THE THIRD PART OF THE FIRST BOOK

ON RATIOS AND PROPORTIONS

CHAPTER 1

CONCERNING ARITHMETICAL PROPORTIONS, OR THE DIFFERENCES BETWEEN TWO NUMBERS

378.

Two magnitudes shall be either equal or unequal to each other. In the second case one is greater than the other, and if one inquires into their inequality, thus this can be done in two ways; for either one asks by how much one shall be greater than the other ; or one asks how many times the one shall be greater than the other. Both accounts will be called relations, and the first maintains an arithmetical relation, but the latter is to be known as a geometrical one. But which designations bear no relationship with the matter on hand, but have been introduced arbitrarily.

379.

Here it is itself understood, that the magnitudes must be of one kind, because otherwise nothing can be determined of their equality or inequality. Then it would be absurd to ask someone for example if 2 pounds or 3 cubits were equal or unequal to each other. Therefore here the discussion is all about magnitudes of one kind, and that these always let themselves be assigned by numbers, thus as already indicated, here numbers only are to be handled .

380.

Therefore when asked of two numbers by how much one number shall be greater than the other, thus the answer is determined by their arithmetical relationship. Now since such can happen, if one indicates the difference between two numbers, thus the arithmetical proportion between the two numbers is nothing other than the difference between the two numbers. Which latter word (the difference) can be used more conveniently, so that the word *proportion* will be kept for the before mentioned geometric proportion alone.

381.

But the difference will be found between two numbers, if the smaller number is taken from the larger number and therefore one has the answer to the question about how much the one is to be greater than the other. Thus if both numbers are equal to each other, thus their difference is zero or nothing, and if it is asked how much greater one is than the other, so the answer must be nothing at all. For example, since $6 = 2 \cdot 3$ thus the difference between 6 and $2 \cdot 3$ nothing.

382.

But the numbers 5 and 3 are unequal to each other and it is asked by how much 5 to be greater than 3, thus the answer is to be by 2; which will be found if 3 is taken away from 5. Just as 15 is greater than 10 by 5, and 20 is greater than 12 by 8.

383.

Thus three matters arise to be considered ; in the first place the greater number, in the second place the smaller number, and thirdly the difference, which such have between each other , that one can always find the third from two themselves. Let the greater be $= a$, the smaller $= b$, and the difference will be $= d$: thus the difference d will be found, if b is taken from a , so that $d = a - b$; from which it is clear, if a and b are given, how d shall be found.

384.

But if the smaller number b together with the difference d is given, thus the greater will be found from that, if the difference is added to the smaller number, hence the greater number arises $a = b + d$. Then if the smaller number b is removed from $b + d$, thus d remains, which is the given disparity. Supposing the smaller number to be 12 and the difference 8 thus the greater will be $= 20$.

385.

But if the greater number a together with the difference d is given, thus the smaller number b is found, if the difference is taken from the greater number. Therefore there arises $b = a - d$. Then if this number $a - d$ is taken from the greater number a , so that d remains, which is the given difference.

386.

These three numbers a, b, d thus are associated with each other in such a way, that the three following determining relations are contained. Firstly there is $d = a - b$, secondly $a = b + d$ and thirdly $b = a - d$, and if one of these three equations is true, thus also the other two by necessity are true. Therefore if generally $z = x + y$, thus also by necessity $y = z - x$ and $x = z - y$.

387.

With such an arithmetical relation it is to be observed, if to both these numbers a and b any one number c will either be added, or taken away from those, the difference remains just the same. Thus if the difference is d between the numbers a and b thus the difference is d also between both these numbers $a+c$ and $b+c$, and also between $a-c$ and $b-c$. Since for the example between these numbers 20 and 12 the difference is 8 is, thus this difference remains also, if to the same numbers 20 and 12 any one number is added or subtracted at will.

388.

The proof of this is now evident. For if $a-b=d$ thus also there is $(a+c)-(b+c)=d$. Just as there will be also $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

If both the numbers a and b were doubled, thus the difference will be twice as great too. Thus if $a-b=d$ so there will be $2a-2b=2d$; and generally there will be had $na-nb=nd$, whatever number is taken for n.

CHAPTER 2

ARITHMETICAL PROPORTIONS

390.

If two arithmetical relations are equal to each other, then the equality itself stated will be an arithmetic proportion.
Thus if $a-b=d$ and also $p-q=d$, so that the difference between these numbers p and q shall be just as great, as between these numbers a and b; thus these four numbers amounts to an arithmetic proportion, which can be written thus : $a-b=p-q$, as from that it can be indicated clearly, that the difference between a and b to be just as great as the difference between p and q.

391.

An arithmetical proportion consists therefore of four terms, which must be provided thus, so that if one takes the second term from the first, just as much is left, as if the fourth term is taken from the third. Thus these numbers 12, 7, 9, 4, amount to an arithmetic proportion, as $12-7=9-4$.

392.

If there is an arithmetical proportion, such as $a-b=p-q$, as it is allowed to interchange the second and the third term and also there will be $a-p=b-q$. Then, since $a-b=p-q$ thus in the first place b can be added to both sides and there is had $a=b+p-q$. Afterwards take p from both sides, so that $a-p=b-q$ arises. Thus, as $12-7=9-4$, so also $12-9=7-4$.

393.

In any one arithmetic proportion the first and second terms can be interchanged, to be equal to the third and fourth terms interchanged. Thus if $a-b=p-q$ so also is $b-a=q-p$. Then $b-a$ is the negative of $a-b$ and also just as $q-p$ is the negative of $p-q$.
Now since $12-7=9-4$ so also is $7-12=4-9$.

394.

Moreover in particular for any arithmetic proportion this principal property is to be noted well, that the sum of the second and third terms is always the same as the sum of the first and fourth terms. Which also can be declared thus : the sum of the middle terms is equal to the sum of the first and last terms always. Thus since $12-7=9-4$ so there is $7+9=12+4$, as each makes 16.

395.

In order to prove this principal property, thus there shall be $a-b=p-q$; $b+q$ must be added to both sides thus there becomes $a+q=b+p$, that is, the sum of the first and fourth terms is equal to the sum of the second and third terms. However also if four numbers such as *a, b, p, q,* are provided thus, so that the sum of the second and third is the same as the sum of the extreme first and fourth terms, namely that $b+p=a+q$, thus the same numbers shall be in arithmetic proportion $a-b=p-q$. Since then $a+q=b+p$ thus $b-q$ is subtracted from both sides, and there arises $a-b=p-q$. Since now the numbers 18, 13, 15, 10, thus are provided, that the sum of the middle terms $13+15=28$ is equal to the sum of the outer $18+10=28$, so they are the same as proven in any arithmetical proportion and consequently $18-13=15-10$.

396.

From this principle one can resolve easily the following question: If the first three terms of an arithmetic proportion are given, how the fourth term may be found from these. Let the first three terms be *a, b, p* and for that fourth, thus required to be found, write *q,* thus one has $a+q=b+p$. Now subtract *a* from both sides thus $q=b+p-a$ arises. Hence the fourth term will be found, if the second and third terms are added together, and from their sum the first to be taken . For example, there shall be the first three terms 19, 28, 13, thus the sum of the first and the third $=41$, and subtract the first 19 from that, 22 remains for the fourth term, and the arithmetical proportion will be $19-28=13-22$, $28-9=22-13$, or $28-22=19-13$.

397.

If in any arithmetical proportions the second term is equal to the third, so that one has only three numbers, which thus are provided, so that the first less the second shall be as great as the second less the third, or that the difference between the first and the second is as great as the difference between the second and the third. Such 3 numbers shall be 19, 15, 11, because $19-15=15-11$.

398.

Such three numbers proceed forwards in an arithmetic progression, which either increases, if the second exceeds the second by as much as the third exceeds the second, as in this example 4, 7, 10; or falls, if the numbers become equal or smaller, as 9, 5, 1.

399.

Let the numbers *a, b, c* be in any arithmetic progression, thus there must be $a-b=b-c$ from which it follows, from the equality of the middle and outer sums, $2b=a+c$. Taking *a* away from both sides thus there becomes $c=2b-a$.

400.

Thus if the first two terms of any arithmetical progression such as *a, b* are given thus from that the third can be found, if the second is doubled and the first subtracted. Let 1 and 3 be the two first terms of an arithmetical progression, thus the third will be $=2\cdot 3-1=5$ and from these numbers 1, 3, 5 the proportion is had $1-3=3-5$.

401.

This rule can be extended even further and as the third can be found from the first and second, so the fourth can be found from the second and third, and so forth ; and such an arithmetical progression can proceed as far as one wishes. Let *a* be the first term and *b* the second, thus the third will be $=2b-a$; the fourth $=4b-2a-b=3b-2a$; the fifth $6b-4a-2b+a=4b-3a$; the sixth $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$; the seventh $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$ etc.

CHAPTER 3

ON ARITHMETICAL PROGRESSIONS

402.

A series of numbers, which increase or decrease always by the same amount, composed always from as many terms as wished, will be called an arithmetical progression. Thus, the natural order of numbers written as 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 etc. themselves make an arithmetical progression, always increasing by one, and a series such as 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 etc., also is an arithmetical progression, because the numbers always decrease by 3.

403.

The number by which the terms of an arithmetical progression increase or decrease is known as the difference or disparity. Thus if the first term together with the difference is given, hence the arithmetical progression can be advanced as far as wished. For example, let the first term be 2 and the difference $=3$, thus the increasing progression will be : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 etc. Where each single term will be found, if the difference given previously is added.

404.

The natural numbers 1, 2, 3, 4 etc. are accustomed to be written above such an arithmetic progression, so that it can be seen how large each number shall be, and that also the index written above each term can become known, from which the above example thus comes to be put in place:

$$\begin{array}{lllllllllll} \text{Index} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ \text{Arith. Prog.} & 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26, & 29 \text{ etc.} \end{array}$$

from which it is seen that 29 is the tenth term.

405.

Let a be the first term and d the difference so that thus the arithmetic progression can be put in place :

$$\begin{array}{llllllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, & a+7d \text{ etc.} \end{array}$$

thus from which equally each individual term can be found, without which it is necessary to know all the preceding terms, and this only from the first term *a* and the difference *d*. Thus for example, the 10th term is $= a + 9d$, the 100 th $= a + 99d$, and in the general case the n^{th} term will be $a + (n-1)d$.

406.

If the arithmetical progression is to be terminated somewhere, thus one has to note in particular the first term and the last, and the index of the last term will be the number of terms to be shown. Therefore if the first term $= a$, the difference $= d$ and the number of terms $= n$, thus last term $= a + (n-1)d$. The same will be found also if the difference were to be multiplied by one smaller than the number of terms , and to that the first term is added. For example, the arithmetical progression of 100 terms, of which the first is $= 4$ and the difference 3, thus the last term is $99.3 + 4 = 301$.

407.

If the first term *a* and the last $= z$ taken with the number of terms n can be had, then from that the difference *d* is found. Then since the last term is $z = a + (n-1)d$, thus on subtracting *a* from both sides there is had $z - a = (n-1)d$. Therefore if the first term is taken away from that last term, thus the difference is multiplied by the number of terms less by 1, or $z - a$ is the product of $(n-1)$ by *d*. Thus now $z - a$ must be divided by $(n-1)$, so that the difference comes about: $d = \frac{z-a}{n-1}$, from which the rule arises : Take the first term from the last, then divide the remainder by the number of terms less one, thus the difference is known ; from which the whole progression can be put in place.

408.

For example let a single arithmetical progression be found of 9 terms, of which the first term is 2 and the last 26, from which the difference must be found. The first term 2 must be taken from the last 26 and the remainder 24 divided by $9 - 1$, that is by 8 , thus the difference is known to be $= 3$, and the progression itself will be:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

In order to give another example ; thus let the first term be 1, the last 2, and the number of terms 10, of which the arithmetical progression is required. Here the difference arises $\frac{2-1}{10-1} = d$ for which the required progression will be :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Yet another example. Let the first term be $2\frac{1}{3}$, the last $12\frac{1}{2}$ and the number of terms 7. From this the difference is given :

$$\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36};$$

consequently the progression shall be :

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36} & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

409.

If further the first term *a* and the last *z,* together with the difference *d* is given, then the number of terms *n* can be found from that . Since then $z-a=(n-1)d$, thus both sides are divided by *d* and there becomes $\frac{z-a}{d}=n-1$. Now since *n* is greater than $n-1$ by 1, thus $n=\frac{z-a}{d}+1$; consequently the number of terms, if the difference between the last and the first $z-a$ is divided by the difference *d* and one more is added to that quotient $\frac{z-a}{d}$.

For example, let the first term be $=4$, the last $=100$, and the difference $=12$, thus the number of terms will be $\frac{100-4}{12}+1=9$, and these nine terms are the following:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 4, & 16, & 28, & 40, & 52, & 64, & 76, & 88, & 100. \end{array}$$

Let the first term be $=2$, the last $=6$, and the difference $=1\frac{1}{3}$ thus the number of terms is $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, and these four numbers are

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3\frac{1}{3}, & 4\frac{2}{3}, & 6. \end{array}$$

Further let the first term be $=3\frac{1}{3}$, the last $=7\frac{2}{3}$, and the difference $=1\frac{4}{9}$, thus the number of terms will be $=\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4,$ and these four terms are

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 3\frac{1}{3}, & 4\frac{7}{9}, & 6\frac{2}{9}, & 7\frac{2}{3}. \end{array}$$

410.

But it is well to note, that the number of terms necessarily must be a whole number. If a fraction had been found for n in the above example, thus the question would have been absurd.

If consequently no whole number were found for $\frac{z-a}{d}$ it would be impossible to resolve the question. Therefore with such questions the number $z-a$ must be divisible by d.

411.

With each single arithmetical progression the four following items thus are to be considered :

I. the first term a, III. the last term z,
II. the difference d, IV. the number of terms n,

which are provided thus, that if three are themselves known, the fourth can be determined from that, so that :

I. If a, d and n are known, thus we have $z = a + (n-1)d$.
II. If z, d and n are known, thus we have $a = z - \left(n-1\right)d$.
III. If a, z and n are known, thus we have $d = \frac{z-a}{n-1}$
IV. If a, z and d are known, thus we have $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

CHAPTER 4

THE SUMMATION OF ARITHMETIC PROGRESSIONS

412.

If an arithmetical progression is presented, then it is customary also to look for the sum of the same, which will be found, if all the terms are added together. Now since this addition would be very extensive if the progression were composed from many terms, thus a rule will be given, with the help of which this sum can be found quite easily.

413.

In the first place we will consider such a progression designated, where the first term $= 2$, the difference $= 3$, the last term $= 29$, and the number of terms $= 10$.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Now here the sum of the first and last term $=31$, the sum of the second and the last but one terms 31, the sum of the third and the last but two terms $=31$, the sum of the fourth and the last but three terms $=31$, and so on, from which it can be seen that the two terms which are at the same distance from the first and the last terms to be taken together, make the same amount, as the first and the last terms taken together.

414.

The principle of this is at once apparent. For if the first term shall be put $=a$ and the last $=z$, again the difference $=d$, thus the sum of the first and the last terms $=a+z$. After the second term $a+d$ and the last but one $=z-d$, which taken together makes $a+z$. Further the third term is $a-2d$ and the last but two $=z-2d$, which taken together amounts to $a+z$. From which the truth of the above rule is clear.

415.

In order now to find the sum of the above progression, namely of

$$2+5+8+11+14+17+20+23+26+29,$$

thus below the same progression is written backwards, and added term by term as follows :

$$\begin{array}{r}
2+\ \ 5+\ \ 8+11+14+17+20+23+26+29\\
29+26+23+20+17+14+11+\ \ 8+\ \ 5+\ \ 2\\
\hline
31+31+31+31+31+31+31+31+31+31
\end{array}$$

which is found, and which clearly consists of a series twice as great as the sum of our progression. The number of these equal terms is 10, as in the progression, and thus the sum itself is $=10\cdot 31=310$. Now since this sum is twice as great, as the sum of the arithmetical progression, thus the correct sum will be $=155$.

416.

If one proceeds in this way with any arithmetical progression, the first term of which $=a$, the last $=z$, and the number of terms $=n$, just as by writing the same progression backwards below and adds term by term, thus $a+z$ arises for each term, for which the number of terms $=n$, it follows the sum itself $=n(a-z)$ which is twice as great as the sum of the progression, hence the sum of the arithmetical progression itself $=\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hence we acquire now this easy rule in order to find the sum of any arithmetical progression :

The sum of the first and last terms is multiplied by the number of terms, thus half of this product indicates the sum of the whole progression.

Or which amounts to the same : multiply the sum of the first and last terms by half the number of terms.

Or else, multiply half the sum of the first and last terms by the whole number of terms, thus arriving at the sum of the whole progression.

418.

It is worthwhile to clarify this rule with some examples. Accordingly let the progression of natural numbers be given 1, 2, 3, up to 100, the sum of which shall be sought. Following the first rule this will be $\frac{100\cdot 101}{2}=50\cdot 101=5050$.

Further it is asked, how many strokes does sounds a clock in 12 hours ? to this end the numbers 1, 2, 3, up to 12, are to be added together, and the sum will be thus $\frac{12\cdot 13}{2}=6\cdot 13=78$.

If one wants to know the sum of the same progression as far as 1000, thus 500500 arises; progressing as far as 10000, the same will become $=50005000$.

419.

Question : Someone buys a horse with this condition: for the first nail of the horseshoe it costs 5 Kopeks, for the second 8, for the third 11, and always 3 Kopeks more for each one following. Now altogether there are 32 nails, how much does it cost him to buy the horse?

Thus here the sum is sought of an arithmetic progression, of which the first term $=5$, the difference $=3$, and the number of terms is 32.

Now here primarily the last term is sought, which according to the above rule becomes $=5+31\cdot 3=98$, and hence gives the sum sought itself $\frac{103.32}{2}=103\cdot 16$; thus the cost of the horse comes to 1648 Kopeks, or 16 Ruble. 48 kop.

420.

For a general kind there shall be the first term $=a$,the difference $=d$, and the number of terms $=n$, from which the sum of the whole progression shall be found : since now the last term must be $=a+(n-1)d$, thus the sum of the first and last terms $=2a+(n-1)d$, which multiplied by the number of terms n, gives $2na+n(n-1)d$, therefore the sum sought will be $=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

According to this formula, because in the above example $a = 5,\ d = 3$, and $n = 32$, thus this some is obtained

$$5.32 + \tfrac{31\cdot 32\cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$$

as before.

421.

If the series of natural numbers 1, 2, 3 are to be added together as far as to *n*, thus it is required to find thus sum, which has the first term $= 1$, the last $= n$ and the number of terms $= n$, from which the sum is found $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Putting $n = 1766$, thus the sum of all the numbers from 1 as far as to 1766 be $= 883\cdot 1767 = 1560261$.

422.

Let the progression of the odd numbers 1, 3, 5, 7 etc. be given, which progresses as far as to *n*, the sum of which is required : Now here the first term is 1, the difference $= 2$, the number of terms $= n$; from which the last term shall be $1 + (n-1)2 = 2n-1$, from which the sum sought is obtained $= nn$.

Consequently the number of terms only has to be multiplied by itself. Hence as many terms of this progression may be added together as wished, as the sum is always a square, namely the square of the number of terms, as can be seen from the following.

Term	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 etc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 etc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 etc.

423.

Further let the first term be $= 1$, the difference $= 3$ and the number of terms $= n$, thus this the progression is had: 1, 4, 7, 10 etc. of which the last term shall be : $1 + (n-1)3 = 3n-2$; hence the sum of the first and last terms $= 3n-1$; consequently the sum of the progression is $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{2n^2-n}{2}$.

Taking $n = 20$, then the sum is $= 10\cdot 59 = 590$.

424.

Let the first term be $=1$, the difference $=d$, and the number of terms $=n$, hence the last term is $1+(n-1)d$. To this the first term is added, giving $2+(n-1)d$, which multiplied by the number of terms gives $2n+n(n-1)d$, from which the sum of the progression shall be $n+\frac{n(n-1)d}{2}$,
Here we will append the following tables :

If	$d=1$,	then the sum is	$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$
"	$d=2$	" " " "	$n+\frac{n(n-1)}{2}=nn$
"	$d=3$	" " " "	$n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$
"	$d=4$	" " " "	$n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$
"	$d=5$	" " " "	$n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$
"	$d=6$	" " " "	$n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$
"	$d=7$	" " " "	$n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$
"	$d=8$	" " " "	$n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$
"	$d=9$	" " " "	$n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$
"	$d=10$	" " " "	$n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$ etc.

CHAPTER 5

ON POLYGONAL FIGURES OR NUMBERS.

425.

The summation of arithmetical progressions, which start from 1 and of which the difference is either 1, 2 , 3 or any other whole number, leads us to the theory of polygonal numbers, which are composed, if some terms of such progressions are added together.

426.

Putting the difference $=1$, the first constant term is 1, thus from that the arithmetic progression arises

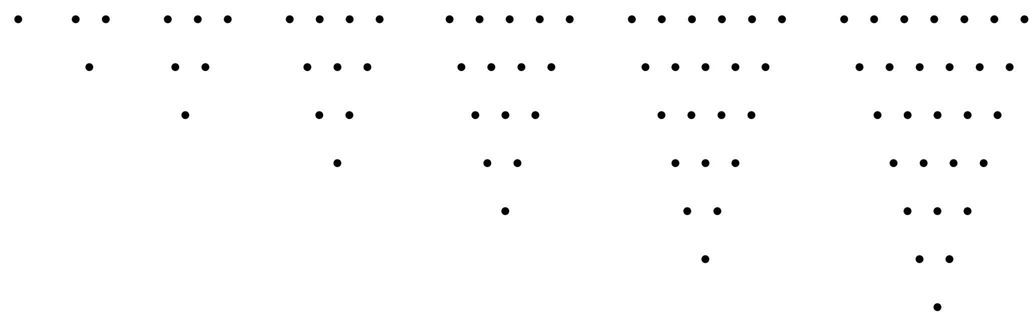
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 etc.

Now taking in the same the sums of one, two, three, four, etc. terms, thus these series of numbers results :

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 etc.,

so that $1=1,\ 3=1+2,\ 6=1+2+3,\ 10=1+2+3+4$ etc. And as there these numbers are called triangular numbers, because each has just as many points as such a number assigns to be present in a triangle, as we see from the following :

1 3 6 10 15 21 28

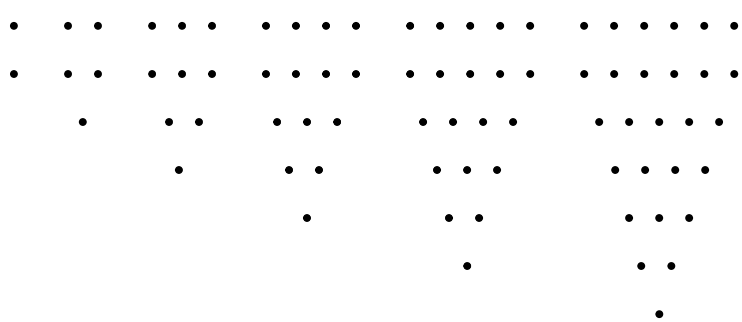


etc.

427.

With each of these triangles it can be seen how many points there shall be in each side : for the first it is only one, for the second 2, for the third 3, for the fourth 4, and so on. Thus according to the number of points in a side, which simply are called the sides, themselves compose the triangular numbers, or the number of all the points, which following the shape simply is called a triangle.

Side
Triangle



428.

Hence the question arises here, how shall the triangle be found from a given side ? which can occur from the above : For let the side be $=n$, thus the triangle is

$$1+2+3+4+\ \cdots\cdot n,$$

whose sum $=\frac{nn+n}{2}$, consequently the triangle is $\frac{nn+n}{2}$. Thus $n=1$ and the triangle is $=1$. If $n=2$ then the triangle is $=3$.

" $n = 3$ " " " " $= 6$.
" $n = 4$ " " " " $= 10$ and so forth.
Taking $n = 100$, thus the triangle $= 5050$ etc.

429.

This formula $\frac{nn+n}{2}$ now will be called the general formula for all triangular numbers : because from the very same for each side, which is indicated by n , the triangular numbers can be found.

The same formula can be considered also to be $\frac{n(n+1)}{2}$, which serves to ease the calculation, because always either n or $n+1$ is an even number and lets itself be divided by 2.

Thus if $n = 12$, then the triangle is $\frac{12\cdot 13}{2} = 6\cdot 13 = 78$. If it is $n = 15$, then the triangle is $= \frac{15\cdot 16}{2} = 15\cdot 8 = 120$ etc.

430.

Putting the difference $= 2$ thus the arithmetic progression is obtained :

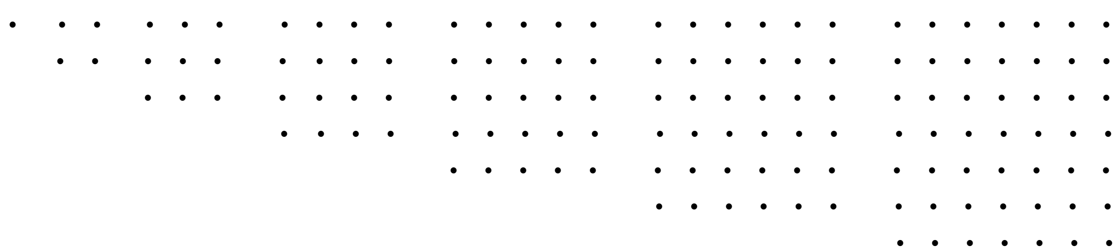
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 etc.

from which this series gives the sums

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc.

which numbers are called square numbers, and these shall be just those, which are called squares above. Just as many points are allowed, to indicate such a number, as are put into a square:

1 4 9 16 25 36 49



431.

It is seen here, that the sides of such squares contain just as many points, as the square root indicated from that; thus from the side 5 the square 25 arises, and from the side 6 the square 36; moreover in general if the side is n , from which the number of terms of this progression 1, 3, 5, 7 etc. will be indicated by n , thus the square is itself the same as the sum of the same terms, which above was found to be $= nn$. But we will not linger over this square or square number as it has been treated in detail above.

432.

Putting the difference $= 3$ and one takes the sums always to be of the form known as pentagonal number, though the same cannot be represented by points. Yet the same can be written following the amounts :

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Arith. Prog.	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
Pentagon	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176 &c.

and the number indicates the side of each pentagon.
[Pentagonal numbers can of course be shown diagrammatically.]

433.

Thus if the side is set as n , thus the pentagonal number $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. If for example $n = 7$ thus the pentagonal number is 70. If one wants to know the pentagonal number of side 100 , thus one sets $n = 100$ and 14950 arises.

434.

Setting the difference $= 4$, thus one obtains in this manner the hexagonal numbers, which can be expressed thus :

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Arith. Prog.	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
Hexagon	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190,&c.

Where the index again gives the side of each hexagonal number.

435.

Thus if the side is n, then the hexagonal number $= 2nn - n = n(2n-1)$,
whereby it is to be noted, that all these hexagonal numbers are also triangular numbers. Then with these if one takes every alternate one, it is a hexagonal number; the first, third, fifth, etc.

436.

As equally the seventh, eighth, ninth numbers can be found, etc. From which here we will gather together the general formulas themselves. Thus if the side shall be *n,* the numbers shall be :

$$\begin{aligned}
3^{\text{th}} &= \tfrac{nn+n}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2},\\
4^{\text{th}} &= \tfrac{2nn+0n}{2} = nn,\\
5^{\text{th}} &= \tfrac{3nn-n}{2} = \tfrac{n(3n-1)}{2},\\
6^{\text{th}} &= \tfrac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1),\\
7^{\text{th}} &= \tfrac{5nn-3n}{2} = \tfrac{n(5n-3)}{2},\\
8^{\text{th}} &= \tfrac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2),\\
9^{\text{th}} &= \tfrac{7nn-5n}{2} = \tfrac{n(7n-5)}{2},\\
10^{\text{th}} &= \tfrac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3),\\
11^{\text{th}} &= \tfrac{9nn-7n}{2} = \tfrac{n(9n-7)}{2},\\
12^{\text{th}} &= \tfrac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4),\\
20^{\text{th}} &= \tfrac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8),\\
25^{\text{th}} &= \tfrac{23nn-21n}{2} = \tfrac{n(23n-21)}{2},\\
m^{\text{th}} &= \tfrac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}.
\end{aligned}$$

437.

Thus if the side is *n*, the number of angles *m* in the general case shall be $=\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$, from which any possible polygon can be found of which the side is $=n$. If one wanted to find the biangular number, thus $m=2$ and the same to be $=n$, the natural numbers.

Setting $m=3$ thus the triangular number $=\frac{nn+n}{2}$.

Setting $m=4$ thus the quadrangular number $=nn$ etc.

438.

In order to demonstrate this rule by an example, thus such as the 25-gon number, of which the side shall be 36. In the first place, look for the side *n* of the 25-gon, thus the same will be $=\frac{23nn-21n}{2}$. Now on putting $n=36$, thus the sought number $=14526$ arises.

439.

Question: A person has bought a house and someone wants to know how much he had paid. Concerning which he answers, the number of rubles he had paid for that, to be the 365-gon of 12.

Now in order to find this number there will be $m = 365$ and thus the 365-gon of $n = \frac{365nn-361n}{2}$. Now $n = 12$, from which the sought price of the house shall be 23970 rubles.

[Lagrange in his translation indicates that the algebraists of the time made a distinction between figured numbers and polygonal numbers; for the former are derived from the progression of natural numbers, and each is the sum of the terms up to that point; while the latter are determined from different arithmetical series.]

CHAPTER 6

CONCERNING GEOMETRICAL PROPORTIONS.

440.

The geometrical proportion between two numbers holds the answer to the question : how many times greater shall one number be than the other? And it will be found, if the one number be divided by the other, since then the quotient expresses the designation of the ratio.

441.

From that three matters about a geometric proportion arise to be considered. Initially, the first of the two given numbers, which will be called the antecedent. In the second place, the other number itself, which will be called the consequent. In the third place, the denomination of the two numbers, or the quotient of the division of the antecedent by the consequent: so that, for example, if the ratio shall be sought between which two numbers 18 and 12, thus 18 is the antecedent and 12 the consequent, and the denomination will be $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; from which it can be seen, that the antecedent 18 is one and $\frac{1}{2}$ times more than consequent 12 .

442.

In order to show that ratio between two numbers geometrically, it is customary to represent these by two points, the one placed below the another, which is put in place between the antecedent and the consequent numbers.

Thus $a:b$ shows the ratio between a and b , which sign, as already noted above, also can be used to show division, and precisely for that reason will be used here, because to know this ratio, the number a must be divided by the number b ; these signs will be called simply: the ratio a has to b, or by a to b.

443.

The expression of such denominations will therefore be represented by a fraction, of which the numerator is the antecedent, and the denominator the consequent. But in order that it will be apparent always, the fraction must be expressed in its smallest form, which happens, if the numerator and denominator are divided by their greatest common divisor, as happens above, since the fraction $\frac{18}{12}$ is brought to $\frac{3}{2}$ by dividing the numerator and denominator by 6.

444.

Proportions differ from each other only in so far as their denomination differ, and from that there are just as many different kinds of proportions as there are different kinds of denominations to be found.

The first kind now is without dispute, where the denomination is 1 ; and this happens, if both the numbers shall be equal, as 3:3, 4:4, a:a the denomination of which is 1, and this therefore will be known as the ratio of equality.

Following these are the ones for which the denomination is a whole number, such as 4:2 where the denomination is 2. Further 12:4 where the denomination is 3, and 24 : 6 where the denomination is 4, etc.

After those such arise, of which the ratio is expressed by fractions. Thus 12 : 9 of which the denomination is $\frac{4}{3}$ or $1\frac{1}{3}$; $18:27$ of which the denomination is $\frac{2}{3}$, etc.

[Lagrange extends this account to include irrational denominations and ratios.]

445.

Now a shall be the antecedent, b consequent and the denomination d, thus we have shown already, that if a and b are given, from that there is found $d = \frac{a}{b}$.

But if the consequent b together with the denomination d is given, thus from that the antecedent $a = bd$ is found, because bd divided by b gives d ; finally if the antecedent a together with the denomination d is given, thus from that the consequent $b = \frac{a}{d}$. For then if the antecedent a is divided by the consequent $\frac{a}{d}$, thus the quotient is d, which is the denomination required.

446.

Every single ratio $a:b$ remains unchanged, if the antecedent and the consequent are multiplied or divided by any number, because the denomination remains unchanged. For if d is the denomination of $a:b$, thus there shall be $d = \frac{a}{b}$, and thus also the denomination of this ratio $na:nb$, is $\frac{a}{b}=d$; and of this ratio $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ the denomination equally is $\frac{a}{b}=d$.

447.

When the denomination has been brought to its smallest form, thus the ratio from that allows itself be recognised clearly and expressed in words. Namely, if the denomination of this fraction $\frac{p}{q}$ has been brought to : $a:b=p:q$, in words that is, *a* to *b* as *p* to *q*. So that the denomination of this ratio $6:3$ is $\frac{2}{1}$ or 2 ; hence one has $6:3=2:1$. Just as there is said to be $18:12=3:2$ and $24 : 18 = 4 : 3$ and further $30:45=2:3$. But if the denomination cannot be shortened, then the proportion as well cannot be made clearer: as if there is said to be $9:7=9:7$ thus it cannot be made more understandable.

448.

Moreover if the denomination lets itself be brought to very small numbers, thus a satisfactory understanding is obtained of the ratio between two very large numbers. Thus if it is known that $288:144=2:1$, then the matter is quite clear; and if it is inquired how $105:70$ behaves, thus the answer is, as $3:2$. Again asking how $576:252$ behaves, then one says as $16:7$.

449.

Thus in order that each ratio can be put in place in the clearest possible manner, thus the denominations themselves must be sought to show the least numbers, which can be seen at once, if both the terms of the ratio can be divided by their greatest common divisor. Thus the ratio $576:252$ is at once brought to this $16:7$, if both the numbers 576 and 252 are divided by 36, which is their greatest common divisor.

450.

Because now the matter arises from that, that a way must be found of knowing the greatest common divisor of two given numbers, thus so that the necessary instruction for that will be given in the following chapter.

CHAPTER 7

ON THE GREATEST COMMON DIVISOR BETWEEN TWO GIVEN NUMBERS.

451.

The greatest common divisor give numbers, which have no joint common divisor other than 1, and if the numerator and the denominator of a fraction thus are provided, thus it cannot be brought into an easier form.
Thus it is observed, for example, that both these numbers 48 and 35 have no common divisor, despite each one itself having several divisors. Therefore the ratio $48:35$ cannot be expressed more easily, other than if both are divided equally by 1, so the numbers cannot become any smaller than that.

452.

But if the numbers have a common divisor, thus the same, and thus indeed the greatest common divisor, will be found from the following rule. The greater number is divided by the lesser ; further the part left over must divide into the previous divisor, by which the remaining part again must divide the previous divisor, and one proceeds in such a manner as long as both divisions can be done; since then the last divisor shall be the given greatest common divisor of the two numbers.
For example, this investigation thus establishes the greatest common divisor for the proposed numbers 576 und 252 .

252	576	2		
	504			
	72	252	3	
		216		
		36	72	2
			72	
			0	

Here the greatest common divisor thus is 36.

453.

It will be conducive to enlighten this rule through an example.
Therefore the greatest common divisor between the numbers 504 and 312 is sought.

312	504	1					
	312						
	192	312	1				
		192					
		120	192	1			
			120				
			72	120	1		
				72			
				48	72	1	
					48		
					24	48	2
						48	
						0	

Thus 24 is the greatest common divisor, and therefore allows the ratio $504:312$ to be brought to this form $21:13$.

454.

Further there shall be the two numbers given $625:529$, for which the greatest common divisor shall be sought:

529	625	1					
	529						
	96	529	5				
		480					
		49	96	1			
			49				
			47	49	1		
				47			
				2	47	23	
					46		
					1	2	2
						2	
						0	

Thus here the greatest common divisor is 1, and therefore the ratio $625:529$ cannot itself be brought to a simpler form: or the same cannot allow itself to be expressed in any simpler form.

455.

It is now still necessary to give the proof of this rule. Let a be the greater and b the smaller of the given numbers, and moreover d shall be a common divisor of the same. Since now both a as well as b are divisible by d, thus also $a-b$ will be divisible, as well as $a-2b$ and $a-3b$, and generally $a-nb$.

456.

This is true also conversely, and if the numbers b and $a-nb$ are allowed to be divided by d, thus the number a itself must be divisible also. Since than nb is allowed to be divided, thus $a-nb$ would not be divisible, unless a itself were divisible.

457.

Further it is to be observed, that if d is the greatest common divisor of both the numbers b and $a-nb$, the same also shall be the greatest common divisor of a and b. Then if for these numbers a and b yet a common divisor greater than d could be found instead, thus the same would be also a greater common divisor of b and $a-nb$, consequently it cannot be greater than d. Moreover now the greatest common divisor d of b and $a-nb$ must also be the greatest common divisor d of both a and b.

458.

These three matters just set out, thus let us divide the greater number a by the smaller b, as the rule orders, and assuming n for the quotient, thus the remainder $a-nb$ is put in place, which is smaller than b always. Now since this remainder $a-nb$ has the same greatest common divisor with b as the given numbers a and b, thus one divides the preceding divisor b by this remainder $a-nb$, and since again the forthcoming remainder will still have the same greatest common divisor with the next divisor, and thus again in turn.

459.

Moreover such a form is carried forwards, until such a division occurs, which arises where no remainder is left over. Therefore let p be the last divisor, which is present a certain number of times into its dividend, whereby the dividend is divisible by p, and consequently will have this form mp ; now these numbers p and mp both allow themselves to be divisible by p, and it is quite established that there can be no greater common divisors, because no number can be divided by a number greater than itself. Whereby the last divisor is also the greatest common divisor of both the numbers given at the beginning a and b, which is the proof of the prescribed rule.

460.

Let us put an example here to find the greatest common divisor of these numbers 1728 and 2304 , since then the following calculation arises :

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1728 & 2304 & 1 & \\
 & 1728 & & \\ \cline{2-2}
 & 576 & 1728 & 3 \\
 & & 1728 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Thus 576 is the greatest common divisor, and the ratio $1728:2304$ will be reduced to $3:4$; consequently $1728:2304$ itself behaves just as $3:4$.

DES ERSTEN THEILS DRITTER ABSCHNITT
VON DEN VERHÄLTNISSEN UND PROPORTIONEN

CAPITEL 1

VON DER ARITHMETISCHEN VERHÄLTNISS ODER DEM UNTERSCHEID ZWISCHEN ZWEYEN ZAHLEN

378.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder einander ungleich. Im letztem Fall ist eine größer als die andere, und wann man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dies auf zweyerley weise geschehen; dann entweder fragt man um wie viel die eine größer sey als die andere? oder man fragt wie viel mal die eine größer sey als die andere? Beyderley Bestimmung wird ein Verhältniß genennt, und die erstere pflegt eine Arithmetische Verhältniß, die letztere aber eine Geometrische genennt zu werden. Welche Benennungen aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft haben, sondern willkührlich eingeführt worden sind.

379.

Es versteht sich hier von selbsten, daß die Größen einerley Art seyn müßen, weil sonsten nichts von ihrer Gleichheit, oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Dann es würde ungereimt seyn wann einer z. E. fragen wolte, ob 2 und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Dahero ist hier allenthalben von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselbe immer durch Zahlen anzeigen laßen, so wird wie schon anfänglich gemeldet worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

380.

Wann also von zwey Zahlen gefragt wird um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr Arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun solches geschiehet, wann man den Unterscheid zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein Arithmetisches Verhältniß nichts anders als der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen. Welches letztere Wort (Unterscheid) füglicher gebraucht wird, so daß das Wort Verhältniß nur allein bey den so genanten Geometrischen Verhältnißen beybehalten wird.

381.

Der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wann man die kleinere von der größern subtrahirt und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage um wie viel die eine größer sey die andere. Wann also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterscheid nichts oder Null und wann man fragt um viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z.E. $6 = 2 \cdot 3$ so ist der Unterscheid zwischen 6 und $2 \cdot 3$ nichts.

382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich 5 und 3 und man fragt um wie viel 5 größer sey als 3, so ist die Antwort um 2; welche gefunden wird wann man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383.

Hier kommen also drey Sachen zu betrachten vor; erstlich die größere Zahl, zweytens die kleinere, und drittens der Unterscheid, welche unter sich solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben die dritte finden kann. Es sey die größere $= a$ die kleinere $= b$ und der Unterscheid, welcher auch die Differenz genennt wird, $= d$: so wird der Unterscheid d gefunden, wann man b von a subtrahirt, also daß $d = a - b$; woraus erhellet, wie man, wann a und b gegeben sind, d finden soll.

384.

Wann aber die kleinere Zahl b nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wann man den Unterscheid zu der kleinern Zahl addirt, daher bekommt man die größere $a = b + d$. Dann wann man von $b + d$ die kleinere b abzieht, so bleibt übrig d, welches der vorgegebene Unterscheid ist. Gesetzt die kleinere Zahl sey 12 und der Unterscheid 8 so wird die größere seyn $= 20$.

385.

Wann aber die größere Zahl a nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wann man den Unterscheid von der größeren Zahl subtrahirt. Dahero bekommt man $b = a - d$. Dann wann ich diese Zahl $a - d$ von der größeren a subtrahire, so bleibt übrig d, welches der gegebene Unterscheid ist.

386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält. lstens hat man $d = a - b$, 2tens $a = b + d$ und 3tens $b = a - d$, und wann von diesen drey Vergleichungen eine wahr ist, so sind auch die beyden andern nothwendig wahr. Wann dahero überhaupt $z = x + y$, so ist auch nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

387.

Bey einem solchem Arithmetischen Verhältniß ist zu mercken, daß wann zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterscheid eben derselbe bleibet. Also ·wann d der Unterscheid ist zwischen a und b so ist auch d der Unterscheid zwischen den beyden Zahlen $a+c$ und $b+c$, und auch zwischen $a-c$ und $b-c$. Da zum Exempel zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterscheid 8 ist, so bleibt auch dieser Unterscheid, wann man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder subtrahirt.

388.

Der Beweis hievon ist offenbahr. Dann wann $a-b=d$ so ist auch $(a+c)-(b+c)=d$. Eben so wird auch seyn $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Wann die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterscheid zweymal so groß. Wann also $a-b=d$ so wird seyn $2a-2b=2d$; und allgemein wird man haben $na-nb=nd$, was man auch immer vor eine Zahl für n annimmt.

CAPITEL 2

VON DEN ARITHMETISCHEN PROPORTIONEN

390.

Wann zwey Arithmetische Verhältniße einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine Arithmetische Proportion genennt.
Also wann $a-b=d$ und auch $p-q=d$, so daß der Unterscheid zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine Arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a-b=p-q$, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterscheid zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine Arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müßen, daß wann man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wann man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine Arithmetische Proportion aus, weil $12-7=9-4$.

392.

Wann man eine Arithmetische Proportion hat, als $a-b=p-q$, so laßen sich darinn das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch seyn $a-p=b-q$. Dann da $a-b=p-q$ so addire man erstlich beyderseits b

und da hat man $a = b + p - q$. Hernach subtrahire man beyderseits *p,* so bekommt man $a - p = b - q$. Da also $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

393.

In einer jeglichen Arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Dann wann $a - b = p - q$ so ist auch $b - a = q - p$. Dann $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und eben so ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen Arithmetischen Proportion diese Haupt-Eigenschaft wohl zu bemercken, daß die Summ des zweyten und dritten Glieds immer eben so groß sey, als die Summ des ersten und vierten Glieds. Welches auch also ausgesprochen wird daß die Summ der mittlern Glieder so groß sey als die Summ der äußern. Also da $12 - 7 = 9 - 4$ so ist $7 + 9 = 12 + 4$, dann jedes macht 16.

395.

Um diese Haupt-Eigenschaft zu beweisen, so sey $a - b = p - q$; man addire beyderseits $b + q$ so bekommt man $a + q = b + p$, das ist die Summ des ersten und vierten ist gleich der Summ des zweyten und dritten. Hinwiederum auch wann vier Zahlen als *a, b, p, q,* so beschaffen sind, daß die Summ der zweyten und dritten so groß ist als die Summ der ersten und vierten, nemlich daß $b + p = a + q$, so sind dieselben Zahlen gewis in einer Arithmetischen Proportion und es wird seyn $a - b = p - q$. Dann da $a + q = b + p$ so subtrahire man beyderseits $b - q$, und da bekommt man $a - b = p - q$.
Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summ der mittlern $13 + 15 = 28$ der Summe der äußern $18 + 10 = 28$ gleich ist, so sind dieselben auch gewis in einer Arithmetischen Proportion und folglich $18 - 13 = 15 - 10$.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wann von einer Arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder *a, b, p* und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man *q,* so wird man haben $a + q = b + p$. Nun subtrahire man beyderseits *a* so bekommt man $q = b + p - a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wann man das zweyte und dritte zusammen addirt und von der Summ das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summa des zweyten und dritten

$=41$ davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die Arithmetische Proportion wird seyn $19-28=13-22$, oder $28-9=22-13$, oder $28-22=19-13$.

397.

Wann in einer Arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andre weniger der dritten, oder daß der Unterscheid zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterscheid zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19-15=15-11$.

398.

Solche drey Zahlen schreiten in einer Arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wann die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fält, wann die Zahlen um gleich viel kleiner werden, als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen *a, b, c* in einer Arithmetischen Progression, so muß seyn $a-b=b-c$ woraus folget, nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summ $2b=a+c$. Nimmt man beyderseits a weg so bekommt man $c=2b-a$.

400.

Wann also von einer Arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als *a, b* so wird daraus das dritte gefunden, wann man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder einer Arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn $=2\cdot 3-1=5$ und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1-3=3-5$.

401.

Man kann nach dieser Regul weiter fortschreiten und wie man aus dem ersten und zweyten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solcher gestalt die Arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $=2b-a$; das vierte $=4b-2a-b=3b-2a$; das fünfte $6b-4a-2b+a=4b-3a$; das sechste $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$; das siebente $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$ etc.

CAPITEL 3

VON DEN ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine Arithmetische Progression genennt. Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 etc., eine Arithmetische Progression weil dieselben immer um ·eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 etc., ist auch eine Arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl um welche die Glieder einer Arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterscheid genennt. Wann also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die Arithmetische Progression so weit man ·will fortsetzen. Es sey z. E. das erste Glied 2 und die Differenz $=3$ so wird die steigende Progression seyn: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 etc. Wo ein jedes Glied gefunden wird, wann man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen Arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. zu schreiben, damit man so gleich sehen könne das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genennt, das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1 ,	2 ,	3,	4,	5 ,	6 ,	7,	8,	9,	10
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29 etc.

woraus man sieht daß 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz so wird die Arithmetische Progression also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, & a+7d \text{ etc.} \end{array}$$

woraus so gleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wißen und dieses blos allein aus dem ersten Glied a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das l00te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das $n$te Glied seyn $a + (n-1)d$.

406.

Wann die Arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemercken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n-1)d$. Dasselbe wird also gefunden wann man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine Arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste = 4 und die Differenz 3 so wird das letzte Glied seyn $99.3 + 4 = 301$.

407.

Hat man das erste Glied a und das letzte $= z$ nebst der Anzahl der Glieder n so kann man daraus die Differenz d finden. Dann da das letzte Glied ist $z = a + (n-1)d$, so subtrahire man beyderseits a so hat man $z - a = (n-1)d$. Wann man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n-1)$ in d. Man darf also nur $z - a$ durch $(n-1)$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus diese Regul entspringt: Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz; woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine Arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch $9-1$, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz $= 3$, und die Progression selbst wird seyn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die Arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1}=d$ woraus die verlangte Progression seyn wird:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz

$$\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36};$$

folglich wird die Progression seyn:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36} & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

409.

Wann ferner das erste Glied *a* und das letzte *z*, sammt der Differenz *d* gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder *n* finden. Dann da $z-a=(n-1)d$, so dividire man beyderseits mit *d* und da bekommt man $\frac{z-a}{d}=n-1$. Da nun *n* um eins großer $n-1$, so wird $n=\frac{z-a}{d}+1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wann man den Unterscheid zwischen dem ersten und letzten Glied $z-a$ durch die Differenz dividiret und zum Quotient $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied $=4$, das letzte $=100$, und die Differenz $=12$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun Glieder sind folgende:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 4, & 16, & 28, & 40, & 52, & 64, & 76, & 88, & 100. \end{array}$$

Es sey das erste Glied $=2$, das letzte $=6$, und die Differenz $=1\frac{1}{3}$ so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, und diese vier Glieder sind

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3\frac{1}{3}, & 4\frac{2}{3}, & 6. \end{array}$$

Es sey ferner das erste Glied $=3\frac{1}{3}$, das letzte $=7\frac{2}{3}$, und die Differenz $=1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $=\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4,$ und diese vier Glieder sind

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 3\frac{1}{3}, & 4\frac{7}{9}, & 6\frac{2}{9}, & 7\frac{2}{3}. \end{array}$$

410.

Es ist aber hier wohl zu mercken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine gantze Zahl seyn muß. Wann man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.
Wann folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine gantze Zahl gefunden würde so lies sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Dahero muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z-a$ durch d theilen laßen.

411.

Bey einer jeden Arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:
I. das erste Glied a, III. das letzte Glied z,
II. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß wann drey derselben bekant, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wann a, d u. n bekandt sind, so hat man $z=a+(n-1)d$.
II. Wann z, d u. n bekandt sind, so hat man $a=z-(n-1)d$.
III. Wann a, z u. n bekandt sind, so hat man $d=\frac{z-a}{n-1}$
IV. Wann a, z u. d bekandt sind, so hat man $n=\frac{z-a}{d}+1$.

CAPITEL 4

VON DER SUMMATION DER ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

412.

Wann eine Arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summ derselben zu suchen, welche gefunden wird, wann man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde wann die Progression aus sehr viel

Gliedern besteht, so kann eine Regul gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summ gantz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied $=2$, die Differenz $=3$, das letzte Glied $=29$, und die Anzahl der Glieder $=10$ ist.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26, & 29. \end{array}$$

Hier ist nun die Summ des ersten und letzten Gliedes $=31$, die Summa des zweyten und letzten ohne eins 31, die Summa des dritten und letzten ohne zwey $=31$, die Summa des vierten und letzten ohne drey $=31$, und so ferner, woraus man sieht daß immer zwey Glieder die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fält auch so gleich in die Augen. Dann wann das erste Glied gesetzt wird $=a$ und das letzte $=z$, die Differenz aber $=d$, so ist die Summa des ersten und letzten $=a+z$. Hernach ist das zweyte Glied $a+d$ und das letzte ohne eins $=z-d$, welche zusammen genommen machen $a+z$. Ferner ist das dritte Glied $a-2d$ und das letzte ohne zwey $=z-2d$, welche zusammen betragen $a+z$. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summa der obigen Progression zu finden, nemlich von

$$2+5+8+11+14+17+20+23+26+29,$$

so schreibe man darunter eben diese Progression rückwerts und addire Glied vor Glied wie folget

$$\begin{array}{r} 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 \\ 29 + 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\ \hline 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 \end{array}$$

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbahr zweymal so groß ist als die Summa unserer Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summa $=10\cdot 31=310$.

Da nun diese Summa zwey mal so groß ist, als die Summa der Arithmetischen Progression, so wird die rechte Summa seyn $=155$.

416.

Wann man auf diese Art mit einer jeglichen Arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied $=a$, das letzte $=z$, und die Anzahl der Glieder $=n$, indem man eben dieselbe Progressionrückwerts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a+z$, deren Anzahl $=n$, folglich ist die Summa derselben $=n(a-z)$ welche zweymal so groß ist, als die Summa der Progression, dahero ist die Summa der Arithmetischen Progression selbst $=\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regul um die Summa einer jeglichen Arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summa des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summa der gantzen Progression anzeigen.

Oder welches auf eins läuft: man multiplicire die Summa des ersten und letzten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch, man multiplicire die halbe Summa des ersten und letzten Glieds mit der gantzenAnzahl der Glieder, so bekommt man die Summa der gantzen Progression.

418.

Es ist nöthig diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern. Es sey demnach gegeben die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summa gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regul seyn $\frac{100\cdot 101}{2}=50\cdot 101=5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? zu diesem Ende müßen die Zahlen 1, 2, 3, bis 12, zusammen addirt werden, die Summa wird also seyn $\frac{12\cdot 13}{2}=6\cdot 13=78$.

Wollte man die Summa von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wißen, so würde dieselbe herauskommen 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe seyn $=50005000$.

419.

Frage: Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Huffnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu stehen?

Hier wird also die Summa von einer Arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz $=3$, und die Anzahl der Glieder 32 ist, gesuchet.

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regul gefunden wird $=5+31\cdot3=98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summa $\frac{103.32}{2}=103\cdot16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $=a$, die Differenz $=d$, und die Anzahl der Glieder $=n$, woraus die Summa der gantzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $=a+(n-1)d$, so ist die Summa des ersten und letzten Gliedes $=2a+(n-1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na+n(n-1)d$, daher die gesuchte Summa seyn wird $=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Exempel $a=5,\ d=3$, und $n=32$ war, so erhält man die Summa

$$5.32+\frac{31\cdot32\cdot3}{2}=160+1488=1648$$

wie vorher.

421.

Wann die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summa zu finden, das erste Glied $=1$, das letzte $=n$ und die Anzahl der Glieder $=n$, woraus die Summa gefunden wird $\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n=1766$, so wird die Summa aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $=883\cdot1767=1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summa verlangt wird: Hier ist nun das erste Glied 1, die Differenz $=2$, die Anzahl der Glieder $=n$; daraus wird das letzte Glied seyn $1+(n-1)2=2n-1$, daraus erhält man die gesuchte Summa $=nn$.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summa immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 etc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 etc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 etc.

423.

Es sey ferner das erste Glied $=1$, die Differenz $=3$ und die Anzahl der Glieder $=n$, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 etc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1+(n-1)3=3n-2$; daher die Summa des ersten und letzten Glieds $=3n-1$; folglich die Summa der Progression $\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{2n^2-n}{2}$
Nimmt man $n=20$, so ist die Summa $=10\cdot 59=590$.

424.

Es sey das erste Glied $=1$, die Differenz $=d$, und die Anzahl der Glieder $=n$, so wird das letzte Glied seyn $1+(n-1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2+(n-1)d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n+n(n-1)d$, woher die Summa der Progression seyn wird $n+\frac{n(n-1)d}{2}$
Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen:

wann $d=1$, so ist die Summa $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$
" $d=2$ " " " " $n+\frac{n(n-1)}{2}=nn$
" $d=3$ " " " " $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$
" $d=4$ " " " " $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$
" $d=5$ " " " " $n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$
" $d=6$ " " " " $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$
" $d=7$ " " " " $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$
" $d=8$ " " " " $n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$
" $d=9$ " " " " $n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$
" $d=10$ " " " " $n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$ etc.

CAPITEL 5

VON DEN FIGURIRTEN ODER VIELECKIGTEN ZAHLEN

425.

Die Summation der Arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1 oder 2 oder 3 oder eine andere beliebige gantze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wann man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

Setzt man die Differenz $=1$, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese Arithmetische Progression

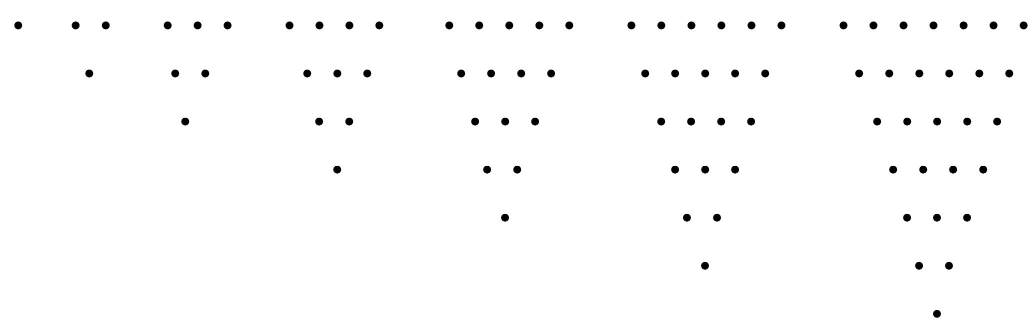
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \text{ etc.}$$

Nimmt man nun in derselben die Summa von einem, zweyen, dreyen, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 \text{ etc.}$$

Also daß $1=1,\ 3=1+2,\ 6=1+2+3,\ 10=1+2+3+4$ etc. Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich, so viel Punckte als eine solche Zahl anzeigt durch ein Dreyeck vorstellen laßen, wie aus folgendem zu ersehen:

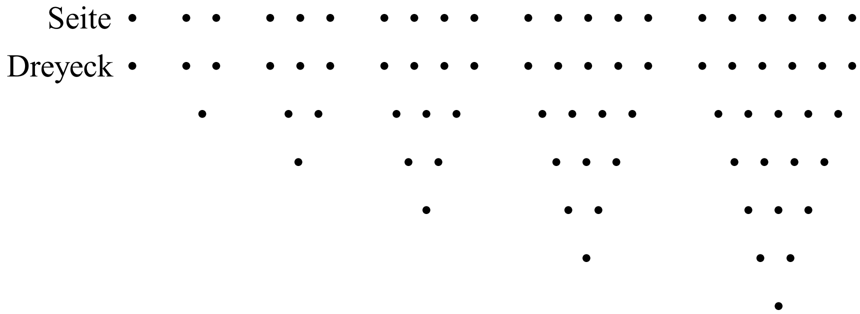
1 3 6 10 15 21 28



etc.

427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man wie viel Punckte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur eines, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punckte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genennt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Punckte, welche schlechtweg ein Dreyeck genennt wird, folgender Gestalt



428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann: Dann es sey die Seite $=n$, so wird das Dreyeck seyn

$$1+2+3+4+\cdots n,$$

deren Summe $=\frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n=1$ so wird das Dreyeck $=1$.
Ist $n=2$ so ist das Dreyeck $=3$.
" $n=3$ " " " " $=6$.
" $n=4$ " " " " $=10$ und so fort.
Nimmt man $n=100$, so wird das Dreyeck $=5050$ etc.

429.

Diese Formel $\frac{nn+n}{2}$ wird nun die General-Formel für alle dreyeckigte Zahlen genennet: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zu Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n+1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.
Also wann $n=12$, so ist das Dreyeck $\frac{12\cdot 13}{2}=6\cdot 13=78$. Ist $n=15$, so ist das Dreyeck $=\frac{15\cdot 16}{2}=15\cdot 8=120$ etc.

430.

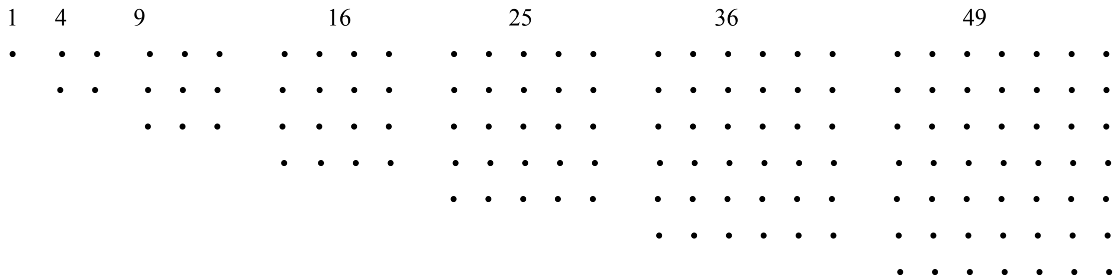
Setzt man die Differenz $=2$ so hat man diese Arithmetische Progression

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 etc.

wovon die Summen diese Reihe ausmachen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genennt werden, und eben diejenige sind, welche oben Quadrate genennet worden. Es lassen sich nehmlich so viel Punckte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:



431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punckte enthält, als die Quadrat-Wurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wann die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 etc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden $= nn$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz $= 3$ und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genennt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so net durch Punckte vorstellen laßen. Dieselben schreiten demnach folgender Maßen fort.

Zeiger	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Arith. Prog.	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
Fünfeck	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176&c.

und der Zeiger weißt die Seite einer jeglichen.

433.

Wann also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wann z. E. $n = 7$ so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wißen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz $=4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten:

Zeiger	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Arith. Prog.	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
Sechseck	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190,&c.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wann also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl

$$=2nn-n=n(2n-1),$$

wobey zu mercken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Dann wann man in diese immer eine überspringt so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die General-Formeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wann also die Seite n ist so wird seyn

$$\text{das Dreyeck } = \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{Viereck } = \frac{2nn+0n}{2} = nn,$$

$$\text{V eck} = \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$\text{VI eck} = \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1),$$

$$\text{VII eck} = \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2},$$

$$\text{VIII eck} = \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2),$$

$$\text{IX eck} = \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2},$$

$$\text{X eck} = \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3),$$

$$\text{XI eck} = \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2},$$

$$\text{XII eck} = \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4),$$

$$\text{XX eck} = \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8),$$

$$\text{XXV eck} = \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2},$$

$$m \text{ eck} = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}.$$

437.

Wann also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckigte Zahl $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckigte Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die zweyeckigte Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ seyn.

Setzt man $m = 3$ so wird die IIIeckigte Zahl $= \frac{nn+n}{2}$.

Setzt man $m = 4$ so wird die IV eckigte Zahl $= nn$ etc.

438.

Um diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXV eckigte Zahl, deren Seite 36 ist? Man suche erstlich vor die Seite n die XXVeckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn-21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= 14526$.

439.

Frage: Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt·wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel, die er dafür bezahlet, sey die 365 eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden so wird $m = 365$ und also das 365 eck von $n = \frac{365nn-361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, woraus der gesuchte Preis des Haußes seyn wird 23970 Rubel.

CAPITEL 6

VON DEM GEOMETRISCHEN VERHÄLTNISS

440.

Das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie viel mal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wann man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient die Benennung des Verhältnißes anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem Geometrischen Verhältniß drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vorsatz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennt wird. Drittens, die Benennung des Verhältnißes, welche gefunden wird, wann man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt: als wann zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt

werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz und die Benennung wird seyn $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$;
woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12 einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreiffe.

442.

Um das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punckte, welche zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also a:b zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerckt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß; dieses Zeichen wird also mit Worten ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder schlecht weg a zu b.

443.

Die Benennung eines solchen Verhältnißes wird demnach durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zehler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschieht, wann man den Zehler und Nenner durch ihren größten gemeinen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ ist gebracht worden indem man den Zehler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444.

Die Verhältniße sind also nur in so fern unterschieden, als ihre Benennung verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnißen, als verschiedene Benennungen gefunden werden können.

Die erste Art ist nun ohnstreitig, wann die Benennung 1 wird; und dieses geschieht, wann die beyden Zahlen gleich sind, als 3:3, 4:4, a:a wovon die Benennung 1 wird, und deswegen das Verhältniß der Gleichheit genennt wird.

Hierauf folgen diejenigen deren Benennung eine ganze Zahl wird, als 4:2 wo die Benennung 2 ist. Ferner 12:4 wo die Benennung 3 ist, und 24 : 6 wo die Benennung 4 ist etc.

Hernach kommen solche vor, deren Benennung durch Brüche ausgedrückt werden. Als 12 : 9 dessen Benennung $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$, ist; $18:27$ dessen Benennung $\frac{2}{3}$ ist etc.

445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und die Benennung d, so haben wir schon gesehen, daß wann a und b gegeben, daraus gefunden werde $d = \frac{a}{b}$.

Ist aber der Nachsatz b nebst der Benennung d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$ weil bd durch b dividirt d giebt, endlich wann der Vorsatz a nebst der Benennung d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Dann wann man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{d}$ dividiret, so ist der Quotus d, das ist die Benennung.

446.

Ein jedes Verhältniß $a : b$ bleibt ohnverändert, wann man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil die Benennung einerley bleibt. Dann wann d die Benennung von $a : b$ ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß $na : nb$ die Benennung $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist die Benennung gleichfals $\frac{a}{b} = d$.

447.

Wann die Benennung in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wann die Benennung auf diesen Bruch $\frac{2}{1}$ gebracht worden so sagt man: $a : b = p : q$ das ist mit Worten a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniß $6 : 3$ die Benennung $\frac{p}{q}$ ist oder 2 so hat man $6 : 3 = 2 : 1$. Eben so sagt man $18 : 12 = 3 : 2$ und 24 : 18 = 4 : 3 und ferner $30 : 45 = 2 : 3$. Läßt sich aber die Benennung nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: dann wann man sagt $9 : 7 = 9 : 7$ so wird es nicht begreiflicher.

448.

Wann sich aber die Benennung auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wann man sagt $288 : 144 = 2 : 1$, so ist die Sache gantz deutlich; und wann man fragt wie sich $105 : 70$ verhalte, so antwortet man wie $3 : 2$. Fragt man weiter wie sich $576 : 252$ verhalte, so antwortet man wie $16 : 7$.

449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste vorzustellen, so muß man die Benennung deßelben auf die geringste Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wann die beyden Glieder des Verhältnißes durch ihren größten gemeinen Theiler dividiret werden. Also das Verhältniß $576 : 252$ wird auf einmal zu diesem $16 : 7$ gebracht, wann man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeiner Theiler ist, dividiret.

450.

Weil nun die Sache darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler zu finden wiße, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

CAPITEL 7

VON DEM GRÖSSTEN GEMEINEN THEILER ZWEYER GEGEBENEN ZAHLEN

451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wann Zehler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine leichtere Form bringen.

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ohngeachtet eine jede vor sich ihre besondere Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß $48:35$ nicht leichter ausgedrückt werden, dann ob gleich sich beyde durch 1 theilen laßen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452.

Wann aber die Zahlen einen gemeinen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeine Theiler durch folgende Regul gefunden. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier überbleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lang bis die Division aufgeht; da dann der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzte Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

252	576	2		
	504			
	72	252	3	
		216		
		36	72	2
			72	
			0	

Hier ist also der größte gemeine Theiler 36.

453.

Es wird dienlich seyn diese Regul durch einige Exempel zu erläutern.
Man suche demnach den größten gemeinen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312	504	1					
	312						
	192	312	1				
		192					
		120	192	1			
			120				
			72	120	1		
				72			
				48	72	1	
					48		
					24	48	2
						48	
						0	

Also ist 24 der größte gemeine Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß $504:312$ auf diese Form $21:13$ bringen.

454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen gegeben $625:529$, für welche der größte gemeine Theiler gesucht werden soll:

529	625	1					
	529						
	96	529	5				
		480					
		49	96	1			
			49				
			47	49	1		
				47			
				2	47	23	
					46		
					1	2	2
						2	
						0	

Hier ist also der größte gemeine Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß $625:529$ auf keine leichtere Form bringen: oder daßelbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

455.

Es ist nun noch nöthig den Beweis von dieser Regul zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere von den gegebenen Zahlen, d aber ein gemeiner Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen laßen, so wird sich auch $a-b$ dadurch theilen laßen, auch $a-2b$ und $a-3b$, und überhaupt $a-nb$.

456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wann die Zahlen b und $a-nb$ sich durch d theilen laßen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen laßen. Dann da sich nb theilen läßt, so würde sich $a-nb$ nicht theilen laßen, wann sich nicht auch a theilen ließe.

457.

Ferner ist zu mercken, daß wann d der größte gemeine Theiler von den beyden Zahlen b und $a-nb$ ist, derselbe auch der größte gemeine Theiler von den Zahlen a und b seyn werde. Dann wann für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeiner Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeiner Theiler von b und $a-nb$, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeine Theiler von b und $a-nb$ also muß auch d der größte gemeine Theiler von a und b seyn.

458.

Diese drey Sätze voraus gesetzt, so laßt uns die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regul befiehlt, theilen, und für den Quotus n annehmen, so erhält man den Rest $a-nb$, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest $a-nb$ mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinen Theiler hat als die gegebene Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest $a-nb$, und da wird wiederum der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinen Theiler haben, und so immer weiter.

459.

Man fährt aber solcher Gestalt fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey demnach p der letzte Divisor, welcher just etliche mahl in seinem Dividend enthalten ist, dahero das Dividend durch p theilbar, und folglich diese Form mp haben wird; diese Zahlen nun p und mp laßen sich beyde durch p theilen, und haben gantz gewis keinen größern gemeinen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Dahero ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regul ist.

460.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da dann die Rechnung wie folget zu stehen kommen wird:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1728 & 2304 & 1 & \\
 & 1728 & & \\
\cline{2-2}
 & 576 & 1728 & 3 \\
 & & 1728 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß $1728:2304$ wird auf dieses gebracht $3:4$; folglich verhält sich $1728:2304$ eben so wie $3:4$.