noch $\frac{1}{48}$ etc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wann man den Zehler 1 durch den Nenner $1+a$ würcklich dividirt, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\quad 1\quad (1-a+aa-a^3+a^4\\
\quad\underline{1+a}\\
\quad -a\\
\quad \underline{-a-aa}\\
\qquad +aa\\
\qquad \underline{+aa+a^3}\\
\qquad\quad -a^3-a^4\\
\qquad\quad \underline{+a^4}\\
\qquad\quad +a^4+a^5\\
\qquad\qquad \underline{-a^5 \text{ etc.}}
\end{array}
$$

Dahero ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1-a+aa-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7 \text{ etc.}$$

299.

Setzt man $a=1$ so erhält man diese merckwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1 \text{ etc.}$$

bis ins unendliche; welches wiedersinnig scheint: dann wann man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit 1 auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreiffen, weil wann man ohne End fort gehen und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen sondern etwas darzwischen
welches $\frac{1}{2}$ ist.

300.

Es sey ferner $a=\frac{1}{2}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, welchem folglich gleich seyn wird diese Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{3}{4}$ ist zu viel um $\frac{1}{12}$; nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$ etc.

301.

Setzt man $a=\frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1-\frac{1}{3}+\ \frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man

$\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$ Nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, und so fort.

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andre Art auflösen, indem man 1 durch $a+1$ theilt, nemlich:

$$
\begin{array}{l}
a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\ \text{etc.}\right.\\
\underline{1+\frac{1}{a}}\\
\quad -\frac{1}{a}\\
\quad \underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}}\\
\qquad +\frac{1}{aa}\\
\qquad \underline{+\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}}\\
\qquad\quad -\frac{1}{a^3}\\
\qquad\quad \underline{-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}}\\
\qquad\qquad +\frac{1}{a^4}\\
\qquad\qquad \underline{+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}}\\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^5}\ \text{etc.}
\end{array}
$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich $\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$ etc. ohne Ende. Setzt man $a=1$ so bekommt man diese Reihe $1-1+1-1+1-1+1-1$ etc. $=\frac{1}{2}$ wie oben. Setzt man $a=2$ so bekommt man diese Reihe $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ etc.

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$
\begin{array}{l}
a+b)\ c\ \left(\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\ \text{etc.}\right. \\
\underline{c+\frac{bc}{a}} \\
\quad -\frac{bc}{a} \\
\quad \underline{-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}} \\
\qquad +\frac{bbc}{aa} \\
\qquad \underline{+\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}} \\
\qquad\qquad -\frac{b^3c}{a^3}
\end{array}
$$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\ \text{bis ins unendliche.}$$

Es sey $a=2,\ b=4,$ und $c=3$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2+4}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12\ \text{etc.}$$

Es sey $a=10,\ b=1$ und $c=11$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}\ \text{etc.}$$

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$ welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{99}{100}$ welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ etc.

304.

Wann der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins unendliche fortgesetzt werden.

Als wann dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist also gefunden:

$$
\begin{array}{l}
1+a+aa)\ 1\ (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7\text{etc.}\\
\qquad\qquad \underline{1-a+aa}\\
\qquad\qquad\quad +a-aa\\
\qquad\qquad\quad \underline{+aa-aa+a^3}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -a^3\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^4+a^5\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-a^4+a^5-a^6}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a^6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+a^6-a^7+a^8}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a^7-a^8\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^7-a^8+a^9}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^9\ \text{etc.}
\end{array}
$$

Dahero haben wir diese Vergleichung

$$\frac{1}{1+a-aa}=1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}\ \text{etc.}$$

ohne Ende. Nimmt man hier $a=1$ so bekommt man diese Reihe

$$1=1+1-1-1+1+1-1-1+1+1\ \text{etc}.$$

welche Reihe die schon oben gefundene $1-1+1-1+1$ etc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder daß diese $\frac{2}{2}$ das ist 1 ausmacht.

Setzt man $a=\frac{1}{2}$ so bekommt man diese Gleichung

$$\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512}\ \text{etc.}$$

Setzt man $a=\frac{1}{3}$ so bekommt man diese Gleichung, als

$$\frac{1}{\frac{7}{9}}\ \text{oder}\ \frac{9}{7}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}\ \text{etc.}$$

Nimmt man hier vier Glieder so bekommt man $\frac{104}{81}$ welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a=\frac{2}{3}$ so bekommt man diese Gleichung

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729} \text{ etc.}$$

welche Reihe der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser so bekommt man: $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ etc. welche vier Glieder machen $-\frac{15}{81}$ machen

305.

Solcher gestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflößen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schaft, sondern auch an sich selbst höchst merckwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ohngeacht dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, dahero diese Materie allerdings verdient mit der größten Aufmercksamkeit in Erwegung gezogen zu werden.

CAPITEL 6

VON DEN QUADRATEN DER ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

306.

Wann das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbsten multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.
Also wird das Quadrat von $a+b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ aa+ab \\ \underline{\quad +ab+bb} \\ aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

Wann dahero die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a+b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils nemlich *aa* und *bb,* II. kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beyden Theile nemlich *2ab,* und die gantze Summa $aa+2ab+bb$ ist das Quadrat von $a+b$.
Es sey z. E. $a=10$ und $b=3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $=100+60+9=169$.

308.

Durch Hülfe dieser Formel laßen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wann dieselben in zwey Theile zergliedert werden.
Also um das Quadrat von 57 zu finden so zertheile man diese Zahl in $50+7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500+700+49=3249.$$

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a+1$ seyn werde $aa+2a+1$; da nun das Quadrat von a ist aa, so wird das Quadrat von $a+1$ gefunden wann man zu jenem addirt $2a+1$, wobey zu mercken daß $2a+1$ die Summa der beyden Wurzeln a und $a+1$ ist; da also das Quadrat von 10 ist 100 so wird das Quadrat von 11 seyn $=100+21$, und da das Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn $=3249+115=3364$. Und ferner das Quadrat von $59=3364+117=3481$. Noch ferner das Quadrat von $60=3481+119=3600$ etc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a+b$, wird also angedeutet $(a+b)^2$; dahero haben wir $(a+b)^2=aa+2ab+bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet werden:

$$(a+1)^2=aa+2a+1,\ (a+2)^2=aa+4a+4,$$
$$(a+3)^2=aa+6a+9,\ (a+4)^2=aa+8a+16,$$

und so ferner.

311.

Wann die Wurzel ist $a-b$ so wird ihr Quadrat seyn $=aa-2ab+bb$, welches dahero aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.

Es sey z. E. $a=10$ und $b=1$ so wird das Quadrat von 9 seyn $=100-20+1=81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a-b)^2=aa-2ab+bb$, so wird seyn $(a-1)^2=aa-2a+1$; das Quadrat von $a-1$ wird also gefunden, wann man von aa subtrahirt $2a-1$, welches die Summa der beyden Wurzeln a und $a-1$ ist.

Es sey z. E. $a=50$ so ist $aa=2500$ und $a-1=49$, dahero

$$49^2=2500-99=2401.$$

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, dann wann man vor dieWurzel nimmt $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ (welches 1 ausmacht) so wird das Quadrat seyn:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{25}{25} \text{ das ist 1.}$$

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (welches $\frac{1}{6}$ ist) wird seyn $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

314.

Wann die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: Also von $a+b+c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l}
a+b+c \\
\underline{a+b+c} \\
aa+ab+ac \qquad\quad +bc \\
\underline{\quad +ab+ac \quad +bb+bc \quad +cc} \\
aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc
\end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zartheilen $200+50+6$; dahero das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

$$\begin{array}{rcr}
40000 & \qquad & 256 \\
2500 & & \underline{256} \\
36 & & 1536 \\
20000 & & 1280 \\
2400 & & \underline{512} \\
\underline{600} & & 65536 \\
65536 & &
\end{array}$$

und dieses ist dem $256\cdot256$ offenbahr gleich.

316.

Wann einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regul gefunden, wann man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt was für ein Zeichen einem jeden zukommt. Also von $a-b-c$ wird das Quadrat seyn: $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$. Wann also die Zahl 256 also vorgesteilet wird $300-40-4$, so bekömmt man:

$$\begin{array}{rcr}
\text{Positive Theile} & \qquad & \text{Negative Theile} \\
+90000 & & -24000 \\
1600 & & \underline{2400} \\
320 & & -26400 \\
\underline{16} & & \\
+91936 & & \\
\underline{-26400} & & \\
65536. & &
\end{array}$$

Quadrat von 256, wie oben.