CHAPTER 7

THE EXTRACTION OF SQUARE ROOTS IN COMPOSITE MAGNITUDES

317.

In order to give a sure rule regarding this, thus we must take into consideration the square of the root $a+b$, which is exactly $aa+2ab+bb$, and we examine in turn how the square root can be extracted from the given square. Concerning which the following considerations are to be made.

318.

In the first place since the square $aa+2ab+bb$ is composed from more terms, so it is certain, that we must compose the root from more than one term ; and if the square will thus be written, that the power of one letter, such as *a*, always is to be taken away, thus it is clear that the first term will be the square of the first term of the root. Since now in our case the first term of the square is *aa*, so it is clear, that the first term of the root must be *a*.

319.

Now that we have found the first term of the root, namely *a*, so that remaining in the square is considered, which is $2ab+bb$, in order that it can be seen from that which other part of the root, which is *b,* can be found. We note here, that those remaining or that left $2ab+bb$ thus can be put in place by a product $(2a+b)b$. Since now this remainder has two factors $2a+b$ and b thus the latter is *b,* which is the second part of the root sought, if $2a+b$ divides the remainder $2ab+bb$.

320.

Thus the second part of the root has to be found, so one must divide the remainder by $2a+b$, since then the quotient will be the second part of the root. But it is to be noted for this division, that 2*a* is twice the first part of the root *a* found already : but the other term *b* indeed is still not known, and must still be left its empty place; however one can nevertheless perform the division, as that can be seen by the first term only 2*a*. But thus soon the quotient has been found, which here is *b*, thus the same must be put in the empty place and the division completed.

321.

Hence the calculation whereby the root can be found from the above $aa+2ab+bb$ can be presented thus :

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa+2ab+bb\ (a+b \\
 & \underline{aa\qquad\qquad} \\
2a+b & \quad +2ab+bb \\
 & \quad \underline{+2ab+bb} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

322.

In such a manner also the square roots of several composite formulas can be found, only if the same shall be squares, as can be seen from the following examples :

$$\begin{array}{r|l} & aa+6ab+9bb\ (a+3b \\ & \underline{aa} \\ 2a+3b & +6ab+9bb \\ & \underline{+6ab+9bb} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 4aa-4ab+bb\ (2a-b \\ & \underline{4aa} \\ 4a-b & -4ab+bb \\ & \underline{-4ab+bb} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 25xx-60x+36\ (5x-6 \\ & \underline{25xx} \\ 5x-6 & -60x+36 \\ & \underline{-60x+36} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 9pp+24pq+16qq\ (3p+4q \\ & 9pp \\ 3p+4q & +24pq+16qq \\ & \underline{+24pq+16qq} \\ & 0 \end{array}$$

323.

If a remainder is seen to be left by the division, thus it is an indication that the root is composed from more than 2 terms. Since then the two terms found together are to be considered as the first part, and from the remainder in the same manner as before the following term of the root can be found, as seen from the following examples :

$$\begin{array}{r|l} & aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc\ (a+b-c \\ & \underline{aa} \\ 2a+b & +2ab-2ac-2bc+bb+cc \\ & \underline{+2ab \qquad\qquad\quad +bb} \\ 2a+2b-c & -2ac-2bc+cc \\ & \underline{-2ac-2bc+cc} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & a^4+2a^3+3aa+2a+1\ (aa+a+1 \\
 & a^4 \\ \hline
2aa+a & +2a^3+3aa \\
 & +2a^3+aa \\ \hline
2aa+2a+1 & +2aa+2a+1 \\
 & +2aa+2a+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4\ (aa-2ab-2bb \\
 & a^4 \\ \hline
2aa-2ab & -4a^3b+8ab^3 \\
 & -4a^3b+4aabb \\ \hline
2aa-4ab-2bb & -4aabb+8ab^3+4b^4 \\
 & -4aabb+8ab^3+4b^4 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6\ (a^3-3aab+3abb-b^3 \\
 & a^6 \\ \hline
2a^3-3aab & -6a^5b+15a^4bb \\
 & -6a^5b+9a^4bb \\ \hline
2a^3-6aab+3abb & +6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4 \\
 & +6a^4bb-18a^3b^3+9aab^4 \\ \hline
2a^3-6aab+6abb-b^3 & -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6 \\
 & -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

324.

From this rule now that rule follows easily given for the extraction of square roots in arithmetic books :

$$\begin{array}{r|l} 5 & 29 \quad (23 \\ 4 & \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 64 \quad (42 \\ 16 & \\ \hline 82 & 164 \\ & 164 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 04 \quad (48 \\ 16 & \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 96 \quad (64 \\ 36 & \\ \hline 128 & 496 \\ & 496 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 04 \quad (98 \\ 81 & \\ \hline 188 & 1504 \\ & 1504 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 1 & 56 & 25 \quad (125 \\ 1 & & \\ \hline 22 & 56 & \\ & 44 & \\ \hline 245 & 1225 & \\ & 1225 & \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} 99 & 80 & 01 \quad (999 \\ 81 & & \\ \hline 189 & 1880 & \\ & 1701 & \\ \hline 1989 & 17901 & \\ & 17901 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

325.

But if by the last operation something was seen to remain, thus such is a sign that the tendered number is not a square and also the square root of which cannot be specified. In such cases which have been used above, it is necessary that the square root signs which have been used already are written for the formula, but the formula itself will be enclosed in brackets. Thus the square root of $aa+bb$ according to this wisdom is indicated by $\sqrt{(aa+bb)}$ *;* and $\sqrt{(1-xx)}$ indicates the square root of $1-xx$. This square root sign $\frac{1}{2}$ can be used as the fractional exponent. Thus the square root of $aa+bb$ will be indicated also by $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$.

CHAPTER 8

CALCULATING WITH IRRATIONAL NUMBERS.

326.

If two or more irrational formulas should be added together, such have occurred as taught above, in that all the terms with their signs are to be written together. Only to be noted as an abbreviation, that instead of $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ there will be written $2\sqrt{a}$, and that $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ remove each other or give nothing. Thus these formulas $3+\sqrt{2}$ and $1+\sqrt{2}$ added together gives $4+2\sqrt{2}$ or $4+\sqrt{8}$ *;* further $5+\sqrt{3}$ and $4-\sqrt{3}$ added together gives 9; again $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ added together makes $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Subtraction has just as little difficulty only the signs of the numbers below, which should be taken away, must be read the, as seen in the following example.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ \underline{1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6}} \\ 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

It is only to be noted in the case of multiplication, that $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{a}$ gives a. But if unequal numbers stand behind the $\sqrt{\ }$ sign, thus $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{b}$ gives $\sqrt{ab}$, from which the following example can be calculated :

$$\begin{array}{lcl} 1+\sqrt{2} & \quad & 4+2\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} & & \underline{2-\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} & & 8+4\sqrt{2} \\ \underline{\quad +\sqrt{2}+2 \qquad\qquad} & & \underline{\quad -4\sqrt{2}-4} \\ 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} & & 8-4=4 \end{array}$$

329.

Even this holds also with imaginary magnitudes; whereby it is only to be noted that $\sqrt{-a}$ multiplied by $\sqrt{-a}$ gives $-a$.

If one should look for the cube of $-1+\sqrt{-3}$ thus such arises if first the square is taken and the same still again be multiplied by the number $-1+\sqrt{-3}$ as follows :

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \underline{+1-\sqrt{-3}} \\ +1-\sqrt{-3} \\ \underline{\quad -\sqrt{-3}-3} \\ +1-2\sqrt{-3}-3-3=-2-2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-1+\sqrt{-3}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\quad -2\sqrt{-3}+6} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2+6=8 \end{array}$$

330.

With division it is simply necessary to put a fraction in place and then the same can be changed into another form, so that the denominator is rational. Then if the denominator is $a+\sqrt{b}$ and above and below are multiplied by $a-\sqrt{b}$, thus the new denominator shall be $aa-b$ and thus has no more square roots. For example, to divide $3+2\sqrt{2}$ by $1+\sqrt{2}$ thus one has $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Now multiply above and below by $1-\sqrt{2}$ so there is

for the numerator
$$\begin{array}{r} 3+2\sqrt{2} \\ \underline{1-\sqrt{2}} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \underline{-3\sqrt{2}-4} \\ 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

for the denominator
$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1-\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \underline{-\sqrt{2}-2} \\ 1-2=-1 \end{array}$$

Thus our new fraction is $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Further one can multiply above and below by -1, thus there comes about $+\sqrt{2}+1$ for the numerator and $+1$ for the denominator.

But $+\sqrt{2}+1$ is just as great as $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; then $+\sqrt{2}+1$ multiplied by the divisor $1+\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \underline{\quad +\sqrt{2}+2 \qquad\qquad\qquad} \\ \text{gives } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Further $8-5\sqrt{2}$ divided by $3-2\sqrt{2}$ gives $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Multiplying above and below by $3+2\sqrt{2}$ thus gives :

for the numerator
$$\begin{array}{r} 8-5\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \underline{+16\sqrt{2}-20} \\ 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

and for the denominator Nenner
$$\begin{array}{r} 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \underline{+6\sqrt{2}-4\cdot 2} \\ 9-8=+1 \end{array}$$

Consequently the quotient is $4+\sqrt{2}$. The example thus gives :

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

In such a manner can suchlike fractions always be changed into other forms, where the denominator is rational. Thus this fraction $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, if it is multiplied above and below by $5-2\sqrt{6}$, will be changed into this $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Further this fraction $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ will be changed into this $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$,

And again, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}.$

332.

If more terms appear in the denominator, thus even in this case the irrationality will be taken away from the denominator.

Therefore in this fraction $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ first multiply above and below by $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, thus there becomes $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$*;* further multiply above and below by $5+2\sqrt{6}$, thus there becomes $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}.$

CHAPTER 9

CUBES AND THE EXTRACTION OF CUBE ROOTS.

333.

In order to find the cube of the root $a+b$, the square from that $aa+2ab+bb$ must be multiplied once more by $a+b$, since then the cube will be

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \underline{\ a+b \qquad\qquad} \\ a^3+2aab+abb \\ \underline{\quad +aab\ +2abb+b^3} \\ a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

The cube itself is composed from the cubes of both parts of the root, as well as from $3aab+3abb$, which is the same as $(3ab)\cdot(a+b)$; and this is composed of three times the product from both parts *a* and *b* multiplied by their sum.

334.

Therefore if the root is composed from two parts, thus it lets the cube itself be found according to this rule : as for example, since the number $5=3+2$, thus the cube from that is $27+8+18\cdot 5$ is therefore = 125.

Further the root shall be $7+3=10$, thus the cube will be $343+27+63\cdot 10=1000$.
In order to find the cube of 36 , thus one puts the root $36=30+6$
and the cube will be :

$$27000+216+540\cdot 36=46656.$$

335.

But if conversely the cube is given, namely $a^3+3aab+3abb+b^3$,and it is desired to find the root from that, thus the following is to be noted.

In the first place if the cube is written in terms of the powers of a letter in order, thus one knows from that the first term a^3 to be equal to the first term of that root *a*, and if one takes away the same thus this remainder is left : $3aab+3abb+b^3$, from which the second term of the root must be found.

336.

Since we know already that the second term of the root is $+b$, thus here it arises from that, how the same can be found from the above remainder. But the same remainder can be expressed in term of the two factors $(3aa+3ab+bb)\cdot(b)$; therefore if one divides that remainder by $3aa+3ab+bb$, thus one has the desired second term of the root, namely $+b$.

337.

But the size of the second term is still known, thus also the divisor is unknown still : However, it is sufficient that we have the first part of this divisor, which is 3*aa* or three times the square of the first part of the root found already, and from that itself the other part of the root *b* still can be found, from which hereafter the whole divisor must be put in place, before the division can be completed. Therefore as then one must still add to 3*aa* 3*ab,* that is three times the product of the first part by the other, and finally *bb,* that is the square of the other part of the root.

338.

For example let this cube be given :

$$\begin{array}{r|r|l}
 & & a^3+12aa+48a+64 \ \ (a+4 \\
 & & \underline{a^3} \\
3aa & +12a+16 & +12aa+48a+64 \\
 & & \underline{+12aa+48a+64} \\
 & & \qquad 0
\end{array}$$

Further let this cube be given :

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1(aa-2a+1 \\
 & \underline{a^6} \\
3a^4-6a^3+4aa & -6a^5+\ 15a^4-20a^3 \\
 & \underline{-6a^5+\ 12a^4-8a^3} \\
3a^4-12a^3+12aa+3aa-6a+1 & 3a^4-12a^3+15a^2-6a+1 \\
 & \underline{3a^4-12a^3+15a^2-6a+1} \\
 & \qquad 0
\end{array}$$

339.

On this the general rule for finding the cube root of numbers is based. As the calculation is worked out for the number 2197

$$\begin{array}{r|l}
 & 2197\ (10+3=13 \\
 & \underline{1000} \\
300 & 1197 \\
90 & \\
\underline{9} & \\
399 & \underline{1197} \\
 & \quad 0
\end{array}$$

Further let the cube be given 34965783 the cube root of which shall be found.

$$\begin{array}{r|l}
 & 34965783\ (300+20+7=327 \\
 & \underline{27000000} \\
270000 & 7965783 \\
1800 & \\
\underline{400} & \\
\underline{288400} & \underline{5768000} \\
307200 & 2197783 \\
6720 & \\
\underline{49} & \\
313969 & \underline{2197783} \\
 & \quad 0
\end{array}$$

CHAPTER 10

THE MAGNITUDES OF HIGHER COMPOSITE POWERS

340.

The higher powers follow after the squares and cubes, which are accustomed to be shown by the exponent as notified above : but if the root is composite it must be enclosed in brackets. Hence $(a+b)^5$ indicates the fifth power of $a+b$, and $(a-b)^6$ indicates the sixth power of $a-b$. But how these powers may be expanded out shall be shown in this chapter.

341.

Therefore $a+b$ shall be the root, or the first power, thus the higher powers are found by multiplying following the form.

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^1 = & a+b \\
 & \underline{a\ +b\qquad} \\
 & aa+\ ab \\
 & \underline{\quad +ab+bb} \\
(a+b)^2 = & aa+2ab+bb \\
 & \underline{\ a+b\qquad\qquad} \\
 & a^3+2aab+abb \\
 & \underline{\quad +aab+2abb+b^3} \\
(a+b)^3 = & a^3+3aab+3abb+b^3 \\
 & a\ \ +b \\
\hline
 & a^4+\ 3a^3b+3aabb+ab^3 \\
 & \quad +\quad a^3b+3aabb+3ab^3+b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4 \\
 & a\ \ +b \\
\hline
 & a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4 \\
 & \quad +a^4b\ +4a^3bb+6aab^3+4ab^4\quad +b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = & a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5 \\
 & a\ +b \\
 & a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+5aab^4\quad +ab^5 \\
 & \quad +\ a^5b+5a^4bb\ \ +10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = & a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6
\end{array}
$$

342.

The powers of the root $a-b$ can be found also, which only differ from the previous in that the 2nd 4th 6th etc. terms the signs become *minus* as can be seen from the following.

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$\underline{a \;\; -b}$$
$$aa - \;\; ab$$
$$\underline{\;\; -ab+bb}$$
$$(a+b)^2 = aa-2ab+bb$$
$$\underline{a-b}$$
$$a^3-2aab+abb$$
$$\underline{\;\; -aab+2abb-b^3}$$
$$(a+b)^3 = \; a^3-3aab+3abb-b^3$$
$$\underline{a \;\; -b}$$
$$a^4- \;\; 3a^3b+3aabb-ab^3$$
$$\underline{- \;\; a^3b+3aabb-3ab^3+b^4}$$
$$(a+b)^4 = a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4$$
$$\underline{a \;\; -b}$$
$$a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4$$
$$\underline{-a^4b \;\; +4a^3bb-6aab^3+4ab^4 \;\; -b^5}$$
$$(a+b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5$$
$$a \;\; -b$$
$$a^6-5a^5b+10a^4bb-10a^3b^3+5aab^4 \;\; -ab^5$$
$$\underline{- \;\; a^5b+5a^4bb \;\; -10a^3b^3+10aab^4-5ab^5+b^6}$$
$$(a+b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6 \text{ etc.}$$

Here namely all the odd powers of b receive the sign − , but the even powers have sign n + , of which the reason is clear : since $-b$ is present there in the root thus the powers from that are going in the following form : $-b,\ +bb,\ -b^3,\ +b^4,\ -\ b^5,\ +b^6,$ etc., where all the even powers have the sign + but the odd powers have the sign −.

343.

But this important equation arises, how can all the powers of $a+b$ as well as from $a-b$ be found, without putting the actual calculation in place ? Whereby it is to be noted before everything else , that if all the powers of $a+b$ are capable of being specified, from that itself the powers of $a-b$ arise, as then one must change the signs of the even terms only, namely the signs of the 2^{nd}, 4^{th}, 6^{th} are to be changed. Whereby from this it arises , that a rule must be decided on according to which any one power of $a+b$, as high as can be, is able to be found, without which it is necessary for all the forgoing calculations to be made.

344.

If one leaves out the numbers thus found by which every term in the above powers are preceded, which are called the coefficients, one observes in these terms a very pretty order, in which initially just the power of *a* occurs which will be desired ; but in which the following terms the powers of *a* always are one less, the powers of *b* on the other hand always rise by one, so that the sum of the exponents of *a* and *b* in all the terms amounts to the same . Therefore if the tenth power of $a+b$ is required, so the terms without the coefficients thus proceed hence:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345.

It must yet be shown only, how to find the coefficients arising from that, or by what number a given term must be multiplied by. With regard to the first term *a*, thus its coefficient is to be 1 always and accordingly the second part *b* is always the exponent of the power. For all the following terms in between, it is not so easy to find a rule, as these coefficients meanwhile are continued further and further, as one can go as far as wished easily, as can be seen from the following table.

Power	Coefficient
I.	1, 1,
II.	1, 2, 1.
III.	1, 3, 3, 1.
IV.	1, 4, 6, 4, 1.
V.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 etc.

Thus the tenth power of $a+b$ will be :

$$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5$$
$$+210a^4b^6+120a^3b^1+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}.$$

346.

By which is to be noted the sum itself of these coefficients for each power must be equal to the same power of 2. Then if there is put $a=1,$and $b=1$, so will each single term apart from the coefficient $=1$, so that only the coefficients must be taken together. Therefore the tenth power shall be $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.
Just as it behaves for all the rest. Thus for the

Ist $1+1 = 2 = 2^1$
IInd $1+2+1 = 4 = 2^2$
IIlrd $1+3+3+1 = 8 = 2^3$
IVth $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$
Vth $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$
Vlth $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$
VIIth $1+7+21+35+35+21+7+1+128 = 2^7$ etc.

347.

With these coefficients it is still to be observes, that the same increase from the beginning as far as the middle, but afterwards the order is reduced again. With even powers the greatest one stands in the middle, but with the odd powers two shall be in the middle, which shall be the greatest and equal to each other.

But the order itself of the coefficients still deserves particular consideration, so that the same can be found for any particular power, without first having to search the preceding, from which the given rule shall be given here; but the proof of that will be spared until the following chapter.

348.

Now in order to find the coefficient for a given power as for example the seventh, thus the following fractions of the order are written after each other :

$$\tfrac{7}{1},\ \tfrac{6}{2},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{4}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{6},\ \tfrac{1}{7},$$

namely for which the numerator of the exponent of the sought power starts and always to be decreased by one, but to be written out according to the order of the number 1, 2, 3, 4, etc. Now since the first coefficient always is one, so the first fraction gives the second coefficient ; the two first fractions multiplied by each other gives the third, the three first multiplied by each other gives the fourth, and so on.

Therefore the first coefficient $=1,$ the 2nd $=\tfrac{7}{1}=7,$ the 3rd $=\tfrac{7}{1}\cdot\tfrac{6}{2}=21,$

the 4th $=\tfrac{7}{1}\cdot\tfrac{6}{2}\cdot\tfrac{5}{3}=35,$ the 5th $=\tfrac{7}{1}\cdot\tfrac{6}{2}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{4}{4}=35,$ the 6th $=\tfrac{7}{1}\cdot\tfrac{6}{2}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{4}{4}\cdot\tfrac{3}{5}=21,$

the 7th $=21\cdot\tfrac{2}{6}=7,$ the 8th $=7\cdot\tfrac{1}{7}=1.$

349.

Thus for the second power these fractions are had $\frac{2}{1}$; $\frac{1}{2}$; hence the first coefficient $=1,$ the 2nd $\frac{2}{1}=2,$ the 3rd $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

For the third power these fractions are had $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$; hence the first coefficient $=1,$ the 2nd $\frac{3}{1}=3,$ the 3rd $3\cdot\frac{2}{2}=3,$ the 4th $\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}=1.$

For the fourth power these fractions are had $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; hence the first coefficient $=1,$ the 2nd $\frac{4}{1}=4,$ the 3rd $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}=6,$ the 4th $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=4,$ the 5th $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=1$.

350.

This rule conveys this benefit to us, that it is not necessary to know the preceding coefficients, but for any one power the coefficient arising there can be found at once. Therefore for the tenth power these fractions can be written

$$\frac{10}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{10}.$$

Therefore the first coefficient is known to be $=1$, the second coefficient $=\frac{10}{10}=1$,

$$\text{the 3th } 10.\tfrac{9}{2}=45,\quad \text{the 4th}=45\cdot\tfrac{8}{3}=120,$$
$$\text{the 5th}=120\cdot\tfrac{7}{4}=210,\ \text{the 6th}=210\cdot\tfrac{6}{5}=252,$$
$$\text{the 7th}=252\cdot\tfrac{5}{6}=210,\ \text{the 8th}=210\cdot\tfrac{4}{7}=120,$$
$$\text{the 9th}=120\cdot\tfrac{3}{8}=45,\quad \text{the 10th}=45\cdot\tfrac{2}{9}=10,$$
$$\text{the 11th}=10\cdot\tfrac{1}{10}=1.$$

351.

It is possible also to write down these difficult fractions without calculating the value of the same, and any one power of $a+b$ will be easy to write down in such a form , however high the same may be, thus :

$$(a+b)^{100}=a^{100}+\tfrac{100}{1}a^{99}b+\tfrac{100\cdot 99}{1\cdot 2}a^{98}bb+\tfrac{100.99.98}{1\cdot 2\cdot 3}a^{97}b^{3}+\tfrac{100.99.98\cdot 97}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{96}b^{4}\text{etc.}$$

from which the order of the following terms can be seen clearly.

CHAPTER 11

ON THE PERMUTATION OF THE LETTERS ON WHICH THE PROOF OF THE PRECEDING RULE IS BASED

352.

Going back to the origin of the above coefficients, thus it will be found, that any one term arises so many times, as the letters themselves from which the same is composed, is allowed to be interchanged: as in the second power the term *ab* can arise twice, because it can be written as *ab* and *ba;* on the other hand *aa* itself can arise in only one way, because the order of the letters undergoes no change. With the third power the term *abb* can be written in three different ways as *aab, aba, baa,* and therefore the coefficient also is 3. Just as with the fourth power the term a^3b, or *aaab,* can be permuted in four ways, as *aaab, aaba, abaa, baaa,* therefore its coefficient also is 4, and that term *aabb* has 6 for the coefficient, because 6 permutations are found, *aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab.* And so it behaves also for all the rest.

353.

In fact if one considers, that for example the fourth power of some root, if the same is composed also from more than two terms, as will be found for $(a+b+c+d)^4$, if these four factors are multiplied by each other :

I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$,

so must each single letter of the first must be multiplied by each one of the second, followed by each one of the third, and finally by each letter of the fourth, therefore each single term is composed from 4 letters and thus arises just as many times, as the same letters are allowed to be interchanged among themselves, thus from which its coefficient then will be determined.

354.

Therefore here it arises to know from that, how many ways a given number of letters can be interchanged amongst themselves, whereby in particular to see from that, whether the same letters among themselves shall be alike or different. Then if all the letters are alike, thus no change is found, whereby for single powers such as a^2, a^3, a^4 etc., all have the coefficients 1.

355.

Initially we will assume all the letters unequal, and to begin with two, namely *ab* , where clearly the two transposed places occur, thus *ab, ba.*

If there were three letters *abc*, hence noting that every single letter can have the first place, and as then the two remaining can be put in place in two ways. Thus if *a* stands first, then there are the two arrangements *abc, acb;* if *b* stands first then again there are the two arrangements, *bac, bca;* and just as many if *c* stands first, *cab, cba.* Therefore in all the number of arrangements shall be $3 \cdot 2 = 6$.

If there were four letters *abcd,* thus each one can take the first place, and in each case the three remaining give six arrangements. According to this, in all the number of arrangements will be $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

If there were five letters *abcde,* thus each one can have the first place and for each allowed the four remaining can be arranged in 24 ways. According to this the number of arrangements [i.e. permutations or transpositions] shall be $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

356.

Thus however great the number the number of letters may be, as long as the same shall be unequal to each other, thus the number of arrangements can be found quite easily, as can be seen from the following table.

Number of Letters:	Number of Permutations:
I.	$1 = 1$
II.	$2 \cdot 1 = 2$
III.	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
IV.	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
V.	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
VI.	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
VII.	$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
VIII.	$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$
IX.	$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$
X.	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

357.

But indeed it is to be observed, that these numbers only are in that state, if all the letters shall be unequal among themselves, as if two or more shall be equal to each other, thus the number of permutations will become far less ; and indeed if all become equal to each other, then there is only a single one left. Thus we will see how the above must be diminished according to the number of equal letters.

358.

If two letters shall become equal to each other then the two permutations shall be counted as one. Therefore the above number is halved, or must be divided by 2. If three letters are equal to each other, then the permutation 6 is calculated as one only : therefore the above numbers must be divided by $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Just as if four letters were equal to each other, thus the above must be divided by 24, that is divided by $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, etc.

Now from this it can be determined, how many times these letters *aaabbc* can be permuted. The number itself is six, which would become $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutations, if all these were different. But because here *a* occurs three times, thus the number must be divided by $3 \cdot 2 \cdot 1$, and because *b* occurs twice it is divided further by $2 \cdot 1$, therefore the number of permutations will become $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

359.

Hence now we can determine the coefficients of each term for every power, which we will show for example for the seventh power $(a+b)^7$. The first term is a^7 which arises only once, and since in all the rest seven letters occur, thus the number of all the permutations $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ would arise if they were all unequal. But since in the second term a^6b, six equal letters are present, thus that number must be divided by $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$, from which the coefficient will be :

$$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{7}{1}.$$

In the third term a^5bb, a occurs five times and b twice, therefore the above number must be divided in the first place by $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ and besides by $2\cdot1$, therefore the coefficient will be $=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}$.

In the fourth term a^4b^3, a is present four times and b three times ; therefore the above number must be divided initially by $4\cdot3\cdot2\cdot1$ and again by $3\cdot2\cdot1$ or $1\cdot2\cdot3$, so that the coefficient will be

$$=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}.$$

Just as for the fifth term a^3b^4, thus in addition the coefficient $=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, whereby the rule given above is proven.

360.

But this consideration leads us still further and teaches us also how all the powers shall be found of such roots composed of more than two parts. We will explain these with the third power of $a+b+c$ only, wherein all the possible combinations of the three letters shall be found, and each number will have all of the permutations for the coefficients thus the third power or $(a+b+c)^3$ shall be :

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Let us put in place $a=1,\ b=1,\ c=1$ thus the cube of $1+1+1$, that is of 3, shall be:

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Putting $a=1,\ b=1$ and $c=-1$, thus the cube of $1+1-1$ that is of 1 shall be:

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

[Lagrange mentions here in passing the difference between permutations and combinations, which are related to the theory of probability, initially introduced by James Bernoulli in his posthumous work on conjecturing; perhaps Euler did not want to confuse the issue at this point of his discussion.]

CHAPTER 12

ON THE GENERATION OF IRRATIONAL POWERS IN INFINITE SERIES.

361.

Since we have seen, how any single power can be found from the root $a + b$, only depending always on how great the exponent shall be, thus we are in the position of expressing the general method of powers of $a+b$, even if the exponent is indeterminate, and is expressed by a letter n.

Thus we find the given rule from above :

$$(a+b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}a^{n-1}b + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}\cdot\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

362.

If equally the power of the root $a-b$ is to be taken, thus only the signs of the 2nd, 4th, 6th, etc. terms are to be changed, from which there is found :

$$(a-b)^n = a^n - \tfrac{n}{1}a^{n-1}b + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}\cdot\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

363.

These formulas enable us to extract all kind of roots. Since there we have shown how the roots of fractional exponents can be used, and that

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \text{ and } \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \text{ etc.}$$

thus there will be also :

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}} \text{ and } \sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}} \text{ etc.}$$

therefore in order to find square root of $a+b$ we have only to put the fraction $\frac{1}{2}$ for the exponent n in the above general formula, from which we have at first for the coefficients

$$\tfrac{n}{1} = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{n-1}{2} = -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{n-2}{3} = -\tfrac{3}{6},\ \tfrac{n-3}{4} = -\tfrac{5}{8},\ \tfrac{n-4}{5} = -\tfrac{7}{10},\ \tfrac{n-5}{6} = -\tfrac{9}{12}.$$

Then there is

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ and } a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}},\ a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}} \text{ etc.}$$

Or these powers of a can be expressed thus as :

$$a^n = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2},\ a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3},\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

364.

From what has been established previously, the square root of $a+b$ will be able to be expressed in the following form :

$$\sqrt{(a+b)}=\sqrt{a}+\tfrac{1}{2}b\tfrac{\sqrt{a}}{a}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}bb\tfrac{\sqrt{a}}{a^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}b^3\tfrac{\sqrt{a}}{a^3}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}b^4\tfrac{\sqrt{a}}{a^4}\text{ etc.}$$

365.

Now if a is a square number, thus $\sqrt{a}$ can be specified, and thus the square root of $a+b$, is expressed in an infinite series without the square root sign.
Therefore if $a=cc$ thus $\sqrt{a}=c$, and one will have

$$\sqrt{(cc+b)}=c+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{b}{c}-\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{bb}{c^3}+\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{b^3}{c^5}-\tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{b^4}{c^7}\text{ etc.}$$

By this means the square root of any number can be extracted, because any number itself can be divided into two parts, one of which is a square to be indicated by *cc*. For example, the square root of 6 will be had, thus by putting $6=4+2$, and there becomes $cc=4, c=2,$ and $b=2$, therefore there arises

$$\sqrt{6}=2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}-\tfrac{5}{1024}\text{ etc.}$$

Taking the first two terms of this, thus there is obtained $2\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}$, of which the square $\tfrac{25}{4}$ is greater than 6 only by $\tfrac{1}{4}$. Taking three terms thus there is had $2\tfrac{7}{16}=\tfrac{39}{16}$, of which the square $\tfrac{1521}{256}$ is only too small by $\tfrac{15}{256}$.

366.

Exactly as by the same example, because $\tfrac{5}{2}$ comes very near to the true value, thus we can put $6=\tfrac{25}{4}-\tfrac{1}{4}$.

There will be $cc=\tfrac{25}{4},\ c=\tfrac{5}{2},\ b=-\tfrac{1}{4}$. From which now we will calculate the first two terms, since that gives

$$\sqrt{6}=\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{20}=\tfrac{49}{20},$$

from which the square $\tfrac{2401}{400}$ is greater than 6 only by $\tfrac{1}{400}$.

Now putting $6=\tfrac{2401}{400}-\tfrac{1}{400}$ thus $c=\tfrac{49}{20}$ and $b=-\tfrac{1}{400}$. From which again only the first two terms given have been taken

$$\sqrt{6}=\tfrac{49}{20}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\tfrac{49}{20}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\tfrac{49}{20}-\tfrac{1}{1960}=\tfrac{4801}{1960}$$

from which the square $=\tfrac{23049601}{3841600}$. But now $6=\tfrac{2304960}{3841600}$, thus the error is only $\tfrac{1}{3841600}$.

367.

Just as the cube root of $a+b$ can be expressed by an infinite series in the same way. Since then $\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$ thus $n=\frac{1}{3}$ in our general formula , and therefore the coefficients

$$\tfrac{n}{1}=\tfrac{1}{3},\ \tfrac{n-1}{2}=-\tfrac{1}{3},\ \tfrac{n-2}{3}=-\tfrac{5}{9},\ \tfrac{n-3}{4}=-\tfrac{2}{3},\ \tfrac{n-4}{5}=-\tfrac{11}{15},\text{ etc.}$$

But for the coefficients of a there is

$$a^n=\sqrt[3]{a},\ a^{n-1}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a},\ a^{n-2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{aa},\ a^{n-3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}\text{ etc.}$$

therefore we obtain :

$$\sqrt[3]{(a+b)}=\sqrt[3]{a}+\tfrac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a}-\tfrac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}+\tfrac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}-\tfrac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}\text{ etc.}$$

368.

Thus if a is a cube, namely $a=c^3$ thus there will be $\sqrt[3]{a}=c$, and hence the root signs disappear. Therefore there is found :

$$\sqrt[3]{(c^3+b)}=c+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{cc}-\tfrac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^5}+\tfrac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8}-\tfrac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}}\text{ etc.}$$

369.

With the aid of this formula the cube root of any number now can be found by the approximation, because each number can itself be divided into two parts, as c^3+b, of which the first is a cube.

Thus if the cube root of 2 is required, so putting $2=1+1$, there will be $c=1$ and $b=1$, consequently $\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\frac{10}{243}$ etc. the first two terms of which give $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ of which the cube $\frac{64}{27}$ is too large by $\frac{10}{27}$. Accordingly putting $2=\frac{64}{27}-\frac{10}{27}$, thus $c=\frac{4}{3}$ and $b=-\frac{10}{27}$ and therefore

$$\sqrt[3]{2}=\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}.$$

These two terms give $\frac{4}{3}-\frac{5}{72}=\frac{91}{72}$, of which the cube is $\frac{753571}{373248}$. But now there is $2=\frac{746496}{373248}$ thus the error is $\frac{7075}{373248}$. And in such a manner it is possible as desired, always to become closer to the root, by taking more terms in such a special way.

[Lagrange indicates in his translation a method found by Halley and discussed in the Philosophical Transactions of 1694, for approximating a root of any order :
$\sqrt[m]{a^m\pm b}=\frac{m-2}{m-1}a+\sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2}\pm\frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}}$.]

CHAPTER 13

ON THE EXPANSION OF NEGATIVE POWERS.

370.

It has been shown above, that $\frac{1}{a}$ can be expressed by a^{-1}, therefore also $\frac{1}{a+b}$ will be expressed by $\left(a+b\right)^{-1}$, also that the fraction $\frac{1}{a+b}$ can be considered to be expanded as a power of $a+b$, of which the exponent is -1 : whereby the above series itself found for $\left(a+b\right)^{n}$ also can be expanded out for this case.

371.

Since now $\frac{1}{a+b}$ is the same as $\left(a+b\right)^{-1}$, thus $n=-1$ can be put into the above formula, thus in the first place the coefficients are had :

$$\frac{n}{1}=-1,\ \frac{n-1}{2}=-1,\ \frac{n-2}{3}=-1,\ \frac{n-3}{4}=-1,\ \frac{n-4}{5}=-1 \text{ etc.}$$

and again for the powers of *a:*

$$a^{n}=a^{-1}=\frac{1}{a},\ a^{n-1}=\frac{1}{a^{2}},\ a^{n-2}=\frac{1}{a^{3}},\ a^{n-3}=\frac{1}{a^{4}} \text{ etc.}$$

Therefore we obtain

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^{2}}+\frac{b^{2}}{a^{3}}-\frac{b^{3}}{a^{4}}+\frac{b^{4}}{a^{5}}-\frac{b^{5}}{a^{6}} \text{ etc.}$$

which is just that series, which has been found already by division [§ 300].

372.

Since further $\frac{1}{(a+b)^{2}}$ is the same as $\left(a+b\right)^{-2}$ thus this formula can be expanded in an infinite series . Namely putting $n=-2$ so that initially the coefficients are :

$$\frac{n}{1}=-\frac{2}{1},\ \frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2},\ \frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3},\ \frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4} \text{ etc.}$$

And for the powers of *a* there are :

$$a^{n}=\frac{1}{a^{2}},\ a^{n-1}=\frac{1}{a^{3}},\ a^{n-2}=\frac{1}{a^{4}},\ a^{n-3}=\frac{1}{a^{5}} \text{ etc.}$$

whence we obtain

$$(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{a^4}-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a^5}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^6}\text{ etc.}$$

But now there is

$$\tfrac{2}{1}=2,\ \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}=3,\ \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}=4,\ \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4}=5\text{ etc.}$$

Thus we have :

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}+7\frac{b^6}{a^8}\text{ etc.}$$

373.

Further putting $n=-3$ thus a series for $(a+b)^{-3}$ arises, that is for $\frac{1}{(a+b)^3}$. Also for the coefficients there will be:

$$\tfrac{n}{1}=-\tfrac{3}{1},\ \tfrac{n-1}{2}=-\tfrac{4}{2},\ \tfrac{n-2}{3}=-\tfrac{5}{3},\ \tfrac{n-3}{4}=-\tfrac{6}{4}\text{ etc.}$$

but for the powers of a :

$$a^n=\tfrac{1}{a^3},\ a^{n-1}=\tfrac{1}{a^4},\ a^{n-2}=\tfrac{1}{a^5}\text{ etc.}$$

From which we obtain :

$$\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a^3}-\frac{3}{1}\cdot\frac{b}{a^4}+\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a^5}-\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{b^3}{a^6}+\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{b^4}{a^7}\text{ etc.}$$
$$=\frac{1}{a^3}-3\frac{b}{a^4}+6\frac{b^2}{a^5}-10\frac{b^3}{a^6}+15\frac{b^4}{a^7}-21\frac{b^5}{a^8}+28\frac{b^6}{a^9}-36\frac{b^7}{a^{10}}+45\frac{b^8}{a^{11}}\text{ etc.}$$

Finally let us put $n=-4$, thus we have for the coefficients:

$$\tfrac{n}{1}=-\tfrac{4}{1},\ \tfrac{n-1}{2}=-\tfrac{5}{2},\ \tfrac{n-2}{3}=-\tfrac{6}{3},\ \tfrac{n-3}{4}=-\tfrac{7}{4}\text{ etc.}$$

moreover, for the powers of a :

$$a^n=\tfrac{1}{a^4},\ a^{n-1}=\tfrac{1}{a^5},\ a^{n-2}=\tfrac{1}{a^6},\ a^{n-3}=\tfrac{1}{a^7},\ a^{n-4}=\tfrac{1}{a^8}\text{etc.}$$

From which there will be found :

$$\frac{1}{(a+b)^4}=\frac{1}{a^4}-\frac{4}{1}\cdot\frac{b}{a^5}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6}-\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{b^3}{a^7}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{b^4}{a^8}\text{ etc.}$$
$$=\frac{1}{a^4}-4\frac{b}{a^5}+10\frac{b^2}{a^6}-20\frac{b^3}{a^7}+35\frac{b^4}{a^8}-56\frac{b^5}{a^9}\text{ etc.}$$

374.

From which now we can surely conclude, that for any one such-like negative power of a general kind there will be had:

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}}\text{ etc.}$$

Now from such a formula all such-like fractions can be changed into infinite series, in which also surely with such fractional values assumed for *m*, irrational formulas can be expressed .

375.

To provide further upstanding we will advance the following : Since we have found, that

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}\text{ etc.}$$

thus we will multiply this series by $a+b$, because from that the number 1 must arise. The multiplication moreover will become:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}\text{ etc.}\\
a+b\\
\hline
1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{aa}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5}\text{ etc.}\\
\quad+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{aa}+\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}\text{ etc.}\\
\hline
\end{array}$$

The product is 1 as necessarily nothing can follow.

376.

Since further we have found :

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}\text{ etc.}$$

if this series be multiplied by $(a+b)^2$, just as 1 must arise.

But there is $(a+b)^2=aa+2ab+bb$ and the multiplication thus arises :

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}\text{ etc.}\\
\underline{aa+2ab+bb\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
1-\frac{2b}{a}+\frac{3bb}{a^2}-\frac{4b^3}{a^3}+\frac{5b^4}{a^4}-\frac{6b^5}{a^5}\text{ etc.}\\
\quad+\frac{2b}{a}-\frac{4bb}{a^2}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{19b^5}{a^5}\text{ etc.}\\
\qquad\quad+\frac{bb}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5}\text{ etc.}
\end{array}$$

The product 1 is necessary from the nature of the problem.

377.

But if one multiples this series found for $\frac{1}{(a+b)^2}$ only by $a+b$, thus $\frac{1}{(a+b)}$ must arise, or that series found above for this fraction $\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ etc., which also will be put in place by the following multiplication.

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}\text{ etc.}\\
\underline{a+b\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
\frac{1}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{3b^2}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5}\text{ etc.}\\
\quad+\frac{b}{a^2}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5}\text{ etc.}\\
\hline
\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}\text{ etc.}
\end{array}$$

ENDE DES ZWEYTEN ABSCHNITTS

CAPITEL 7

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZEL IN ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

317.

Um hiervon eine sichere Regul zu geben, so müßen wir das Quadrat von der Wurzel $a+b$, welches ist $aa+2ab+bb$ genau in Erwegung ziehen, und suchen wie man hinwiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich da das Quadrat $aa+2ab+bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müße; und wann das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als *a,* immer abnehmen, so ist klar daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats *aa* ist, so ist offenbahr, daß das erste Glied der Wurzel seyn müße *a.*

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich *a* gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches ist $2ab+bb$, um zu sehen wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher ist *b,* finden könne. Hiebey bemercken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab+bb$ also durch ein Product vorgestellet werden könne $(2a+b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factores hat $2a+b$ und *b* so wird der letztere *b,* das ist der zweyte Theil der Wurzel gefunden, wann man den Rest $2ab+bb$ durch $2a+b$ dividirt.

320.

Man also den zweyten Teil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a+b$ dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu mercken, daß 2*a* das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andre Glied *b* aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelaßen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied 2*a* gesehen wird. So bald man aber den Quotient gefunden, welcher hier *b* ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also wodurch aus obigem Quadrat $aa+2ab+bb$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{r|l} & aa+2ab+bb\ (a+b \\ & \underline{aa} \\ 2a+b & \quad +2ab+bb \\ & \quad \underline{+2ab+bb} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadrat-Wurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wann dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen, als:

$$\begin{array}{r|l} & aa+6ab+9bb\ (a+3b \\ & \underline{aa} \\ 2a+3b & +6ab+9bb \\ & \underline{+6ab+9bb} \\ & \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 4aa-4ab+bb\ (2a-b \\ & \underline{4aa} \\ 4a-b & -4ab+bb \\ & \underline{-4ab+bb} \\ & \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 25xx-60x+36\ (5x-6 \\ & \underline{25xx} \\ 5x-6 & -60x+36 \\ & \underline{-60x+36} \\ & \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 9pp+24pq+16qq\ (3p+4q \\ & 9pp \\ 3p+4q & +24pq+16qq \\ & \underline{+24pq+16qq} \\ & \quad 0 \end{array}$$

323.

Wann bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{r|l} & aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc\ (a+b-c \\ & \underline{aa} \\ 2a+b & +2ab-2ac-2bc+bb+cc \\ & \underline{+2ab \qquad\qquad\qquad +bb} \\ 2a+2b-c & \quad -2ac-2bc+cc \\ & \quad \underline{-2ac-2bc+cc} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^4+2a^3+3aa+2a+1\ (aa+a+1 \\
 & a^4 \\ \hline
2aa+a & +2a^3+3aa \\
 & +2a^3+aa \\ \hline
2aa+2a+1 & +2aa+2a+1 \\
 & +2aa+2a+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4\,(aa-2ab-2bb \\
 & a^4 \\ \hline
2aa-2ab & -4a^3b+8ab^3 \\
 & -4a^3b+4aabb \\ \hline
2aa-4ab-2bb & -4aabb+8ab^3+4b^4 \\
 & -4aabb+8ab^3+4b^4 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6\ \ (a^3-3aab+3abb-b^3 \\
 & a^6 \\ \hline
2a^3-3aab & -6a^5b+15a^4bb \\
 & -6a^5b+9a^4bb \\ \hline
2a^3-6aab+3abb & +6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4 \\
 & +6a^4bb-18a^3b^3+9aab^4 \\ \hline
2a^3-6aab+6abb-b^3 & -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6 \\
 & -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

324.

Aus dieser Regul folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechen-Büchern für die Ausziehung der Quadrat-Wurzel gegeben wird; als:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 29 \quad (23 \\ 4 & \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 64 \quad (42 \\ 16 & \\ \hline 82 & 164 \\ & 164 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 04 \quad (48 \\ 16 & \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 96 \quad (64 \\ 36 & \\ \hline 128 & 496 \\ & 496 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 04 \quad (98 \\ 81 & \\ \hline 188 & 1504 \\ & 1504 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 56 & 25 \quad (125 \\ 1 & & \\ \hline 22 & 56 & \\ & 44 & \\ \hline 245 & 1225 & \\ & 1225 & \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} 99 & 80 & 01 \quad (999 \\ 81 & & \\ \hline 189 & 1880 & \\ & 1701 & \\ \hline 1989 & 17901 & \\ & 17901 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

325.

Wann aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzel-Zeichens welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschloßen wird. Also wird die Quadrat-Wurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{aa+bb}$; und $\sqrt{(1-xx)}$ deutet an die Quadrat-Wurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzel-Zeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch

$(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadrat-Wurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

CAPITEL 8
VON DER RECHNUNG MIT IRRATIONAL-ZAHLEN

326.

Wann zwey oder mehr Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist bey dem Abkürtzen zu bemercken, daß anstatt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formeln $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ zusammen addirt giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$; ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müßen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ \underline{1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6}} \\ 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu mercken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt a giebt. Wann aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{\ }$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{ll} 1+\sqrt{2} & 4+2\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} & \underline{2-\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} & 8+4\sqrt{2} \\ \underline{\quad +\sqrt{2}+2 \qquad\qquad} & \underline{\quad -4\sqrt{2}-4} \\ 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} & 8-4=4 \end{array}$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu mercken daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wann man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte so geschähe solches wann man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmahls mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multipliciret wie folgt

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3} \\
-1+\sqrt{-3} \\
\underline{+1-\sqrt{-3}} \\
+1-\sqrt{-3} \\
\underline{\quad -\sqrt{-3}-3} \\
+1-2\sqrt{-3}-3-3=-2-2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-1 + \sqrt{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +2+2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\quad -2\sqrt{-3}+6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2+6=8
\end{array}$$

330.

Bey der Division hat man nur nöthig schlechtweg einen Bruch zu setzen und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Dann wann der Nenner ist $a+\sqrt{b}$ und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner seyn $aa-b$ und hat also kein Wurzel-Zeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$ so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$ so 2 bekommt man

für den Zehler $3+2\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l}
\underline{1-\sqrt{2}} \\
3+2\sqrt{2} \\
\underline{\quad -3\sqrt{2}-4} \\
3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1
\end{array}$$

für den Nenner $1+\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l}
\underline{1-\sqrt{2}} \\
1+\sqrt{2} \\
\underline{\quad -\sqrt{2}-2} \\
1-2=-1
\end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1 so bekommt man vor den Zehler $+\sqrt{2}+1$ und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; dann $+\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$ so bekommt man

für den Zehler $8-5\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner $3-2\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4\cdot 2 \\ \hline \quad 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

Auf solche weise können dergleichen Brüche immer in andre verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wann man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$,

ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

Wann in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; man multipliciret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CAPITEL 9

VON DEN CUBIS UND VON DER AUSZIEHUNG DER CUBIC-WURZEL

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$, nochmahlsmit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \underline{a+b\qquad\qquad\quad} \\ a^3+2aab+abb \\ \underline{\quad +aab\ +2abb+b^3} \\ a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab+3abb$, welches so viel ist als $(3ab)\cdot(a+b)$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summa derselben multiplicirt.

334.

Wann also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regul leicht finden: als z. E. da die Zahl $5=3+2$, so ist der Cubus davon $27+8+18\cdot 5$ ist also = 125.

Es sey ferner die Wurzel $7+3=10$, so wird der Cubus seyn

$$343+27+63\cdot 10=1000.$$

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36=30+6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000+216+540\cdot 36=46656.$$

335.

Wann aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3+3aab+3abb+b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemercken.

Erstlich wann der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Glied a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, deßen Cubus jenem gleich ist, und wann man denselben wegnimmt so behält man diesen Rest: $3aab+3abb+b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wißen, daß das zweyte Glied $+b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie daßelbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa+3ab+bb)\cdot(b)$; wann man also den Rest durch $3aa+3ab+bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel nemlich $+b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genung, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$ oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß dahero alsdann zu $3aa$ noch hinzufügen $3ab$, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|r|l}
 & & a^3+12aa+48a+64 \quad (a+4 \\
 & & \underline{a^3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
3aa & +12a+16 & +12aa+48a+64 \\
 & & \underline{+12aa+48a+64} \\
 & & \qquad\quad 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1(aa-2a+1 \\
 & \underline{a^6\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
3a^4-6a^3+4aa & -6a^5+15a^4-20a^3 \\
 & \underline{-6a^5+12a^4-8a^3} \\
3a^4-12a^3+12aa+3aa-6a+1 & 3a^4-12a^3+15a^2-6a+1 \\
 & \underline{3a^4-12a^3+15a^2-6a+1} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regul die Cubic-Wurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung allso angestellet

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2197\ (10+3=13 \\
 & \underline{1000} \\
300 & 1197 \\
90 & \\
\underline{9} & \\
399 & \underline{1197} \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783 woraus die Cubic-Wurzel gefunden werden soll.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 34965783\ (300+20+7=327 \\
 & \underline{27000000} \\
270000 & 7965783 \\
1800 & \\
\underline{400} & \\
\underline{288400} & \underline{5768000} \\
307200 & 2197783 \\
6720 & \\
\underline{49} & \\
313969 & \underline{2197783} \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

CAPITEL 10

VON DEN HÖRERN POTESTÄTEN ZUSAMMENGESETZTER GRÖSSEN

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß man die Wurzel wann sie zusammengesetzt ist in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fümfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgender Gestalt gefunden.

$$\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a+b \\
 & \underline{a\ +b} \\
 & aa+\ ab \\
 & \underline{\quad +ab+bb} \\
(a+b)^2 = & aa+2ab+bb \\
 & \underline{a+b} \\
 & a^3+2aab+abb \\
 & \underline{\quad +aab+2abb+b^3} \\
(a+b)^3 = & a^3+3aab+3abb+b^3 \\
 & \underline{a\ \ +b} \\
 & a^4+\ 3a^3b+3aabb+ab^3 \\
 & \underline{\quad +\ \ a^3b+3aabb+3ab^3+b^4} \\
(a+b)^4 = & a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4 \\
 & \underline{a\ \ +b} \\
 & a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4 \\
 & \underline{\quad +a^4b\ +4a^3bb+6aab^3+4ab^4\ \ +b^5} \\
(a+b)^5 = & a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5 \\
 & a\ +b \\
 & a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+5aab^4\ \ +ab^5 \\
 & \underline{\quad +\ a^5b+5a^4bb\ \ +10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6} \\
(a+b)^6 = & a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6
\end{array}$$

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel $a-b$ gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te 4te 6te etc.
Glied das Zeichen *minus* bekommt wie aus folgendem zu ersehen.

$$
\begin{array}{l}
(a-b)^1 = a-b \\
\qquad\quad \underline{a\ -b\qquad} \\
\qquad\quad aa-\ ab \\
\qquad\quad \underline{\quad -ab+bb} \\
(a+b)^2 = aa-2ab+bb \\
\qquad\quad \underline{a-b\qquad\qquad} \\
\qquad\quad a^3-2aab+abb \\
\qquad\quad \underline{\quad -aab+2abb-b^3} \\
(a+b)^3 = a^3-3aab+3abb-b^3 \\
\underline{\qquad\qquad a\ \ -b\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad a^4-\ 3a^3b+3aabb-ab^3 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -\ \ a^3b+3aabb-3ab^3+b^4} \\
(a+b)^4 = a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4 \\
\underline{\qquad\qquad a\ \ -b\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -a^4b\ \ +4a^3bb-6aab^3+4ab^4\quad -b^5} \\
(a+b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5 \\
\qquad\quad a\ -b \\
\qquad\quad a^6-5a^5b+10a^4bb-10a^3b^3+5aab^4\quad -ab^5 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -\ a^5b+5a^4bb\ \ -10a^3b^3+10aab^4-5ab^5+b^6} \\
(a+b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potestäten von *b* das Zeichen − die geraden aber behalten das Zeichen + wovon der Grund offenbahr ist: dann da in der Wurzel $-b$ steht so gehen die Potestäten davon folgender Gestallt fort:
$-b,\ +bb,\ -b^3,\ +b^4,\ -\ b^5,\ +b^6,$ etc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen + die ungeraden aber alle das Zeichen − haben.

343.

Hier kommt aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung würcklich fortzusetzen, alle Potestäten so wohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu mercken, daß wann man die Potestäten von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von $a-b$ entstehen, dann man darf nur die Zeichen der geraden Glieder nemlich des 2ten 4ten 6ten Sten etc. verändern. Es kommt demnach hier darauf an, eine Regul festzusetzen nach welcher eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wann man bey den oben gefundenen Potestäten die Zahlen so einem jedem Gliede vorgesetzt sind wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genennt werden, so bemerckt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung, indem erstlich eben die Potestät von a vorkommt welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summa der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wann man also die zehnte Potestät von $a+b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll. Was zwar das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Glied ist der Coefficient allemahl der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemercken, inzwischen wann diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Potestät:	Coefficienten:
I.	1, 1,
II.	1, 2, 1.
III.	1, 3, 3, 1.
IV.	1, 4, 6, 4, 1.
V.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 etc.

Also wird von $a+b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5$$
$$+210a^4b^6+120a^3b^1+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu mercken daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müße. Dann man setze $a=1$, und $b=1$, so wird ein jedes

Glied außer dem Coefficienten $=1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müßen. Dahero dann die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.
Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

I ste $1+1 = 2 = 2^1$

II te $1+2+1 = 4 = 2^2$

Illte $1+3+3+1 = 8 = 2^3$

IVte $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$

Vte $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$

Vl te $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$

VII te $1+7+21+35+35+21+7+1+128 = 2^7$ etc.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu mercken, daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regul gegeben werden soll; der Beweiß aber davon wird in das folgende Capitel ersparet werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\tfrac{7}{1},\ \tfrac{6}{2},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{4}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{6},\ \tfrac{1}{7},$$

wo nemlich die Zehler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, etc. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also ist der erste Coefficient $=1,$ der 2te $= \frac{7}{1} = 7,$ der 3te $= \frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2} = 21,$

der 4te $= \frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3} = 35,$ der 5te $= \frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4} = 35,$ der 6te $= \frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5} = 21,$

der 7te $= 21\cdot\frac{2}{6} = 7,$ der 8te $= 7\cdot\frac{1}{7} = 1.$

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1};\ \frac{1}{2}$; daher der erste Coefficient $=1,$ der 2te $\frac{2}{1} = 2,$ der 3te $2\cdot\frac{1}{2} = 1.$

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche $\frac{3}{1};\ \frac{2}{2};\ \frac{1}{3}$; dahero der erste

Coefficient $=1$, der 2te $\frac{3}{1}=3$, der 3te $3\cdot\frac{2}{2}=3$, der 4te $\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; dahero der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{4}{1}=4$, der 3te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}=6$, der 4te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=4$, der 5te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=1$.

350.

Diese Regul schafft uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wißen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann. Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche

$$\frac{10}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{10}.$$

Dahero bekommt man den ersten Coefficient $=1$, den zweyten Coefficient $=\frac{10}{10}=1$,

$$\text{den 3ten } 10.\tfrac{9}{2}=45,\quad \text{den 4ten} = 45\cdot\tfrac{8}{3}=120,$$
$$\text{den 5ten} =120\cdot\tfrac{7}{4}=210,\ \text{den 6ten} =210\cdot\tfrac{6}{5}=252,$$
$$\text{den 7ten} =252\cdot\tfrac{5}{6}=210,\ \text{den 8ten} =210\cdot\tfrac{4}{7}=120,$$
$$\text{den 9ten} =120\cdot\tfrac{3}{8}=45,\quad \text{den 10ten} =45\cdot\tfrac{2}{9}=10,$$
$$\text{den 11ten} =10\cdot\tfrac{1}{10}=1.$$

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn

$$(a+b)^{100}=a^{100}+\tfrac{100}{1}a^{99}b+\tfrac{100\cdot 99}{1\cdot 2}a^{98}bb+\tfrac{100.99.98}{1\cdot 2\cdot 3}a^{97}b^{3}+\tfrac{100.99.98\cdot 97}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{96}b^{4}\text{etc.}$$

woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbahr zu ersehen.

CAPITEL 11

VON DER VERSETZUNG DER BUCHSTABEN ALS WORAUF DER BEWEIS DER VORIGEN REGUL BERUHET

352.

Wann man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurück gehet, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so viel mal vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen laßen: als bey der zweyten Potestät kommt das Glied *ab* zweymal vor, weil man schreiben kann *ab* und *ba;* hingegen kommt daselbst *aa* nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten

Potestät kann das Glied *aab* auf dreyerley Weise geschrieben werden als *aab, aba, baa,* und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder *aaab,* auf viererley Weise versetzt werden, als *aaab, aaba, abaa, baaa,* deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied *aabb* hat 6 zum Coefficienten, weil 6 Versetzungen statt finden, *aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab.* Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That wann man erweget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wann dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wann diese vier Factores mit einander multiplicirt werden

I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$,

so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, dahero ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so viel mal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen laßen, woraus so dann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie viel mal eine gewiße Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Dann wann alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten als a^2, a^3, a^4 etc. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich *ab* anfangen, wo offenbahr zwey Versetzungen statt finden, als *ab, ba.*

Hat man drey Buchstaben *abc,* so ist zu mercken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da dann die zwey übrigen zwey mal versetzt werden können. Wann also *a* zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen *abc, acb;* steht *b* zuerst so hat man wieder zwey, *bac, bca;* und eben so viel wann *c* zuerst steht, *cab, cba.* Dahero in allem die Zahl der Versetzungen seyn wird $3 \cdot 2 = 6$.

Hat man vier Buchstaben *abcd,* so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Hat man fünf Buchstaben *abcde,* so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede laßen sich die vier übrigen 24 mal versetzen. Dahero die Anzahl aller Versetzungen seyn wird $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wann dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen gantz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchstaben:	Anzahl der Versetzungen:
I.	$1=1$
II.	$2\cdot1=2$
III.	$3\cdot2\cdot1=6$
IV.	$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
V.	$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
VI.	$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$
VII.	$7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$
VIII.	$8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=40320$
IX.	$9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=362880$
X.	$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3628800$

357.

Es ist aber wohl zu mercken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wann alle Buchstaben unter sich ungleich sind, dann wann zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer; und wann gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müßen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Dahero die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: dahero die obigen Zahlen durch $6=3\cdot2\cdot1$ getheilt werden müssen. Eben so wann vier Buchstaben einander gleich sind, so müßen die obigen Zahlen durch 24 das ist durch $4\cdot3\cdot2\cdot1$ getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie viel mal diese Buchstaben *aaabbc* versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche wann sie ungleich wären $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ Versetzungen zulaßen würden. Weil aber hier *a* drey mal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3\cdot2\cdot1$, und weil *b* zwey mal vorkommt noch ferner durch $2\cdot1$ getheilt werden, dahero die Anzahl der Versetzungen seyn wird $=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=5\cdot4\cdot3=60$.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7 welches nur einmahl vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ wann sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Glied a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird

$$\tfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\tfrac{7}{1}.$$

Im dritten Glied a^5bb kommt *a* fünfmal und *b* zweymal vor, dahero die obige Zahl erstlich durch $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ und noch durch $2\cdot 1$ getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $=\tfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}=\tfrac{7\cdot6}{1\cdot2}$.

Im vierten Glied a^4b^3 steht *a* viermal und *b* dreymal; dahero die obige Zahl erstlich durch $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ und hernach noch durch $3\cdot 2\cdot 1$ oder $1\cdot 2\cdot 3$ getheilt werden muß, da dann der Coefficient wird

$$=\tfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3}=\tfrac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}.$$

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $=\tfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ so weiter, wodurch die oben gegebene Regul erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehret wie man auch von solchen Wurzeln die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a+b+c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müßen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder
$(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen es sey $a=1,\ b=1,\ c=1$ so wird der Cubus von $1+1+1$ das ist von 3, seyn:

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1,\ b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$ das ist von 1 seyn:

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

CAPITEL 12

VON DER ENTWICKELUNG DER IRRATIONAL-POTESTATEN DURCH UNENDLICHE REIHEN

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a + b$ eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potestät von $a+b$ auszudrucken, wann der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regul finden

$$(a+b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}a^{n-1}b + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}\cdot\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, etc. Gliedes verändern, woher man haben wird

$$(a-b)^n = a^n - \tfrac{n}{1}a^{n-1}b + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}\cdot\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Dann da wir gezeigt haben wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

so wird auch seyn :

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}\ ,\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

dahero um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden

$$\tfrac{n}{1} = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{n-1}{2} = -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{n-2}{3} = -\tfrac{3}{6},\ \tfrac{n-3}{4} = -\tfrac{5}{8},\ \tfrac{n-4}{5} = -\tfrac{7}{10},\ \tfrac{n-5}{6} = -\tfrac{9}{12}.$$

Hernach ist

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ und } a^{n-1} = \tfrac{1}{\sqrt{a}},\ a^{n-2} = \tfrac{1}{a\sqrt{a}},\ a^{n-3} = \tfrac{1}{aa\sqrt{a}} \text{ etc.}$$

Oder man kann diese Potestäten von a auch also ausdrücken

$$a^n = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \tfrac{\sqrt{a}}{a},\ a^{n-2} = \tfrac{a^n}{a^2} = \tfrac{\sqrt{a}}{a^2},\ a^{n-3} = \tfrac{a^n}{a^3} = \tfrac{\sqrt{a}}{a^3},\ a^{n-4} = \tfrac{a^n}{a^4} = \tfrac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

364.

Dieses voraus gesetzt wird die Quadrat-Wurzel aus $a+b$ folgender gestalt ausgedrückt werden

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \tfrac{1}{2}b\tfrac{\sqrt{a}}{a} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}bb\tfrac{\sqrt{a}}{a^2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}b^3\tfrac{\sqrt{a}}{a^3} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}b^4\tfrac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

365.

Wann nun a eine Quadrat-Zahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadrat-Wurzel aus $a+b$, ohne Wurzel-Zeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.
Also wann $a = cc$ so ist $\sqrt{a} = c$, und man wird haben

$$\sqrt{(cc+b)} = c + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{b}{c} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{bb}{c^3} + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{b^3}{c^5} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{b^4}{c^7} \text{ etc.}$$

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer ein Quadrat ist welcher durch cc angedeutet wird. Will man z. E. die QuadratWurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4+2$, und da wird $cc = 4, c = 2,$ und $b = 2$, dahero bekommt man

$$\sqrt{6} = 2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} - \tfrac{5}{1024} \text{ etc.}$$

Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6 = \frac{24}{4} - \frac{1}{4}$.

Also wird $cc = \frac{25}{4},\ c = \frac{5}{2},\ b = -\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten

Glieder berechnen wollen, da dann kommt

$$\sqrt{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20},$$

wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ grösser ist als 6.

Setzen wir nun $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$ so wird $c=\frac{49}{20}$ und $b=-\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben

$$\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$$

wovon das Quadrat $=\frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6=\frac{2304960}{3841600}$, also est der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

Eben so kann man auch die Cubic-Wurzel aus $a+b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Dann da $\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$ so wird in unserer allgemeinen Formel $n=\frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten

$$\frac{n}{1}=\frac{1}{3},\ \frac{n-1}{2}=-\frac{1}{3},\ \frac{n-2}{3}=-\frac{5}{9},\ \frac{n-3}{4}=-\frac{2}{3},\ \frac{n-4}{5}=-\frac{11}{15},\ \text{etc.}$$

Für die Potestäten von a aber ist

$$a^n=\sqrt[3]{a},\ a^{n-1}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a},\ a^{n-2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{aa},\ a^{n-3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}\ \text{etc.}$$

dahero erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)}=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a}-\frac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}+\frac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}-\frac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}\ \text{etc.}$$

368.

Wann also a ein Cubus nemlich $a=c^3$ so wird $\sqrt[3]{a}=c$, und also fallen die Wurzel-Zeichen weg. Dahero man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3+b)}=c+\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{cc}-\frac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^5}+\frac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8}-\frac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}}\ \text{etc.}$$

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubic-Wurzel von einer jeglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zartheilen läßt, wie c^3+b, davon der erste ein Cubus ist.

Also wann man die Cubic-Wurzel von 2 verlangt, so setze man $2=1+1$, da wird $c=1$ und $b=1$, folglich $\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\frac{10}{243}$ etc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze demnach $2=\frac{64}{27}-\frac{10}{27}$, so wird $c=\frac{4}{3}$ und $b=-\frac{10}{27}$ und dahero

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}.$$

Diese zwey Gleider geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber est $2 = \frac{746496}{373248}$ also est der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solcher Gestalt kann man wann man will, immer näher kommen, insonderheit wann man mehr Glieder nehmen will.

CAPITEL 13

VON DER ENTWICKELUNG DER NEGATIVEN POTESTÄTEN

370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} könne ausgedrückt werden, dahero wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, also daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potestät von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstrecket.

371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n=-1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben:

$$\frac{n}{1} = -1,\ \frac{n-1}{2} = -1,\ \frac{n-2}{3} = -1,\ \frac{n-3}{4} = -1,\ \frac{n-4}{5} = -1 \text{ etc.}$$

hernach für die Potestäten von *a:*

$$a^n = a^{-1} = \frac{1}{a},\ a^{n-1} = \frac{1}{a^2},\ a^{n-2} = \frac{1}{a^3},\ a^{n-3} = \frac{1}{a^4} \text{ etc.}$$

Dahero erhalten wir

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.}$$

welche eben diejenige Reihe ist, die schon oben [§ 300] durch die Division gefunden worden.

372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$ so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelößt werden.
Man setze nemlich $n=-2$ so hat man erstlich für die Coefficienten:

$$\tfrac{n}{1} = -\tfrac{2}{1},\ \tfrac{n-1}{2} = -\tfrac{3}{2},\ \tfrac{n-2}{3} = -\tfrac{4}{3},\ \tfrac{n-3}{4} = -\tfrac{5}{4} \text{ etc.}$$

und für die Potestäten von a hat man

$$a^n = \tfrac{1}{a^2},\ a^{n-1} = \tfrac{1}{a^3},\ a^{n-2} = \tfrac{1}{a^4},\ a^{n-3} = \tfrac{1}{a^5} \text{ etc.}$$

daher erhalten wir

$$(a+b)^{-2} = \tfrac{1}{(a+b)^2} = \tfrac{1}{a^2} - \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{b}{a^3} + \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{b^2}{a^4} - \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{b^3}{a^5} + \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{b^4}{a^6} \text{ etc.}$$

Nun aber ist

$$\tfrac{2}{1} = 2,\ \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2} = 3,\ \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3} = 4,\ \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4} = 5 \text{ etc.}$$

Also werden wir haben

$$\tfrac{1}{(a+b)^2} = \tfrac{1}{a^2} - 2\tfrac{b}{a^3} + 3\tfrac{b^2}{a^4} - 4\tfrac{b^3}{a^5} + 5\tfrac{b^4}{a^6} - 6\tfrac{b^5}{a^7} + 7\tfrac{b^6}{a^8} \text{ etc.}$$

373.

Setzen Wir weiter $n = -3$ so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$ das ist für $\tfrac{1}{(a+b)^3}$.

Für die Coefficienten wird also seyn:

$$\tfrac{n}{1} = -\tfrac{3}{1},\ \tfrac{n-1}{2} = -\tfrac{4}{2},\ \tfrac{n-2}{3} = -\tfrac{5}{3},\ \tfrac{n-3}{4} = -\tfrac{6}{4} \text{ etc.}$$

für die Potestäten von a aber

$$a^n = \tfrac{1}{a^3},\ a^{n-1} = \tfrac{1}{a^4},\ a^{n-2} = \tfrac{1}{a^5} \text{ etc.}$$

Woraus wir erhalten

$$\tfrac{1}{(a+b)^3} = \tfrac{1}{a^3} - \tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{b}{a^4} + \tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{4}{2}\cdot\tfrac{b^2}{a^5} - \tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{4}{2}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{b^3}{a^6} + \tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{4}{2}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{6}{4}\cdot\tfrac{b^4}{a^7} \text{ etc.}$$
$$= \tfrac{1}{a^3} - 3\tfrac{b}{a^4} + 6\tfrac{b^2}{a^5} - 10\tfrac{b^3}{a^6} + 15\tfrac{b^4}{a^7} - 21\tfrac{b^5}{a^8} + 28\tfrac{b^6}{a^9} - 36\tfrac{b^7}{a^{10}} + 45\tfrac{b^8}{a^{11}} \text{ etc.}$$

Last uns ferner setzen $n = -4$ so haben wir für die Coefficienten:

$$\tfrac{n}{1} = -\tfrac{4}{1},\ \tfrac{n-1}{2} = -\tfrac{5}{2},\ \tfrac{n-2}{3} = -\tfrac{6}{3},\ \tfrac{n-3}{4} = -\tfrac{7}{4} \text{ etc.}$$

für die Potestäten von a aber

$$a^n = \tfrac{1}{a^4},\ a^{n-1} = \tfrac{1}{a^5},\ a^{n-2} = \tfrac{1}{a^6},\ a^{n-3} = \tfrac{1}{a^7},\ a^{n-4} = \tfrac{1}{a^8} \text{etc.}$$

Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4}=\frac{1}{a^4}-\frac{4}{1}\cdot\frac{b}{a^5}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6}-\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{b^3}{a^7}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{b^4}{a^8}\text{ etc.}$$

$$=\frac{1}{a^4}-4\frac{b}{a^5}+10\frac{b^2}{a^6}-20\frac{b^3}{a^7}+35\frac{b^4}{a^8}-56\frac{b^5}{a^9}\text{ etc.}$$

374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jegliche dergleichen negative Potestät auf eine allgemeine Art haben Werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}}\text{ etc.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch so gar für *m* Brüche annehmen kann um irrationale Formeln auszudrücken.

375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}\text{ etc.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a+b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl herauskommen muß 1. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}\text{ etc.}\\
\underline{a+b\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{aa}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5}\text{ etc.}\\
\quad+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{aa}+\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}\text{ etc.}\\
\hline
\end{array}$$

Product 1 wie nothwendig folgen muß.

376.

Da wir ferner gefunden haben

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}\text{ etc.}$$

wann man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, so muß ebenfals 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2=aa+2ab+bb$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}\ \text{etc.}\\
\underline{aa+2ab+bb\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
1-\frac{2b}{a}+\frac{3bb}{a^2}-\frac{4b^3}{a^3}+\frac{5b^4}{a^4}-\frac{6b^5}{a^5}\ \text{etc.}\\
\quad+\frac{2b}{a}-\frac{4bb}{a^2}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{19b^5}{a^5}\ \text{etc.}\\
\qquad\qquad+\frac{bb}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5}\ \text{etc.}
\end{array}$$

Product 1 wie die Natur der Sache erfordert.

377.

Solte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müste $\frac{1}{(a+b)}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ etc. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}\ \text{etc.}\\
\underline{a+b\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
\frac{1}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{3b^2}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5}\ \text{etc.}\\
\quad+\frac{b}{a^2}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5}\ \text{etc.}\\
\hline
\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}\ \text{etc.}
\end{array}$$

ENDE DES ZWEYTEN ABSCHNITTS