# CHAPTER 8

## ON GEOMETRICAL PROPORTIONS

461.

Two geometrical proportions are equal to each other, if their least common denominator ratio shall be equal to each other ; and the equality of two such ratios will be called a geometrical proportion, which is written thus $a:b=c:d$ , but in words the same will be called thus : *a* itself stands to *b* as *c* itself to *d,* or *a* to *b* as *c* to *d.* An example of such a proportion is now $8:4=12:6$. In that case $\frac{2}{1}$ is the reduced ratio of the proportion 8 : 4 , and likewise of the ratio 12 : 6.

462.

Thus if $a:b=c:d$ is a geometrical proportion, so besides an equal reduction to a common denominator must occur and consequently there shall be $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; and on the other hand, if the fractions $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ are equal to each other, thus there is $a:b=c:d$ .

463.

A geometrical proportion therefore consists of four terms which are provided thus, so that the first term divided by the second shall be just as great as the third term divided by the fourth. From this a very important general rule for all geometrical proportions follows, which consists of this, that the product from the first and fourth terms is always the same as the product of the second and third. Or more briefly, that the product of the extremes is equal to the product of the mean terms.

464.

In order that this property can be understood, thus $a:b=c:d$ shall be a geometric proportion, and also $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ [*i.e.* the former reduced to its lowest terms]. Each of these fractions is multiplied by *b,* so there arises $a=\frac{bc}{d}$, further both sides of this are multiplied by *d,* thus there becomes $ad=bc$. But now *ad* is the product of the outer terms and *bc* the product of the inner terms, both products consequently will be equal to each other.

465.

If conversely four numbers *a, b, c, d,* may be put in place thus, so that the product of the extreme terms *ad* is equal to the product of the mean terms *bc,* thus the same stand in a geometrical proportion. Since then $ad=bc$ thus divide both sided by *bd,* there becomes $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ or $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; therefore $a:b=c:d$ .

466.

The four terms of a geometric proportion such as $a:b=c:d$ can be arranged in different ways, so that the proportion remains. For it arises from this, that the product of the extreme terms remains equal to the product of the mean terms, or that $ad=bc$. Thus there is had, in the first place $a:b=c:d$, secondly $a:c=b:d$, thirdly $d:b=c:a$, and fourthly $d:c=b:a$.

467.

Besides, these proportions allow still more geometrical proportions to be derived. If $a:b=c:d$, thus in the first place there will be $a+b:a$ or the first + the second to the first, as $c+d:c$ or the third + the fourth to the third; namely $a+b:a=c+d:c$.

Then also there is the first −the second to the first, as the third − the fourth to the third ; or $a-b:a=c-d:c$.

For if the product of the outer and the inner terms is taken, thus it is shown that $ac-bc=ac-ad$ , since $ad=bc$. Further there will be also $a-b:b=c-d:d$, since $ad-bd=bc-bd$ and $ad=bc$.

468.

All these proportions seen to be derived from $a:b=c:d$, can also be established in a general manner

$$ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd.$$

Since the product of the outer terms is $mpac+npbc+mqad+nqbd$,
or since $ad=bc$, so the same will be $mpac+npbc+mqbc+nqbd$; but the product of the inner terms $mpac+mqbc+npad+nqbd$, or since $ad=bc$ so the same will be $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, which is as one with that.

469.

Thus from a given proportion such as for example, $6:3=10:5$, indefinitely many other proportions can be derived, of which we will put in place a few here.

$$3:6=5:10,\ 6:10=3:5,\ 9:6=15:10,$$
$$3:3=5:5,\ 9:15=3:5,\ 9:3=15:5.$$

470.

Since in a geometric progression the product of the outer terms is equal to the product of the middle terms, thus it is possible, if the three first terms shall be known, to find the fourth term from the same. Let the three first terms be $24:15=40$ to . . . . Then since here the product of the middle terms is 600 , so must the fourth term with the first, that is multiplied by 24 also make 600, consequently 600 must be divided by 24, and there the quotient will give the sought fourth term 25. Therefore the proportionality is $24:15 = 40:25$. And if generally the three first terms shall be $a:b = c:\ldots$, then one puts the letter *d* puts for the unknown fourth term, and since there must be $ad = bc$ thus one divides both sides by *a* and one finds $d = \frac{bc}{a}$; consequently the fourth term is $= \frac{bc}{a}$, and will be found if the second and third terms are multiplied together, and the product is divided by the first term.

471.

Now on this is based the reason behind the celebrated rule of three in all arithmetic books, as therein from three given numbers such a fourth always can be found, which stands with those in a geometric progression, hence as the first maintains to the second, as the third to the fourth.

472.

Hereby several particular circumstances arise to be considered : as if the two proportions have the same first and third terms, as in these $a:b = c:d$ and $a:f = c:g$ thus also to second shall be proportional to the fourth, namely it will itself keep the ratio $b:d = f:g$; since follows from the first that $a:c = b:d$, and from the second $a:c = f:g$, thus the ratios $b:d$ and $f:g$ shall be equal to each other, since each one is equal to the ratio $a:c$. Thus since $5:100 = 2:40$ and $5:15 = 2:6$, it follows from this that $100:40 = 15:6$.

473.

But if two proportions are found to be provided within themselves with the very same middle terms, thus conversely the first of the terms maintains the same ratio to the fourth. If namely $a:b = c:d$ and $f:b = c:g$, thus consequently from that $a:f = g:d$. For example let these proportions be given $24:8 = 9:3$ and $6:8 = 9:12$, thus from that it follows that $24:6 = 12:3$. The basis of that is clear : since the first gives $ad = bc$ and the second $fg = bc$, consequently there will be $ad = fg$, and $a:f = g:d$, or $a:g = f:d$.

474.

But from two given proportions a new one can be made always, if the first and the second, the third and the fourth terms in particular shall be multiplied by each other. Thus from these proportions $a:b = c:d$ and $e:f = g:h$ this ratio $ae:bf = cg:dh$ can be put together. Then since in the first place $ad = bc$ and from the second $eh = fg$, thus also there will be $adeh = bcfg$. But now *adeh* is the product of the outer and *bcfg* the product of the middle terms in the new proportion, which consequently are equal to each other

475.

For example, let the two proportions be given $6:4=15:10$ and $9:12=15:20$ thus giving us the same following proportion on multiplying together

$$6\cdot 9:4\cdot 12=15\cdot 15:10\cdot 20$$

that is $$54:48=225:200$$

or $$9:8=9:8.$$

476.

At last here it is to be observed, that if two products shall be equal to each other, as $ad=bc$, from that again a geometric proportion shall be able to be formed. Namely there is always the one factor of the first product to the one of the second, as the other factor of the second to the second of the first. Namely there becomes $a:c=b:d$. Since for example, $3\cdot 8=4\cdot 6$ thus this proportion $8:4=6:3$ or $3:4=6:8$; and since $3\cdot 5=1\cdot 15$, thus there arises $3:15=1:5$, or $5:1=15:3$, or $3:1=15:5$.

## CHAPTER 9

## NOTES ON PROPORTIONS AND THEIR USES

477.

This instruction is in general of such usefulness in commerce and exchange, that almost nobody can do without the same. Prices and goods are always proportional to each other and all different kinds of money can arise from that, the ratio between which is to be determined. These examples and reflections we have furnished will be very conducive to explain better and to apply the benefits to be derived from proportions.

478.

It is required to investigate the ratio between two kinds of money, e.g. a Louisdor and a Ducat, thus it has to be known how much these pieces are worth when compared to a single kind of money. Thus since in Berlin a Louisdor is worth 5 Rthl. 8 Gr. , but a Ducat is worth 3 Rthl. thus now one must express both these values in a single money, either in Thalers , and there this proportion is known $1\text{ L.}:1\text{ D.}=5\frac{1}{3}\text{ Rthl.}:3\text{ Rthl.}$ that is as $16:9$; or in Groschen one has this proportion $1\text{ L.}:1\text{ D.}=128:72=16:9$, [24 Groschen (Gr.) = 1 Reichstaler (Rthl.)] and from such a proportion the ratio is found between Louisdors and Ducats, in which the equality of the product of the outer and middle terms gives 9 Louisdor $=16$ Ducats; and with the help of this comparison each sum of Louisdor can be converted into Ducats. Thus if it were asked, how much does 1000 Louisdor amount to in Ducats, thus this rule of three is made : 9 L'd'or makes 16 Ducats ; how many for 1000 L'd'or? Answer: $1777\frac{7}{9}$ Duc.

But if it is asked how much does 1000 Duc. become in L'd'or then this rule of three is put in place: 16 Duc. makes 9 L'd'or, how many for 1000? Answer: $562\frac{1}{2}$ L'd'or.

479.

Here in St. Petersburg the value of Ducats varies and depends on the exchange rate, whereby the worth of Rubles can be found in Dutch stivers, of which 105 amounts to one Ducat.

Thus if the exchange is 45 stivers to the Ruble, thus this proportion is found : $1\text{ Rbl.}:1\text{ D.}=45:105=3:7$, and therefore from this correspondence : $7\text{ Rbl.}=3\text{ Duc}$. From which it can be found how much a Ducat is worth in Rubles: for $3\text{ D.}:7\text{ Rbl.}=1\text{ D.}:\ \ldots$ Answer $2\frac{1}{3}$ Rubles. But if the exchange rate were 50 Stiver thus there would be this proportion $1\text{ Rbl.}:1\text{ D.}=50:105=10:21$, and therefore this correspondence $21\text{ Rbl.}=10\text{ Duc}$. From which there will be $1\text{ Duc.} =2\frac{1}{10}\text{ Rbl}$. But if the exchange rate is only 44 Stivers, thus there is $1\text{ Rbl.}:1\text{ Duc.}=44:105$, and so $1\text{ Duc.}=2\ \frac{7}{44}\text{Rbl.} =2\text{ Rbl. }38\frac{7}{11}\text{ Cop}$.

480.

It follows that more than two different kinds of money can be compared with each other, which in particular often happens for exchanges. In order to give an example of this, thus suppose someone from here wants to transfer 1000 Rubles to Berlin, and wants to know how many ducats it will amount to in Berlin . But here the local exchange is $47\frac{1}{2}$ Stivers (namely one Ruble makes $47\frac{1}{2}$ Dutch Stiver). Then in Holland 20 Stiver makes a Dutch Florin. Further $2\frac{1}{2}$ Dutch Fl. makes a Special Dutch Rthl. Further the exchange rate from Holland to Berlin is 142, that is 100 Spec. Rthl. is worth 142 Rthl in Berlin. Finally the value of 1 Duc. paid in Berlin is 3 Rthl.

481.

In order to resolve this question, thus initially we will go step by step. Thus we will start with the Stivers, and since $1\text{ Rbl.}=47\frac{1}{2}$ Stiver, or $2\text{ Rbl.}=95\text{ Stiv.}$ thus putting $2\text{ Rbl.}:95\text{ Stiv.}=1000:$ ... The answer is 47500 Stiv. We go further and set $20\text{ Stiv.}:1\text{ Fl.}=47500\text{ Stiver}:$ .... giving 2375 Fl.

Further since $2\frac{1}{2}\text{Fl.}=1\text{ Sp. Rthl}$, that is, since $5\text{ Fl.}=2\text{ Sp. Rthl}$. thus setting $5\text{ Fl.}:2\text{ Sp. Rthl.}=2375\text{ Fl.}$ to give .... $950\text{ Sp. Rthl}$.

Then we go to the Berlin Rthl. according to the exchange rate of 142: Thus $100\text{ Sp. Rthl.}:142\text{ Rthl.}=950:$ .... giving 1349 Rthl.

Now finally we go to the Ducats and thus put : $3\text{ Rthl.}:1\text{ Ducat}=1349\text{ Rthl.}$ to give . . . the answer $449\frac{2}{3}$ Ducats.

482.

In order to provide more enlightenment about this calculation, thus we will make the Berlin Banker unwilling to pay this sum, from one pretext or another, whatever it might be, and wants none other than this bill of exchange be made with a 5 percent discount to be paid on the transaction. But if this is to be considered also, that he pays only 100 instead of 105, thus this rule of three must become, $105:100=449\frac{2}{3}$ to give . . . . thus $428\frac{16}{63}$ Ducats.

483.

Whereby this requires six calculations according to the rule of three ; but a means has been found for abbreviating exceedingly these calculations with the help of the so-called chain rule. In order to make the same clear, thus let us consider the two terms in the above ratios of the above calculations in terms of proportions and present here to be viewed :

I.) $2\text{ Rbl.}:95\text{ Stiv.}$ II.) $20\text{ Stiv}:1\text{ Fl. Holl.}$ III.) $5\text{ Fl. Holl.}:2\text{ Sp. Rthl}$

IV.) $100\text{ Sp.Rthl.}:142\text{ Rthl.}$ V.) $3\text{ Rthl.}:1\text{Ducat}$ VI.) $105\text{ Duc.}:100\text{ Duc.}$

If we now consider the above calculation thus we find, that always we have multiplied the given sum by the second part and divided by the first part ; therefore it is clear, that just as these can be found, if the given sum be multiplied by the product of all the second parts and divided by the product of all the first parts; or if one makes these into a single rule of three: as the product of all the first parts in the ratio to the product of all the second parts, thus gives the ratio itself of the number of Rubles to the number of Ducats which will be exchanged in Berlin.

484.

This calculation will be even more abbreviated if anything in the first place can be cancelled with anything in the second place, since then the same places must be crossed out and the quotient put in their place, which is given by the removal. The above example can be put in place according to this method :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rbl. $\cancel{2}$ | : | 19 $\cancel{95}$ Siv. Holl | Exchanges as 1000 Rbl. to.... |
| $\cancel{20}$ | : | 1 Holl. Fl. | |
| $\cancel{5}$ | : | $\cancel{2}$ Sp. Rthl. | |
| 100 | : | 142 Rthl. | |
| 3 | : | 1 Duc. | |
| $\cancel{10}\ \cancel{5}$.21 | : | $\cancel{5.100}$ Duc. | |

63$\cancel{00}$ : 2698 = 10$\cancel{00}$ zu ...

7)26980

9) 3854 (2

428 (2 Answer $428\frac{16}{63}$ Ducats.

485.

In order to use the chain rule, thus this order must be watched : one starts with the kind of money from which the question is about and compares the same with some other, with which the following ratio can further be put in place, and the same compared with a third, thus so that each ratio begins with just the kind of money with which the last one ended, and thus one proceeds in turn until the final kind arises, in which the answer shall be put in place, and at last the expenses or charge can be accounted for.

486.

In order to provide further clarification we will put a few more questions in place. If the Ducats in Hamburg gain 1 per cent on the 2 Rthl. in the bank (that is, if 50 Ducats make not 100, but 101 Rthl. on the bank) and the exchange rate between Hamburg and Konigsberg is 119 Polish Grosen, (that is, 1 official bank [B$^o$] Rthl. is equivalent to 119 Polish Grosen) how much does 1000 Ducat amount to in Polish Grosen ? (30 Polish Grosen makes 1 Polish florin.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Duc. 1 | : | $\cancel{2}$ Rthl. B$^o$ | Exchanges as 1000 Rbl. to.... |
| 1$\cancel{00}$.50 | : | 101 Rthl. B$^o$ | |
| 1 | : | 119 Gr. Pol. | |
| 30 | : | 1 Fl. Pol. | |

1500 : 12019 = 1000 Duc. to ...

3) 120190

5) 40063 (1

8012 (3 Answer $8012\frac{2}{3}$ Fl. Pol.

487.

To abbreviate even more the number sought can be put above the second row, since then the product of the second row can be divided by the product of the first row, giving the answer sought. [*i.e.* the ratios are inverted.]

Question : Leipzig lets Ducats come from Amsterdam, which itself is worth 5 Fl. 4 St. (that is, 1 Duc. is worth 104 St. or 5 Duc. makes 26 Fl. Hol.) If now the exchange rate of the bank in Amsterdam is 5 p.c. (that is 105 in the exchange makes 100 in the bank) and the exchange rate of Leipzig to Amsterdam in the bank money is $133\frac{1}{4}$ p.c. (that is 100 Rthl. is worth $133\frac{1}{4}$ in LeipzigThl.); Finally 2 Rthl. Hol. makes 5 Fl. Hol., after these exchanges how much shall 1000 Ducats in Leipzig to be worth in Thl.

$$\begin{array}{rcl}
 & & \cancel{5}\ \ 1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\ \text{Duc.} \\
\text{Ducats}\ \ \cancel{5} & : & 26\ \text{Fl. Hol. exchange.} \\
\cancel{1}\cancel{0}\cancel{5}\ \ 21 & : & 4\ \cancel{2}\cancel{0}\ \ 1\cancel{0}\cancel{0}\ \text{Fl. Hol. B}^{\text{o}} \\
\cancel{5} & : & \cancel{2}\text{Rth. Hol. B}^{\text{o}} \\
\cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}\ \ \cancel{2} & : & 533\ \text{Thl. in Leipzig} \\
\hline
21 & : & 3)\ 55432(1. \\
\hline
 & & 7)\ 18477\ (1. \\
 & & 2639\ (4.
\end{array}$$

Answer $2639\frac{13}{21}$ Thl. or 2639 Thl. 15 good Grosch.

## CHAPTER 10

## ON COMPOUND RATIOS

488.

Two or more ratios can be compounded together, if thus the first parts are multiplied together and the second parts as well are multiplied together; and as then it is known, what the ratio between both these products shall be, from these two or more given ratios.

Thus from these ratios $a:b,\ c:d,\ e:f$ this ratio can arise by compounding these $ace:bdf$ .

489.

Since a ratio remains the same, if both its initial and post terms are divided or reduced by the same number, thus so that the above compound ratio can be made much smaller, if the pre and post terms cancel or diminish each other, as happened in the previous chapter.

Thus such a form will be found from compounding the following given ratios. The given ratios are :

12:25, 28:33, and 55:56

$$\begin{array}{c}
\cancel{1}\cancel{2}.\cancel{4}.2:5.\cancel{2}\cancel{5}\\
\cancel{2}\cancel{8}\quad :\cancel{3}.\cancel{3}\cancel{3}\\
\underline{\cancel{5}\cancel{5}.\cancel{5}\quad :\cancel{2}.\cancel{5}\cancel{6}}\\
2:5
\end{array}$$

Thus 2:5 is obtained by compounding the ratios.

490.

Just as this give rise to a general method from letters ; and in particular this is the noteworthy case, where always and initial term is equal to the last second term. Thus if the given ratios are :

$$\begin{array}{c}
a:b\\
b:c\\
c:d\\
d:e\\
\underline{e:a}
\end{array}$$

thus the composite ratio is as 1 : 1.

491.

In order to show the usefulness of these principles, thus it can be observed, that two rectangular fields have such a ratio between each other, which compounded is the proportion of their length and their breadth.

For example, let there be two such fields A and B. Of which A shall be 500 ft. long and 60 ft. wide, and of B the length shall be 360 ft. and the width 100 ft.; thus the ratio of the length to be as 500:360 and of the widths to be as 60:100. Thus the ratio is

$$\begin{array}{c}
\cancel{500}.5 : 6.\cancel{360}\\
\underline{\cancel{60}\quad :\quad \cancel{100}}\\
5:6
\end{array}$$

Thus the field A is related to the field B as 5 to 6.

492.

Another example. The field A to be 720 ft, long and 88 ft. wide; but field B to be 660 ft. long and 90 ft. wide, thus the two following ratios must be compounded :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ratio of the lengths | $\cancel{720}.8$ | : | $15.\cancel{60}.\cancel{660}$ |
| ratio of the widths | $\cancel{88}.8.2$ | : | $\cancel{90}$ |
| | 16:15 | | |

And this is the ratio of [the areas of] fields A and B.

493.

Further in order to compare the space or volumes between two given rooms, thus their ratio is known from three compositions. Namely from the ratio of the lengths, the widths, and the heights. Let there be for example, a room A, of which the length $= 36$ ft., the width = 16 ft, and the height $= 14$ ft. But of another room B the length shall be $= 42$ ft., the width 24 ft., and the height 10 ft., thus the three ratios are :

| | | | |
|---|---|---|---|
| the length | $\cancel{36}.\cancel{6}.3$ | : | $\cancel{42}.6$ |
| the width | $\cancel{16}.2$ | : | $\cancel{24}.\cancel{3}$ |
| the height | $\cancel{14}.2$ | : | $\cancel{10}.5$ |
| | 4:5 | | |

Thus the volume of the room A is to the volume of room B as 4 to 5.

494.

If the ratios, which have been composed in such a form, are equal to each other, then duplicate ratios arise from that. Namely from two equal ratios there arises a doubled or squared ratio; from three alike a threefold or cubic ratio, and so forth. Thus the ratio $aa:bb$ is composed from the ratios $a:b$ and $a:b$; therefore it is known that the squares stand in the duplicate ratio of their root. And from the ratio $a:b$ taken three times, the ratio arises $a^3:b^3$, hence it is known that cubes are in the threefold ratio of their root.

495.

It is shown in geometry, that two circular spaces are in the doubled ratio of their diameters, that can be said as well, that they stand in the square ratio of their diameters.
Let A be such a circular area of which the diameter $= 45$ ft., but of another circular area B the diameter shall be $= 30$ ft., thus that space will be to this one as $45 \cdot 45$ to $30 \cdot 30$, or their ratio is composed from these two equal ratios:

$$\cancel{45}.\cancel{9}.3 : \cancel{30}.\cancel{6}.2$$
$$\cancel{45}.\cancel{9}.3 : \cancel{30}.\cancel{6}.2$$
$$9:4$$

Consequently these areas behave between themselves as 9 to 4.

496.

Further it is proven also, that the volumes of round globes are maintained in the ratio of the cubes of their diameters. Thus if the diameter of a globe A is one foot, and another globe B is of two feet, thus the volume of globe A itself to the volume of globe B behaves as $1^3 : 2^3$ or as 1:8.

Thus if these globes are constructed from a single material, thus the globe B will be eight times heavier than the globe A.

497.

Hence the weight of cannon balls can be found from their diameters, if the weight of one is known. For example let there be a ball A of which the diameter $= 2$ inches, and the weight is five pounds, the weight is wanted of another ball B, whose diameter is $= 8$ inches.

Here this proportion is now in place $2^3 : 8^3 = 5 : ...$ giving 320 lbs, and this is the weight of the ball B. But of another ball C, of which the diameter $= 15$ the weight can be found :

$$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots\ldots \text{ Answer } 2109\tfrac{3}{8} \text{ lbs.}$$

498.

If the ratio between two fractions is sought, such as $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ then the same can be expressed always by whole numbers: then both fractions must be multiplied by $bd$, thus this ratio comes to $ad : bc$ to which that is equal, therefore this proportion arises $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$.Now let the given $ad$ to $bc$ again be abbreviated, thus so that the ratio is more manageable. Thus

$$\tfrac{15}{24} : \tfrac{25}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10.$$

499.

Further it is asked how these given fractions $\frac{1}{a}$ and $\frac{1}{b}$ behave to each other, that is clearly to be as $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$ , which also can be expressed in words: That these two fractions whose numerators are 1 behave inversely as their denominators. This holds also of two fractions, which have equal numerators. Since then $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, thus they also behave inversely as their denominators. But having two equal denominators, such as $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, thus they behave as the numerators, namely as $a : b$. Thus there is

$$\tfrac{3}{8} : \tfrac{3}{16} = \tfrac{6}{16} : \tfrac{3}{16} = 6 = 3 = 2 : 1 \text{ and } \tfrac{10}{7} : \tfrac{15}{7} = 10 : 15 \text{ or } 2 : 3.$$

500.

For the free fall of a body it has been observed, that in one second a body falls 15 ft. [from rest initially, taking the acc. of gravity as 30m/sec$^2$], but in two seconds it falls through a height of 60 ft., and in three seconds 135 ft., from which it can now be concluded, that the height behaves as the square of the time ; and also conversely the time behaves as the square root of the height.

Now it is enquired about how long a time a stone takes to fall down from a height of 2160 ft., thus there is $15:2160 = 1:$ square of the time sought.

Thus the square of the time sought is 144, and the time itself 12 seconds.

501.

It can be asked, how far can a stone drop in an hour, that is, in 3600 seconds ?

Thus it is known: as the square of the time, that is as $1^2 : 3600^2$ thus the ratio between the given height $= 15$ ft. and the height sought.

$$
\begin{array}{l}
1:12960000 = \text{ 15 to ...} \\
\underline{\qquad\qquad 15} \\
\quad 64800000 \\
\underline{\;1296\qquad} \\
194400000 \qquad \text{Answer 194400000 ft.}
\end{array}
$$

We consider 5280 ft. as a mile, thus the height will be 39272 miles, or about five times the diameter of the earth. [The original arithmetic is in error, and of course the formula applies only above and close to the surface of the earth!]

502.

A condition is found equally for the price of precious stones, which does not follow in proportion to the weight itself, but reaches towards a greater proportion. For diamonds this rule holds, that such a ratio varies as the square of the weight, or the ratio of the cost is equal to the ratio of the weights doubled. Now diamonds themselves are weighed in a unit called the caret, and which contains four grains. Now if a diamond of one caret counts as 2 Rubles, thus a diamond of 100 carets counts as much more as the square of 100 is greater than the square of 1. Thus the rule of three must be invoked :

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ Rubals} : \text{ ...or}$$
$$1:10000 = 2 \text{ Rbl. to} \cdots \text{ Answer 20000 Rbl.}$$

In Portugal a diamond is found of 1680 carets of which the price can be found thus :

$$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ Rubals} : \ldots\ldots \text{or}$$
$$1 : 2822400 = 2 : \ldots\ldots \quad \text{Answer } 5644800 \text{ Rubals.}$$

503.

The postage give the composition of ratios a noteworthy example, as the postage money must be paid for the number of miles and the cost of the horses according to a compound ratio. Thus if 8 Gr. or $\frac{1}{3}$ Rthl. was paid for a horse over 8 miles , and it was required to know how much should be paid for 28 horses over $4\frac{1}{2}$ miles ? Thus one sets down first the ratio of the horses, that is :

$1:28,$ from which the ratio of the miles
$\underline{2:9}$ , and putting the two proportions together
$2:252$, or on cancelling, $1:126 = \frac{1}{3}$ to...the answer 42 Rthl.

If a ducat is paid for 8 horses over 3 miles, how much does 30 horses over 4 miles cost ? here the reckoning can be put in place thus :

$$\begin{array}{l} \cancel{8}.\cancel{2} : \cancel{3}\cancel{0}.\cancel{1}\cancel{5}.\,5 \\ \underline{\cancel{3} \quad : \ \cancel{4} \qquad\quad} \\ \qquad 1:5 = 1 \text{ ducat} : \ldots \end{array}$$

Therefore the cost is 5 ducats.
[We would now perhaps tackle such a ratio problem in terms of cost per horse-mile, which in this case would be $\frac{1}{24}$ ducat per horse-mile, and hence the cost becomes $\frac{1}{24} \times 30 \times 4 = 5$ ducats.]

504.

Also for laborer this compound ratio arises, since the pay according to the compound ratio of the cost per worker and the number of days worked must be taken into account.
Thus if for example a mason is given 10 Gr. daily and it will be known, how much the cost must be, for 24 masons, which have had to work for 50 days long? Thus the reckoning is put in place :

$$\begin{array}{l} 1:24 \\ 1:50 \\ 1:1200 = 10 \text{ Gr.} : 500 \text{ Rthl.} \\ \quad\underline{\quad 10 \quad} \\ 3)\underline{\ 12000 \text{ Gr.}} \\ 8)\underline{\ 4000 \quad\ } \\ \qquad 500 \text{ Rthl.} \end{array}$$

[Thus, as 24 Groschen (Gr.) $=1$ Reichstaler (Rthl.) then the cost of a laborer per day is $\frac{10}{24}$ Rthl., and hence the cost per laborer for 50 days is $\frac{500}{24}$, and hence for 24 labours the cost is 500 Rthl.]

Since in suchlike examples five parts of ratios are given, thus in the arithmetic books the method is called the rule of five.

## CHAPTER 11

## ON GEOMETRICAL PROGRESSIONS

### 505.

A series of numbers repeated many times, which always becomes equally larger or smaller, will be called a geometric progression, because every term stands in the same proportion to the following term, and the number which indicates how much greater each single term is, than that before, will be called the common ratio ; thus if the first term is 1 and the common ratio $=2$, then the geometric progression is the following :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Terms | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10 |
| Prog. | 1, | 2, | 4, | 8, | 16, | 32, | 64, | 128, | 256, | 512 etc. |

where we have noted above what each term in the progression shall be.

### 506.

Generally, if the first term is put $=a$ and the common ratio $=b$, thus the geometric progression is put in place :

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \ldots\ldots n \\ \text{Prog.} & a, & ab, & ab^2, & ab^3, & ab^4, & ab^5, & ab^6, & ab^7 \ldots\ldots ab^{n-1} \end{array}$$

Therefore if this progression is established from $n$, thus the last term $=ab^{n-1}$. Here it is to be observed, that if the common ratio $b$ is greater than 1, that the terms always become greater, but if the common ratio is $b=1$ then the terms stay equal to each other always, and if the common ratio $b$ is less than 1, or a fraction, thus the terms always become smaller. Thus if $a=1$ and $b=\frac{1}{2}$, then this geometric progression is obtained :

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64},\ \tfrac{1}{128},\ \text{etc.}$$

507.

Hereby the following parts to be considered arise:

I.) The first term which here is called *a,*
II.) the common ratio which here is called *b,*
III.) the number of terms which is set $=n$,
IV.) the last term which is found $=ab^{n-1}$.

Therefore if the three first terms are given, thus the last term is found if the $n-1^{\text{th}}$ power of the common ratio *b,* that is $ab^{n-1}$, is multiplied by the first term *a*.

Now if the $50^{\text{th}}$ term of this geometric progression 1, 2, 4, 8, etc. is required, thus here there is $a=1,\ b=2$ and $n=50$. Therefore the $50^{\text{th}}$ shall be $2^{10}$.
Now since $2^{9}=512,$ thus $2^{10}=1024$. From this the square taken gives $2^{20}=1048576$.
Further the square taken gives $2^{40}=1099511627776$. Now if
$2^{40}$ is multiplied by $2^{9}=512$, thus there becomes
$2^{49}=512\cdot 1099511627776\ =\ 562949953421312.$

508.

Hereby the customary question to be asked especially, how the sum of all the terms of such a progression shall be found, which we will show here in the following manner. Initially, let the first ten terms of the progression be given : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 , for which we will indicate the sum by the letter $s$ , so that

$$s=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$$

thus twice the sum is given:

$$2s=2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024.$$

From this the above progression is taken away, thus there remains finally :
$s=1024-1=1023$; thus the sum sought is $=1023$.

509.

Let us now take an unspecified number of terms just for this progression and set $=n$, thus the sum will become

$$s=1+2+2^{2}+2^{3}+\ \cdots\cdots\ 2^{n-1}.$$

These multiplied by 2 by two gives

$$2s=2+2^{2}+2^{3}+2^{4}+\ \cdots\cdots\ 2^{n};$$

from these the former is taken away thus arriving at $s = 2^n - 1$. Therefore the sum sought is found, if the last term $2^{n-1}$ is multiplied by the common ratio 2 so that it becomes $2^n$, and 1 is taken away from this product.

510.

This we will explain in the following example, in that we will write for *n* sequentially 1, 2, 3, 4 etc.

$$1 = 1,\ 1+2 = 3,\ 1+2+4 = 7,\ 1+2+4+8 = 15,$$
$$1+2+4+8+16 = 31,\ 1+2+4+8+16+32 = 63. \text{ etc.}$$

511.

Here these questions arise usually : Someone is selling his horse by the nails, of which there are 32 : for the first nail he asks 1 penny, for the second 2 pennies, for the third 4 pennies, for the fourth 8 pennies and always for the following twice as much as for the last. Now the question is, for how much was the horse sold?

Thus here the geometrical progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. as far as the 32nd term be put in place and the sum of all to be sought. Now since the last term will be $2^{31}$, thus above it has been found already that $2^{20} = 1048576$, this is to be multiplied by $2^{10} = 1024$, in order to have $2^{30} = 1073741824$. This multiplied by 2 gives the last term $2^{31} = 2147483648$; consequently the sum will be equal to this number taken doubled less 1 : that is 4294967295 pennies [Pfennig or Pf. in the original, which we now use in the following; there being 12 Pf. to the Groschen, and 24 Groschen to the Reichstaler (Rthl.)] :

2) 4294967295 Pf.
6) 2147483647 (1
or 357913941 Gr. 3 Pf.
3) 357913941
8) 119304647
or 14913080 Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

Therefore the price of the horse is 14913080 Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

512.

Now the common ratio shall be $= 3$ and the geometric progression shall be 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, and from these 7 terms shall be the sum to be found. The same shall be as great as $= s$, thus :

$$s = 1+3+9+27+81+243+729.$$

Multiply by 3 in order to have

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

From this subtract the above series, thus giving $2s = 2187 - 1 = 2186$. Therefore twice the sum $= 2186$ and consequently the sum is 1093.

513.

Just as in this progression the number of terms shall be $= n$ and the Sum $= s$, thus that gives $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ ...3^{n-1}$, which multiplied by 3 gives $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ ...3^n$. From this we subtract the above, and because all such terms of the other series, apart from the last, are cancelled with terms of the above, apart from the first, thus there becomes $2s = 3^n - 1$ and thus $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Thus the sum will be found, if the last term is multiplied by 3, and 1 taken from the product, and then the remainder divided by 2 just as the following examples show :

$$1 = 1,\ 1 + 3 = \tfrac{3.3-1}{2} = 4,\ 1 + 3 + 9 = \tfrac{3.9-1}{2} = 13,$$

$$1 + 3 + 9 + 27 = \tfrac{3.27-1}{2} = 40,\ 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \tfrac{3.81-1}{2} = 121.$$

514.

Now let the first term of a general kind $= a$ , the common ratio $= b$, the number of terms $= n$ and the sum of the same $= s$, thus so that

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^{n-1}.$$

This will be multiplied by $b$ thus to become

$$bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^n.$$

From this the above equation is taken away, thus there is given $(b-1)\cdot s = ab^n - a$. From this the sum sought arises $s = \frac{ab^n - a}{b-1}$. Therefore the sum of any geometric progression is found if the last term is multiplied by the common ratio of the progression, and from that product the first term is taken away and the remainder is divided by the common ratio less 1.

515.

One has a geometric progression of 7 terms; the first $= 3$ and the common ratio is $= 2$, thus there is $a = 3,\ b = 2$ and $n = 7$; consequently the last term is $3 \cdot 2^6$ which is $3 \cdot 64 = 192$, and the progression itself is :

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192$$

and thus the last term 192 multiplied by the common ratio 2 gives 384, from which the first term 3 taken away leaves 381, this remainder is divided by $b-1$, that is by 1, giving 381, which is the sum of the progression.

516.

Further there shall be a geometric progression given of six terms, the first 4 and 3 following that, and the common ratio $\frac{3}{2}$ . Thus this is the progression

$$4,\ 6,\ 9,\ \tfrac{27}{2},\ \ \tfrac{81}{4},\ \ \tfrac{243}{8}$$

and this last term $\frac{243}{8}$ multiplied by the common ratio $\frac{3}{2}$ gives $\frac{729}{16}$, from which the first term subtracted gives $\frac{665}{16}$, finally this remainder divided by $b-1=\frac{1}{2}$ gives $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

517.

If the common ratio is less than 1 and thus the terms of the progression decrease always, thus the sum of such a progression which continues to run without end can be specified.

For example, let the first term be $=1$ the common ratio $=\frac{1}{2}$, and the sum $=s$, also that

$$s=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{64}\ \text{etc.}$$

without end. Multiplying by 2, thus one has :

$$2s=2+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}\ \text{etc.}$$

without end, from this the above is removed, thus there remains $s=2$ which is the sum of the infinite series.

518.

Further let the first term be $=1$, the common ratio $\frac{1}{3}$ and the sum $=s$, also that

$$s=1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{81}\ \text{etc. indefinitely.}$$

Everything is multiplied by 3 so that

$$3s=3+1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{81}\ \text{etc. indefinitely.}$$

From which the above series is taken away, thus there remains $2s=3$, and consequently the sum is $1\frac{1}{2}$.

519.

Further let the first term be $=2$, the common ratio $=\frac{3}{4}$ , and the sum $=s$ also that $s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. to infinity. This series is multiplied by $\frac{4}{3}$ so that one has $\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. to infinity. The above series taken away from this series leaves $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$, thus the sum itself will be just 8.

520.

If generally the first term is put $=a$ and the common ratio of the progression $=\frac{b}{c}$, so that this fraction is less than 1 and consequently $b$ is smaller than $c$, thus the sum of this infinite progression can be found to have the following form. Putting

$$s=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

indefinitely. Here we multiply by $\frac{a}{b}$ , thus obtaining

$$\frac{b}{c}s=\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

without end. This is taken away from the above thus there remains $\left(1-\frac{b}{c}\right)s=a$ consequently there is $s=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}$.

Multiplying above and below by $c$, thus there arises $s=\frac{ac}{c-b}$ ; therefore this sum of this infinite geometrical progression is $=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}$ or $=\frac{ac}{c-b}$

This sum consequently will be found if the first term $a$ be divided by 1 less the common ratio; or the common ratio is taken away from 1, and the first term is divided by the remainder so that thus the sum is found.

521.

If in such progressions the signs + and − alternate with each other, the sums of progressions of this kind of progression thus can be found .
Thus there shall be :

$$s=a-\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.},$$

which is multiplied by $\frac{b}{c}$ to give :

$$\frac{b}{c}\cdot s=\frac{ab}{c}-\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}-\frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.},$$

this is to be added to the above, then there is given $\left(1+\frac{b}{c}\right)s=a.$ From this the sum sought is found :

$$s = \frac{a}{1+\frac{b}{c}} \text{ or } s = \frac{ac}{c+b}.$$

522.

For example, let the first term be $a = \frac{3}{5}$ and the common ratio of the progression $= \frac{2}{5}$ that is $b = 2$ and $c = 5$ ; thus the sum of this series $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ etc. can be found : the common ratio taken from 1 leaves $\frac{3}{5}$, therefore the first term must be divided by $\frac{3}{5}$, so the sum becomes $= 1$.

But if the signs + and − are presented in turn, and this is the series :

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ etc.}$$

thus the sum will become :

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

For practice this infinite progression shall be presented :

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Here the first term is $\frac{3}{10}$ and the common ratio $\frac{1}{10}$. This taken from 1 leaves $\frac{9}{10}$. The first term divided by this gives the sum $= \frac{1}{3}$.

Now taking the term $\frac{3}{10}$ only, thus it still lacks $\frac{1}{30}$ from the whole sum. Taking the two terms $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, thus it still lacks $\frac{1}{300}$ to become $\frac{1}{3}$ etc.

524.

If this infinite series is given :

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

thus the first term is 9, the common ratio $\frac{1}{10}$. Thus 1 less the common ratio is $\frac{9}{10}$.
The first term 9 is divided by this, so that the sum $= 10$. It is to be noted here, that this series also can be represented by the decimal fraction 9,9999999 etc.

## CHAPTER 12

## CONCERNING INFINITE DECIMAL FRACTIONS.

525.

We have seen above, that in logarithmic calculations decimal fractions are used instead of ordinary fractions ; which also can be seen to happen in the other calculations with long division. Thus it arises from that to show, how an ordinary fraction can be changed into a decimal fraction, and how conversely the value of a decimal fraction may be expressed by an ordinary fraction.

526.

There is a general method by which a given decimal fraction $\frac{a}{b}$ can be changed into a decimal fraction. Now since this fraction expresses the quotient, which arises if the numerator *a* is divided by the denominator *b*, thus instead of *a* this form is written, *a*,0000000*,* which shows no difference from the number *a,* because such numbers are without a $10^{\text{th}}$ part, a $100^{\text{th}}$ part, etc. This form is divided by the number *b,* according to the usual rules of division, whereby one now has to take care, that the comma which separates the decimal fraction from the whole number, will be put in its proper place. We will now make this clear by the following examples.

In the first place let the fraction $\frac{1}{2}$ be given, thus the decimal fraction arises from that as follows :

$$\frac{2)1,0000000}{\quad 0,5000000=\frac{1}{2}} .$$

From this we see that $\frac{1}{2}$ to be as much as 0,5000000, or as 0,5 which also shows, that the same fraction indicates $\frac{5}{10}$, which is just as much as $\frac{1}{2}$.

527.

Further let the given fraction be $\frac{1}{3}$, thus one has this decimal fraction

$$\frac{3)1,0000000}{0,3333333 \text{ etc.}=\frac{1}{3}}.$$

From this it is observed that this decimal fraction, of which the value $=\frac{1}{3}$, on no account can be terminated, but clearly advances by 3 endlessly.

Thus all these fractions taken together endlessly $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}$ etc. make just as much as $\frac{1}{3}$, as we have shown already above.

For $\frac{2}{3}$ the following decimal fraction is found also to be increasing indefinitely

$$\underline{3)2,0000000,}$$
$$0,6666666 \text{ etc.} = \tfrac{2}{3},$$

which also is clear from the above, because this fraction is twice as great as the former.

528.

The fraction $\frac{1}{4}$ is given, thus it has this decimal division :

$$\underline{4)1,0000000}$$
$$0,2500000 = \tfrac{1}{4},$$

so that $\frac{1}{4}$ is as great as 0,2500000, or as 0,25, which is clear since,

$$\tfrac{2}{10}+\tfrac{5}{100}=\tfrac{25}{100}=\tfrac{1}{4}.$$

Just as for $\frac{3}{4}$ this decimal fraction arises :

$$\underline{4)3,0000000}$$
$$0,7500000 = \tfrac{3}{4},$$

thus $\frac{3}{4}=0,75$ as $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=\frac{75}{100}$ which fraction cancelled by 25, gives $\frac{3}{4}$.

If it were wished to change $\frac{5}{4}$ into a decimal fraction, thus there shall be

$$\underline{4)5,0000000}$$
$$1,2500000 = \tfrac{5}{4},$$

but this is $1+\frac{25}{100}$ which is $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

529.

In such a way there will be

$$\tfrac{1}{5}=0,2; \text{ and } \tfrac{2}{5}=0,4; \text{ further } \tfrac{3}{5}=0,6; \ \tfrac{4}{5}=0,8; \text{ and } \tfrac{5}{5}=1; \text{further } \tfrac{6}{5}=1,2 \text{ etc.}$$

When the denominator is 6, thus we find $\frac{1}{6}=0,1666666$ etc. which is the same as $0,666666-0,5$. But now there is $0,666666=\frac{2}{3}$ and $0,5=\frac{1}{2}$, consequently there is $0,1666666=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Further it is found that $\frac{2}{6}=0,3333333 \text{ etc.}=\frac{1}{3}$; whereas $\frac{3}{6}=0,5000000=\frac{1}{2}$·

Further $\frac{5}{6} = 0,8333333 = 0,3333333 + 0,5$ that is $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

If the denominator is 7 , thus the decimal fraction becomes more complicated : Thus for $\frac{1}{7}$ there is found 0,142857 etc. whereby it is to be observed, that these six numbers 142857 always arise again. Now in order to show, that these constitute precisely the decimal fraction $\frac{1}{7}$, thus the same is changed into a geometric progression, of which the first term $= \frac{142857}{1000000}$ but the denominator $= \frac{1}{1000000}$; thus the sum becomes $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$.

Multiplying above and below by 1000000, thus this sum $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

531.

The decimal fraction considered can be shown in a much easier form as follows. Setting the letter $s$ for the value of the same fraction, so that

$$s = 0{,}142857142857142857 \text{ etc. thus there becomes}$$

$$\begin{aligned}
10s &= 1{,}42857142857142857 \text{ etc.}\\
100s &= 14{,}2857142857142857 \text{ etc.}\\
1000s &= 142{,}857142857142857 \text{ etc.}\\
10000s &= 1428{,}57142857142857 \text{ etc.}\\
100000s &= 14285{,}7142857142857 \text{ etc.}\\
1000000s &= 142857{,}142857142857 \text{ etc.}\\
\text{Subtract}\quad s &= 0{,}142857142857 \text{ etc.}\\
\hline
999999s &= 142857
\end{aligned}$$

Now on dividing by 999999, thus there arises $s = \frac{142857}{999999}$ and this is the value of the above decimal fraction.

532.

Thus likewise the fraction $\frac{2}{7}$ can be changed into the decimal fraction 0,28571428 etc. This shows us to we can find the value of the above decimal fraction that we have called $s$ more easily, because this fraction is just twice as great as the above one, and thus $= 2s$ ; since we have now got :

$$100s = 14,28571428571 \text{ etc.}$$

whereby on subtracting $\quad 2s = \phantom{1}0,28571428571 \text{ etc.}$

there remains $\quad 98s = 14,$

from which there will be $\quad s = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}.$

533.

Thus if the denominator of the given fraction is 7, so the decimal fraction progresses without endless, and within the 6 numbers always repeat, from which the reason is easily seen, because by more repeated divisions finally so great a number must remain, as there was at the start. But there can be no more different numbers as remainders than 1, 2, 3, 4, 5, 6, thus after the sixth division again just the same numbers arise as from the beginning. But if the denominator is provided thus, which makes the division finally gives up, thus this way comes to an end.

534.

Let the denominator of the fractions be 8, thus the following decimal fractions will be found:

$$\tfrac{1}{8} = 0,125\ ;\ \tfrac{2}{8} = 0,250\ ;\ \tfrac{3}{8} = 0,375\ ;\ \tfrac{4}{8} = 0,500\ ;$$
$$\tfrac{5}{8} = 0,625;\ \ \tfrac{6}{8} = 0,750;\ \ \tfrac{7}{8} = 0,875 \text{ etc.}$$

535.

If the divisor is 9 thus the following decimal fractions are found $\frac{1}{9} = 0,111$ etc. $\frac{2}{9} = 0,222$ etc.; $\frac{3}{9} = 0,333$ etc. But if the denominator is 10 thus the following fractions are found $\frac{1}{10} = 0,100$ ; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$ ; as that is clear from the nature of the matter. Just as there will be $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; further $\frac{256}{1000} = 0,256$ ; again $\frac{24}{10000} = 0,0024$ ; which themselves will be evident further.

536.

Let the denominator of the fractions be 11, thus the decimal fractions can be found $\frac{1}{11} = 0,0909090$ etc. Now if this decimal fraction were given and it was required to find its value, then the same can be put $= s$. Thus there becomes $s = 0,0909090$ and $10s = 0,909090$. Further $100s = 9,09090$. From this take away $s$, thus there becomes $99s = 9$ and therefore $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. There will be further $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

537.

Now here these decimal fractions are very noteworthy, because some numbers always are repeating and such forms proceed indefinitely. Now the value of such fractions can be found easily, as they can be shown to be alike.

In the first place there shall be now a single number to be repeating, which shall be $=a$ thus we have $s=0,aaaaaaa$. Therefore there shall be

$$10s=a,aaaaaaa.$$

$$\text{Subtract}\quad \underline{s=0,aaaaaaa}$$

$$\text{thus}\qquad 9s=a,\text{consequently } s=\tfrac{a}{9}.$$

If two numbers such as $ab$ shall be repeating always, thus there becomes $s=0,abababa.$

Therefore $100s=ab,ababab$ ; from this take away $s$ , leaving $99s=ab$ ; thus $s=\frac{ab}{99}$.

Should three numbers such as $abc$ always repeat, thus there arises $s=0,abcabcabc$ ; consequently $1000s=abc,abcabc$. Take away the above from this, there remains $999s=abc$ ; thus $s=\frac{abc}{999}$ and so on.

538.

Thus as often as such a decimal fraction occurs, so it is easy to find its value : thus if this fraction were given 0,296296; then its value will be $=\frac{296}{999}$. This fraction divided by 37 will be abbreviated to become $=\frac{8}{27}$.

Now the above decimal fraction must arise from this ; in order to show this more easily, as $27=3\cdot 9$ , thus divide firstly 8 by 9, and further the quotient by 3, as follows :

$$9)\ 8,0000000$$

$$\underline{3)\ 0,8888888}$$

$$0,2962962 \text{ etc.}$$

Which is the given decimal fraction.

539.

In order to give yet another example, thus by changing this fraction :

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$$

Which adopts the following form as a decimal fraction:

$$\begin{array}{r}
2)1,00000000000000 \\ \hline
3)0,50000000000000 \\ \hline
4)0,16666666666666 \\
5)0,04166666666666 \\ \hline
6)0,00833333333333 \\ \hline
7)0,00138888888888 \\ \hline
8)0,00019841269841 \\ \hline
9)0,00002480158730 \\ \hline
10)\ 0,00000275573192 \\ \hline
0,00000027557319
\end{array}$$

## CHAPTER 13

## CALCULATING INTEREST.

540.

The interest on a capital is accustomed to be expressed as a per cent, so that which fraction of 100 will be paid annually. Commonly the interest rate on money is set at 5 p.c., hence 5 Rthl. interest will be paid on annually 100 Rthl. From this it is now clear and easy, how to calculate the interest on a given capital, after the rule of three is known:

100 gives 5 what does the given capital give. For example, let the capital be 860 Rthl., thus the annual interest can be found :

$$\begin{array}{l}
100:5 = 860 \text{ to ...give the answer 43 Rthl.} \\
\underline{\qquad\qquad 5} \\
\underline{100)\ 4300} \\
\qquad 43
\end{array}$$

541.

We will not delay in the calculation of this simple interest, but we will consider the interest on interest, the interest that yearly again beats on the capital and therefore the capital will be increased, whereby then it can be asked: how much has a given sum grown after the passage of some years? Now since the capital is greater annually, in that 100 Rthl. grows by 5 percent after a year to 105 thus is can be found from that, how great must a certain capital be after the passage of single years?

Let the Capital $=a$ so such will be found after a year, if it is known that 100 gives 105 what $a$ will give ? The answer is $\frac{105a}{100}=\frac{21a}{20}$ , which thus also can be written as $\frac{21}{20}\cdot a$ or $a+\frac{1}{20}\cdot a$.

542.

Thus if to the current capital a 20th part is to be added, thus the capital for the following year can be found. If now again its 20th part is added to this, thus the capital for the second year is found ; and to this again its 20th part is added, giving the capital for the third year, and so forth. Therefore it is easy to see how the capital grows annually, and this calculation can be continued as far as desired.

543.

Let the current capital be 1000 Rthl. to which 5 per cent is added and the interest from that will be added on to the capital annually; because now the said calculation follows at once from the fractions, thus we will express such as decimal fractions, but going no further than to the 1000th part of a Rthl., because smaller parts do not arise here in any calculation.

The current capital of 1000 Rthl. will be

| | |
|---|---|
| after 1 year . . . . . . . . . | 1050 Rthl. |
| | 52,5 |
| after 2 years. . . . . . . . . | 1102,5 |
| | 55,125 |
| after 3 years. . . . . . . . . | 1157,625 |
| | 57,881 |
| after 4 years. . . . . . . . . | 1215,506 |
| | 60,775 |
| after 5 years. . . . . . . . . | 1276,281 etc . |

544.

Thus such a form can be found after the passage of so many years ; but if the number of years is very great, thus this calculation will become very long running and troublesome ; but the same can be abbreviated as follows.

Let the current capital be $=a$ and since a capital of 20 Rthl. after one year amounts to 21 Rthl., thus a capital of $a$ after one year grows to $\frac{21}{20}\cdot a$. Further in the following year to $\frac{21^2}{20^2}\cdot a=\left(\frac{21}{20}\right)^2\cdot a$. This is now the capital after two years , which in one year again grows to $\left(\frac{21}{20}\right)^3\cdot a$ , which becomes the capital after three years; after four years now the same will be $\left(\frac{21}{20}\right)^4 \cdot a$; after five years $\left(\frac{21}{20}\right)^5 \cdot a$; after 100 years $\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \cdot a$, and generally after *n* the same will become $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$; from which the size of the capital can be found after any desired number of years.

545.

The fraction $\frac{21}{20}$ arising here is itself based on the interest reckoned at 5 per cent, and $\frac{21}{20}$ is the same as $\frac{105}{100}$. Now should the interest be reckoned at 6 per cent, thus after one year the capital *a* increases to $\frac{106}{100} \cdot a$ ; after two years to $\left(\frac{106}{100}\right)^2 \cdot a$ ; and after *n* years to $\left(\frac{106}{100}\right)^n \cdot a$.

But should the interest rate only amount to 4 per cent, thus the capital *a* after *n* years would grow to $\left(\frac{104}{100}\right)^n \cdot a$.

546.

If now, just as the capital *a* as well as the number of years *n* is given, thus this formula can be resolved easily through logarithms. Then it is necessary only to find the logarithms of that formula, which for 5 percent, is $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$. Now since the same is a product of $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ and *a*, thus its logarithm $= \log\left(\frac{21}{20}\right)^n + \log a$. Since further $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ is a power, thus $\log\left(\frac{21}{20}\right)^n = n \log \frac{21}{20}$. Therefore the logarithm of that capital sought $= n \cdot \log\left(\frac{21}{20}\right) + \log a$. But the logarithm of the fraction $\frac{21}{20} = \log 21 - \log 20$.

547.

Now let the capital be $= 1000$ Rthl. and it is required to find how great the same shall be after 100 years at 5 per cent.

Thus here $n = 100$. The logarithm of this capital sought will now become $= 100 \log \frac{21}{20} + \log 1000$, which calculated following the form calculated will be the logarithm of the capital sought, and the numbers themselves kept at 6 places thus becomes 131501 Rthl.

$$\begin{array}{rr} & \log 21 = 1{,}3222193 \\ \text{subtr.} & \underline{\log 20 = 1{,}3010300} \\ & \log \tfrac{21}{20} = 0{,}0211893 \\ \text{multipl.} & \underline{\text{mit } 100 \qquad\quad} \\ & 100\log \tfrac{21}{20} = 2{,}1189300 \\ \text{add} & \underline{\log 1000 = 3{,}0000000} \\ & 5{,}1189300 \end{array}$$

548.

A capital of 3452 Rthl. invested at 6 Percent, how large will the same be after 64 years? Thus here there is $a = 3452$ and $n = 64$. Thus the logarithm of the capital sought will be $= 64\log\frac{53}{50} + \log 3452$, which can be reckoned thence :

$$\begin{array}{rr} & \log 53 = 1{,}7242759 \\ \text{subtr.} & \underline{\log 50 = 1{,}6989700} \\ & \underline{\log \tfrac{53}{50} = 0{,}0253059} \\ \text{mult. by 64;} & 64\log \tfrac{53}{50} = 1{,}6195776 \\ & \underline{\log 3452 = 3{,}5380708} \\ & 5{,}1576484 \end{array}$$

Thus the capital sought $= 143763$ Rthl.

549.

When the number of years is very large, and because the logarithms of a fraction must be multiplied by that, but the logarithm in the tables is calculated to 7 places only, thus from that a noteworthy error may arise. Therefore the logarithm of the fractions must be taken to more places, as can be seen from the following example: A capital of one Rthl. at 5 percent remains standing for 500 years long, in the meanwhile the annual interest is always added on. Now it is asked, how great will the capital be after 500 years?

Thus here there is $a = 1$ and $n = 500$ : as well the logarithms of the sought capital $= 500\log\frac{21}{20} + \log 1$, from which this calculation arises :

$$\begin{array}{rr} & \log 21 = 1{,}322\ 219\ 294\ 733\ 919 \\ \text{subtract} & \log 20 = 1{,}301029\ 995\ 663\ 981 \\ & \underline{\log \tfrac{21}{20} = 0{,}021189\ 299\ 069\ 938} \\ \multicolumn{2}{r}{\text{mult. by 500 gives } 10{,}594649534969000} \end{array}$$

this is now the logarithm of the capital sought, which shall be from this itself $= 39323200000$ Rthl.

550.

But if annually instead of the capital, only the interest is added, and yet annually a new sum $= b$ were to be added to that, thus the current capital every year increases as follows. Currently there is *a;*

after 1 year $\frac{21}{20}a + b$

after 2 year $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a + \frac{21}{20}b + b$

after 3 year $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

after 4 year $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

after $n$ year $\left(\frac{21}{20}\right)^n a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b + \cdots + \frac{21}{20}b + b.$

This capital consists of two parts, of which the first $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, but the other but the other consists of a series written backwards

$$b + \frac{21}{20}b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b,$$

which is a geometric progression, of which the common ratio $= \frac{21}{20}$. The sum of which now will be found thus:
On multiplying the last term $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$ by the common ratio $\frac{21}{20}$ thus there becomes $\left(\frac{21}{20}\right)^n b$, from that take the first term *b,* thus there remains $\left(\frac{21}{20}\right)^n b - b$. This must be divided by 1 less the common ratio, that is by $\frac{1}{20}$; therefore the sum of the above progression $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$; consequently the sought capital shall be :

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n a + 20 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a + 20b) - 20b.$$

551.

Now in order to do these calculations, thus the first term especially, $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a + 20b)$, must be considered and calculated, which comes about, if the logarithm of the same is sought $n \log\left(\frac{21}{20}\right) + \log(a + 20b)$. To this end one searches in the tables for the number that corresponds to the value of the first term, from which $20b$ is taken away, thus the capital sought is come upon.

552.

Question: One has a capital composed of 1000 Rthl. at 5 per cent, to which there is added still 100 Rthl. annually as well as the interest put in place, how great will this capital be after 25 years?

Thus here there is $a = 1000$ ; $b = 100$ ; $n = 25$ ; therefore the calculation is put in place as follows :

$$\log\tfrac{21}{20} = 0{,}021189299$$

multiply by 25 giving

$$25\log\tfrac{21}{20} = 0{,}5297324750$$

$$\log(a+20b) = 3{,}4771212547$$

$$4{,}0068537297$$

Thus the first part is 10159,1 Rthl. from which there is taken $20b = 2000$ , so that the capitals after 25 years is worth 8159,1 Rthl.

553.

Now since the capital will always be greater and after 25 years increased to $8159\tfrac{1}{10}$ Rthl., so one can ask further after how many years will the same have increased up to 1000000 Rthl. ?

Let $n$ be this number of years, and because $a = 1000, b = 100$ thus after $n$ years the capital will be:

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^n (3000) - 2000$$

this must now be 1000000 Rthl., from which this equation arises:

$$3000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n - 2000 = 1000000 .$$

Adding 2000 to both sides, thus there becomes

$$3000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n = 1002000$$

Dividing both sides by 3000 thus there is found $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n = 334$ . From this the logarithms are taken, thus there is found $n\log\tfrac{21}{20} = \log 334$ . This is divided by $\log\tfrac{21}{20}$ , thus there arises $n = \frac{\log 334}{\log\frac{21}{20}}$ . But now there is $\log 334 = 2,5237465$ and $\log\tfrac{21}{20} = 0,0211893$ ;

therefore there becomes $n = \frac{2,5237465}{0,0211893}$. Multiplying above and below by 10000000, thus there arises $n = \frac{25237465}{211893}$, that is, 119 years 1 Month 7 days, and after so much longer a time, the capital will increase to 1000000 Rthl.

554.

But if instead of setting aside a little capital every year, some were removed, thus to be used for one's livelihood, and this sum is put $= b$, the capital $a$ adopts the following form for the 5 p.c. : currently that sum is *a;*

after 1 year $\frac{21}{20}a - b$

after 2 years $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a - \frac{21}{20}b - b$

after 3 years $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 b - \frac{21}{20}b - b$

after $n$ years $\left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b \cdots - \left(\frac{21}{20}\right) b - b.$

555.

The same thus is set out by us in two parts, the first is $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ ; from which this geometric progression written backwards is taken away :
$b + \left(\frac{21}{20}\right) b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \cdots \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b.$ From which the above sum found $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$ , which taken from the first $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$, gives the capital sought after $n$ years to be
$\left(\frac{21}{20}\right)^n (a - 20b) + 20b.$

556.

This formula has so much in common with the former that they can be placed together. Since there the former $b$ must be added yearly, thus now $b$ is subtracted yearly. Thus one must write instead in the above formula $+b$ or $-b$ . Now here it is to be noted especially, that if $20b$ is greater than $a$ thus the first term becomes negative and thus the capital is always smaller; which is itself evident before, since if the annually more shall be taken away from the capital than the interest accrued, thus the same must every year become smaller and smaller and finally vanishes; which we will illustrate with an example.

557.

Someone has an outstanding capital of 100000 Rthl. at 5 p.c. ; every year he needs 6000 Rthl. to support himself, which is more than the interest on 100000 Rthl. as it draws only 5000 Rthl., from which the capital becomes smaller always. Now the question is, after how many years will the same vanish completely?

For this number of years one puts *n,* and since $a = 100000$ Rthl. and $b = 6000$, thus after *n* years the capital shall be $= -20000\left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$ or $120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Thus the capital vanishes when $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ increases to 120000 or when $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 120000$. Dividing by 20000, thus $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$ arises. Taking the logarithms, thus there becomes $n\log\left(\frac{21}{20}\right) = \log 6$. Dividing by $\log\left(\frac{21}{20}\right)$, thus there is found

$$n = \frac{\log 6}{\log\left(\frac{21}{20}\right)} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}, \text{ or } n = \frac{7781513}{211893}$$

consequently there becomes $n =$ 36 year 8 Months and 22 days: and after so much time it dwindles to nothing.

558.

Here it is still necessary to show, how following this basis the interest can be calculated as before but for a shorter time than before for a whole year. Now the above formula serves for this, that a capital *a* at 5 p.c. after *n* years increases to $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ ; now the time is shorter than a year, thus the exponent *n* will be made into a fraction and the calculation can be done as before with logarithms. Should the capital be sought after a day, thus there must be put $n = \frac{1}{365}$ ; if it is required to know the capital after three days, thus $n = \frac{3}{365}$ etc.

559.

Let the capital be $a = 100000$ Rthl. at 5 p.c.; how large will such be after 8 days ?

Here there is $a = 100000$ and $n = \frac{8}{365}$; consequently the capital will be $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000$.

The logarithm of this

$$= \log\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + \log 100000 = \frac{8}{365}\log\left(\frac{21}{20}\right) + \log 100000$$

But now $\log\left(\frac{21}{20}\right) = 0{,}0211893$

| | |
|---|---|
| this multiplied by $\frac{8}{365}$ gives | 0,0004644 |
| to which add log100000 which is | 5,0000000 |
| | 5,0004644 |

thus the logarithm of the capital is obtained $=5,0004644$. Consequently the capital itself shall be 100107 Rthl. so that already in the first 8 days the interest amounts to 107 Rthl.

560.

Yet another question follows from that, for if a sum of money still has a year to expire, how much will the same be worth currently. Here it is to be considered, that since 20 Rthl. amounts to 21 Rthl. over a year, thus reciprocally 21 Rthl. after a year shall be worth currently only 20 Rthl. Thus if after a year passing the capital will become $a$, thus the same is worth $\frac{20}{21}a$ at present. Therefore in order to find how much the capital *a,* thus to have expired in a known time will be worth a year earlier, thus the same must be multiplied by $\frac{20}{21}$; two years earlier the same will be worth $\left(\frac{20}{21}\right)^2 a$; three years earlier the same is $\left(\frac{20}{21}\right)^3 a$ and generally *n* years earlier the value of the same is $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$.

561.

Someone enjoys a yearly pension of 100 Rthl. for a length of 5 years ; now at this time he wants to sell the same for cash at 5 p.c, how much will he get for that?
For the 100 Rthl. which is due

| | | |
|---|---|---|
| after 1 year | he receives | 95,239 |
| after 2 years | " " | 90,704 |
| after 3 years | " " | 86,385 |
| after 4 years | " " | 82,272 |
| after 5 years | " " | 78,355 |
| For the sum of all 5 years | he receives | 432,955 |

Thus for this pension he can ask for no more than 432,955 Rthl., or 432 Rthl. 22 Gr. 11 Pf.

562.

But should a pension be lasting for a very long time, thus the calculations of this kind become very tedious, but which in the following manner can be eased :
Let the yearly pension be *a,* which starts now already and continues for a time of *n*, thus the same currently will be worth :

$$a+\tfrac{20}{21}a+\left(\tfrac{20}{21}\right)^2 a+\left(\tfrac{20}{21}\right)^3 a+\left(\tfrac{20}{21}\right)^4 a+\cdot\quad\cdot\quad\cdot+\left(\tfrac{20}{21}\right)^n a.$$

This is now a geometric progression of which the sum must be found. Thus the last term is multiplied by the common ratio, thus giving $\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a$; from which the first term is taken away, leaving $\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a-a$; this must be divided by the common ratio less one, that is, divided by $-\tfrac{1}{21}$ dt, or which amounts to the same, to be multiplied by $-21$ : therefore the sum sought shall be
$=-21\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a+21a,$ that is $21a-21\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a$ , from which the last term thus must be subtracted, which can be calculated easily by the use logarithms.

END OF THE FIRST PART
AND OF THE THIRD SECTION ON RATIOS AND PROPORTION

## CAPITEL 8

## VON DEN GEOMETRISCHEN PROPORTIONEN

461.

Zwey Geometrische Verhältniße sind einander gleich, wann ihre Benennungen einander gleich sind; und die Gleichheit zweyer solchen Verhältniße wird eine Geometrische Proportion genennt, welche also geschrieben wird $a:b=c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: *a* verhält sich zu *b* wie sich *c* verhält zu *d,* oder *a* zu *b* wie *c* zu *d.* Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4=12:6$. Dann von dem Verhältniß 8 : 4 ist die Benennung $\frac{2}{1}$, und ebenfals ist sie es auch von dem Verhältniß 12 : 6.

462.

Wann also $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion ist, so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden und folglich $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ; seyn; und hinwiederum wann die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b=c:d$ .

463.

Eine Geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupt-Eigenschaft aller Geometrischen Proportionen, welche darin besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürtzer, daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Gliedern.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit *b,* so bekommt man $a=\frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit *d,* so bekommt man $ad=bc$. Nun aber ist *ad* das Product der äußern Glieder und *bc* das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wann hinwiederum vier Zahlen *a, b, c, d,* so beschaffen sind, daß das Product der äußern *ad* gleich ist dem Product der mittlern *bc,* so stehen dieselben in einer Geometrischen Proportion. Dann da $ad=bc$ so dividire man beyderseits durch *bd,* da bekommt man $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; dahero wird $a:b=c:d$ .

466.

Die vier Glieder einer Geometrischen Proportion als $a:b=c:d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nehmlich nur darauf an, daß das Product der äußern Gliedern dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad=bc$. Also wird man haben, erstlich $a:b=c:d$, zweytens $a:c=b:d$, drittens $d:b=c:a$, viertens $d:c=b:a$.

467.

Außer diesen laßen sich auch noch viele andere Geometrische Proportionen herleiten. Dann wann $a:b=c:d$, so ist erstlich $a+b:a$ oder das erste + dem andern zum ersten, $c+d:c$ oder das dritte + dem vierten zum dritten; nemlich $a+b:a=c+d:c$.

Hernach ist auch das erste − dem andern zum ersten, wie das dritte − dem vierten zum dritten; oder $a-b:a=c-d:c$.

Dann nimmt man die Producte der äußern und mittlern Gliedern, so ist offenbahr $ac-bc=ac-ad$, weil $ad=bc$. Ferner wird auch $a-b:b=c-d:d$, weil $ad-bd=bc-bd$ und $ad=bc$ ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen die aus $a:b=c:d$ entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden

$$ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd.$$

Dann das Product der äußern Gliedern ist $mpac+npbc+mqad+nqbd$, oder weil $ad=bc$, so wird dasselbe $mpac+npbc+mqbc+nqbd$; das Product der mittlern Gliedern aber ist $mpac+mqbc+npad+nqbd$, oder weil $ad=bc$ so wird dasselbe $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. $6:3=10:5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen.

$$3:6=5:10,\ \ 6:10=3:5,\ \ 9:6=15:10,$$
$$3:3=5:\ 5,\ \ 9:15=3:5,\ \ 9:3=15:\ 5.$$

470.

Da in einer Geometrischen Proportion das Product der äußern dem Product der mittlern Gliedern gleich ist, so kann man, wann die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder $24:15=40$ zu . . . . Dann da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten das ist mit 24 multiplicirt auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Dahero ist die Proportion $24:15 = 40:25$. Und wann allgemein die drey ersten Glieder $a:b = c:...$ sind, so setze man für das unbekante vierte Glied den Buchstaben *d,* und da $ad = bc$ seyn muß, so dividire man beyderseits durch *a* und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden wann man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechen-Büchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer Geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemercken vor: als wann zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen $a:b = c:d$ und $a:f = c:g$ so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten $b:d = f:g$; dann da aus der ersten folgt $a:c = b:d$, und aus der ndern $a:c = f:g$, so sind die Verhältniße *b*:*d* und *f*:*g* einander gleich, weil ein jedes dem Verhältniße *a*:*c* gleich ist. Also da $5:100 = 2:40$ und $5:15 = 2:6$, so folgt daraus daß $100:40 = 15:6$.

473.

Wann aber zwey Proportionen so beschaffen sind daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten wie die vierten. Wann nemlich $a:b = c:d$ und $f:b = c:g$, so wird daraus folgen $a:f = g:d$. Es sey z. E. diese Proportion gegeben $24:8 = 9:3$ und $6:8 = 9:12$, so wird daraus folgen $24:6 = 12:3$. Der Grund davon ist offenbahr: weil die erste giebt $ad = bc$ und die zweyte $fg = bc$, folglich wird $ad = fg$, und $a:f = g:d$, oder $a:g = f:d$.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wann man besonders die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a:b = c:d$ und $e:f = g:h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese $ae:bf = cg:dh$. Dann da erstlich $ad = bc$ und aus der zweyten $eh = fg$, so wird auch seyn $adeh = bcfg$. Nun aber ist *adeh* das Product der äußern und *bcfg* das Product der mittlern Gliedern in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475.

Es seyn z. E. diese zwey Proportionen gegeben $6:4=15:10$ und $9:12=15:20$ so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion

$$6\cdot 9:4\cdot 12=15\cdot 15:10\cdot 20$$

das ist $$54:48=225:200$$

oder $$9:8=9:8.$$

476.

Zu letzt ist hier noch zu mercken, daß wann zwey Producte einander gleich sind, als $ad=bc$, daraus hinwiederum eine Geometrische Proportion formiret werden kann. Es ist nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nemlich seyn $a:c=b:d$. Da z. E. $3\cdot 8=4\cdot 6$ so folgt daraus diese Proportion $8:4=6:3$ oder $3:4=6:8$; und da $3\cdot 5=1\cdot 15$, so bekommt man $3:15=1:5$ oder $5:1=15:3$ oder $3:1=15:5$.

## CAPITEL 9

## ANMERKUNGEN ÜBER DIE PROPORTIONEN UND IHREN NUTZEN

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preiße und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen GeldSorten kommt alles darauf an, die Verhältniße darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn um die vorgetragene Lehre beßer zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münz-Sorten z. E. einem Louisdor und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen wie viel diese Stücke nach einerley Müntz-Sorte gelten. Also da in Berlin ein Louisdor 5 Rthl. 8 Gr. ein Ducaten aber 3 Rthl. gilt so darf man diese beyden Werthe nur auf einerley Müntze bringen, entweder auf Thaler und da bekommt man diese Proportion 1 L.:1 D. $=5\frac{1}{3}$ Rthl.:3 Rthl. d.i. wie $16:9$. Oder in Groschen hat man diese Proportion 1 L.:1 D.$=128:72=16:9$, und aus einer solchen Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louisdors und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder giebt 9 Louisdor $=16$ Ducaten; und durch Hülffe dieser Vergleichung kann man eine jede Summe Louisdor in Ducaten verwandeln. Also wann man gefragt wird, wie viel 1000 Louisdor in Ducaten betragen, so macht man diese Regeldetri: 9 L'd'or thun 16 Ducat. was 1000 L'd'or? Antwort: $1777\frac{7}{9}$ Duc.

Fragt man aber wie viel 1000 Duc. in L'd'or betragen so setzt man diese Regeldetri: 16 Duc. thun 9 L'd'or was 1000? Antwort: $562\frac{1}{2}$ L'd'or.

479.

Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich und beruhet auf dem Wechsel-Cours, wodurch der Werth eines Rubels in Holländische Stüber bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wann also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion $1\text{ Rbl.}:1\text{ D.}=45:105=3:7$, und daher diese Vergleichung: $7\text{ Rbl.}=3\text{ Duc}$. Hieraus kann man finden wie viel ein Ducaten in Rubel betrage: dann $3\text{ D.}:7\text{ Rbl.}=1\text{ D.}:\ \ldots$ Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber so hat man diese Proportion $1\text{ Rbl.}:1\text{ D.}=50:105=10:21$, und daher diese Vergleichung $21\text{ Rbl.}=10\text{ Duc}$. Hieraus wird 1 Duc. $=2\frac{1}{10}\text{ Rbl}$. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man $1\text{ Rbl.}:1\text{ Duc.}=44:105$, und also $1\text{ Duc.}=2\frac{7}{44}\text{ Rbl.}=2\text{ Rbl. }38\frac{7}{11}\text{ Cop}$.

480.

Hieraus kann man auch mehr als zwey verschiedene Müntz-Sorten unter sich vergleichen, welches insonderheit bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Exempel zu geben, so soll jemand von hier 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und will wißen, wie viel solches in Berlin in Ducaten betragen werde. Es ist aber der hiesige Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (nemlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber Holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. Holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. Holl. machen einen Species Rthl. Holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthl. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Rthl.

481.

Um diese Frage aufzulößen, so wollen wir erstlich schritt vor schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da $1\text{ Rbl.}=47\frac{1}{2}$ Stüber, oder $2\text{ Rbl.}=95\text{ Stb.}$ so setzt man $2\text{ Rbl.}:95\text{ Stb.}=1000:$ ... Antwort $47500\text{ Stüb}$. Ferner gehen wir weiter und setzen $20\text{ Stüb.}:1\text{ Fl.}=47500\text{ Stüber}:$ .... Antwort $2375\text{ Fl}$.

Ferner da $2\frac{1}{2}\text{ Fl.}=1\text{ Sp. Rthl}$, das ist, da $5\text{ Fl.}=2\text{ Sp. Rthl}$. so setzt man $5\text{ Fl.}:2\text{ Sp. Rthl.}=2375\text{ Fl.}$ zu .... Antwort $950\text{ Sp. Rthl}$.

Ferner gehen wir auf Berliner Rthl. nach dem Cours zu 142: Also $100\text{ Sp. Rthl.}:142\text{ Rthl.}=950:$ .... Antwort $1349\text{ Rthl.}$

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten und setzen also:
$3 \text{ Rthl.} : 1 \text{ Ducaten} = 1349 \text{ Rthl. zu}$ . . . Antwort $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

482.

Um solche Rechnungen noch mehr zu erläutern, so wollen wir setzen der Banquier zu Berlin mache Schwierigkeit diese Summe zu bezahlen, unter einem oder andern Vorwand was es auch für einer seyn mag, und wolle diesen Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug bezahlen. Dieses ist aber also zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regeldetri hinzugefügt werden, $105 : 100 = 449\frac{2}{3}$ zu . . . . Giebt allso $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483.

Hierzu wurden nun sechs Rechnungen nach der Regeldetri erfordert; man hat aber Mittel gefunden diese Rechnungen ungemein abzukürtzen durch Hülfe der sogenanten Ketten-Regel. Um dieselbe zu erklären, so laßt uns von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vorder-Sätze in Betrachtung ziehen und hier vor Augen legen:

I.) $2 \text{ Rbl.} : 95 \text{ Stüb.}$ II.) $20 \text{ Stüb} : 1 \text{ Fl. Holl.}$ III.) $5 \text{ Fl. Holl.} : 2 \text{ Sp. Rthl}$

IV.) $100 \text{ Sp.Rthl.} : 142 \text{ Rthl.}$ V.) $3 \text{ Rthl.} : 1 \text{Ducaten}$ VI.) $105 \text{ Duc.} : 100 \text{ Duc.}$

Wann wir nun die obige Rechnungen betrachten so finden wir, daß wir die vorgegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt und durch die ersten dividirt haben; daraus ist klar, daß man eben dieses finden werde, wann man die vorgegebene Summe auf einmahl mit dem Product aller zweyten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wann man diese einzige Regeldetri macht: wie sich das Product aller ers·ten Sätze verhält zu dem Product aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten die in Berlin bezahlt wird.

484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürtzt, wann sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten Satz aufheben läßt, da man dann dieselben Sätze ausstreicht und an ihrer Stelle die Quotus setzt, welche man durch die Aufhebung erhält. Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rbl. | ~~2~~ | : | 19 .~~95~~ St. Holl Cur. 1000 Rbl. |
| | ~~20~~ | : | 1 Holl. Fl. |
| | ~~5~~ | : | 2 Sp. Rthl. |
| | 100 | : | 142 Rthl. |
| | 3 | : | 1 Duc. |
| | ~~10~~5.21 | : | ~~5.100~~ Duc. |
| | 63~~00~~ | : | 2698 = 10~~00~~ zu ... |

7)26980
9) 3854 (2
428 (2 Antwort $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

485.

Um die Ketten-Regel zu gebrauchen, so muß man diese Ordnung beobachten: man fängt mit eben der Münz-Sorte an von welcher die Frage ist und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen, und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so daß ein jedes Verhältniß mit eben der Müntz-Sorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch etliche Fragen beysetzen. Wann die Ducaten in Hamburg 1 p. C. beßer sind als 2 Rthl. B$^o$ (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B$^o$ machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Poln. ist (das ist, 1 Rthl. B$^o$ macht 119 Gr.Poln.) wie viel betragen 1000 Duc. in Fl. Pol. (30 Gr. Pol. machen 1 Fl. Pol.)

| | | |
|---|---|---|
| Duc. 1 | : | 2Rthl. B$^o$ 1000 Duc. |
| 1~~00~~.50 | : | 101 Rthl. ß$^o$ |
| 1 | : | 119 Gr. Pol. |
| 30 | : | 1 Fl. Pol. |
| 1500 | : | 12019 = 1000 Duc. zu ... |

3) 120190
5) 40063 (1
8012 (3 Antwort $8012\frac{2}{3}$ Fl. Pol.

487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Frag-Zahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da dann das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt die verlangte Antwort giebt.

Frage: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Hol.) Wann nun Agio di Bo in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B$^o$) und der Wechsel-Cours von Leipzig nach Amsterdam in B$^o$ 133$\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig 133$\frac{1}{4}$ Thl.) Endlich 2 Rthl. Hol. 5 Fl. Hol. thun, wie viel sind nach diesen Coursen vor solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thl. zu bezahlen.

| | | |
|---|---|---|
| | | 5.1000 Duc. |
| Duc.5 | : | 26 Fl. Hol.Cour. |
| ~~105~~.21 | : | 4. 20.100 Fl. Hol. B$^o$ |
| ~~5~~ | : | ~~2~~Rth. Hol. B$^o$ |
| ~~400.2~~ | : | 533 Thl. in Leipzig |
| 21 | | 3) 55432 |
| | | 7) 18477 (1 |
| | | 2639 (4 |

Antwort 2639$\frac{13}{21}$ Thl. oder 2639 Thl. 15 gut. Grsch.

## CAPITEL 10

## VON DEN ZUSAMMENGESETZTEN VERHÄLTNISSEN

488.

Zwey oder mehr Verhältniße werden zusammengesetzt, wann man so wohl die Vorder-Sätze als die Hinter-Sätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnißen.

Also aus diesen Verhältnißen $a:b$, $c:d$, $e:f$ entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß $ace:bdf$.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wann man seine beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürtzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wann man die Vorder-Sätze gegen die Hinter-Sätze aufhebt oder abkürtzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnißen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden. Die gegebenen Verhältniße sind:

12:25, 28:33, und 55:56

$$\begin{array}{c}
\cancel{1}\cancel{2}.\cancel{4}.2:5.\cancel{2}\cancel{5} \\
\cancel{2}\cancel{8} \quad :\cancel{3}.\cancel{3}\cancel{3} \\
\underline{\cancel{5}\cancel{5}.\cancel{5} \quad :\cancel{2}.\cancel{5}\cancel{6}} \\
2:5
\end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß 2:5.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merckwürdig, wo immer ein Vorder-Satz dem vorigen Hinter-Satz gleich ist. Also wann die gegebenen Verhältnißen sind:

$$\begin{array}{c}
a:b \\
b:c \\
c:d \\
d:e \\
\underline{e:a}
\end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie 1 : 1.

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemercke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnißen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyen z. E. zwey solche Felder *A* und *B.* Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500: 360 und der Breite wie 60 : 100. Also stehet es

$$\begin{array}{c}
\cancel{500}.5 : 6.\cancel{360} \\
\underline{\cancel{60} \quad : \quad \cancel{100}} \\
5:6
\end{array}$$

Allso verhält sich das Feld *A* zu dem Feld *B* wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld *A* sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld *B* aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältniße zusammensetzen

$$\begin{array}{lcc} \text{Verhältniß der Längen} & \cancel{720}.8 & : 15.\cancel{60}.\cancel{660} \\ \text{Verhältniß der Breiten} & \cancel{88}.8.2 & : \cancel{90} \\ \hline & & 16:15 \end{array}$$

Und dieses ist das Verhältniß der Felder *A* und *B*.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wißen daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist. Nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer *A*, deßen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer *B* aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite 24 Fuß und die Höhe 10 Fuß, so sind die drey Verhältniße:

$$\begin{array}{lccc} \text{der Länge} & \cancel{36}.\cancel{6}.3 & : & \cancel{42}.6 \\ \text{der Breite} & \cancel{16}.2 & : & \cancel{24}.3 \\ \text{der Höhe} & \cancel{14}.2 & : & \cancel{10}.5 \\ \hline & & 4:5 & \end{array}$$

Allso ist der Inhalt des Zimmers *A* zu dem Inhalt des Zimmers *B* wie
4 zu 5.

494.

Wann die Verhältniße, welche man solcher Gestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältniße. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnißen $a : b$ und $a : b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $aa : bb$ dahero sagt man die Quadraten stehen in einer gedoppelten Verhältniß ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältniß a: $b$ dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, dahero sagt man daß die Cubi ein dreyfältiges Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Circkelrunde Plätze in den gedoppelten Verhältnißen ihrer Durchmeßer verhalten, das will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmeßer.

Es sey ein solcher Platz *A* deßen Durchmeßer = 45 Fuß, eines andern Circkelrunden Platzes *B* aber Durchmeßer sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem verhalten wie $45 \cdot 45$ zu $30 \cdot 30$, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnißen zusammengesetzt

$$\begin{array}{c} \cancel{45}.\ \cancel{9}.3 : \cancel{30}.\ \cancel{6}.2 \\ \underline{\cancel{45}.\ \cancel{9}.3 : \cancel{30}.\ \cancel{6}.2} \\ 9:4 \end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmeßer verhalten. Wann also der Durchmeßer einer Kugel *A* ein Fuß ist, und einer andern Kugel *B* zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel *A* sich zum Inhalt der Kugel *B* verhalten wie $1^3 : 2^3$ oder wie 1:8.

Wann also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel *B* achtmahl schwerer seyn als die Kugel *A.*

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonen-Kugeln aus ihren Durchmeßern finden, wann man nur von einer das Gewicht hat. Es sey zum Exempel eine Kugel *A,* deren Durchmeßer $= 2$ Zoll, und die fünf lbs schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel *B,* deren Durchmeßer $= 8$ Zoll ist.

Hier hat man nun diese Proportion $2^3 :\ 8^3 = 5 : ...$ Giebt 320 lbs, und dieses ist das Gewicht der Kugel *B.* Von einer andern Kugel *C* aber, deren Durchmeßer $= 15$ Zoll wird das Gewicht gefunden

$$2^3 : 15^3 = 5\ :\ \ldots\ldots \text{ Antwort } 2109\tfrac{3}{8} \text{ lbs.}$$

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ so kann dasselbe immer durch gantze Zahlen ausgedrückt werden: dann man darf nur beyde Brüche mit *bd* multipliciren, so kommt dieses Verhältniß *ad* : *bc* heraus welches jenem gleich ist, dahero diese Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun *ad* gegen *bc* noch abkürtzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also

$$\tfrac{15}{24} : \tfrac{25}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10.$$

499.

Es wird ferner gefragt wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist dann so gleich klar daß seyn werde $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$ , welches also mit Worten ausgesprochen wird: Daß sich zwey Brüche deren Zehler 1 sind unter sich verhalten umgekehrt wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zehler haben. Dann da $\frac{c}{a}:\frac{c}{b}=b:a$, so sind sie gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zehler nemlich wie $a:b$. Also ist $\frac{3}{8}:\frac{3}{16}=\frac{6}{16}:\frac{3}{16}=6=3=2:1$ und $\frac{10}{7}:\frac{15}{7}=10:15$ oder $2:3$.

500.

Bey dem freyen Fall der Cörper hat man bemercket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwerts die Zeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun wie viel Zeit ein Stein brauche um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen, so ist $15:2160=1:$ Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das ist wie $1^2:3600^2$ also verhält sich die gegebene Höhe $=15$ Fuß zu der gesuchten Höhe.

$$
\begin{array}{l}
1:12960000 = 15 \text{ zu} \ldots \\
\underline{\phantom{000000}15} \\
\phantom{0}64800000 \\
\underline{1296\phantom{00000}} \\
194400000
\end{array}
\qquad \text{Antwort } 194400000 \text{ Fuß.}
$$

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die gantze Erde dicke ist.

502.

Eine gleiche Bewandtniß hat es mit dem Preis der Edelgesteine, welche sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richten. Bey den Diamanten gilt diese Regul, daß sich der Preiß wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das

Verhältniß der Preiße ist gleich dem gedoppelten Verhältniße des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wann nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so viel mal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ Rubel} : \ \ldots\text{oder}$$

$$1 : 10000 = 2 \text{ Rbl. zu} \cdots \text{ Antwort } 20000 \text{ Rbl.}$$

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath deßen Preiß demnach also gefunden wird:

$$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ Rubel} : \ldots\ldots\text{oder}$$

$$1 : 2822400 = 2 : \ldots\ldots \quad \text{Antwort } 5644800 \text{ Rubel.}$$

503.

Von zusammengesetzten Verhältnißen geben die Posten ein merckwürdiges Exempel, weil das Post-Geld nach einem zusammengesetzten Verhältruße der Zahl der Pferde und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wann also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wißen will wie viel vor 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist

$$1 : 28 \text{ darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen}$$

$$\underline{2 : 9} \text{ und setzt die zwey Verhältniße zusammen}$$

$$2 : 252 \text{ oder kürtzer } 1 : 126 = \tfrac{1}{3} \text{ zu}\ldots\text{Antwort } 42 \text{ Rthl.}$$

Wann man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also
zu stehen:

$$\cancel{8}.\cancel{2} : \cancel{3}\cancel{0}.\cancel{1}\cancel{5}.5$$

$$\underline{\cancel{3} \quad : \cancel{4} \qquad\quad}$$

$$1 : 5 \ = \ 1 \text{ Ducaten} : \ldots$$

Dahero ist die Bezahlung 5 Ducaten.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältniße auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wann also zum Exempel einem Mäurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wißen, wie viel an 24 Mäurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also

$$\begin{array}{l} 1:24 \\ 1:50 \\ 1:1200 = 10 \text{ Gr.} : 500 \text{ Rthl.} \\ \quad \underline{\;10\;} \\ 3)\,\underline{12000 \text{ Gr.}} \\ 8)\,\underline{4000\quad} \\ \quad 500 \text{ Rthl.} \end{array}$$

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind so wird in den Rechen-Büchern die Art dieselben zu berechnen die Regula Quinque genennt.

## CAPITEL 11

## VON DEN GEOMETRISCHEN PROGRESSIONEN

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine Geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben Geometrischen Verhältniße stehet, und die Zahl welche anzeigt wie viel mal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, wird der Nenner genennt; wann also das erste Glied 1 ist und der Nenner $= 2$, so ist die Geometrische Progression folgende:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Glieder | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10 |
| Prog. | 1, | 2, | 4, | 8, | 16, | 32, | 64, | 128, | 256, | 512 etc. |

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben um anzuzeigen das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wann man überhaupt das erste Glied $= a$ und den Nenner $= b$ setzt, so kommt die Geometrische Progression also zu stehen:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8 \,.......n \\ \text{Prog. } a,\; ab,\; ab^2,\; ab^3,\; ab^4,\; ab^5,\; ab^6,\; ab^7 .....ab^{n-1} \end{array}$$

Wann also diese Progression aus $n$ Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu mercken, wann der Nenner $b$ größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner $b = 1$ so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner $b$ kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wann $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Geometrische Progression:

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64},\ \tfrac{1}{128},\ \text{etc.}$$

507.

Hierbey kommen nachfolgende Stücke zu betrachten vor
I.) das erste Glied, welches hier $a$ genennt wird,
II.) der Nenner, welcher hier $b$ genennt wird,
III.) die Anzahl der Glieder, welche $= n$ gesetzt worden,
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$

Dahero wann die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden wann· man die $n-1^{\text{te}}$ Potestät des Nenners $b$, das ist $ab^{n-1}$, mit dem ersten Glied $a$ multiplicirt.

Wollte man nun von dieser Geometrischen Progression: 1, 2, 4, 8, etc. das 50$^{\text{te}}$ Glied wißen, so ist hier $a=1, b=2$ und $n=50$. Dahero das 50$^{\text{te}}$ Glied seyn wird $2^{10}$. Da nun $2^9 = 512,$ so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen giebt $2^{40} = 1099511627776$. Wann man nun $2^{40}$ mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512 \cdot 1099511627776 \; = \; 562949953421312.$

508.

Hiebey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgender Gestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 wovon wir die Summe durch den Buchstaben s andeuten wollen, also daß

$$s = 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2s = 2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig: $s = 1024-1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe = 1023.

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, also daß die Summe seyn wird

$$s = 1+2+2^2+2^3+ \;\cdots\cdots\; 2^{n-1}.$$

Dieses mit 2 multiplicirt giebt

$$2s = 2+2^2+2^3+2^4+ \;\cdots\cdots\; 2^n;$$

von diesem subtrahirt man jenes so bekommt man $s = 2^n - 1$. Dahero wird die gesuchte Summe gefunden, wann man das letzte Glied $2^n - 1$ mit dem Nenner 2 multiplicirt um zu bekommen $2^n$, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor $n$ nach und nach 1, 2, 3, 4 etc. schreiben werden, erläutern als

$$1=1,\ 1+2=3,\ 1+2+4=7,\ 1+2+4+8=15,$$
$$1+2+4+8+16=31,\ 1+2+4+8+16+32=63.\ \text{etc.}$$

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Huffnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig und immer für den folgenden zwey mal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese Geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. bis auf das 32[te] Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20}=1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10}=1024$, um zu haben $2^{30}=1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt giebt das letzte Glied $2^{31}=2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1 : das ist 4294967295 Pfenige;

2) 4294967295 Pf.
6) 2147483647 (1
oder 357913941 Gr. 3 Pf.
3) 357913941
8) 119304647
oder 14913080 Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

Allso wird der Preiß des Pferdes seyn 14913080 Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

512.

Es sey nun der Nenner $=3$ und die Geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange $=s$, also daß:

$$s=1+3+9+27+81+243+729.$$

Man multiplicire mit 3 um zu haben

$$3s=3+9+27+81+243+729+2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s=2187-1=2186$.

Dahero ist die gedoppelte Summe $= 2186$ und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe $= s$, also daß $s = 1+3+3^2+3^3+3^4+ \ ...3^{n-1}$ dieses mit 3 multiplicirt giebt $3s = 3+3^2+3^3+3^4+ \ ...3^n$. Hievon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer dem letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$ und also $s = \frac{3^n-1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wann man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$1 = 1,\ 1+3 = \tfrac{3.3-1}{2} = 4,\ 1+3+9 = \tfrac{3.9-1}{2} = 13,$$
$$1+3+9+27 = \tfrac{3.27-1}{2} = 40,\ 1+3+9+27+81 = \tfrac{3.81-1}{2} = 121.$$

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe derselben $= s$, also daß

$$s = a+ab+ab^2+ab^3+ab^4+\cdots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit $b$ so bekommt man

$$bs = ab+ab^2+ab^3+ab^4+\cdots ab^n.$$

Hiervon subtrahire man das obige so erhält man $(b-1)\cdot s = ab^n - a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $s = \frac{ab^n-a}{b-1}$. Dahero wird die Summe einer jeglichen Geometrischen Progression gefunden wann man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine Geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $= 3$ und der Nenner $= 2$, so ist $a = 3,\ b = 2$ und $n = 7$ folglich das letzte Glied $3\cdot 2^6$ das ist $3\cdot 64 = 192$, und die Progression selbst

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192$$

und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt bleibt 381, dieser Rest durch $b-1$, das ist durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

516.

Es sey ferner gegeben eine Geometrische Progression von sechs Gliedern, 3 davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$ . Also daß die Progression ist

$$4,\ 6,\ 9,\ \frac{27}{2},\ \ \frac{81}{4},\ \ \frac{243}{8}$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b-1=\frac{1}{2}$ giebt $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$ .

517.

Wann der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression die ohne Ende fortläuft angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied $=1$ der Nenner $=\frac{1}{2}$, und die Summ $=s$ also daß

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Man multiplicire mit 2 so bekommt man:

$$2s=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} \text{ etc.}$$

ohne Ende, hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $s=2$ welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied = 1, der Nenner $\frac{1}{3}$ und die Summ $=s$, also daß

$$s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire alles mit 3 so hat man

$$3s=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hievon nehme man die obige Reihe weg so bleibt $2s=3$ folglich ist die Summe $1\frac{1}{2}$.

519.

Es sey ferner das erste Glied $=2$, der Nenner $=\frac{3}{4}$ , die Summe $=s$ also daß $s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. dieses mulplicire man mit $\frac{4}{3}$ so hat man $\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt bleibt $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$ , also die Summe selbsten wird seyn just 8.

520.

Wann überhaupt das erste Glied gesetzt wird $=a$ und der Nenner der Progression $=\frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich *b* kleiner ist als *c*, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgender Gestalt gefunden werden. Man setzt

$$s=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\text{ etc.}$$

ohne Ende. Hier multiplicirt man mit $\frac{a}{b}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s=\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\text{ etc.}$$

ohne End. Dieses subtrahirt man von dem obigen so bleibt $\left(1-\frac{b}{c}\right)s=a$

folglich ist $s=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}$.

Multiplicirt man nun oben und unten mit *c*, so bekommt man $s=\frac{ac}{c-b}$ dahero ist die Summe dieser unendlichen Geometrischen Progression
$=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}$ oder $=\frac{ac}{c-b}$

Diese Summe wird folglich gefunden wann man das erste Glied *a* dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied so bekommt man die Summe.

521.

Wann in solchen Progressionen die Zeichen $+$ und $-$ mit einander abwechseln so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden.
Dann es sey

$$s=a-\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\text{ etc.}$$

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$ so bekommt man:

$$\frac{b}{c}\cdot s=\frac{ab}{c}-\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}-\frac{ab^4}{c^4}\text{ etc.}$$

dieses addire man zu dem obigen, da erhält man $\left(1+\frac{b}{c}\right)s=a.$ Hieraus findet man die gesuchte Summe

$$s=\frac{a}{1+\frac{b}{c}}\text{ oder }s=\frac{ac}{c+b}.$$

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a=\frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $=\frac{2}{5}$ das ist $b=2$ und $c=5$ so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5}+\frac{6}{25}+\frac{12}{125}+\frac{24}{625}$ etc. die Summe also gefunden: der

Nenner von 1 subtrahirt bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe = 1.

Wann aber die Zeichen + und abwechseln − und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5}-\frac{6}{25}+\frac{12}{125}-\frac{24}{625} \text{ etc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{3}{7}.$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt $\frac{9}{10}$ bleibt. Hierdurch das erste Glied dividirt giebt die Summe $=\frac{1}{3}$.

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{30}$. Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}$ so fehlt noch $\frac{1}{300}$ zu $\frac{1}{3}$ etc.

524.

Wann diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger den Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe $=10$. Hier ist zu mercken, daß diese Reihe durch einen Decimal-Bruch also vorgesteilet wird 9,9999999 etc.

## CAPITEL 12

## VON DEN UNENDLICHEN DECIMAL-BRÜCHEN

525.

Wir haben oben gesehen, daß beyden Logarithmischen Rechnungen anstatt der gemeinen Brüche Decimal-Brüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimal-Bruch verwandelt werde, und wie man den Wert eines Decimal-Bruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimal-Bruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, welcher entspringt wann man den Zehler *a* durch den Nenner *b* dividirt, so schreibe man anstatt *a* diese Form *a*,0000000, welche offenbahr nichts anders anzeigt als die Zahl *a,* weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl *b,* nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma welches die Decimal-Brüche von den gantzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Exempel erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$ so kommt die Decimal-Division wie folget zu stehen

$$\frac{2)1,0000000}{0,5000000=\frac{1}{2}}\ .$$

Hieraus sehen wir daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder als 0,5 welches auch offenbahr ist, indem dieser Decimal-Bruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$ so hat man diesen Decimal-Bruch

$$\frac{3)1,0000000}{0,3333333\text{ etc.}=\frac{1}{3}.}$$

Hieraus sieht man daß dieser Decimal-Bruch, deßen Werth $=\frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, sondern ins unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}$ etc. ohne Ende zusammen genommen just so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimal-Bruch der auch ins unendliche fortläuft

$$\frac{3)2,0000000,}{0,6666666\text{ etc.}=\frac{2}{3},}$$

welches auch aus dem vorigen klar ist, weil dieser Bruch zwey mal so groß ist, als der vorige.

528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$ so hat man diese Decimal-Division

$$\frac{4)1,0000000}{0,2500000 = \frac{1}{4},}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0,2500000, oder als 0,25, welches daher klar ist, daß

$$\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimal-Bruch

$$\frac{4)3,0000000}{0,7500000 = \frac{3}{4},}$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,75$ das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$ welcher Bruch durch 25 abgekürtzt, giebt $\frac{3}{4}$.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimal-Bruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)5,0000000}{1,2500000 = \frac{5}{4},}$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$ daß ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529.

Auf solche Art wird

$$\tfrac{1}{5} = 0,2;\ \text{und}\ \tfrac{2}{5} = 0,4;\ \text{ferner}\ \tfrac{3}{5} = 0,6;\ \tfrac{4}{5} = 0,8;\ \text{und}\ \tfrac{5}{5} = 1;\text{weiter}\ \tfrac{6}{5} = 1,2\ \text{etc.}$$

Wann der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,1666666$ etc. welches so viel ist als $0,666666 - 0,5$. Nun aber ist $0,666666 = \frac{2}{3}$ und $0,5 = \frac{1}{2}$, folglich ist $0,1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0,3333333\ \text{etc.} = \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6} =$ wird $0,5000000 = \frac{1}{2}\cdot$
Weiter wird $\frac{5}{6} = 0,8333333 = 0,3333333 + 0,5$ das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Wann der Nenner 7 ist, so werden die Decimal-Brüche mehr verwirrt: Also für $\frac{1}{7}$ findet man 0,142857 etc. wobey zu mercken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimal-Bruch just $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandele man denselben in eine Geometrische Progression, wovon das erste Glied

$=\frac{142857}{1000000}$ der Nenner aber $=\frac{1}{1000000}$; also wird die Summe $=\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$.

Man multiplicire oben und unten mit 1000000 so wird diese Summ $=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$.

531.

Daß der gefundene Decimal-Bruch just betrage kann noch leichter folgender Gestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben $s$ also daß

$$
\begin{array}{rl}
s = & 0{,}142857142857142857 \text{ etc. so wird} \\
10s = & 1{,}42857142857142857 \text{ etc.} \\
100s = & 14{,}2857142857142857 \text{ etc.} \\
1000s = & 142{,}857142857142857 \text{ etc.} \\
10000s = & 1428{,}57142857142857 \text{ etc.} \\
100000s = & 14285{,}7142857142857 \text{ etc.} \\
1000000s = & 142857{,}142857142857 \text{ etc.} \\
\text{Subtrahire } s = & 0{,}142857142857 \text{ etc.} \\
\hline
999999s = & 142857
\end{array}
$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $s=\frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimal-Bruchs

532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimal-Bruch 0,28571428 etc. Dieses leitet uns darauf wie man den Werth des vorigen Decimal-Bruchs den wir $s$ gesetzt haben leichter finden kann, weil dieser Bruch just zwey mal so groß ist als der vorige und also $=2s$ ; da wir nun gehabt haben

$$
\begin{array}{rl}
100s = & 14{,}28571428571 \text{ etc.} \\
\text{hiervon 2s weggenommen } 2s = & 0{,}28571428571 \text{ etc.} \\
\hline
\text{bleiben } 98s = & 14, \\
\text{dahero wird } s = & \frac{14}{98}=\frac{1}{7}.
\end{array}
$$

533.

Wann also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so lauft der Decimal-Bruch ins unendliche, und werden darinnen 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich ein mal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müßen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen als vom Anfang. Wann aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fält dieses weg.

534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimal-Brüche gefunden:

$$\tfrac{1}{8}=0,125\ ;\ \tfrac{2}{8}=0,250\ ;\ \tfrac{3}{8}=0,375\ ;\ \tfrac{4}{8}=0,500\ ;$$
$$\tfrac{5}{8}=0,625;\ \ \tfrac{6}{8}=0,750;\ \ \tfrac{7}{8}=0,875 \text{ etc.}$$

535.

Ist der Nenner 9 so findet man folgende Decimal-Brüche $\tfrac{1}{9}=0,111$ etc. $\tfrac{2}{9}=0,222$ etc.; $\tfrac{3}{9}=0,333$ etc. Ist aber der Nenner 10 so bekommt man folgende Brüche $\tfrac{1}{10}=0,100$ ; $\tfrac{2}{10}=0,2$; $\tfrac{3}{10}=0,3$ wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\tfrac{1}{100}=0,01$; $\tfrac{37}{100}=0,37$; ferner $\tfrac{256}{1000}=0,256$ ; weiter $\tfrac{24}{10000}=0,0024$ ; ferner welches für sich offenbahr.

536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimal-Bruch $\tfrac{1}{11}=0,0909090$ etc. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden so setze man denselben $=s$. Es wird also $s=0,0909090$ und $10s=0,909090$. Weiter $100s=9,09090$. Hievon $s$ subtrahirt,so wird $99s=9$ und dahero $s=\tfrac{9}{99}=\tfrac{1}{11}$. Ferner wird $\tfrac{2}{11}=0,181818$; $\tfrac{3}{11}=0,272727$; $\tfrac{6}{11}=0,545454$.

537.

Hier sind nun diejenigen Decimal-Brüche sehr merckwürdig, da einige Zahlen immer wiederholt werden und solcher Gestalt ins unendliche fortgehen. wie nun von solchen Brüchen der Werth leicht zu finden sey, soll so gleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche sey $=a$ so haben wir $s=0,aaaaaaa$. Diesemnach wird

$$10s = a,aaaaaaa.$$

$$\text{Subtrahire } \underline{s = 0,aaaaaaa}$$

$$\text{so wird } 9s = a, \text{folglich } s = \tfrac{a}{9}.$$

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als *ab,* so hat man $s = 0,abababa$. Daher wird $100s = ab,ababab$ *;* hievon *s* subtrahirt, bleibt $99s = ab$ *;* also $s = \frac{ab}{99}$

Werden drey Zahlen als *abc* immer wiederholt, so hat man $s = 0,abcabcabc$ ; folglich $1000s = abc,abcabc$ . Hievon das obige subtrahirt, bleibt $999s = abc$ ; also $s = \frac{abc}{999}$ und so weiter.

538.

So oft also ein solcher Decimal-Bruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen: also wann dieser gegeben wäre 0,296296; so wird sein Werth seyn $= \frac{296}{999}$ . Dieser Bruch durch 37 abgekürtzt wird $= \frac{8}{27}$ .

Hieraus muß nun hinwiederum der obige Decimal-Bruch entspringen; um dieses leichter zu zeigen, weil $27 = 3 \cdot 9$ , so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotus ferner durch 3, wie folget:

$$\begin{array}{l} 9)\ 8,0000000 \\ \underline{3)\ 0,8888888} \\ \quad\ 0,2962962 \text{ etc.} \end{array}$$

Welches der gegebene Decimal-Bruch ist.

539.

Um noch ein Exempel zu geben, so verwandele man diesen Bruch

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

In einen Decimal-Bruch welches folgender Gestalt geschieht.

$$\begin{array}{r}
2)1,00000000000000\\ \hline
3)0,50000000000000\\ \hline
4)0,16666666666666\\
5)0,04166666666666\\ \hline
6)0,00833333333333\\ \hline
7)0,00138888888888\\ \hline
8)0,00019841269841\\ \hline
9)0,00002480158730\\ \hline
10)\ 0,00000275573192\\ \hline
0,00000027557319
\end{array}$$

CAPITEL 13

VON DEN INTERESSEN –RECHNUNGEN

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß von 100 Rthl. jährlich 5 Rthl. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht, den Zins von einem jeglichen Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5 was giebt das gegebene Capital. Es sey z. E. das Capital 860 Rthl. so findet man den jährlichen Zins

$$\begin{array}{l}
100:5=860 \text{ zu ...Antwort 43 Rthl.}\\
\underline{\qquad\qquad 5}\\
\underline{100)\ 4300}\\
\qquad\ 43
\end{array}$$

541.

Bey Berechnung dieses einfachen Interesse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthl. nach einem Jahr zu 105 anwachsen so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfließung eines Jahres werden müße?

Es sey das Capital $= a$ so wird solches nach einem Jahre gefunden, wann man sagt 100 geben 105 was giebt *a;* Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$ , welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20} \cdot a$ oder $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

542.

Wann allso zu dem gegenwärtigen Capital sein 20 ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wann man nun zu diesem wieder seinen 20 sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20 ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital anjetzo 1000 Rthl. welches zu 5 p. C. angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden; weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimal-Brüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000 ste Theile eines Rthl. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthl. wird

| | |
|---|---|
| nach 1 Jahr . . . . . . . . . | 1050 Rthl. |
| | 52,5 |
| nach 2 Jahren. . . . . . . . . | 1102,5 |
| | 55,125 |
| nach 3 Jahren. . . . . . . . . | 1157,625 |
| | 57,881 |
| nach 4 Jahren. . . . . . . . . | 1215,506 |
| | 60,775 |
| nach 5 Jahren. . . . . . . . . | 1276,281 etc . |

544.

Solcher Gestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wann aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam; dieselbe läßt sich aber folgender gestalt abkürtzen.

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$ und da ein Capital von 20 Rthl. nach einem Jahr 21 Rthl. beträgt, so wird das Capital *a* nach einem Jahr auf $\frac{21}{20} \cdot a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahr auf $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahr wieder anwächst auf $\left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot a$ , welches das Capital nach drey

Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^4 \cdot a$; nach fünf Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^5 \cdot a$; nach 100 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \cdot a$, und allgemein nach $n$ Jahren wird dasselbe seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Interesse zu 5 Pr. gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Interesse zu 6 Pr. gerechnet werden, so würde das Capital $a$ nach einem Jahr anwachsen auf $\frac{106}{100} \cdot a$; nach zwey Jahren auf $\left(\frac{106}{100}\right)^2 \cdot a$; und nach $n$ Jahren auf $\left(\frac{106}{100}\right)^n \cdot a$.

Sollte aber das Interesse nur 4 Pr. betragen, so würde das Capital $a$ nach $n$ Jahren anwachsen auf $\left(\frac{104}{100}\right)^n \cdot a$.

546.

Wann nun, so wohl das Capital $a$ als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formel leicht auflößen nemlich durch die Logarithmen. Dann man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 Proc. ist $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$. Da nun dieselbe ein Product ist von $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ und $a$, so ist ihr Logarithmus $= \log\left(\frac{21}{20}\right)^n + \log a$. Da weiter $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ eine Potestät ist, so ist $\log\left(\frac{21}{20}\right)^n = n \log \frac{21}{20}$. Dahero ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n \cdot \log\left(\frac{21}{20}\right) + \log a$

Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = \log 21 - \log 20$.

547.

Es sey nun das Capital $= 1000$ Rthl. und man fragt wie groß daßelbe nach 100 Jahren zu 5 p. C. seyn werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun seyn $= 100 \log \frac{21}{20} + \log 1000$, welcher folgender Gestalt berechnet wird

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen und also heißen 131501 Rthl.

$$\begin{array}{lr} & \log 21 = 1{,}3222193 \\ \text{subtr.} & \underline{\log 20 = 1{,}3010300} \\ & \log \tfrac{21}{20} = 0{,}0211893 \\ \text{multipl.} & \underline{\text{mit } 100} \\ & 100\log \tfrac{21}{20} = 2{,}1189300 \\ \text{addirt} & \underline{\log 1000 = 3{,}0000000} \\ & 5{,}1189300 \end{array}$$

548.

Ein Capital von 3452 Rthl. zu 6 Procento, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren? Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64\log\frac{53}{50} + \log 3452$, welches also berechnet wird:

$$\begin{array}{lr} & \log 53 = 1{,}7242759 \\ \text{subtr.} & \underline{\log 50 = 1{,}6989700} \\ & \underline{\log \tfrac{53}{50} = 0{,}0253059} \\ \text{mult. mit 64;} & 64\log \tfrac{53}{50} = 1{,}6195776 \\ & \underline{\log 3452 = 3{,}5380708} \\ & 5{,}1576484 \end{array}$$

Also das gesuchte Capital $= 143763$ Rthl.

549.

Wann die Anzahl der Jahre sehr groß ist, und weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmus in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, so könnte daraus ein mercklicher Fehler entstehen. Dahero muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen: Ein Capital von einem Rthl. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen worden. Nun fragt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500\log\frac{21}{20} + \log 1$, woraus diese Rechnung entspringt

$$\log 21 = 1{,}322\ 219\ 294\ 733\ 919$$
$$\text{subtrahirt } \log 20 = 1{,}301029\ 995\ 663\ 981$$
$$\log \tfrac{21}{20} = 0{,}021189\ 299\ 069\ 938$$
$$\text{mult. mit 500 gibt } 10{,}594649534969000$$

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches dahero selbsten seyn wird $= 39323200000$ Rthl.

550.

Wann man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interesse schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summa $= b$ darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen wie folget. Gegenwärtig hat man *a;*

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a + \frac{21}{20}b + b$

nach 3 Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach 4 Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach $n$ Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^n a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b + \cdots + \frac{21}{20}b + b.$

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwerts geschrieben

$$b + \frac{21}{20}b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$$

besteht, welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$. Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$ so bekommt man $\left(\frac{21}{20}\right)^n b$, davon subtrahirt man das erste Glied *b,* so bleibt $\left(\frac{21}{20}\right)^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; dahero wird die Summe der obigen Progression $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$\left(\frac{21}{20}\right)^n a + 20 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a + 20b) - 20b$.

551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a+20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wann man den Logarithmus desselben sucht welcher ist $n\log\left(\frac{21}{20}\right)+\log(a+20b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man $20b$, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthl. zu 5 p. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthl. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn? Hier ist also $a=1000$ ; $b=100$ ; $n=25$ ; dahero wird die Rechnung stehen wie folget:

$$\log\tfrac{21}{20} = 0{,}021189299$$

multiplic. mit 25 giebt

$$25\log\tfrac{21}{20} = 0{,}5297324750$$
$$\log(a+20b) = 3{,}4771212547$$
$$4{,}0068537297$$

Also ist der erste Theil 10159,1 Rthl. davon subtrahirt $20b=2000$, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159,1 Rthl.

553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthl. angewachsen, so kann man weiter fragen nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthl. anwachsen werde?

Es sey $n$ diese Anzahl von Jahren, und weil $a=1000, b=100$ so wird nach $n$ Jahren das Capital seyn:

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^n(3000)-2000$$

dieses muß nun 1000000 Rthl. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n-2000=1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n = 1002000$$

Man dividire beyderseits durch 3000 so hat man $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n = 334$ . Hiervon nehme man die Logarithmus, so hat man $n\log\tfrac{21}{20} = \log 334$. Hier dividirt man durch $\log\tfrac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{\log 334}{\log\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\log 334 = 2{,}5237465$ und $\log\tfrac{21}{20} = 0{,}0211893$;
dahero wird $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rtht

554.

Wann aber anstatt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital $a$ folgender Gestalt fortgehen: Gegenwärtig ist es *a;*

nach 1 Jahr $\tfrac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 a - \tfrac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $\left(\tfrac{21}{20}\right)^3 a - \left(\tfrac{21}{20}\right)^2 b - \tfrac{21}{20}b - b$

nach $n$ Jahren $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n a - \left(\tfrac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\tfrac{21}{20}\right)^{n-2} b \cdots - \left(\tfrac{21}{20}\right)b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n a$ ; davon wird subtrahirt diese Geometrische Progression rückwärts geschrieben
$b + \left(\tfrac{21}{20}\right)b + \left(\tfrac{21}{20}\right)^2 b + \cdots \left(\tfrac{21}{20}\right)^{n-1} b.$ Hieron ist oben die Summe gefunden worden $= 20\left(\tfrac{21}{20}\right)^n b - 20b$ welch von , welche von dem ersten $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n a$ subtrahirt, das nach $n$ Jahren gesuchte Capital giebt $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n (a - 20b) + 20b..$

556.

Diese Formel hätte so gleich aus der vorigen geschloßen werden können. Dann da vorher jährlich $b$ addirt wurde, so wird nun jährlich $b$ subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt $+b$ nur $-b$ schreiben. Hier ist nun insonderheit zu mercken, daß wann 20 $b$ größer ist, als $a$ so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches vor sich offenbahr ist, dann wann vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden und endlich gar verschwinden; welches wir mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthl. zu 5 p. C. ausstehen; braucht alle Jahr zu seinem Unterhalt 6000 Rthl. welches mehr ist als das Interesse von 100000 Rthl. so nur 5000 Rthl. beträgt, dahero das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage nach wie viel Jahren dasselbe gäntzlich verschwinden werde?

Vor diese Anzahl Jahre setze man $n$, und da $a=100000$ Rthl. und $b=6000$, so wird nach $n$ Jahren das Capital seyn $=-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n+120000$ oder $120000-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst oder wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n=120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n=6$. Man nehme die Logarithmus, so kommt $n\log\left(\frac{21}{20}\right)=\log 6$. Man dividire durch $\log\left(\frac{21}{20}\right)$, so findet man

$$n=\frac{\log 6}{\log\left(\frac{21}{20}\right)}=\frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}, \text{ oder } n=\frac{7781513}{211893}$$

folglich wird $n=$ 36 Jahr 8 Monath 22 Tage: und nach so vieler Zeit wird es verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grund die Interessen auch vor eine kleinere Zeit als gantze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 p. C. nach $n$ Jahren auf $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent $n$ ein Bruch und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmus gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n=\frac{1}{365}$; will man es nach zwey Tagen wißen, so wird $n=\frac{3}{365}$ etc.

559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthl. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist

$a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000$ .

Hiervon ist der Logarithmus

$$= \log\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + \log 100000 = \frac{8}{365}\log\left(\frac{21}{20}\right) + \log 100000$$

Nun aber ist $\log\left(\frac{21}{20}\right) = 0,0211893$

| | |
|---|---|
| dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt giebt | 0,0004644 |
| hierzu ad. log100000 welcher ist | 5,0000000 |
| | 5,0004644 |

so erhält man den Logarithmus von dem Capital $= 5,0004644$. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthl. so daß in den ersten 8 Tagen das Interesse schon 107 Rthl. austrägt.

560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wann eine Summa Geld erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu betrachten, daß da 20 Rthl. über ein Jahr 21 Rthl. austragen, so sind hinwiederum 21 Rthl. die nach einem Jahr zahlbar sind, anjetzo nur 20 Rthl. werth. Wann also das nach einem Jahr verfallene Capital *a* gesetzt wird, so ist desselben Werth $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$. Um also zu finden wie viel das Capital *a*, so zu einer gewißen Zeit verfällt ein Jahr früher werth ist, so muß man daßelbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $\left(\frac{20}{21}\right)^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $\left(\frac{20}{21}\right)^3 a$ und überhaupt *n* Jahr früher ist der Werth desselben $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$.

561.

Einer genießt auf 5 Jahr lang eine jährliche Rente von 100 Rthl. dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 p. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?
Für die 100 Rthl. welche verfallen

| | | | |
|---|---|---|---|
| nach 1 Jahr | bekommt er | | 95,239 |
| nach 2 Jahren | " | " | 90,704 |
| nach 3 Jahren | " | " | 86,385 |
| nach 4 Jahren | " | " | 82,272 |
| nach 5 Jahren | " | " | 78,355 |
| Summa aller 5 Jahren bekommt er | | | 432,955 |

Also kan er vor diese Rente nicht mehr fordern als 432,955 Rthl. oder 432 Rthl. 22 Gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgender Gestalt erleichtert werden kann:
Es sey die jährliche Rente *a*, welche jetzo schon anfängt und *n* Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

Dieses ist nun eine Geometrische Progression deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a-a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit $-21$ multiplicirt werden: dahero wird die gesuchte Summe seyn
$=-21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a+21a$, das ist $21a-21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a$, wovon das letztere Glied, so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmus berechnet werden kann.

ENDE DES ERSTEN THEILS
UND DES DRITTEN ABSCHNITTS VON DEN VERHÄLTNISSEN
UND PROPORTIONEN