CHAPTER 3

ON SUBTRACTION AS THE SECOND ARITHMETICAL OPERATION

1. *In subtraction such rules are given, by which one conveys how to subtract from a given number another given number, and to indicate the number which remains. Now this remaining residual number, when from the given numbers the one is taken from the other, is usually called the remainder.*

Just as it is taught in addition, how we must add to a given number one or more other numbers : thus it is taught in subtraction, how from a given number we take away another given number, or it must be subtracted. In addition thus a given number increases, in that to the same yet another number or more is to be added; but in subtraction a given number is diminished, as from the same another number is taken away or subtracted. Therefore while in addition a number increases, but in subtraction it diminishes, so these two operations are opposite to one another. And since all the changes consist of increases and decreases of numbers, thus these two operations, namely addition and subtraction, can be regarded as the principal operations, which can take place between the numbers : as also will be shown in the following, how the remaining operations arise from these two, and have their origins in the same. Now as for what pertains to subtraction itself, thus through the same, a number is found which remains the same, when we take away or subtract a given number from another number. But since to understand this thoroughly, some number is required, that we know, as the same to be taken from the units, tens, hundreds, and the following kinds together ; thus such rules must be given for the accomplishment of subtraction, through the help of which the number sought is found, namely the remainder, in the units, tens, hundreds etc.; from which the same to be written at once, and can be pronounced in the customary way. For this so much greater convenience the rules must be provided thus, so that they give equally the units, tens, hundreds, etc., from which the remainder consists; and the same thus equally, as the sum in addition, can be written down.

2. *This number, which is taken away from the other number, must be smaller than the other, from which it is to be taken. Therefore in the subtraction it is the smaller taken away from the larger number, and the remainder, or that left behind, is found ; which will have this property, that, if we add the smaller number to the same, the larger number is produced.*

If a number must be taken away from another number, thus the same must by necessity be smaller ; because we cannot take away more, than is actually at hand. Namely, if a known number of rubles is situated in a sack, thus we cannot take more from that, than there is inside ; even if thus more or less can still be taken from that. Subtraction thus shows, how we are should find, how many rubles still remain in the sack, if a known amount is counted out from the same. It is now clear from this, that if just as many are taken out as there are inside, nothing is to be left behind in the sack ; but if less were taken out, thus some must remain behind, which is called the remainder. From which it is equally apparent, that this, which remains behind in the sack, and that, which is to be taken out, together again make just as much as were in the sack at the start. Thus we have : the remainder and the smaller number taken together make the larger number. Thus if two numbers shall be given, subtraction thus teaches, how we may find a number, which taken together with the smaller number amounts to the larger number. Likewise we see from this, that, if we should take the remainder found from the larger number, the smaller number must be left behind. As if we subtract the smaller number 5 from the larger number 9, thus the remainder is 4; and this remainder has the property, that the same, namely 4, and the smaller number 5 added together amount to the larger number 9 . In the same way, if we take the remainder 4 found from the larger number 9, thus 5 is left over, namely the smaller number. Further it follows from this, that if, when we subtract one of the same numbers from the sum of two numbers, which is to be found through addition, the other number necessarily must remain. And whereby are these proofs found, through which we are accustomed to undertake, whether an example be correct either from addition or subtraction. Which should be accomplished below with more examples.

3. *In order to take one number from the other or to subtract, it will be required, that in the first place we know how to be subtracted units from units, tens from tens, hundreds from hundreds, etc. And that no more than 9 parts of any kind ever arises, and if the need arises, we know, how to change one part of a higher kind into lower kinds, without the whole number being changed.*

We suppose initially, that these numbers, one of which shall be subtracted from the other, are given in the customary manner by units, tens, hundreds, etc. Wherefore if we have to subtract the unit of a smaller number from the unit of a larger number, likewise also the tens from the tens, the hundreds from the hundreds, and so forth; thus it is clear, that these remaining units, tens, hundreds, and so on taken together must amount to the remainder sought. Now for this operation to work correctly, it is necessary that we know, how to subtract the units from the units, the tens from the tens, etc. ; which therefore is very easy to learn, as long as at no time more than 9 parts of a given kind arise but although this number, from which the other must be subtracted, must always be the greater, yet it can still happen, that in the larger number some part from the units, tens, or of any other kind provided shall be as in a smaller number from which the larger number cannot be subtracted, as with a smaller number ; thus in which case, numbers of this smaller kind cannot now be taken away from the same kind of the larger number. Now to overcome this difficulty, a digit must be taken from the next higher order of the greater number and to be attached to the smaller kind, of which it amounts to 10 parts ; by this method we obtain thus 10 more parts of the same kind from the greater number, than were available before; from which the following number can be subtracted, even with the same kind of smaller number, while in the same nowhere more than 9 parts of the same kind arise.

4. *It is thus necessary before all things, that we learn how to subtract any simple number from a given number, which shall never be more than 9 greater than the same. Indeed this is easy in itself and can be done by anyone in their head :yet hereby we present a table, which is itself attached here.*

Just as in the subtraction made in the manner described above, and to be performed by each kind in particular, thus the number of any kind at the place of the larger number either is smaller than the number at the same place in the smaller number, or not so. In the latter case only a single number must be taken from another single number. But in the first case the size of the larger number at that place is increased by 10, which corresponds to 10 parts of the lesser number, so that the digit of the second kind can be taken away. In this case thus a simple number of another kind, which indeed is greater than 9, but still smaller than 20, is to be taken away. We thus need nothing more, than to learn the following table, from which we see, how much remains, if we subtract a simple number from any simple number, or from one less than 20.

1 from 1 leaves 0	1 from 2 leaves 0
1 " 2 " 1	2 " 3 " 1
1 " 3 " 2	2 " 4 " 2
1 " 4 " 3	2 " 5 " 3
1 " 5 " 4	2 " 6 " 4
1 " 6 " 5	2 " 7 " 5
1 " 7 " 6	2 " 8 " 6
1 " 8 " 7	2 " 9 " 7
1 " 9 " 8	2 " 10 " 8
1 " 10 " 9	2 " 11 " 9
3 from 3 leaves 0	6 from 6 leaves 0
3 " 4 " 1	6 " 7 " 1
3 " 5 " 2	6 " 8 " 2
3 " 6 " 3	6 " 9 " 3
3 " 7 " 4	6 " 10 " 4
3 " 8 " 5	6 " 11 " 5
3 " 9 " 6	6 " 12 " 6
3 " 10 " 7	6 " 13 " 7
3 " 11 " 8	6 " 14 " 8
3 " 12 " 9	6 " 15 " 9
4 from 4 leaves 0	7 from 7 leaves 0
4 " 5 " 1	7 " 8 " 1
4 " 6 " 2	7 " 9 " 2
4 " 7 " 3	7 " 10 " 3
4 " 8 " 4	7 " 11 " 4
4 " 9 " 5	7 " 12 " 5

4 " 10 " 6	7 " 13 " 6
4 " 11 " 7	7 " 14 " 7
4 " 12 " 8	7 " 15 " 8
4 " 13 " 9	7 " 16 " 9
5 from 5 leaves 0	8 from 8 leaves 0
5 " 6 " 1	8 " 9 " 1
5 " 7 " 2	8 " 10 " 2
5 " 8 " 3	8 " 11 " 3
5 " 9 " 4	8 " 12 " 4
5 " 10 " 5	8 " 13 " 5
5 " 11 " 6	8 " 14 " 6
5 " 12 " 7	8 " 15 " 7
5 " 13 " 8	8 " 16 " 8
5 " 14 " 9	8 " 17 " 9
9 from 9 leaves 0	10 from 10 leaves
9 " 10 " 1	0
9 " 11 " 2	10 " 11 " 1
9 " 12 " 3	10 " 12 " 2
9 " 13 " 4	10 " 13 " 3
9 " 14 " 5	10 " 14 " 4
9 " 15 " 6	10 " 15 " 5
9 " 16 " 7	10 " 16 " 6
9 " 17 " 8	10 " 17 " 7
9 " 18 " 9	10 " 18 " 8
	10 " 19 " 9

Everything here in this part shall be omitted, when 0 or nothing shall be taken away from any number, as through that no number is diminished, but remains the same. In its place, however, the table of ten has been added, which, though it does not appear to be of any use : yet some difficulties which arise in the above mentioned method will be removed in the following, for which also the last part of this table is necessary.

5. *If a smaller number shall be taken away from a larger number, and the number of any kind in the smaller number is smaller, than the number now of the same kind of the larger number, thus through the help of the above table, to be the units taken from the units, the tens taken from the tens, the hundreds from the hundreds, etc. Since then everything has come from the taking away of a like kind, which collected together amounts to the remainder sought.*

The basis of this has already been set out in the above; then if all the parts, in which the two numbers remain, be taken from each other, then all the remainders taken together amount to just as much as if one whole number were taken from the other. But if the subtraction is done in this manner, thus the sought remainder becomes the same as the usual form, which is taken both for the known and spoken number. As if from this number 56 897 this one 21506 must be taken away, so in the first place we take the smaller number 6 units from the greater 7 units, thus 1 unit remains for the remainder. Secondly: as in the smaller number no tens are present, which must be taken from the 9 tens of the larger number, so also all 9 remain in the remainder. Thirdly: 5 hundreds taken from the 8 hundreds, leave 3 hundreds. In the fourth place: 1 thousand taken from 6 thousands leaves 5 thousand. And finally in the fifth place: 2 tens of thousands taken from 5 of the same, leaves 3 behind . Therefore the remainder, which after taking away the number 21506 from the number 56897, is 3 tens of thousands, 5 thousands, 3 hundreds, 9 tens and 1 unit: that is, 35391. It could happen equally that this known remainder could have been found on a line drawn from the right to the left, since then at once this number 35 391 would arise. Therefore to make matters easier the given numbers, as in addition, are written under each other, and with a line to be drawn beneath, under which the remainder of any kind to be written in the order, which follows:

$$\begin{array}{r} 56897 \\ \underline{21506} \\ 35391 \end{array}$$

But the operation is performed in the following manner: 6 from 7 leaves 1, thus written under the line under the units. Further: nothing from 9 leaves 9, which under the line must be put for the tens place. Thirdly, in a like manner: 5 from 8 leaves 3. Fourthly: 1 from 6 leaves 5 and fifthly: 2 from 5 leaves 3. After this has come to an end, thus the real remainder is found under the line.

6. *But if the number of parts of one kind in the lower or smaller number now is greater than the number in the greater number [i.e. the digit of some place in the lower number is greater than the upper number digit of the same place] ; and thus the subtraction in the prescribed manner cannot happen : thus a piece must be taken from the following larger kind of the greater number and added to the preceding kind, of such a kind that it amounts to 10 pieces* ; *since then the subtraction can be put in place. But in the following subtraction it is well to note, that the upper number has been diminished by 1.*

Likewise in addition, if more than 9 parts of one kind arise, from the same only the ten to be taken and therefore one part to be added to the following place: thus this is also done in subtraction but backwards, that if there is not enough parts of a kind, so that the lower number can be taken from that, thus one part of the following kind may be taken, which amounts to 10 of the former kind, and this ten still added on. Then if from a number a hundred for an example may be taken away, but whereas again 10 tens are to be handed down, so the size of the number remains the same. Such confusion can therefore more surely be brought to bear to advance the subtraction. As if for example this number

5789 must be taken from this one 7364, and as taught, the same to be written under each other, as follows :

	7364
	5789
the remainder	1575

thus initially the 9 units must be taken away under the number 4 units of the above number, but which cannot be done. Therefore from the following kind of the above number , namely from the 6 tens, a ten to be taken away or lent, and then to be attached to the 4 , which thus amounts to the sum 14 units. Now thus the 9 units can be subtracted from this 14 units, and 5 to be left over, which consequently can be written under the line. But whereby it is to be observed, that currently in the above number no more 6, but only 5 tens to be at hand, since one is taken away from that ; which diminishment on that account to be indicated by a point. In this case therefore 8 tens must be taken from 5 tens ; which, as likewise it cannot be performed, thus one part is to be taken away from the 3 hundreds, so that now only 2 to be left behind, which on that account to be indicated by a point put in place. This hundred now makes 10 tens, which with the 5 already at hand amounts to 15 tens to be available. From this 15 now the 8 of the number below are to be taken away and 7 to be left over, which is put under the line in the place of the tens. Further we have to take away 7 hundreds from 2 hundreds; whereby in a like manner one part is taken from the 7 thousands and to be attached to the 2 hundreds, so that 12 hundreds arise. From this now we take 7 hundreds; thus to leave 5 over, so to be put under the line in the third place. Finally to be taken the 5 thousands from the 6 above, and the one, thus leftover, to be written under the line; wherewith the whole operation is finished, and thus this remainder 1575 found. We have here the reason and underlying fundamentals of each operation, on account of which the whole operation seems slightly ridiculous ; but when the actual operation alone is described , it becomes quite short. Thus we can even for this example find the remainder sought equally in the following way, if we say: 9 from 4 we cannot do, whereby 9 from 14 leaves 5, and a point put to 6. Further: 8 from 5 we cannot do, so 8 from 15 leaves 7, and a point put to 3. Thirdly: 7 from 2 we cannot do, so 7 from 12 leaves 5, and put a point to 7. Finally: 5 from 6 leaves 1. But this method of subtraction put in place often falls into great difficulty, if in the place of the upper number, from which one part is required to be taken, a 0 is present and thus nothing is at hand. On that account we are going to indicate a method in the following which is not subject to this difficulty. But with that we see this difficulty better, if we may put in place an example of that. As from 1205 we must take away 827, which hence, as has been taught, to be written thus :

	1205
	827
Rem.	378

Now in the first place there must be 7 units taken away from 5, which, since it cannot be done, one part must be taken away from the ten of the above number and added to the 5 units. Here there are no tens at hand alone in the above number, and thus the specified rule cannot be used. Therefore in order to be able to subtract, one part must be taken away from the second following kind, namely the hundreds, and if also from such nothing were available, one part must be taken even from the thousands. But in this example we have 2 hundreds, from which one part is taken making 10 tens, which is indicated by putting a point in place. Now from that we have the tens, so from that we take one part and affix to the units ; then since 9 tens to be put back in place there, which we now must put in place instead of 0 for the second place of the above number. In this way we have now 15 units ; from that the 7 to be taken away, to leave 8 units over, to be put in the place of the units in the remainder. On account of this operation we have now 2 tens to be taken away, not from 0, but from 9 tens ; to that 7 remains, thus to be written under the line in the second place. In the third place there are 8 hundreds to be taken from one hundred ; which while it cannot be done, equally to be obtained from the one thousand, so that we come upon 11 hundreds; from that, so the 8 hundreds to be taken, 3 to be left behind, and consequently this remainder 378 emerges. Now from this example we see clearly that the rule given above is not entirely sufficient, but more often has an additional zero, whereby great changes arise in the figure of the upper number. This should therefore be remedied by the following rule.

7. *If, as were put in place before, the number of the part of one kind in the lower or smaller number is larger than the number of the part of the same kind in the upper number, thus still 10 parts must be added back to this part of the above number in order that subtraction can be done. But so that this happens, thus the number of parts of the following kind in the lower number must be increased by one part, which to be indicated by a point that we add on, and must be noted in the following subtraction.*

This rule arises from the preceding one, but for the same has this first part, that we can always increase the lower number by one part, whether the same may be a digit or not. But according to the foregoing rule in the following case, if one figure in the above number is to be about 10 more, the following figure of the upper number must be 1 part less, which cannot happen, if the same is not a digit, or 0. But according to the preceding rule, in such a case, when a figure in the upper number has been increased by 10, the following figure of the upper number had to be reduced by 1, which does not happen if it is a zero or 0. But the reasoning of the rule just given is based on the following proposition. If a number must be taken away from another number, just as the remainder comes from this, if equally each number is increased by one part. As 5 from 8 leaves 3; moreover this remainder also arises, if both the numbers are increased by one and 6 taken from 9. Thus if I want to take 2 from 7 , thus I am not so wrong, when I take 3 from 8 , for then I arrive at the right remainder, namely 5. The truth of this proposition is not necessarily to do with more evidence being provided; but each one will soon be seen to be the same through thought. Let us now give an example, to be calculated according to the first rule, for which we have already done the basics, and thereby these given principles taken beforehand now serve us. Namely 38 must be taken from 82, which numbers arise as follows :

$$\begin{array}{rr} & 82 \\ & \underline{3\dot{8}} \\ \text{Rem.} & 44 \end{array}$$

Namely I say: 8 units cannot be taken away from 2 units ; therefore take a ten away from the 8 tens, which amounts to 10 units, this I add to the 2 units and thus becomes 12; from which I can take away 8 and the 4 units left over, I put thus under the line. Further I must take away now 3 tens from 7 tens, as already a ten has been taken away from the 8 and to lend to the units. But if, by virtue of these given principles, I increase both the numbers 3 and 7 by one, thus I obtain the above number 8 again, as the same already actually stands there, but instead of the other number 3 I obtain 4, which taken from 8, leaves 4 behind, just as if I had subtracted 3 from 7 according to the first rule. From this it follows, that if we had increased one of the above numbers by 10, we have increased the following figure above by one, the following number below can be increased by one, which by is indicated by a point placed below. Now in order to show the agreement of this rule with the previously given rule, thus we will calculate both the examples given there in this way also:

$$\begin{array}{rr} & 7364 \\ & \underline{5.7\dot{8}9} \\ \text{Rem} & 1575 \end{array}$$

As there 9 cannot be taken from 4, I add 10 to 4, but the following figure I increase the figure 8 below by one part, which I indicate by the point put in place. Therefore I say: 9 from 14 leaves 5, which number I put under the line in the first place.

I say further, because of the point standing by the 8 : 9 cannot be taken from 6, therefore I say 9 from 16, and put a point to the following lower figure 7 ; but 9 taken from 16 leaves 7 behind, which is written under the line in the second place. In the third place I say not 7, but 8 I cannot take from 3, because of the point, therefore 8 from 13 leaves 5, this 5 comes under the line in the third place, but for the fourth figure 4 the number below, namely for 5, I put a point. Finally say I: 6 from 7 leaves 1, and write thus 1 under the line in the fourth place. Herewith we have thus for the whole remainder this number 1575, which also is to be found by that same former rule given. The other example given there was the following :

$$\begin{array}{rr} & 1205 \\ & \underline{.\,8\dot{2}.7} \\ \text{Rem.} & 378 \end{array}$$

Here again say thus : 7 from 5 I cannot take, therefore put a point at 2 and say : 7 from 15 leaves 8, which number I write under the line in the first place. Further I have 3 from 0 or to be taken away from nothing; which, as it cannot happen, thus I put a point by the 8 and say: 3 from 10 leaves 7, this I put under the line in the second place. In the third place 9 are to be taken from 2, which likewise cannot happen, therefore a point must be put at the following figure below; but because no more are available, thus we can consider as if a 0 stood there, and the point to be put at this place. I say thus following the rule: 9 from 12 leaves 3, so it comes to stand under the line at the third place. And as this point under the 1 indicates 1, thus I say: 1 from 1 leaves nothing or nothing results, but no 0 is put under the line in the fourth place, because a 0 has no meaning, standing on the left hand side at the beginning of a number. But also in the third subtraction, since really 12 stands above, equally take 9 from the 12; since then the whole operation has an end, by which we have found this remainder 378, which also is to be established by the previous method. Moreover we see easily, that in this example the operation is far more convenient in this way, than in the previous way. But we will add still an example, as following the previous method would involve much more effort.

$$\begin{array}{rr} & 2300104 \\ & .\,6.7.80.9.5 \\ \hline \text{Rem.} & 1622009 \end{array}$$

Now I say: 5 from 4 I cannot do, thus set a point to the following figure 9 below, whereby the same is changed into 10, and say: 5 from 14 leaves 9, thus to come under the line in the first place. Secondly I say : 10 from 0 or nothing I cannot take, thus put a point at the second figure, namely the 0, and say: 10 from 10 goes in or leaves 0, so it comes to stay in the remainder in the second place. Thirdly say I, on account of the point: 1 from 1 goes in and thus put 0 in the remainder in the third place. Fourthly say I: 8 from 0 cannot go and on that account put a point at the 7 and say : 8 from 10 leaves 2, thus I write under the line. Fifthly I have again 8 from 0, thus put a point at 6 and say: 8 from 10 leaves 2, which I write thus under the line. In the sixth place say I : 7 from 3 can I not, thus put a point in the following place of the number below, although no more is there a figure present, and make one for me there, as if a 0 stands there, thus say: 7 from 13 leaves 6, which number I write under the line. Finally we have to take 1 from 2 and leave 1, which is put in the following place. The remainder sought is consequently this number 1622009.

8. *If a smaller number must be taken away from a larger number, thus we write the smaller under the larger, so that the units stand under the units, the tens under the tens, and so forth. Further we draw a line under the same, under which the remainder sought may be written in the following manner. We begin the operation with the units on the right hand and take the units from the units, further the tens from the tens, and so on from one another for the remaining kinds, if the number of each kind in the upper number is greater than that in the lower. But if anywhere the number of any kind in the lower number is greater than in the above kind, then we must increase the upper number by 10, according to the rules given previously, as then the subtraction can be performed. But in such cases the following figure to the left of the number below must be increased by a part, thus to be indicated by a point. In such a way we thus arrange the subtraction of numbers of any kind, and put every single remainder in its proper place under the line. Since then you will find the full remainder sought under the line upon completing the whole operation.*

The two numbers therefore are to be written under each other in the prescribed manner, from which the numbers of each kind, as the units, tens, and so forth, come to stand under each other and thus can be taken away from each other more conveniently. But the larger number is to be written above each time, that once we notice this, we should not make mistakes in the subtraction. If any figure of the upper number were greater than the one underneath, then we could and would begin the operation at our discretion, both from the right and the left hand and would always find the remainder. There alone, if a figure in the under number is greater than the one above, the figure following to the left in the number below to be increased by one part, and thus must be changed, in order that in such cases the operation can begin from the right hand and to be continued to the left. Whatever now remains by the subtraction of any kind, to be placed under the line just under this kind, from which any number to be found in the subtraction can be put in their proper place.Where a figure of the lower number is equal to that above and thus nothing is left over, a zero 0 to be written under the line in this place, provided such is not done at the end of the operation. Then in such a case where it was unnecessary to write the 0, just as the 0 beginning at the left hand side is not indicated, and also can have no effect on the meaning of the following numbers. The whole operation to be explained more conveniently by an example. As from 273024 there must be taken 65372, which therefore is written in the following manner:

	273024
	6.5.3.72
Rem.	207652

Herein we say : 2 from 4 leaves 2, thus to be written under the line, further: 7 from 2 we cannot do, therefore place a point by the following 3 and say 7 from 12 leaves 5. Thirdly: 4 from 0 we cannot do, therefore place a point by the following 5 and say 4 from 10 leaves 6. Fourthly: 6 from 3 we cannot do, thus place a point by the following figure 6 and say 6 from 13 leaves 7. Fifthly we say : 7 takes away 7 , thus write a 0 under the line. Finally, since nothing stands under the last 2 of the above number, there is called: nothing from 2 leaves 2, thus nothing come under the line after the last place to the left. Therefore thus the remainder sought is found to be 207652. Likewise also the following example is calculated:

2593208267942168
. 709.6.354.823.70.63.9
1883572785571529

Likewise	30000000000000000
	.8.7.6.5.4.3.2.1.0.9.8.7.6.5.4.3
	21234567890123457

Anyone can now draw on and reckon with so many such like examples, so that he has the practice and attainment of the required necessary skills. Moreover from that we want to know, in what cases the subtraction has arisen, and what kind of questions arise in day to day life which can be solved with the help of subtraction, so we are going to add a few such like questions.

Examples of Subtraction

I. In the year we count as 1734, it stands on the calendar, that gunpowder had been invented 354 years before. Now the question is, in which year after the birth of Christ was the power invented?
Ans.: This year is found, if one subtracts the number 354 from the number of the then current year 1734. This question therefore belongs to subtraction, thus we find that the powder was invented in the year 1380.

II. One must from an inheritance of 3672 rubles, that has come down to him, pay out the sum of 2837 rubles because of debts. Now the question is, how many rubles are retained by him from this inheritance?
Ans.: If he pays out 2837 rubles from 3672 rubles, thus 2837 rubles must be taken from 3672 rubles; what remains gives the number of rubles that still remain for him. Whereby he thus still has 835 rubles.

III. A businessman owes his creditors 26 209 rubles, pays 17 536 from this debt. Now asks himself, how much he still remains owing?

Ans.: Because hereby the debt is diminished by 17 536 rubles, thus one has paid the number 17 536 from the whole debt, 26 209, and the remainder, 8 673, shows the debt still outstanding.

IV. Someone dies in the 79th year of his old age, after he had lived in wedlock for 37 years; thus the question itself is, at what age did he himself get married?

Ans.: If we take 37 from 79, thus the remainder is known, namely 42 years, to be the age that he got married.

9. *Lastly, there is still an exact difference to be observed, which is to be found between these first two operations, namely addition and subtraction. Then by addition, if from the sum of two numbers the one number is taken away, so must the other number always be left behind. Further by subtraction, if the smaller number is added to the remainder, the larger number appears from this, and if we take the remainder from the larger number, the smaller number appears from this; and if we subtract the remainder from the larger number, from this the smaller number comes out. Herewith now arises the proof for both addition and subtraction. Then according to the first proposition each single example of addition, whereby two numbers are to be added together, can be proven through subtraction. By virtue of these two propositions an example of subtraction can be proven*

through addition, and by virtue of these three proposition, subtraction itself to be proven
.

That, if in the subtraction the remainder is added to the smaller number, the greater number comes out, has already been pointed above in No. 2. That is why the sum of the remainder and the smaller number is the same as the greater number. From this it follows that if one takes away one number from the sum of two numbers, the other remains; and, consequently also, if in the subtraction of the remainder from the greater number, as being the sum of the remainder and the smaller one, then the smaller number must be left over. If, for example, the numbers 5728 and 3875 are added together, we find this sum 9603. From this sum, if we subtract the number 5728, the number 3875 remains. But subtracting 3875 from 9603, the other number remains, 5728. Further, if we subtract this number 8436 from the number 12,304, we find this remainder 3,868. But if we had any doubts as to whether or not we had failed in the operation, then one can either add the numbers 8,436 and 3,868 together and see if 12304 arises. Or you can subtract 3,868 from 12,304 and see if the number 8436 remains behind: thus making sure of the correctness of the operation. And these are thus the propositions that we can use for subtraction

CAPITEL 3

VON DER SUBTRACTION ALS DER ZWEITEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Subtraction werden solche Regeln gegeben, vermittelst welcher man von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl abziehen, und die Zahl welche übrig bleibet anzeigen kann. Diese Zahl nun, welche übrig bleibet, wenn von den gegebenen Zahlen eine von der anderen abgezogen wird, pfleget der Rest genennet zu werden.*

Gleichwie in der Addition gelehret wird, wie man zu einer gegebenen Zahl eine andere oder mehr gegebene Zahlen hinzusetzen soll: also wird in der Subtraction gelehret, wie man von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl abziehen oder subtrahiren soll. Durch die Addition wird also eine gegebene Zahl vermehret, indem zu derselben noch eine oder mehr Zahlen hinzugesetzet werden; durch die Subtraction aber wird eine gegebene Zahl vermindert, indem von derselben eine andere Zahl weggenommen oder abgezogen wird. WeilEndemnach die Addition eine Zahl vermehret, die Subtraction aber vermindert, so sind diese zwei Operationen einander entgegengesetzet. Und da in der Vermehrung und Verminderung alle VeranderungEnd der Zahlen Restehen, so kônnen diese zwei Operationen, namlich die Addition und Subtraction, als die zwei Haupt-Operationen, welche bei den Zahlen stattfinden gehalten werden: wie denn auch im folgenden wird gezeiget werden, wie die übrigen Operationen aus diesen zweien entspringen und in denselben ihren Grund haben. Was nun die Subtraction an und für sich selbst betrifft, so wird durch dieselbe eine Zahl gefunden, welche übrig bleibt, wenn man von einer gegebenen Zahl eine andere Zahl wegnimmt oder abziehet. Da aber zu deutlicher Erkenntnis einer Zahl erfordert wird, dass man wisse, wie dieselbe aus Unitaten, Decadibus, Centenariis und den folgenden Sorten zusammengesetzet sei; so müssen zur Bewerkstelligung der Subtraction solche Regeln gegeben werden, durch derer Hülfe die gesuchte Zahl, namlich der Rest, in Unitaten, Decadibus, Centenariis und so fort, gefunden wird; damit dieselbe sogleich geschrieben und nach der gewöhnlichen Art ausgesprochen werden kann. Zu desto grösserer Bequemlichkeit aber müssen die Regeln so beschaffen sein, dass sie gleich die Unitaten, Decades, Centenarios und so fort, geben, aus welchEnd der Rest Restehet; und derselbe also gleich, wie die Summe in der Addition, könne hingeschrieben werden.

2. *Diejenige Zahl, welche von der anderen abgezogen wird, muss kleiner sein als die andere, von welcher sie abgezogen wird. Es wird demnach in der Subtraction von der grosseren Zahl die kleinere abgezogen und der Rest, oder dasjenige was überbleibt, gefunden; welcher von dieser Eigenschaft sein wird, dass, wenn man zu demselben die kleinere Zahl addiret, die grossere Zahl herausgebracht wird.*

Wenn eine Zahl von der anderen muss weggenommen werden, so muss dieselbe nothwendig kleiner sein; weilen man nicht mehr wegnehmen kann, als würklich vorhanden ist. Wenn namlich in einem Sacke eine gewisse Anzahl Rubeln befindlich, so kann man nicht mehr daraus nehmen, als darinnen ist; eben so viel aber, oder weniger, kann wohl daraus genommen werden. Die Subtraction lehret also, wie man finden soll, wieviel Rubeln in dem Sacke noch übrig bleiben, wenn aus demselben eine gewisse Summe ausgezahlet worden. Hieraus ist nun klar, dass, wenn so viel herausgenommen wird, als darinn ist, nichts im Sacke zurückbleiben werde; wird aber weniger daraus genommen, so muss im Sacke noch etwas zurückbleiben, welches der Rest genennet wird. Woraus auch zugleich er hellet, dass dasjenige, was im Sacke zurückbleibt, und dasjenige, welches ist herausgenommen worden, zusammen wieder eben so viel ausmacht, als aufangs in dem Sacke vorhanden gewesen. Das ist also: der Rest und die kleinere Zahl zusammen genommen machen die grössere Zahl. Wenn also zwei Zahlen gegeben sind. so lehret die Subtraction, wie man eine Zahl finden soll, welche mit der kleineren Zahl zusammen die grossere ausmache. Man sieht aus diesem zugleich, dass, wenn man den gefundenen Rest von der grösseren Zahl abziehen sollte, die kleinere Zahl übrig bleiben müsste. Als wenn man von der grösseren Zahl 9 die kleinere 5 abziehet, so ist der Rest 4; und dieser Rest hat diese Eigenschaft, dass derselbe, namlich 4, und die kleinere Zahl 5 zusammen die grössere Zahl 9 ausmachen. Ingleichem, wenn man den gefundenen Rest 4 von der grösseren Zahl 9 abziehet, so bleibet 5, nàmlich die kleinere Zahl, über. Ferner folget hieraus, dass, wenn man von der Summe zweier Zahlen, welche durch die Addition ist gefunden worden, die eine derselben Zahlen abziehet, die andere Zahl nothwendig übrig bleiben müsse. Und hierinn sind diejenigen Proben gegründet, dadurch man zu untersuchen pfiegt, ob ein Exempel sowohl von der Addition als Subtraction recht gerechnet worden. Welches unten mit mehrerem ausgeführet werden soll.

3. *Um eine Zahl von der anderen abzuziehen oder zu subtrahiren, wird erfordert, dass man erstlich wisse die Unitaten von den Unitaten, die Decades von die decadibus, die Centenarios von den Centenariis und so fort, zu subtrahiren. Und da niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen, dass man, wenn es die Noth erfordert, wisse, ein Stück von einer hoheren Sorte in geringere Sort en zu verwandeln, ohne dass dadurch die ganze Zahl verandert werde.*

Wir setzen voraus, dass diejenigen Zahlen, davon eine von der anderen abgezogen werden soll, auf die gewöhnliche Art durch die Unitaten, Decades, Centenarios und so fort, gegeben sind. Wenn man derohalben die Unitaten der kleineren Zahl von den Unitaten der grösseren Zahl abziehet, gleichergestalt auch die Decades von die decadibus, die Centenarios von den Centenariis und so fort; so ist klar, dass diese übergebliebenen Unitaten, Decades, Centenarii und so fort zusammEnden gesuchten Rest ausmachen müssen. Diese Operation nun ins Werk zu richten, so ist nöthig, dass man wisse, die Unitàten von den Unitaten, die Decades von die decadibus und so fort, zu subtrahiren; welches deswegen zu erlernen sehr leicht ist, weilen niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen Obgleich aber diejenige Zahl, von welcher die andere subtrahiret werden soll, allezeit grösser sein muss, so kann es doch geschehen, dass in der grösseren Zahl weniger Stücke von Unitaten oder Decadibus oder von einer anderen Sorten vorhanden sind als in der kleineren Zahl; in welchem Fall also diejenige Sorte der kleineren Zahl von eben der Sorte der grôsseren an Zahl nicht abgezogen werden kann. Dieser Schwierigkeit nun abzuhelfen, muss von der nachstfolgenden höheren Sorte der grösseren Zahl ein Stück weggenommen und zu der kleineren Sorte, derer es 10 Stücke ausmachet, geschlagen werden; auf diese Art bekommt man also 10 Stücke mehr, von derselben Sorte der grösseren Zahl, als vorher vorhanden waren; von welcher Anzahl folglich allezeit eben dieselbe Sorte der kleineren Zahl kann abgezogen werden, weilen in derselben nirgend mehr als 9 Stücke von einer Sorte vorkommen.

4. *Es ist also vor allen Dingen nothig, dass man lerne, eine jegliche einfache Zahl von anderen Zahlen, welche nicht über 9 grosser sind als dieselbe, abziehen. Dieses ist zwar an sich selbst leicht und kann von einem jeden im Kopfe gethan werden: jedoch kann man sich hiebei einer Tabelle bedienen, welche hier beigefüget wird.*

Indem die Subtraction auf obbeschriebene Art vorgenommen und bei jeder Sorte insbesondere verrichtet wird, so ist die Anzahl der Stücke von jeglicher Sorte der grösseren Zahl entweder kleiner als die Anzahl der Sttïcke von eben der Sorte in der kleineren Zahl oder nicht. Im letzteren Fall muss also nur eine einfache Zahl von einer einfachen Zahl abgezogen werden. Im ersteren Fall aber wird die Anzahl der Stücke der grosseren Zahl um 10 vermehret, indem ein Stück von der folgenden Sorte weggenommen wird, welches 10 Stücke von der kleineren Sorte betrifft. In diesem Fall muss demnach eine einfache Zahl von einer anderen, welche zwar grösser ist als 9, aber doch kleiner als 20, abgezogen werden. Man hat also nicht mehr nothig, als die nachfolgende Tabelle zu erlernen, aus welcher man sieht, wie viel übrig bleibt, wenn man eine einfache Zahl von einer einfachen oder auch von einer, so kleiner ist als 20, abzieht.

1 von 1 bleibt 0	1 von 2 bleibt 0
1 " 2 " 1	2 " 3 " 1
1 " 3 " 2	2 " 4 " 2
1 " 4 " 3	2 " 5 " 3
1 " 5 " 4	2 " 6 " 4
1 " 6 " 5	2 " 7 " 5
1 " 7 " 6	2 " 8 " 6
1 " 8 " 7	2 " 9 " 7
1 " 9 " 8	2 " 10 " 8
1 " 10 " 9	2 " 11 " 9
3 von 3 bleibt 0	6 von 6 bleibt 0
3 " 4 " 1	6 " 7 " 1
3 " 5 " 2	6 " 8 " 2
3 " 6 " 3	6 " 9 " 3
3 " 7 " 4	6 " 10 " 4
3 " 8 " 5	6 " 11 " 5
3 " 9 " 6	6 " 12 " 6
3 " 10 " 7	6 " 13 " 7
3 " 11 " 8	6 " 14 " 8

3 " 12 " 9	6 " 15 " 9
4 von 4 bleibt 0	7 von 7 bleibt 0
4 " 5 " 1	7 " 8 " 1
4 " 6 " 2	7 " 9 " 2
4 " 7 " 3	7 " 10 " 3
4 " 8 " 4	7 " 11 " 4
4 " 9 " 5	7 " 12 " 5
4 " 10 " 6	7 " 13 " 6
4 " 11 " 7	7 " 14 " 7
4 " 12 " 8	7 " 15 " 8
4 " 13 " 9	7 " 16 " 9
5 von 5 bleibt 0	8 von 8 bleibt 0
5 " 6 " 1	8 " 9 " 1
5 " 7 " 2	8 " 10 " 2
5 " 8 " 3	8 " 11 " 3
5 " 9 " 4	8 " 12 " 4
5 " 10 " 5	8 " 13 " 5
5 " 11 " 6	8 " 14 " 6
5 " 12 " 7	8 " 15 " 7
5 " 13 " 8	8 " 16 " 8
5 " 14 " 9	8 " 17 " 9
9 von 9 bleibt 0	10 von 10 bleibt 0
9 " 10 " 1	10 " 11 " 1
9 " 11 " 2	10 " 12 " 2
9 " 12 " 3	10 " 13 " 3
9 " 13 " 4	10 " 14 " 4
9 " 14 " 5	10 " 15 " 5
9 " 15 " 6	10 " 16 " 6
9 " 16 " 7	10 " 17 " 7
9 " 17 " 8	10 " 18 " 8
9 " 18 " 9	10 " 19 " 9

Allhier ist derjenige Theil, da 0 oder nichts von einer Zahl soll abgezogen werden, ausgelassen, weilen dadurch keine Zahl vermindert wird, sondern unverandert bleibet. An deren Stelle aber ist die Tabelle von zehn noch hinzugefüget worden, welche zwar noch von keinem Gebrauch zu sein scheinet: allein im folgenden werden einige Schwierigkeiten, welche sich in vorbeschriebener Art zu subtrahiren ereignen, gehoben werden, wozu auch der letzte Theil dieser Tabelle erfordert wird.

5. *Wenn eine kleinere Zahl von einer grosseren abgezogen werden soll, und die Anzahl von einer jeglichen Sorte in der kleineren Zahl kleiner ist, als die Anzahl von eben der Sorte der grosseren Zahl, so werden durch Hülfe der vorigen Tabelle die Unitaten von den Unitaten, die Decades von die decadibus, die Centenarii von den Centenariis und so weiter, abgezogen. Da denn alles, was bei Abziehung einer jeglichen Sorte herauskommet, zusammEnden gesuchten Rest ausmacht.*

Der Grund hievon ist schon im vorigen ausgeführet worden; denn wenn alle Theile, daraus die zwei Zahlen Restehen, von einander abgezogen werden, so machen alle Reste zusammen eben so viel aus, als wenn ein ganzes von dem andern abgezogen wurde. Wenn aber auf diese Art die Subtraction geschieht, so bekommt auch der gesuchte Rest gleich die gewöhnliche Forrn, welche zur Erkenntnis und Aussprechung der Zahlen angenommen ist. Als wenn von dieser Zahl 56 897 diese 21506 soll abgezogen werden, so nehme man erstlich die 6 UnitâtEnd der kleineren Zahl von den 7 Unitaten der grösseren, so bleibet für den Rest 1 Unitat. Zweitens: weil in der kleineren Zahl keine Decas vorhanden, welche von den 9 Decadie d der grösseren Zahl soll abgezogen werden, so bleiben auch alle 9 übrig im Rest. Drittens: 5 Centenarii, von 8 Centenariis abgezogen, lassen 3 Centenarios übrig. Viertens: 1 Millenarius von 6 Millenariis weggenommen, bleiben 5 übrig. Und endlich fünftens: 2 Decades millenariorum, von 5 dergleichen abgezogen, lassen 3 züruck. Der Rest demnach, welcher nach Abzug der Zahl 21506 von der Zahl 56897 llbrig bleibet, ist 3 Decades millenariorum, 5 Millenarii, 3 Centenarii, 9 Decades und 1 Unitas: das ist 35391. Es hatten also gleich diese gefundenen Reste in einer Linie von der rechten nach der linken Hand geschrieben werden können, da dann sofort diese Zahl 35 391 würde herausgekommen sein. Zu mehrerer Leichtigkeit pflegEndeswegen die gegebenen Zahlen, wie in der Addition, unter einander geschrieben und mit einer Linie unterzogen zu werden, unter welche die Reste von einer jeglichen Sorte in der Ordnung geschrieben werden, wie folget:

$$\begin{array}{r} 56897 \\ \underline{21506} \\ 35391 \end{array}$$

Die Operation aber wird auf folgende Weise verrichtet: 6 von 7 bleibt 1, so unter die Linie unter die Unitaten geschrieben wird. Ferner: nichts von 9 bleiben 9, welche unter die Linie auf die zweite Stelle gesetzet werden. Drittens, auf gleiche Weise: 5 von 8 bleiben 3. Viertens: 1 von *6* bleiben 5 und fünftens: 2 von 5 bleiben 3. Nachdem nun dieses zu Ende gebracht, so wird sich der wahre Rest unter der Linie befinden.

6. *Wenn aber die Anzahl der Stücke von einer Sorte in der unteren oder kleineren Zahl grosser als die Anzahl von eben der Sorte in der grosseren Zahl; und also die Subtraction auf beschriebene Art nicht geschehen kann: so muss ein Stück von der folgenden grosseren Sorte der grosseren Zahl weggenommen und zu der vorhergehenden Sorte, dergleichen es 10 Stücke ausmacht, hinzugethan werden*; *da dann die Subtraction von*

statten gehen wird. In der folgenden Subtraction aber ist wohl zu merken, dass die obere Zahl um 1 ist vermindert worden.

Gleichwie in der Addition, wenn mehr als 9 Stücke von einer Sorte vorgekommen, von denselben je zehn genommen und dafür einzele Stücke zu der folgenden Sorte gesetzet worden: also geschiehet es auch, aber umgekehret, in der Subtraction, dass wenn von einer Sorte nicht genug Stücke vorhanden sind, dass die untere Zahl davon abgezogen werden konnte, so wird ein Stock von der folgenden Sorte genommen, welches 10 in der vorigen betrifft, und diese zehn noch hinzugesetzt. Denn wenn von einer Zahl ein Centenarius zum Exempel weggenommen, hingegen aber wiederum 10 Decades hinzugesetzet werden, so bleibt die Grosse der Zahl unverandert. Eine solche Verwechselung kann demnach sicher gebraucht werden zu Beforderung der Subtraction. Als wenn zum Exempel diese Zahl 5789 soll abgezogen werden von dieser 7364, und dieselben wie gelehret unter einander geschrieben worden, als folget:

	7.3.6.4
	5789
der Rest	1575

so sollten erstlich die 9 Unitäten der unteren Zahl von den 4 Unitaten der oberen Zahl abgezogen werden, welches aber nicht geschehen kann. Derowegen wird von der folgenden Sorte der oberen Zahl, namlich den 6 Decadibus, eine Decas weggenommen oder gelehnet, und zu den 4 Unitaten geschlagen, welches also zusammen 14 Unitaten ausmacht. Nun konnen also von diesen 14 Unitaten die 9 Unitaten abgezogen werden, und bleiben 5 über, welche folglich unter die Linie geschrieben werden. Wobei aber zu merken ist, dass anjetzo in der oberen Zahl nicht mehr 6, sondern nur 5 Decades vorhanden, indem eine davon weggenommen worden; welche Verminderung derowegen mit einem Punkt angedeutet wird. Hierauf sollten demnach 8 Decades von 5 Decadibus abgezogen werden; welches, weil es gleichfalls nicht angeht, so wird von den 3 Centenariis ein Stück weggenommen, so dass nur noch 2 zurückbleiben, welches durch das da zugesetzte Punkt angedeutet wird. Dieser Centenarius macht nun 10 Decades, welche mit den 5 schon vorhandenen 15 Decades ausmachen. Von diesen 15 werden nun die 8 Decades der unteren Zahl abgezogen und bleiben 7 über, welche unter die Linie in die Stelle der Decaden gesetzet werden. Ferner haben wir 7 Centenarios von 2 Centenariis abzuziehen; weswegen gleichergestalt von den 7 Millenariis ein Stück genommen und zu den 2 Centenariis geschlagen wird, so dass 12 Centenarii herauskommen. Von diesen ziehet man nun die 7 Centenarios ab; so bleiben 5 über, so unter die Linie in die dritte Stelle gesetzet werden. Endlich werden die 5 Millenarii von den 6 oberen abgezogen, und der eine, so überbleibet, unter die Linie geschrieben; womit die ganze Operation geendigt ist, und hat also diesen Rest gefunden 1575. Wir haben hier bei einer jeden Operation den Grund und das Fundament derselben beigesetzet, weswegen die ganze Operation ziemlich weitleifig scheinet; allein wenn die blosse Operation beschrieben wird, so wird dieselbe ganz kurz. Also kann man bei eben diesem Exempel auf folgende Weise den gesuchten Rest gleich finden, wenn man sagt: 9 von 4 kann man nicht, deswegen 9 von 14 bleiben 5, und setzt ein Punkt zu 6. Ferner: 8 von 5 kann man nicht, also 8 von 15 bleiben 7, und setzt ein Punkt zu 3. Drittens: 7 von 2 kann man nicht, also 7 von 12 bleiben 5, und setzt ein Punkt zu 7. Endlich: 5 von 6 bleiben 1. Auf diese Art aber die Subtraction anzustellen Fallt öfters sehr beschwerlich, wenn in den Stellen der oberen Zahl, davon ein Stück weggenommen werden soll, eine 0 stehet und also nichts vorhanden ist. Derowegen wollen wir im folgenden eine andere Art anzeigen, welche dieser Schwierigkeit nicht unterworfen ist. Damit man aber diese Schwierigkeit besser einsehe, wollen wir davon ein Exempel beisetzen. Als von 1205 sollen 827 abgezogen werden, welche demnach, wie gelehrt worden, also geschrieben werden:

$$\begin{array}{rr} & 12\dot{0}5 \\ & \underline{827} \\ \text{Rest} & 378 \end{array}$$

Nun sollen erstlich 7 Unitaten von 5 abgezogen werden, welches, weilen es nicht geschehen kann, sollte von den decaden der oberen Zahl ein Stück weggenommen und zu den 5 Unitâten gesetzet werden. Allein hier ist keine Decas in der oberen Zahl vorhanden, und kann also die angegebene Regel nicht gebraucht werden. Um demnach abziehen zu können, muss von der zweiten folgenden Sorte, namlich den Centenariis, ein Stück weggenommen werden, und wenn auch von solchen nichts vorhanden wâre, müsste sogar von den Millenariis ein Stück genommen werden. In diesem Exempel aber haben wir 2 Centenarios, davon ein Stück genommen, welches durch das hinzugesetzte Punkt angedeutet wird, macht 10 Decades. Da wir nun Decades haben, so können wir davon ein Stück nehmen und zu den Unitaten schlagen; da dann noch 9 Decaden zurückbleiben, welche man sich anstatt der 0 auf der zweiten Stelle der oberen Zahl einbilden muss. Auf diese Weise haben wir nun 15 Unitaten; da von die 7 weggenommen, bleiben 8 Unitaten über, so in den Rest auf die Stelle der Unitaten gesetzet werden. Wegen dieser Operation haben wir nun 2 Decades nicht von 0, sondern von 9 Decadibus abzuziehen; bleiben also 7 übrig, so unter die Linie auf die zweite Stelle geschrieben werden. Drittens sind 8 Centenarii von einem Centenario abzuziehen; welches weilen es nicht geschehen kann, wird der eine Millenarius gleich dazu gethan, dass man 11 Centenarios bekommt; davon, so die 8 Centenarii abgezogen werden, 3 zurück bleiben, und folglich dieser Rest 378 herauskommt. Aus diesem Exempel sieht man nun deutlich, dass die obgegebene Regel nicht völlig hinlanglich sei, sondern öfters einen Zusatz vonnöthen haben, wodurch in den FigurEnd der oberen Zahl grosse Veranderungen entspringen. Diesem soll also durch die nachfolgende Regel abgeholfen werden.

7. *Wenn, wie vorher gesetzet worden, die Anzahl der Stücke von einer Sorte in der unteren oder kleineren Zahl grosser ist als die Anzahl der Stücke von eben der Sorte in der oberen Zahl, so müssen zu diesen Stückend der oberen Zahl noch 10 Stücke im Sinn hinzugesetzet werden, da denn die Subtraction wird geschehen konnen. So aber dieses geschieht, so muss die Anzahl der Stücke von der folgenden Sorte in der unteren Zahl um ein Stück vermehret werden, welches mit einem Punkt, so man hinzusetzet, angedeutet wird und in der folgenden Subtraction bemerket werden muss.*

Diese Regel entspringt aus der vorhergehenden, hat aber vor derselben diesen Vortheil voraus, dass man allezeit die folgende untere Zahl um ein Stück vermehren kann, dieselbe mag eine Ziffer sein oder nicht. Nach der vorhergehenden Regel aber musste in solchem Fall, wenn eine Figur in der oberen Zahl ist um 10 vermehret worden, die folgende Figur der oberen Zahl um 1 Stück vermindert werden, welches nicht angeht, wenn dieselbe eine Ziffer oder 0 ist. Der Grund aber dieser jetzt gegebenen Regel beruhet auf folgendem Satz. Wenn eine Zahl von einer anderen abgezogen werden soll, so kommt eben der Rest heraus, wenn gleich eine jede Zahl um ein Stück vermehret wird. Als 5 von 8 bleiben 3; eben dieser Rest kommt aber auch heraus, wenn die beiden Zahlen 5 und 8 um eines vermehret werden und 6 von 9 abgezogen wird. Also wenn ich soll 2 von 7 abziehen, so irre ich nicht, Wenn ich 3 von 8 abziehe, denn ich bekomme den wahren Rest, namlich 5. Die Wahrheit dieses Satzes ist nicht nöthig, mit mehr Beweistümeren darzuthun; sondern ein jeder wird durch weniges Nachdenken dieselbe bald einsehen. Lasset uns nun ein Exempel, so nach der ersteren Regel ist berechnet worden, davon wir den Grund schon dargethan, vor die Hand nehmen und uns dabei dieses jetzt gegebenen Grundsatzes bedienen. Nâmlich es sollen 38 von 82 abgezogen werden, welche Zahlen also wie folgt zu stehen kommen:

$$\begin{array}{rr} & 82 \\ & 3.8 \\ \cline{2-2} \text{der Rest} & 44 \end{array}$$

Ich sage nämlich: 8 Unitâten von 2 Unitâten können nicht abgezogen werden; nehme derohalben eine Decadem von den 8 Decaden weg, welche 10 Unitâten ausmacht, diese setze ich zu den 2 Unitâten und bekomme also 12; davon kann ich 8 weggnehmen und bleiben 4 Unitäten übrig, so ich unter die Linie setze. Ferner muss ich 3 Decades nur von 7 Decaden abziehen, weilen von 8 schon eine Decas ist weggenommen und zu den Unitâten geschlagen worden. Wenn ich aber kraft des gegebenen Grundsatzes diese beiden Zahlen 3 und 7 um eines vermehre, so bekomme ich für die obere Zahl wiederum 8, wie dieselbe schon wirklich da steht, anstatt der unteren Zahl 3 aber bekomme ich 4, welche von 8 abgezogen 4 zurücklassen, eben als wenn ich nach der ersten Regel 3 von 7 subtrahiret hätte. Hieraus folget, dass wenn man eine der oberen Zahlen um 10 vermehret hat, man anstatt die folgende obere Figur um eines zu verminderen, die folgende untere Zahl um eines vermehren könne, welches mit einem hinzugesetzten Punkt angedeutet wird. Um nun die Übereinstimmung dieser Regel mit der vorhergehenden besser zu zeigen, so wollen wir die beiden dort gegebenen Exempel auch auf diese Art allhier ausrechnen:

$$\begin{array}{rr} & 7364 \\ & 5.7.8.9 \\ \cline{2-2} \text{Rest} & 1575 \end{array}$$

Als da 9 von 4 nicht können abgezogen werden, setze ich 10 zu 4, die folgende untere Figur 8 aber vermehre ich mit einem Stück, so ich durch das beigesetzte Punkt andeute.

Sage derohalben: 9 von 14 bleiben 5, welche Zahl ich unter die Linie auf die erste Stelle setze.

Ferner sage ich, wegen dem bei dem 8 stehenden Punkt: 9 von 6 kann ich nicht abziehen, sage deswegen 9 von 16, und setze zu der folgenden unteren Figur, 7, ein Punkt; 9 aber von 16 genommen lassen 7 zurück, welche unter die Linie auf die zweite Stelle schreibe. Drittens sage ich nicht 7, sondern, wegen dem Punkt, 8 von 3 kann ich nicht, also 8 von 13 bleiben 5, diese 5 kommen unter die Linie auf die dritte Stelle, zu der vierten Figur 4 aber der unteren Zahl, namlich zu 5, setze ich ein Punkt. Endlich sage ich: 6 von 7 bleiben 1, und schreibe also 1 unter die Linie auf die vierte Stelle. Hiemit habe also für den völligen Rest diese Zahl 1575, welche auch vorher durch die daselbst gegebene Regel ist gefunden worden. Das andere dort ge· gebene Exempel war folgendes:

1205
. 8.2.7
Rest 378

Hier sage also wiederum: 7 von 5 kann ich nicht abziehen, setze derohalben ein Punkt zu 2 und sage: 7 von 15 bleiben 8, welche Zahl unter die Linie ans die erste Stelle schreibe. Ferner habe ich 3 von 0 oder nichts abznziehen; welches, weil es nicht angeht, so setze ich ein Punkt zu dem 8 und sage: 3 von 10 bleiben 7, so ich unter die Linie auf die zweite Stelle setze. Drittens sind 9 von 2 abzuziehen, welches gleichfalls nicht geschehen kann, sollte deswegen ein Punkt zu der folgenden unteren Figur setzen; weil aber keine mehr vorhanden, so kann man sich vorstellen, als wenn eine 0 da stünde, und auf diese Stelle das Punkt setzen. Ich sage also nach der Regel: 9 von 12 bleiben 3, so unter die Linie auf die dritte Stelle zu stehen kommen. Und weil dies Punkt unter dem 1 eines bedeutet, so sage ich: 1 von 1 bleibt nichts oder geht auf, setze aber die 0 nicht unter [die] Linie auf die vierte Stelle, weilen eine 0, so zu Aufang von der linken Hand einer Zahl steht, keine Bedeutung hat. Man kann aber auch bei der dritten Subtraction, da oben wirklich 12 stehet, gleich 9 von den 12 abziehen; da dann die ganze Operation ein Ende hat, dadurch man diesen Rest gefunden 378, welcher auch auf die vorhergegebene Art ist herausgebracht worden. Man sieht aber leicht, dass in diesem Exempel die Operation auf diese Art weit bequemer fàllt, als auf die vorhergehende Art. Wir wollen aber noch ein Exempel beifügen, so nach der vorhergehenden Art viel mehr Mühe kosten würde.

2300104
. 6.7.80.9.5
Rest 1622009

Nun sage ich: 5 von 4 kann ich nicht, setze also ein Punkt zu der folgenden unteren Figur 9, wodurch dieselbe in 10 verwandelt wird, und sage: 5 von 14 bleiben 9, so unter die Linie auf die erste Stelle kommen. Zweitens sage ich: 10 von 0 oder nichts kann ich nicht, setze also ein Punkt zu der folgenden Figur, namlich der 0, und sage: 10 von 10 geht auf oder bleibt 0, so in dem Rest auf die zweite Stelle zu stehen kommt. Drittens sage ich, wegen dem Punkt: 1 von 1 geht auf und setze also auch in den Rest auf die dritte Stelle 0. Viertens sage ich: 8 von 0 kann ich nicht und setze deswegen zu dem 7 ein Punkt und sage: 8 von 10 bleiben 2, so ich unter die Linie schreibe. Fünftens habe ich wieder 8 von 0, setze also ein Punkt zu 6 und sage: 8 von 10 bleiben 2, so ich unter die Linie schreibe. Sechstens sage ich: 7 von 3 kann ich nicht, setze also ein Punkt auf die folgende Stelle der unteren Zahl, obgleich keine Figur mehr vorhanden, und bilde mir ein, als wenn dort eine 0 stünde, sage demnach: 7 von 13 bleiben 6, welche Zahl ich unter die Linie schreibe. Endlich hat man 1 von 2 abzuziehen und bleibet 1, welches im Rest auf die folgende Stelle gesetzet wird. Der gesuchte Rest ist folglich diese Zahl 1622009.

8. *Wenn eine kleinere Zahl von einer grosseren abgezogen werden soll, so schreibe man die kleinere so unter die grossere, dass die Unitaten unter die Unititien, die Decaden unter die Decaden und* so *fort, zu stehen kommen. Ferner ziehe man unter dieselben eine Linie, unter welche de·r gesuchte Rest auf folgende Art geschrieben werden soll. Man fange die Operation bei den Unitaten zur rechten Hand an und ziehe die Unitaten von den Unitaten, ferner die Decaden von die decaden, und* so *fort die übrigen Sorten, von einander ab, wenn die Anzahl einer jeglichen Sorte in der oberen Zahl grosser ist als in der unteren. Ist aber irgendwo die Anzahl von einer Sorte in der unteren Zahl grosser als in der oberen,* so *vermehre man nach der vorhergegebenen Regel die obere Zahl mit 10, da denn die Subtraction bewerkstelliget werden kann. In solchem Fall aber* sich *die folgende Figur zur linken Hand der unteren Zahl mit einem Stück,* so *durch ein Punkt angedeutet wird, vermehret werden. Auf solche Art stelle man also die Subtraction bei einer jeglichen Sorte an, und setze einen jeglichen Rest auf seine gehörige Stelle unter die Linie. Da man denn nach Endigung der ganzen Operation den volligen gesuchten Rest unter der Linie finden wird.*

Die beiden Zahlen werden deswegen auf gemeldete Art unter einander geschrieben, damit die Zahlen von gleichen Sorten, als Unitaten, Decaden und so fort, unter einander zu stehen kommen und also füglicher gegen einander betrachtet werden können. Die grössere Zahl wird aber deswegen jederzeit oben geschrieben, aufdass man sich, wenn man das einmal bemerket, in der Subtraction nicht irren möchte. Wenn eine jegliche Figur der oberen Zahl grösser ware als die darunter stehende, so könnte man die Operation nach Belieben, sowohl von der rechten als linken Hand, aufangen und würde auch immer einerlei Rest bekommen. Allein da, wenn eine Figur in der unteren Zahl grösser ist als die obstehende, die nach der linken Hand folgende Figur in der unteren Zahl um ein Stück vermehret und also verandert werden muss, so muss in solchem Fall die Operation von der rechten Hand angefangen und nach der linken fortgesetzet werden. Was nun bei Subtrahirung einer jeglichen Sorte überbleibt, wird unter die Linie unter eben diese Sorte gesetzet, damit eine jegliche in der Subtraction gefundene Zahl auf ihre gehörige Stelle zu stehen komme. Wo eine Figur der unteren Zahl der obstehenden gleich ist und also nichts überbleibt, wird eine Ziffer 0 unter die Linie an diese Stelle geschrieben, wofern solches nicht zu Ende der Operation geschieht. Denn in solchem Falle ware es unnöthig, die 0 zu schreiben, weilen die 0 von der linken Hand aufangs nichts bedeuten und auch auf die Bedeutung der folgenden Zahlen keinen Einfluss haben. Die ganze Operation wird aber am füglichsten durch einige Exempel erlautert werden.

Als von 273 024 soll abgezogen werden 65372, welche demnach auf folgende Art geschrieben werden:

```
         273024
          6.5.3.72
Restirt  207652
```

Hierauf sagt man: 2 von 4 bleiben 2, so unter die Linie geschrieben werden, Ferner: 7 von 2 kann man nicht, setzt deswegen zum folgenden 3 ein Punkt und sagt 7 von 12 bleiben 5. Drittens: 4 von 0 kann man nicht, setzt deswegen zum folgenden 5 ein Punkt und sagt 4 von 10 bleiben 6. Viertens: 6 von 3 kann man nicht, setzt also ein Punkt zu der folgenden Figur 6 und sagt 6 von 13 bleiben 7. Fünftens sagt man: 7 von 7 geht auf, schreibet also eine 0 unter die Linie. Endlich, da unter dem letzten 2 der oberen Zahl nichts steht, heisst es: nichts von 2 bleiben 2, so unter die Linie. auf die letzte Stelle nach der linken Hand kommt. Weswegen also der gesuehte Rest gefunden wird 207 652. Gleichergestalt werden auch folgende Exempel ausgerechnet:

```
      2593208267942168
      . 70.9.6.35.4.823.70.63.9
       l883572785571529

Item  30000000000000000
       .8.7.6.5.4.3.2.1. 0.9.8.7.6.5.4.3
      21234567890123457
```

Dergleichen Exempel kann sich nun ein jeder so viel aufsetzen und ausrechnen, als er zur Übung und zur Erlangung der gehorigen Fertigkeit vonnöthen hat. Damit man aber auch wisse, in was für Fallen die Subtraction zustatten komme, und was für in dem gemeinen Leben vorfallende Fragen durch Hilfe der Subtraction konnen aufgelöset werden, so wollen wir dergleichen etliche Fragen beifügen.

Exempel der Subtraction

I. In dem Jahr als man zahlte 1734, stund im Kalend der, dass das Schiesspulver 3!?4 Jahr vorher erfunden worden sei. Nun ist die Frage, in welchem Jahr nach Christi Geburt das Pulver sei erfunden worden?

Antw.: Diese Jahr-Zahl wird gefunden, wenn man von der Zahl des damals laufenden Jahrs 1734 die Zahl 354 abzieht. Diese Frage gehört demnach zur Subtraction, dadurch man findet, dass das Pulver im Jahr 1380 erfunden worden sei.

II. Einer muss von einer Erbschaft von 3672 Rubel, so ihm zugefallen, die Summe von 2837 Rubel wegen Schulden auszahlen. Nun ist die Frage wieviel Rubel ihm noch von dieser Erbschaft zurückbleiben?

Antw.: Weilen er von 3672 Rubel 2837 Rubel auszahlt, so müssen 2837 Rubel von 3672 Rubel abgezogen werden; was übrig bleibt, gibt die Anzahl der Rubel, so ihm noch zurückbleiben. Weswegen er also noch behalt 835 Rubel.

III. Ein Kaufmann ist seinen Creditoren schuldig 26 209 Rubel, bezahlet an diese Schuld 17 536 Rubel. Nun fragts sich, wieviel er nachdem noch schuldig bleibe?

Antw.: Weil hiedurch die Schuld um 17 536 Rubel vermindert wird, so hat man nur die Zahl 17 536 von der ganzen Schuld, 26 209, abzuziehen, und der Rest, 8 673, weist die noch rückstândige Schuld.

IV. Einer stirbt im 79sten Jahr seines Alters, nachdem er im Ehestand 37 Jahre gelebet; fraget sich also, in welchem Alter er sich verheiratet?

Antw.: Wenn man 37 von 79 abzieht, so weist der Rest, nâmlich 42 Jahr, sein Alter, da er sich verlieiratet.

9. *Letztens ist noch zu merken eine genaue Verwandtschaft, welche zwischen diesen zweien ersten Operationen, namlich der Addition und Subtraction, stattfindet. Denn bei der Addition, wenn von der Summe zweier Zahlen die eine Zahl abgezogen wird, so* muss *allzeit die andere zurückbleiben. Ferner bei der Subtraction, wenn die kleinere Zahl zum Rest addiret w·ird, so kommt die grossere Zahl heraus; und wenn man den Rest von der grosseren Zahl subtrahiret, so kommt die kleinere Zahl heraus. Hieraus entspringen nun Proben sowohl für die Addition als die Subtraction. Denn nach dem ersten Satz kann ein jedes Exempel der Addition, darinn zwei Zahlen sind addiret worden, durch die Subtraction probirt werden. Kraft des zweiten Satzes kann ein Exempel der Subtraction durch die Addition, und kraft des dritten Satzes durch die Subtraction selbst probirt werden.*

Dass, wenn in der Subtraction der Rest zu der kleineren Zahl addiret wird, die grössere Zahl herauskomme, ist schon oben Nr. 2 gewiesen worden. Deswegen ist also die Summe des Rests und der kleineren Zahl der grösseren Zahl gleich. Hieraus folget nun von sich selbst, dass, wenn man von der Summe zweier Zahlen die eine Zahl abzieht, die ande re übrig bleibe; und folglich auch, wenn man in der Subtraction von der grosseren Zahl, als der Summe des Rests und der kleineren, den Rest abzieht, dass die kleinere Zahl überbleiben müsse. Wenn man zum Exempel die Zahlen 5728 und 3875 zusammen addiret, so findet man diese Summe 9603. Von dieser Summe wenn man also die Zahl 5728 abzieht, so bleibt die Zahl 3875 übrig. Wenn man aber 3875 abzieht von 9 603, so bleibt die andere Zahl, 5 728, übrig. Wenn man ferner von der Zahl 12 304 diese Zahl 8436 abzieht, so findet man diesen Rest 3 868. Hatte man aber einen Zweifel, ob man in der Operation nicht gefehlet hatte, so kann man entweder die Zahlen 8 436 und 3 868 zusammen addiren und sehen, ob 12 304 herauskommt. Oder man kann 3 868 von 12 304 abziehen und sehen, ob die Zahl 8436 zurückbleibt: wodurch man sich von der Richtigkeit der Operation vergewissern kann. Und dieses sind also die Proben, derer man sich bei der Subtraction bedienen kann.