CHAPTER 4

MULTIPLICATION
AS THE THIRD ARITHMETICAL OPERATION

1. *In multiplication it is taught, how a number may be found, which is either twice or three times, or to be as many times as wished, greater than a given number. This operation therefore makes special rules available, with the help of which a given number can be multiplied at will, and thus a number can be found, in which the given number is contained just as many times as desired.*

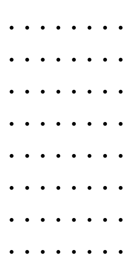
The first notions, that we assume from arithmetic, lead us only to two kinds of operations, the first of which consists of increasing a number, while the other of decreasing a number. The first happens, if we add one or still more numbers to a given number, but the latter if we take away some part of a number: and these operations are thus addition and subtraction, according to that dealt with in the two previous chapters. But the remaining operations, which likewise are to be counted in arithmetic, consist of these, and give special rules for special tasks, through which the same can be resolved far more quickly and easier, as by addition and subtraction alone. Such is the form provided for multiplication, as taught therein, how one can resolve an odd kind of question far more conveniently, which pertains to addition, that can be done by mere addition. As in multiplication it is taught how one may find the sum of only two or more numbers which are all equal to each other ; as thus in addition, it can also be extended to numbers , for finding the sum of two or more given numbers which are not equal to each other. From which it is apparent, that all questions pertaining to multiplication, also can be resolved through the rules of addition, but for which more time and effort is required, than through the rules of [simple] multiplication. But here the discussion is only about whole numbers, as we can only get an idea about fractions at first in the following. Hence if we ask, how much does three times 128 amount to, this is thus a question, which pertains to multiplication; but the same can be resolved also by addition, if we write 128 three times under each other, and these three numbers to be added together, as follows:

$$\begin{array}{r} 128 \\ 128 \\ \underline{128} \\ 384 \end{array}$$

through which it is then found, that 128 taken three times amounts to 384. This example can indeed be calculated through the rules of addition; but if we should ask, how much does 169 times 1204 amount to, thus we must write the number 1204 one hundred and sixty nine times below each other and these 169 numbers to be added together, as then the sum would give the number desired. But these would require so much more time and space. Which is why the rules of multiplication to be given here are far more useful.

2. *This number is called the multiplicand, the question about which is as follows, how much does the same amount to, taken some number of times; moreover the number, which indicates how many times the same must be taken, is called the multiplier. Since then we are accustomed to say, that each number must be multiplied by this. But the number, which is found by the multiplication, is called the product.*

If we want to reduce multiplication to addition, thus there becomes, as mentioned before, the sum of 2 or more numbers sought thus equal to each other. Now here in the first place this number is to be noted, to which each one of the numbers which must be added together is equal; and this number according to the usual words, thus brought to the multiplication, is called the multiplicand. Further it is to be noted, how many times this number must be taken, or how great the total number of the numbers must be, all of which are equal, and which must be added together. This number is now called the multiplier. But the sum which arises from the addition of so many numbers, which are all equal to the multiplicand, as the multiplier indicates, is called the product. As if we ask, how great shall be, which arises, if we take 128 three times, or if we ask, how much does three times 128 amount to, thus 128 is the multiplicand, but the number 3 the multiplier and the above sum found, namely 384, the product. Likewise if the question is, how much does 169 times 1204 amount to, thus 1204 is the multiplicand, 169 the multiplier, and the sum of 169 numbers, of which each one is equal to the number 1204, is equal to the product. Thus the multiplicand and the multiplier are the two given numbers, or both are known from previous examples: but the product is the number which must be found; for which the multiplication gives the necessary rules on hand. But here it is to be observed, that the multiplicand and the multiplier can be confused between themselves, or that one, without making any mistake, can put the multiplier in the place of the multiplicand, then the multiplicand in the place of the multiplier. As if we ask, how much does 8 times 9 make, or how much arises, if we multiply 9 times 8, thus indeed 9 is the multiplicand and 8 the multiplier : but we can also for take 8 for the multiplicand and 9 for the multiplier, then 9 times 8 or 8 times nine taken makes just as much as 8 times 9 or 9 times eight taken, in both cases namely 72 comes from this. This agreement can be understood conveniently times the associated figure .
In this figure there are 8 points in any row from the left to the right, but there are nine



equal rows, therefore the number of all the points returned, just as 8 times nine amounts namely to 72.

But if we draw the rows [*i.e.* columns] of these points here from above, thus we find each row of 9 points, and only 8 such rows, therefore the number of all the points returned, amounts to 9 times the eight given. Now since in both cases the number of all the points is one and the same, namely 72, so we see from this, that 8 times nine taken amounts to just as much as 9 times eight taken. Which demonstration includes likewise all other similar examples of the same kind, so that anyone can readily see the truth of this proposition deduced from the same example. Now since we have no need to consider a difference between these two numbers in a given multiplication, namely by the multiplicand and the multiplier, thus usually they are referred to by some name, and to be called factors : and from the introduction these names are called the product as well as the factum. Likewise, if we want to say, that for example it must be called 8 times nine, it is also the custom to say, that the two numbers 8 and 9 must multiply each other. Now anyone understands from this, if we say, that multiplication instructs how to multiply two given numbers by each other, in that it is just the same, whichever of these two numbers is taken for the multiplicand or the multiplier.

3. *But before one can really perform the operation, whereby the rules in place can at once provide the multiplication, it is required that the same rules should be known, thus so that all numbers less than ten can multiplied by each other, or from every two such numbers the product or factum, can be found either by addition, or seen from the following table. But it is better if this table can be known very well, and even learned by heart.*

The two numbers, which must be multiplied by each other, may be as large as it pleases, thus will such rules be given, so that we can multiply the same by each other and the product can be found, even if we can only multiply two numbers by each other, of which each is less than 10. Just as this is necessary in multiplication, as it is necessary in addition, that we know, two numbers, thus to be smaller than 10, to be put together or to be added. But here we have this advantage, that, if equally we may not know, how much two such numbers amount to when multiplied by each other, we can easily find the same by addition. As if we just wanted to know how much 9 times seven given amounts to, thus we must only write down 9 seven times under each other and to add together, since then the sum will give us the product sought. But this one difficulty can be overcome, as we have added this table for the usual amounts, from which we can find at once the product, which arises from the multiplication of two simple numbers by each other. But so that it is not necessary for anyone to carry around such a table with them at all times, thus it is necessary, that everyone who wants to be accomplished in arithmetic must learn this table by heart which follows.

2 times 2 makes 4	4 times 8 makes 32
2 " 3 " 6	4 " 9 " 36
2 " 4 " 8	
2 " 5 " 10	5 times 5 makes 25
2 " 6 " 12	5 " 6 " 30
2 " 7 " 14	5 " 7 " 35
2 " 8 " 16	5 " 8 " 40
2 " 9 " 18	5 " 9 " 45
3 times 3 makes 9	6 times 6 makes 36
3 " 4 " 12	6 " 7 " 42
3 " 5 " 15	6 " 8 " 48
3 " 6 " 18	6 " 9 " 54
3 " 7 " 21	
3 " 8 " 24	7 times 7 makes 49
3 " 9 " 27	7 " 8 " 56

	7 " 9 " 63
4 times 4 makes 16	
4 " 5 " 20	8 times 8 makes 64
4 " 6 " 24	8 " 9 " 72
4 " 7 " 28	
	9 times 9 makes 81

This table, which first Pythagoras must have presented to his students, uses parts of the Pythagorean table, also called the single times parts. This latter designation therefore leads to the same, because it is usual to start from one times one. But there each number multiplied by one or one times leaves its magnitude unchanged, thus we have not put in place the multiplication of simple numbers with one. On that account we are used to saying, that one does not multiply; thus one times 2 is two, one times 3 three and so on for all numbers, which also are greater than 9. Hereby it is to be observed, that any number multiplied by 0 amounts to zero, as zero or 0 may be taken as many times as we wish, nothing always remains. These can also be explained by the abovementioned method of representing multiplication by points, since the number of points standing in line represent the multiplicand, and the number of rows the multiplier : where then the number of all the points, thus contained in all the rows, indicates the product sought. If now the multiplier is one, thus only one row is present, and consequently the product is just as large as the multiplicand itself. But if the multiplier is zero, thus no row and consequently no points at all to be present, according to which the products thus must be zero. But in order to understand the usage of the table, thus it is to be observed, that, if we want to know the product of two number, both of which are less than 10, we search down from above the smaller number in the first row, and see where the other number in the following row stands to be taken, since then the number in the third row will indicate the known product.

4. *If a number, however large it may be, may be multiplied by a simple number which is less than 10, thus the same can be carried out by the above mentioned table, if we can multiply the number of units, as well as the decades, hundreds, and so on further, by the same simple number, so that from none of these different kinds more than 9 parts can arise, and all the products found do the same together ; which taken altogether amount to the product sought.*

From the above table we can not only find, how much for example 7 times 8 units amounts to, but as well also how much 7 times 8 tens, or 7 times 8 hundreds, and so forth, 7 times 8 of any one kind amounts to. Since then we see from the same table, that 7 times 8 makes fifty six, thus we understand from the same, that 7 times 8 units makes 56 units, but 7 times 8 tens makes 56 tens, and 7 times 8 hundreds amounts to 56 hundreds, thus so forth by all the remaining kinds. Therefore we can sum together the number of the parts of each kind thus present in each number, with each multiplied by a single simple number, with the help of this table. But if each summed number is be multiplied by a given number, thus we will find the product sought, if we bring together each part into one sum, from these given previously multiplied and all these products added together, from which this number consists.

This is made clear from addition, as on which multiplication is based, in which we do the summation, in order to find the sum of more numbers, all special kinds or parts, from which the same numbers consist, since then all the sums of all the special kinds taken together make the whole sum. If I were, for example, to multiply the number 237 by 4, and verify these by addition, since I write the number 237 four times under each other and add these four numbers together as follows:

$$\begin{array}{r} 237 \\ 237 \\ 237 \\ \underline{237} \\ 948 \end{array}$$

Thus I do this as follows: Firstly I take the units 7 by four, secondly also the 3 tens four times, and thirdly also the 2 hundreds 4 times, which 3 special parts times four amount to the whole sum of the given number, namely 948. Just as this example now to be calculated through multiplication, thus we have initially to note, that the given number 237 to be composed from the following parts, namely from 7 units, 3 tens and 2 hundreds. Further if we multiply each part by 4, thus we will find that 4 times 7 units amounts to 28 units, but 4 times 3 tens to 12 tens and 4 times 2 hundreds to 8 hundreds. From which it is apparent, that the number 237 taken four times amounts to 28 units, 12 tens and 8 hundreds: that is 8 units, 4 tens and 9 hundreds or 948, as found above.

5. *In order therefore to multiply a given number by another number, which is less than 10, in the first place we multiply the units by the simple number, as the multiplier, and if the product consists of more than 9 units, thus from that we make as many tens as can be done, which must be done to the tens in the following operation, but we write the remaining units in that product in the first place at the right hand side. Hereafter we multiply the tens by the given number and to the product hence we add these tens that have arisen from the multiplication of the units. If now this product also is greater than 9, thus we make from that as many hundreds as there can be and write the remaining tens in the second place of the product. We proceed in a similar manner in the multiplication of the following kinds, since then we can obtain the product sought.*

It is known already from the preceding, that each part, or each number of a part of a given kind, from which the number thus to be multiplied is obtained, must be multiplied by the multiplier, and all these special products summed together amount to the whole product sought. But if, through this multiplication, more than 9 parts of a given kind arise, thus we must, as understood in addition, from each such 10 parts add one part to the following kind: which thus must be remembered for so long, until the multiplication by the following kind be done, and then that product must be done. But this operation will appear clearer by an example. As if we must multiply this number 3596 by 7, thus we are accustomed to write as follows:

	3	5	9	6	Multiplicand
	::	:::	::	7	Multiplier
2	5	1	7	2	Product.

The parts of the given number are thus 6 units, 9 tens, 5 hundreds and 3 thousands, each part of which in particular must be multiplied by 7, as follows : 7 times 6 units makes 42 units, that is 4 tens and 2 units; these 2 units we write under the line in the units place, but the 4 tens we hold for the following operation of the tens. Since we know, 7 time 9 tens make 63 tens, to which the former arising 4 tens added makes 67 tens, that is 6 hundreds and 7 tens; we write this 7 tens for the second place in the product, but the 6 hundreds we hold for the product of the following operation, since hundreds also arise. Namely, 7 times 5 hundreds make 35 hundreds, which with the previous 6 make 41 hundreds, that is 4 thousands and 1 hundred. This 1 hundred to written in its own corresponding place and the 4 thousands held over for the following operation. Finally we say, 7 times 3 thousand make 21 thousand, to that the previous 4 thousand added on make 25 thousands, that is 5 thousands, so that is to be put in the corresponding place in the product, and 2 tens of thousands, which without any further operation is left, comes equally into its corresponding place. The whole product, which has been found, is thus 25172, which number consequently is 7 times greater tan the original 3596. If in the operation, as it happens in this example, the name of the kind to be omitted, whereby the operation of each kind is all the same, thus the whole operation will be far shorter. According to such a method we will calculate the following example:

57 203 846	Multiplicand
9	Multiplier
514 834 614	Product.

In this example a number is sought, which is 9 times greater than the above given 57 203 846; therefore we begin the operation from the units and say, 9 times 6 or 6 times 9 is 54, from that we write 4 under the line of the first place on the right-hand side in the product, and we bear in mind 5. Secondly we say, 9 times 4 or 4 times 9 is 36, to that we add the 5, making 41, thus write 1 under the line at the second place, and keep 4 in mind. Thirdly we say , 9 times 8 or 8 times 9 is 72, to which adding 4 makes 76, from this number we write 6 under the line and keep 7 in mind. Fourthly we say, 3 times 9 is 27, and 7 from that make 34, thus we write 4 under the Line and keep 3 for the following operation. Fifthly we say, 9 times 0 is 0, to that the retained 3 added makes 3, which number thus is written under the line, and has nothing necessary to bear in mind. Sixthly we say, 2 times 9 is 18, put 8 into the product and keep 1 in mind. Seventhly we say, 7 times 9 is 63, and 1 to that is 64, put 4 into the product and retain 6 in mind. Eighthly we say, 5 times 9 is 45 and that 6 kept in mind makes 51, which whole number, as the multiplication has ended, is written into the product; and in this manner the product is to be found placed under the line. We can also calculate the following examples in the same manner:

385046 2 770092	7318245 3 21954735
1234567 4 4938268	90705036 5 453525180
10407118 6 62442708	89123472 7 623864304
5214796 8 41718368	567898765 9 5111088885

From which examples it is sufficient to be seen, how we can always multiply any number throughout by a simple number, however great or small the same may be, and the product to be found; and it is to be the bases of making this whole operation clear in detail. Now we wish to move forward to investigate, how multiplication is to be established, if the multiplier is a number with more than one digit, or one greater than 9.

6. *If a number, however large the same may always be, should be multiplied by 10, thus it is necessary only, to add a 0 to the same number on the right. But should a number be multiplied by 100, thus it is necessary to add two zeros. Should we multiply by 1000, thus we add three zeros; with 10000 four zeros, and so on, always just as many zeros as stand after the 1 in such multiplications.*

If a number should be multiplied by 10, so must each individual part of the same number by multiplied by 10. For if we multiply the units by 10, thus just as many tens arise from this, as there were units there before. Moreover the tens are to be changed into hundreds, the hundreds into thousands, and so forth. Now there, when a 0 is added to the right hand of the same number, thus each kind in the following becomes ten times greater, thus the whole number is 10 times bigger by adding a 0. Therefore 10 times 5783 is so much: 57 830. In the same manner, if we add two zeros to the right-hand of a number, thus the units are changed into hundreds, the tens into thousands, the hundreds into tens of thousands, and so forth, each kind into another that is 100 times greater. On this account by adding two zeros the whole number is multiplied by 100; thus if 328 should be multiplied by 100, thus 32 800 arises from this. In an equal manner we see that, if three zeros are attached to a number, the same is 1000 times bigger, and so on further. Thus if we should multiply this number 5430 by this number 1000000, thus the product would be this number 5430000000. From this we see thus, how any number must be multiplied, if the multiplier is such a number, which is written by a 1 with as known number of zeros written after it. And this is the foundation of the rules of multiplication, if the multiplier is a large composite number, as will be set out further in the following.

7. *If the multiplier or the number which should multiply a given number, is a simple number with a known number of zeros attached to it, such as 60, 300, 4000, 70 000 and suchlike, thus we find the product sought, if at first we multiply the given number by the simple number, and to add just as many zeros to the product found to the right hand end, as there shall be present in the multiplier.*

When the multiplier, by which a number must be multiplied, is such a number arising from the multiplication of two numbers by one another, thus we obtain the true product, when in the first place we multiply the given number by one of these two numbers, and then this product still be the other number. As when I must multiply 47 by 6, while 6 is as much as 2 by 3, thus I find the product sought, when first I multiply 47 by 2, there I obtain 94, and then multiply this 94 still by 3, which gives 282; and this is the number which arises when 47 is multiplied by 6. Then just as 6 is as much as 2 by 3, thus the product sought, namely 6 by 47, is as much as 2 by 3 by 47, or 3 by 2 by 47. Now accordingly to find, what 3 by 2 by 47 is, thus first we seek what 2 times 47 is, namely 94; therefore 3 times 2 times 47 is as much as 3 times 94, and consequently 3 times 94 thus to be as much as 6 times 47. This is the basis of the proposition, which is applied equally in all the previous examples. By the help of this proposition thus many examples can be worked out, when equally the multiplier is not a simple number. As if we wish to multiply 127 by 63, thus we can say, that 63 thus is as great as 7 by 9, in the first place multiply the number 127 by 7, which makes 889. Then multiply 889 by 9, thus we obtain 8001, which is just as large as 63 times 127. Then 8001 is as great as 9 times 889, but now 889 is as great as 7 times 127, therefore 8001 is as great as 9 times 7 times 127. But 9 times 7 is as large as 63, therefore 8001 is as large as 63 times 127, from which example the truth of this proposition is still more clear. But regarding the given rule itself to be obtained, thus it is to be observed, that each number multiplied, which is written with any single number and with any known number of zeros attached, from this there arises, when the simple number with 1 beside just as many attached zeros. Therefore if such a single number were to be multiplied, thus first we multiply only by the simple number, and what arises, further the same to be multiplied by 1 along with so many attached zeros, which in the previous number is known to be 6, we have indicated as well, that, concerning how to find one such product, only is necessary, for the number which must be multiplied, thus just as many zeros to be added, as in such to multiply standing after the 1. If therefore the multiplier, as we put in place, is a simple number along with a known number of attached zeros, thus we multiply first the multiplicand by the simple number, and write for the product on the right hand just as many zeros, as follow in the multiplier after the simple number. As if we must multiply this number 543 by 700, thus in the first place we multiply 543 by 7, since then we find 3801, to that two zeros are added to give 380100, and this is the product sought, namely 700 times 543. Since we now can perform the multiplication by the simple number going from the right to left, thus equally we can write just as many zeros as present in the multiplier, and then perform the multiplication by the simple number. According to this method the operation of the previous examples thus will be as follows:

543	Multiplicand
700	Multiplier
380100	Product.

In a similar manner when 2758 must be multiplied by 500000 , the operation in place thus becomes :

$$\begin{array}{r} 2758 \\ \underline{500000} \\ 1379000000 \end{array}$$

This operation thus rests on the fact, that such multipliers have two factors or arise through the multiplication of two numbers. Namely in the first example the multiplier is 700 as much as 7 times 100, and in the latter 500 000 is the same as 5 times 100 000; but as with such numbers each number must be multiplied, as is already known from the foregoing.

8. *When the multiplier is a composite number or composed from some numbers, thus must the multiplicand be multiplied by each part, from which the multiplier is composed, and from that all these products found to be added together, since then the sum, which arises, is the desired product.*

We have shown above, that when the multiplicand consists of several parts, each particular part must be multiplied by the multiplier, and these individual products to be added together, as from that sum the product sought must be given. Now since the multiplicand and the multiplier can be changed between themselves and each one put in place of the other, so that it is just these numbers to be composed from the multiplier. Therefore, when the multiplier is a composite number or composed from more than one figure, so must the multiplicand be multiplied by each part of the multiplier and all these different products to be added together : since then the sum itself will give the product sought. But the parts, from which a composite number is composed, are the different kinds, as the units, tens, hundreds and so forth, from each of which no more than 9 parts can be available. Therefore the multiplicand must be multiplied first by so many units, then by so many tens, likewise by so many hundreds, and so on further as are found in the multiplier, and all the products found to be turned into one sum. But it is known in the forgoing proposition, how each number must be multiplied by another simple number, after which several zeros stand; and just as likewise the numbers are all these parts, from which the composite multiplier is composed, therefore the multiplication by such a composite number [i.e. in the sense that it contains 2 or more simple numbers], or consisting of more figures, is had without any difficulty. As when we must multiply 4738 by 358, thus the parts of the multiplier are firstly 8, secondly 50 and thirdly 300. On account of which we multiple first the number 4738 by 8, which gives 37904. Secondly we multiply the number 4738 by 50, this gives 236900. Thirdly we multiply the given number by 300, this gives 1421400. Now we add the three products as follows :

$$\begin{array}{r} 37904 \\ 236900 \\ \underline{1421400} \\ 1696204 \end{array}$$

thus this sum is the product desired. From which moreover the whole operation thus can be set out more conveniently, thus we use these particular products to be written under each other equally, so that the units come to stand under the units, and likewise all the equal kinds stand under each other, so that we can sum together the same equally, as follows :

$$\begin{array}{rl} 4738 & \text{Multiplicand} \\ \underline{358} & \text{Multiplier} \\ 37904 & \\ 236900 & \\ \underline{1421400} & \\ 1696204 & \text{Product.} \end{array}$$

Namely we write first the multiplier under the multiplicand, and draw a line under the same. Now we multiply the multiplicand by the number of units in the multiplier, thus to be present in the multiplier, namely by 8, and write the product under the line, as has been taught above for multiplication by a simple number. Further we multiply by the tens of the multiplier as by 50, since then according to the given rule first we put a zero in the units place, and apart from that multiply by 5. In the third place we multiply by the hundreds or in this case by 300, as in the first two place to the right we put two zeros, and then multiply by 3. If we now write the whole figures under each, thus all the equal kinds of particular products come to stand under each other, and therefore so that the addition is so much more convenient. Thus had we found all these particular products, so is a line drawn underneath and the same to be added together, from which we obtain the whole product sought. We can also for the sake of brevity, thus so that in the products the higher kinds given must be written to leave out the zeros towards the right, so that the same are not included in the addition, as follows :

$$\begin{array}{r} 4738 \\ \underline{358} \\ 37904 \\ 23690 \\ \underline{14214} \\ 1696204 \end{array}$$

Since then it is to be noted, that the product from each figure of the multiplier from the right begins from the very place on which the figure of the multiplier stands. Namely the product from the first figure of the multiplier going to the right begins from the first place. The product of the second figure begins from the second place, that of the third from the third, and so forth.

9. *If two numbers, as large as can be wished among themselves, are to be multiplied by one another, thus we write one, which we assume for the multiplier, under the other according to the given method, and draw a line under the same. Accordingly we multiply the multiplicand by each particular figure of the multiplier and write the product below each other under the line. But each of these products must now begin to be written from these places on the right hand, on which the figure stands by which it is multiplied. Now we have found in this way all the products of all the figures of the multipliers, and put under each other by the prescribed method, under which once more a line is drawn, and all these particular products added together, since then the sum shall be that product sought.*

In this way thus the multiplication by the greatest numbers is reduced to multiplication by simple numbers, to be smaller than 10. And herein mainly stands the advantage that the operations of multiplication have, that therein it is to be known, how operations which should be performed with the largest numbers, can be reduced to small numbers, which anyone, who has not learned to calculate, can handle easily. Thus it is enough for multiplication, if we know only how to multiply the simple numbers by each other. These we have accomplished sufficiently in the preceding, from which also the basis of the whole operation, as we describe the same here, is thoroughly explained. But according to this operation, a skill is to be achieved, thus so that the most important thing is that one should make a habit of writing the numbers fairly neatly, so that all which belong to a kind are written one under the other in a row, so that the particular ones can be written to distinguish clearly the different kinds from each other, and so that no confusion arises. Of the two given numbers, which must be multiplied by each other, it is now indifferent, which one is taken for the multiplier and is written under the other one ; but it is still more convenient, the smaller number, which consists of fewer figures, to be written under the other, while we come upon fewer unusual products in this manner, thus to be added together. But we can always obtain just as many products, and consequently just as many numbers to add together, as the number of figures is, from which the multiplier is obtained : except, if one or more figures are nothing or zero; of which we will give some thoughts afterwards. Now we will give some examples to illuminate the operation described above. As it shall be this number 835047 to be multiplied with this 67894, so we write the same as follows :

```
     835047    Multiplicand
      67894    Multiplier
    -------
    3340188    Product from 4
   7515423     Product from 9
  6680376      Product from 8
 5845329       Product from 7
5010282        Product from 6
-----------
56694681018    Product.
```

In this example we multiply now in the first place the multiplicand by 4 as the first figure of the multiplier and write the product thus under the line, that is the first figure, namely 8, under the 4 to arise. Secondly we multiply the multiplicand by the second figure of the multiplier, and begin to write these products of the second place in the writing space, namely under the 9, to begin to write in the usual manner the product of 8 in the third place, namely under the 8, and so forth, as to be seen from the example itself. Finally we add all the products together, since then the sum gives the whole product sought.

In a like manner also the following examples are to be calculated:

23578	829357
13	38
70734	6634856
23578	2488071
306514	31515566
156274	734862
295	567
781370	5144034
1406466	4409172
312548	3674310
46100830	416666754

987654321
123456789
8888888889
7901234568
6913580247
5925925926
4938271605
3950617284
2962962963
1975308642
987654321
121932631112635269

But when in the multiplier any one figure is zero or nothing, the whole product, thus arising from that, to be composed of zeros only and consequently also to be zero, in as much as each number multiplied by 0 amounts to nothing. Therefore when this is done, thus for brevity the whole product is left out, and equally move on to multiply by the following figures of the multiplier. But there we must pay attention before writing, that we have nevertheless each product under the number of the multiplier, from which the same have originated, as to be seen from the following example :

```
   58346          9348
     201          3007
   58346         65436
 116692         28044
11727546        28109436
```

```
        24680135
        10203005
       123400675
      74040405
    49360270
  24680135
  251811540805675
```

But further when in the multiplicand, or in the multiplier, or in both themselves a zero is to be found toward the right hand end, thus the following rule can be of service, through which we can be relieved of the superfluous zeros.

10. *If in the multiplier or multiplicand or in both the last figures to the right are zero, thus we usually cut off all these zeros arising at the end and the multiplication by the remaining numbers to be performed. But for the product found in this way, just as many zeros must be added to the right hand as have been thrown away from the beginning.*

When the multiplier is a simple number with some zeros attached, thus we multiply by the simple number, but we put to the product found just as many zeros, as stood after the simple number in the multiplier. We have already indicated the principle above in no. 7, which thus provides, that the truth of this proposition also can be given from that. It consists namely that the fundamental principle from that, if a multiplier is a product of two factors, or arises from the multiplication of two numbers by each other, the true product is obtained by multiplying the multiplicand by a factor of the multiplier, and had appeared, as often as it had been multiplied by the other factor. Therefore I take all these factors, as reminded already above, both numbers, which multiplied by each other, produce a number found before.

But now every number, to which some zeros are attached on the right, is a product from the same number with 1 and so many zeros standing behind. As 230 is the product of 23 and 10, or both these numbers are the factors of 230. Just as in the same way 478 000 is as much as 478 times 1000, or the product of these numbers. Therefore if we should multiply a given number by 478000, thus initially we multiply the same only by 478, and what arises still by 1000, which is done, if we set three zeros form the right hand side to that. When thus zeros are found in the right hand side of the multiplier, thus initially we can omit the zeros, and only multiply by the remaining number; but we must add just as many zeros to the product found as we had left off in the multiplier. As when we should multiply 5339 by 24600, thus we multiply only by 246, which thus we write under the number 5339. But with that we do not forget the zeros, and we can likewise add these to the multiplier; but we have nothing to see by the multiplication of the same, but the same to be written now to the product found, as to be seen from the standing operation:

```
    5339
     24600
   _____
   32034
  21356
 10678
 _________
 131339400
```

A similar sort of thing happens, if in the multiplicand one or more zeros are in place from the right hand end; while the multiplicand is confused with the multiplier, and can be put at the same place. As if we should multiply 1345000 by 48, thus in the first place we multiply 48 by 1345, and what arises again by 1000. But while it is equivalent, whether we multiply 48 by 1345 or 1345 by 48, thus for the sake of brevity we multiply 1345 by 48 and we write the three zeros to the product found. We can also for the sake of clearness, set the zeros before the right hand to the multiplicand, so that after completion of the operation one can immediately see how many zeros to put to the product, as can be seen from the following operation:

```
  1345000
     48
 ______
 10760
 5380
 ________
 64560000
```

since the three zeros in fact stand by the multiplicand, but not to be attached to the product until the multiplication be completed. Now when both the multiplicand as well as the multiplier themselves shall end with zeros, thus the operation from both these cases can be put in place. As if we should multiply 1987 000 by 3700, thus we multiply firstly 1987 000 by 37, and to the product we write two zeros. But in order to multiply 1987 000 by 37, thus according to the given rule we multiply 1987 by 37 and on to that product we attach three zeros. Therefore, in order that both the given numbers multiply each other, thus we multiply now 1987 by 37, after we have discarded the zeros from both sides until the end, and write five zeros to the product found, namely just as many as we discarded. We can just as well let the zeros stand by the multiplicand as by the multiplier, whether we equally we do not look at the same until the end of the multiplication, from which we see at once, how many zeros we have to append to the product found, as to be seen in the operation of these examples:

```
   1987000
      3700
  --------
 13909
 5961
 ----------
 7351900000
```

Thus if this number 54032000 should be multiplied by this 2540000, thus we find the product in the following manner:

```
      54032000
         2540000
  ---------------
    216128
   270160
  108064
  ---------------
  137241280000000
```

Thus we conclude this chapter with a few examples, from which we can see the usage of many cases of multiplication occurring.

Examples of Multiplication

I. A great circle, as we can draw around the spherical earth, usually is divided into 360 degrees. But it has been found, that 105 Werste [Russian verse, approx. Kim. as a linear measure] amounts to such a degree. Therefore the question is, how many Werste is the circumference of the whole earth?

Ans.: Because a degree contains 105 Werste, but the circumference of the earth 360 degrees, thus it is clear, that the whole circumference of the earth contains 105 times 360 Werste. This required number of Werste thus is found by multiplication, in so far as we multiply 105 by 360 ; from which we thus find 37 800 Werste.

II. A common year of 365 days, the same contains how many hours ?

Ans.: Since a day contains 24 hours, thus 24 by 365 hours makes a year. Therefore the required number of hours is found by multiplication, in that we multiply 365 by 24. Thus we find 8760 hours.

III. An army battalion stands in order in lengths of four, 156 men stand along the length, but 97 men along the breadth. Now the question is, how many men does the whole battalion contain?

Ans.: Since 97 men stand in the width, so the length corresponds to 97 rows, in each of which 156 men stand. On that account the whole army consists of 97 by 156 men, which multiplied makes 15132 men.

CAPITEL 4

VON DER MULTIPLICATION
ALS DER DRITTEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Multiplication wird gelehret, wie man eine Zahl finden soll, welche entweder 2 mal oder 3 mal oder so viel mal als man beliebet grösser sei als eine gegebene Zahl. Diese Operation gibt demnach besondere Regeln an die Hand, durch derer Hülfe man eine gegebene Zahl nach Belieben vervielfältigen und also eine Zahl finden kann, in welcher die gegebene Zahl so viel mal enthalten ist, als man verlanget.*

Der erste Begriff, den wir uns von der Arithmetik machen, leitet uns nur auf 2 Operationen, davon die eine in Vermehrung einer Zahl, die andere aber in Verminderung bestehet. Jenes geschiehet, wenn man zu einer Zahl noch eine oder mehr Zahlen hinzusetzt, dieses aber, wenn man von einer Zahl etwas hinwegnimmt: und diese Operationen sind also die Addition und Subtraction, davon in den zweien vorhergehenden Kapiteln ist gehandelt Worden. Die übrigen Operationen aber, welche gleichfalls zur Arithmetik gezählet werden, entstehen aus diesen, und geben besondere Regeln für besondere Aufgaben, durch welche dieselben weit geschwinder und leichter aufgelöset werden können, als durch die Addition und Subtraction allein. Solchergestalt ist es mit der Multiplication beschaffen, als darinn gelehret wird, wie man eine sonderbare Art von Fragen, welche zur Addition gehören, weit bequemer auflösen könne, als durch blosse Addition geschehen kann. In der Multiplication wird nämlich gelehret, wie man nur allein die Summe zweier oder mehr Zahlen finden soll, welche einander gleich sind; da sich die Addition auf die Erfindung der Summe von zweien oder mehr gegebenen Zahlen, so einander auch nicht gleich sind, erstrecket. Woraus erhellet, dass alle Fragen, so zur Multiplication gehören, auch durch die Regeln der Addition aufgelöset werden können, wozu aber mehr Zeit und Mühe erfordert wird, als durch die Regeln der Multiplication. Hier ist aber nur die Rede von ganzen Zahlen, indem wir von gebrochenen Zahlen erst im folgenden einen Begriff bekommen werden. Also wenn man fragt, wieviel drei mal 128 ausmache, so ist dieses eine Frage, welche zur Multiplication gehöret; dieselbe kann aber auch durch die Addition aufgelöset werden, wenn man 128 drei mal unter einander schreibt und diese drei Zahlen zusammen addiret, wie folget:

$$\begin{array}{r} 128 \\ 128 \\ \underline{128} \\ 384 \end{array}$$

wodurch denn gefunden wird, dass 128 drei mal genommen 384 ausmache. Dieses Exempel kann zwar leicht durch die Regeln der Addition gerechnet werden; wenn man aber fragen sollte, wieviel 169 mal 1204 ausmache, so müsste man die Zahl 1204 hundertundneunundsechzig mal unter einander schreiben und diese 169 Zahlen zusammen addiren, da denn die Summe die verlangte Zahl geben würde. Dieses aber würde sowohl viel Zeit als Raum erfordern. Weswegen hierzu die Regeln der Multiplication weit vorteilhafter zu gebrauchen sind.

2. *Diejenige Zahl, davon die Frage ist, wieviel dieselbe etliche mal genommen ausmache, wird der Multiplicandus genannt; die Zahl aber, welche anzeigt, wieviel mal dieselbe genommen werden soll, wird der Multiplicator genannt. Da man denn auch zu sagen pflegt, dass jene Zahl durch diese multipliciret werden soll. Die Zahl aber, welche durch die Multiplication gefunden wird, nennet man das Productum.*

Wenn man die Multiplication auf die Addition reduciren will, so wird darinn, wie vorher gemeldet, die Summe von 2 oder mehr Zahlen gesucht, so einander gleich sind. Hier ist nun erstlich diejenige Zahl zu merken, deren eine jegliche der Zahlen, welche zusammen sollen addiret werden, gleich ist; nd diese Zahl wird nach den gewöhnlichen Worten, so zur Multiplication gebraucht werden, der Multiplicandus genannt. Ferner ist zu merken, wieviel mal diese Zahl soll genommen werden, oder wie gross die Anzahl der Zahlen, welche alle dieser gleich sind und zusammen addiret werden sollen. Diese Zahl wird nun der Multiplicator genannt. Die Summe aber, welche aus der Addition so vieler Zahlen, welche alle dem Multiplicando gleich sind, als der Mutiplicator anzeiget, herauskommt, wird das Productum genannt. Als wenn man fragt, wie gross die Zahl sei, welche herauskommt, wenn man 128 drei mal nimmt, oder wenn man fragt, wieviel drei mal 128 ausmache, so ist 128 der Multiplicandus, die Zahl 3 aber der Multiplicator und die oben gefundene Summe, nämlich 384, das Productum. Gleichergestalt wenn die Frage ist, wieviel 169 mal 1204 ausmache, so ist 1204 der Multiplicandus, 169 der Multiplicator, und die Summe von 169 Zahlen, derer eine jede gleich ist der Zahl 1204, ist das Productum. Der Multiplicandus also und der Multiplicator sind die zwei gegebenen Zahlen, oder sind bei jedem vorgelegten Exempel bekannt: das Productum aber ist die Zahl, welche gefunden werden soll; wozu die Multiplication die nöthigen Regeln an die Hand gibt. Hiebei ist aber zu beobachten, dass der Multiplicandus und der Multiplicator unter sich verwechseltwerden können, oder dass man, ohne einen Fehler zu begehen, den Multiplicator an des Multiplicandi Stelle, den Multiplicandum aber an des Multiplicatoris Stelle setzen könne. Als wenn man fragt, wieviel 8 mal 9 ausmache, oder wieviel herauskomme, wenn man 9 mit 8 multipliciret, so ist zwar 9 der Multiplicandus und 8 der Multiplicator: man kann aber auch 8 für den Multiplicandum annehmen und 9 für den Multiplicator, denn 9 mal 8 oder 8 neun mal genommen macht eben so viel aus, als 8 mal 9 oder 9 acht mal genommen, in beiden Fällen kommt nämlich 72 heraus. Diese Übereinstimmung kann am fügliebsten durch beigesetzte Figur bewiesen werden.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

In dieser Figur sind in einer jeglichen Reihe von der Linken zur Rechten 8 Punkte, dergleichen Reihen aber sind an der Zahl 9, weswegen die Anzahl aller Punkte ausweist, wieviel 8 neun mal genommen ausmacht, nämlich 72.

Wenn wir aber die Reihen dieser Punkte von oben herab betrachten, so finden wir in jeder Reihe 9 Punkte, und nur 8 solche Reihen, weswegen die Anzahl aller Punkte ausweist, wieviel 9 acht mal genommen ausmache. Da nun in beiden Fällen die Anzahl aller Punkte einerlei ist, nämlich 72, so sieht man hieraus, dass 8 neun mal genommen eben so viel ausmache als 9 acht mal genommen. Welcher Beweis ebenfalls sich auf alle anderen dergleichen Exempel erstrecket, sodass ein jeder die Wahrheit dieses Satzes aus diesem angeführten Exempel leicht einsehen wird. Da man nun nicht nöthig hat, zwischen denen beiden bei einer jeglichen Multiplication gegebenen Zahlen, nämlich dem Multiplicando und dem Multiplicatore, einen Unterschied zu betrachten, so pflegen auch beide mit einerlei Namen beleget, und Factores genennet zu werden: und aus Anleitung dieses Namens wird das Productum auch das Factum genennt. Gleichergestalt, wenn man sagen will, dass zum Exempel 8 neun mal genommen werden soll, so pflegt man auch zu sagen, dass die beiden Zahlen 8 und 9 mit einander sollen multipliciret werden. Hieraus wird nun ein jeder verstehen, wenn man sagt, dass die Multiplication lehre, zwei gegebene Zahlen mit einander multipliciren, indem es gleich viel ist, welche von diesen beiden Zahlen für den Multiplicandum oder Multiplicatorem angenommen wird.

3. *Ehe aber einer die Operation, wozu die Multiplication die Regeln an die Hand gibt, wirklich anstellen kann, so wird erfordert, dass derselbe wisse, alle Zahlen, so kleiner sind als 10, mit einander zu multipliciren, oder von je zweien solchen Zahlen das Productum oder Factum anzuzeigen, welches man entweder durch die Addition finden, oder aus nachfolgendet Tabelle ersehen kann. Besser aber ist es, wenn man sich diese Tabelle wohl bekannt macht und dieselbe gar auswendig lernet.*

Die zwei Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, mögen so gross sein als man will, so werden solche Regeln gegeben werden, dass man dieselben mit einander multipliciren und das Productum finden kann, wenn man nur je zwei Zahlen, davon eine jede kleiner ist als 10, mit einander multipliciren kann. Dieses wird in der Multiplication ebenso erfordert, als in der Addition ist erfordert worden, dass man wisse, zwei Zahlen, so kleiner sind als 10, zusammen zu setzen oder zu addiren. Man hat aber hierinn diesen Vortheil, dass, wenn man gleich nicht wissen sollte, wie viel zwei solche einfache Zahlen mit einander multipliciret ausmachen, man dasselbe durch die Addition leicht finden kann. Als wenn einer je nicht wissen sollte, wieviel 9 sieben mal genommen ausmacht, so darf er nur 9 sieben mal unter einander schreiben und zusammen addiren, da ihm dann die Summe das gesuchte Product geben wird. Diese Mühe aber einem zu benehmen, so haben wir gewöhnlichermassen diese Tabelle beigefügt, woraus man sogleich das Product, welches durch Multiplicirung zweier einfachen Zahlen mit einander herauskommt, finden kann. Damit aber einer nicht nöthig habe, eine solche Tabelle allzeit bei sich zu führen, so ist nöthig, dass ein jeder, welcher im Rechnen fertig zu sein verlanget, diese Tabelle auswendig lerne, welche folget.

2 mal 2 macht 4	4 mal 8 macht 32
2 " 3 " 6	4 " 9 " 36
2 " 4 " 8	
2 " 5 " 10	5 mal 5 macht 25
2 " 6 " 12	5 " 6 " 30
2 " 7 " 14	5 " 7 " 35
2 " 8 " 16	5 " 8 " 40
2 " 9 " 18	5 " 9 " 45
3 mal 3 macht 9	6 mal 6 macht 36
3 " 4 " 12	6 " 7 " 42
3 " 5 " 15	6 " 8 " 48
3 " 6 " 18	6 " 9 " 54
3 " 7 " 21	
3 " 8 " 24	7 mal 7 macht 49
3 " 9 " 27	7 " 8 " 56
	7 " 9 " 63
4 mal 4 macht 16	
4 " 5 " 20	8 mal 8 macht 64
4 " 6 " 24	8 " 9 " 72
4 " 7 " 28	
	9 mal 9 macht 81

Diese Tabelle, welche zuerst von dem Pythagoras seinen Schülern soll vorgeleget worden sein, pflegt theils die Pythagorische Tabelle, theils auch das Einmaleins benennet zu werden. Diese letztere Benennung führet dieselbe deswegen, weilen man gemeiniglich von ein mal eins ist eins anzufangen pflegt. Da aber eine jede Zahl mit eins multipliciret oder einmal genommen in ihrer Grösse unverändert bleibt, so haben wir die Multiplication der einfachen Zahlen mit eins nicht beigesetzet. Derowegen pflegt man zu sagen, dass eins nicht multiplicire; also ist ein mal 2 zwei, ein mal 3 drei und so fort in allen Zahlen, welche auch grösser sind als 9. Hiebei ist auch ferner zu merken, dass eine jegliche Zahl mit 0 multipliciret nichts ausmache, weilen nichts oder 0, es mag so viel mal genommen werden als man will, immer nichts bleibt. Dieses kann auch durch die obangebrachte Art, die Multiplication durch Punkte vorzustellen, erläutert werden, da die Anzahl der Punkte, so in einer Reihe stehen, den Multiplicandum vorstellet, die Anzahl der Reihen aber den Multiplicatorem: wo dann die Anzahl aller Punkten. so in allen Reihen enthalten sind, das gesuchte Product weiset. Wenn nun der Multiplicator eins ist, so ist nur eine Reihe vorhanden, und folglich das Productum so gross als der Multiplicandus selbst. Wenn aber der Multiplicator nichts ist, so muss gar keine Reihe und folglich auch kein Punkt vorhanden sein, weswegen also das Product nichts sein wird. Um aber den Gebrauch der Tabelle zu weisen, so ist zu beobachten, dass, wenn man von zweien Zahlen, die beide kleiner sind als 10, das Product wissen will, man die kleinere Zahl in der ersten Reihe von oben herab suche, und sehe, wo die andere Zahl in der zweiten Reihe daneben stehe, da denn die Zahl in der dritten Reihe das Product weisen wird.

4. *Wenn eine Zahl, so gross sie auch immer sein mag, durch eine einfache Zahl, welche kleiner ist als 10, multipliciret werden soll, so kann dasselbe durch die vorhergehende Tabelle bewerkstelliget werden, wenn man sowohl die Anzahl der Unitäten als Decaden und Centenariorum und so weiter mit derselben einfachen Zahl multipliciret, indem von keiner dieser verschiedenen Sorten mehr als 9 Stücke vorkommen können, und alle die gefundenen Producta zusammen thut; welche alle zusammen das gesuchte Product ausmachen.*

Aus der vorhergegebenen Tabelle kann man nicht nur finden, wieviel zum Exempel 7 mal 8 Unitäten ausmachen, sondern auch wieviel 7 mal 8 Decades, oder 7 mal 8 Centenarii, und so fort, 7 mal 8 von einer jeglichen Sorte betragen. Denn da man aus derselben Tabelle siehet, dass 7 mal 8 sechsundfünfzig machen, so verstehet man von sich selbst, dass 7 mal 8 Unitäten 56 Unitäten, 7 mal 8 Decades aber 56 Decades, und 7 mal 8 Centenarii 56 Centenarios ausmachen, und so fort bei allen übrigen Sorten. Derohalben kann man durch Hülfe dieser Tabelle die Anzahl der Stücke, so von einer jeglichen Sorte in einer zusammengesetzten Zahl vorhanden sind, mit einer jeglichen einfachen Zahl multipliciren. Wenn aber eine zusammengesetzte Zahl durch eine gegebene Zahl multipliciret werden soll, so wird man das gesuchte Product finden, wenn man einen jeglichen Theil, daraus dieselbe Zahl bestehet, mit dieser vorgegebenen multipliciret und alle diese herausgebrachten Producta zusammen in eine Summe bringet.

Dieses erhellet aus der Addition, als in welcher die Multiplication gegründet ist, in welcher man, um die Summe vieler Zahlen zu finden, alle besonderen Sorten oder Theile, aus welchen dieselben Zahlen bestehen, zusammen thut, da denn alle Summen von allen besonderen Sorten zusammen die ganze Summe ausmachen. Wenn ich zum Exempel die Zahl 237 soll mit 4 multipliciren, und dieses durch die Addition verrichte, indem ich die Zahl 237 vier mal unter einander schreibe und diese 4 Zahlen zusammen addire wie folget:

$$\begin{array}{r} 237 \\ 237 \\ 237 \\ \underline{237} \\ 948 \end{array}$$

so nehme ich in der That: erstlich die 7 Unitäten vier mal, zweitens auch die 3 Decades vier mal, und drittens auch die 2 Centenarios 4 mal, welche 3 besonderen Theile vier mal genommen zusammen die ganze Zahl vier mal genommen ausmachen, nämlich 948. Eben dieses Exempel nun durch die Multiplication auszurechnen, so hat man erstlich zu merken, dass die gegebene Zahl 237 aus folgenden Theilen bestehe, nämlich aus 7 Unitäten, 3 Decaden und 2 Centenariis. Wenn man ferner einen jeglichen Theil mit 4 multipliciret, so wird man finden, dass 4 mal 7 Unitäten 28 Unitäten ausmachen, 4 mal 3 Decades aber 12 Decades und 4 mal 2 Centenarii 8 Centenarios. Woraus erhellet, dass die Zahl 237 vier mal genommen ausmache 28 Unitäten, 12 Decades und 8 Centenarios: das ist 8 Unitäten, 4 Decades und 9 Centenarios oder 948, wie oben gefunden.

5. *Um demnach eine gegebene Zahl mit einer Zahl, welche kleiner ist als 10, zu multipliciren, multiplicire man erstlich die Unitäten mit der einfachen Zahl, als dem Multiplicator, und wenn das Product aus mehr als 9 Unitäten bestehet, so mache man daraus so viel Decades als geschehen kann, welche in der folgenden Operation zu den Decadibus müssen gethan werden, die übrigen Unitäten aber schreibt man in das Product in die erste Stelle nach der rechten Hand. Hierauf multiplicire man die Decades mit der gegebenen Zahl und zum Product setze man diejenige Decades, so in der Multiplication der Unitäten entsprungen, hinzu. Wenn nun dieses Product auch grösser ist als 9, so formire man daraus so viel Centenarios als sein kann und schreibe die übrigen Decades auf die zweite Stelle ins Product. Gleichergestalt verfahre man in der Multiplication der folgenden Sorten, da man denn das gesuchte Product bekommen wird.*

Dass ein jeder Theil oder eine jede Anzahl der Stücke einer jeglichen Sorte, daraus die Zahl, so multipliciret werden soll, bestehet, mit dem Multiplicator müsse multipliciret werden, und alle diese sonderbaren Producte zusammen das ganze gesuchte Product ausmachen, ist schon im vorhergehenden erwiesen worden. Wenn aber durch diese Multiplication mehr als 9 Stücke von einer Sorte herauskommen, so müssen, wie in der Addition gelehret worden, von je 10 solcher Stücke je ein Stück zu der folgenden Sorte geschlagen werden: welche demnach so lange im Sinn behalten, bis die Multiplication mit der folgenden Sorte geschehen, und dann zum Product gethan werden müssen. Diese Operation wird aber durch ein Exempel deutlicher begriffen werden. Als wenn man soll diese Zahl 3596 mit 7 multipliciren, so pflegt man dieselbe zu schreiben wie folgt:

3	5	9	6	Multiplicandus
::	:::	::	7	Multiplicator
25	1	7	2	Productum.

Die Theile der gegebenen Zahl sind also 6 Unitäten, 9 Decades, 5 Centenarii und 3 Millenarii, derer ein jeder insbesondere mit 7 multipliciret werden muss, wie folget: 7 mal 6 Unitäten macht 42 Unitäten, das ist 4 Decades und 2 Unitäten; diese 2 Unitäten schreibt man unter die Linie auf die Stelle der Unitäten, die 4 Decades aber behält man zur folgenden Operation der Decaden. Alsdenn sagt man, 7 mal 9 Decades macht 63 Decades, wozu die vorher herausgekommenen 4 Decades gethan macht 67 Decades, das ist 6 Centenarii und 7 Decades; diese 7 Decades schreibt man ins Product auf die zweite Stelle, die 6 Centenarios aber behält man zum Product der folgenden Operation, da auch Centenarii herauskommen. Nämlich 7 mal 5 Centenarii machen 35 Centenarios, welche mit den 6 vorhergehenden 41 Centenarios betragen, das ist 4 Millenarios und 1 Centenarium. Dieser 1 Centenarius wird auf seine gehörige Stelle in das Product geschrieben und die 4 Millenarii zur folgenden Operation aufbehalten. Endlich sagt man, 7 mal 3 Millenarii machen 21 Millenarii, dazu die vorigen 4 Millenarii hinzugethan machen 25 Millenarios, das ist 5 Millenarios, so in die gehörige Stelle ins Product gesetzet werden, und 2 Decades Millenariorum, welche, weilen keine Operation mehr übrig ist, gleichfalls auf ihre gehörige Stelle kommen. Das ganze Product, welches gefunden worden, ist demnach dieses 25172, welche Zahl folglich 7 mal grösser ist als die vorgegebene 3596. Wenn in der Operation, wie sie in diesem Exempel ist gemacht worden, die Namen der Sorten ausgelassen werden, weilen bei einer jeglichen Sorte die Operation einerlei ist, so wird die ganze Operation weit kürzer. Auf solche Art wollen wir derohalben folgendes Exempel ausrechnen:

57 203 846	Multiplicandus
9	Multiplicator
514 834 614	Productum.

In diesem Exempel wird nämlich eine Zahl gesucht, welche 9 mal grösser sei als die vorgegebene Zahl 57 203 846; man fängt demnach die Operation von den Unitäten an und sagt, 9 mal 6 oder 6 mal 9 ist 54, davon schreibt man 4 unter die Linie auf die erste Stelle zur rechten Hand in das Product, und 5 behält man im Sinn. Zweitens sagt man, 9 mal 4 oder 4 mal 9 ist 36, dazu thut man die 5, macht 41, schreibt also 1 unter die Linie auf die zweite Stelle, und behält 4 im Sinn. Drittens sagt man, 9 mal 8 oder 8 mal 9 ist 72, wozu die 4 gethan, macht 76, von dieser Zahl schreibt man 6 unter die Linie und behält 7 im Sinn. Viertens sagt man, 3 mal 9 ist 27, und 7 dazu macht 34, schreibt man also 4 unter die Linie und behält 3 zur folgenden Operation. Fünftens sagt man, 9 mal 0 ist 0, dazu die behaltenen 3 gethan macht 3, welche Zahl also unter die Linie geschrieben wird, und hat nichts nöthig im Sinn zu behalten. Sechstens sagt man, 2 mal 9 ist 18, setzt 8 ins Product und behält 1 im Sinn. Siebentens sagt man, 7 mal 9 ist 63, und 1 dazu ist 64, setzt 4 ins Product und behält 6 im Sinn. Achtens sagt man, 5 mal 9 ist 45 und die im Sinn behaltenen 6 macht 51, welche ganze Zahl, weilen die Multiplication geendigt, ins Product geschrieben wird; und auf diese Art ist das unter der Linie stehende Product gefunden worden. Auf gleiche Weise kann man nachfolgende Exempel auch ausrechnen:

385046 2 770092	7318245 3 21954735
1234567 4 4938268	90705036 5 453525180
10407118 6 62442708	89123472 7 623864304
5214796 8 41718368	567898765 9 5111088885

Aus welchen Exemplen genugsam zu ersehen ist, wie man eine jegliche Zahl, so gross dieselbe auch immer sein mag, durch eine einfache Zahl multipliciren und das Product finden soll; und ist von der ganzen Operation der Grund ausführlich erkläret worden. Nun wollen wir also fortfahren zu untersuchen, wie die Multiplication anzustellen ist, wenn der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl oder grösser als 9 ist.

6. *Wenn eine Zahl, so gross dieselbe auch immer ist, mit 10 multipliciret werden soll, so hat man nur nöthig, zu derselben Zahl von der rechten Hand eine 0 hinzususchreiben. Soll aber eine Zahl mit 100 multipliciret werden, so hat man zwei Nullen nöthig hinzuzusetzen. Soll man mit 1000 multipliciren, so schreibt man drei Nullen hinzu; mit 10000 vier Nullen, und so fort, immer so viel Nullen als in solchen Multiplicatoren nach der 1 stehen.*

Wenn eine Zahl mit 10 multipliciret werden soll, so muss ein jeglicher Theil derselben Zahl mit 10 multipliciret werden. Multipliciret man aber die Unitäten mit 10, so kommen so viel Decaden heraus, als vorher Unitäten da waren. Die Decaden aber werden in Centenarios, die Centenarii aber in Millenarios, und so fort, verwandelt. Da nun, wann zu derselben Zahl von der rechten Hand eine 0 hinzugesetzet wird, eine jegliche Sorte in die folgende, so zehn mal grösser ist, verwandelt wird, so wird durch Hinzusatzung einer 0 die ganze Zahl 10 mal grösser. Also ist 10 mal 5783 so viel: 57 830. Gleichergestalt, wenn zu einer Zahl von der rechten Hand zwei Nullen hinzugeschrieben werden, so werden die Unitäten in Centenarios, die Decaden in Millenarios, die Centenarii in Decadesmillenariorum, und so fort, eine jegliche Sorte in eine andere, so 100 mal grösser ist, verwandelt. Weswegen durch Hinzusatzung zweier Nullen die ganze Zahl mit 100 multipliciret wird; also wenn 328 mit 100 multipliciret werden soll, so kommt 32 800 heraus. Auf gleiche Art sieht man, dass, wenn drei Nullen an eine Zahl gehänget werden, die· selbe 1000 mal grösser wird, und so weiter fort. Wenn man also sollte diese Zahl 5430 mit dieser Zahl 1000000 multipliciren, so würde das Product sein diese Zahl 5430000000. Hieraus sieht man also, wie eine jegliche Zahl multipliciret werden müsse, wenn der Multiplicator eine solche Zahl ist, welche durch ein 1 mit einer gewissen Anzahl Nullen darhinten geschrieben wird. Und dieses ist das Fundament von den Regeln der Multiplication, wenn der Multiplicator eine grosse zusammengesetzte Zahl ist, wie im folgenden weiter wird ausgeführet werden.

7. *Wenn der Multiplicator oder die Zahl, damit eine vorgegebene Zahl multipliciret werden soll, eine einfache Zahl ist mit einer gewissen daran gehängten Anzahl Nullen, als 60, 300, 4000, 70 000 und dergleichen, so findet man das gesuchte Product, wenn man erstlich die vorgegebene Zahl mit der einfachen Zahl multipliciret, und zu dem gefundenen Product so viel Nullen von der reckten Hand hinzusetzet, als in dem Multiplicatore vorhanden sind.*

Wann der Multiplicator, damit eine Zahl multiplicirt werden soll, eine solche Zahl ist, welche aus der Multiplication zweier Zahlen mit einander entsprungen, so bekommt man das wahre Product, wann man die vorgegebene Zahl erstlich mit einer dieser zweien

Zahlen multiplicirt, und dann dieses Product noch mit der anderen Zahl. Als wann ich soll 47 mit 6 multipliciren, weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, so finde ich das verlangte Product, wann ich erstlich 47 mit 2 multiplicire, da ich dann 94 bekomme, und dann diese 94 noch mit 3 multiplicire, welches gibt 282; und dieses ist die Zahl, welche herauskommt, wann 47 mit 6 multiplicirt wird. Dann weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, so ist das gesuchte Product, nämlich 6 mal 47, so viel als 2 mal 3 mal 47, oder 3 mal 2 mal 47. Um nun zu finden, was 3 mal 2 mal 47 ist, so sucht man erstlich, was 2 mal 47 ist, nämlich 94; derowegen ist 3 mal 2 mal 47 so viel als 3 mal 94, und folglich 3 mal 94 so viel als 6 mal 47. Dieses ist also der Grund dieses Satzes, welcher bei allen vorkommenden Exempeln von gleicher Kraft ist. Durch Hülfe dieses Satzes können also viel Exempel der Multiplication ausgerechnet werden, wann gleich der Multiplicator keine einfache Zahl ist. Als wann man 127 mit 63 multipliciren wollte, so kann man, da 63 so viel ist als 7 mal 9, die Zahl 127 erstlich mit 7 multipliciren, welches macht 889. Hernach multiplicire man 889 mit 9, so bekommt man 8001, welches so viel ist als 63 mal 127. Dann 8001 ist so viel als 9 mal 889, nun aber 889 ist so viel als 7 mal 127, derohalben ist 8001 so viel als 9 mal 7 mal127. Es ist aber 9 mal 7 so viel als 63, derowegen ist 8001 so viel als 63 mal 127, aus welchem Exempel die Wahrheit dieses Satzes noch mehr erhellet. Um aber auf die gegebene Regel selbst zu kommen, so ist zu merken, dass eine jegliche Zahl, welche mit einer einfachen Zahl und einer gewissen Anzahl daran gehängter Nullen geschrieben wird, herauskomme, wann man die einfache Zahl mit 1 nebst eben so viel daran gehängten Nullen multiplicirt. Derohalben wann mit einer solchen Zahl multipliciret werden soll, so multiplicire man erstlich nur mit der einfachen Zahl, und was herausgekommen, dasselbe multiplicire man ferner mit 1 nebst so viel darangehängten Nullen, welches im vorhergehenden Nr. 6 ist gewiesen worden, allwo wir gezeiget, dass, um ein solches Product zu finden, nur nöthig sei, an die Zahl, welche multipliciret werden soll, so viel Nullen hinzuzusetzen, als in solchem Multiplicatore nach dem 1 stehen. Wann derohalben der Multiplicator, wie wir setzen, eine einfache Zahl ist nebst einer gewissen Anzahl darangehängter Nullen, so multiplicire man den Multiplicandum erstlich mit der einfachen Zahl, und zum Product schreibe man zur rechten Hand so viel Nullen, als im Multiplicatore folgen nach der einfachen Zahl. Als wenn man diese Zahl 543 mit 700 multipliciren soll, so multiplicire man erstlich 543 mit 7, da man dann finden wird 3801, dazu zwei Nullen hinzugefügt geben 380100, und dieses ist das gesuchte Product, nämlich 700 mal 543. Da man nun die Multiplication mit der einfachen Zahl von der Rechten gegen der Linken verrichtet, so kann man gleich von der Rechten so viel Nullen schreiben als im Multiplicatore befindlich, und dann die Multiplication mit der einfachen Zahl verrichten. Auf diese Art wird also die Operation des vorigen Exempels sein wie folgt:

543	Multiplicandus
700	Multiplicator
380100	Productum.

Gleichergestalt wann 2758 mit 500000 multipliciret werden soll, wird die Operation also stehen:

```
      2758
    500000
1379000000
```

Diese Operation beruhet demnach darauf, dass solche Multiplicatores zwei Factores haben oder durch die Multiplication zweier Zahlen entsprungen sind. Nämlich im erstern Exempel ist der Multiplicator 700 so viel als 7 mal 100, und im letztem ist 500 000 so viel als 5 mal 100000; wie aber mit solchen Zahlen eine jegliche Zahl multipliciret werden soll, ist schon im vorhergehenden gewiesen worden.

8. *Wann der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl ist oder aus vielen Figuren bestehet, so muss der Multiplicandus mit einem jeglichen Theil, daraus der Multiplicator besteht, multiplicirt, und darauf alle diese gefundenen Producte zusammen addirt werden, da dann die Summa, welche herauskommt, das verlangte Productum sein wird.*

Wir haben oben gewiesen, dass, wann der Multiplicandus aus etlichen Theilen besteht, ein jeglicher Theil insbesondere mit dem Multiplicator müsse multiplicirt, und diese besonderen Producte zusammengesetzet werden, als deren Summe das gesuchte Product geben muss. Da nun der Multiplicandus und der Multiplicator unter sich verwechselt und einer an des anderen Stelle gesetzet werden kann, so ist eben dieses auch von dem Multiplicator zu verstehen. Derohalben, wann der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl ist oder aus mehr als einer Figur bestehet, so muss der Multiplicandus mit einem jeglichen Theil des Multiplicators multiplicirt und alle diese sonderbaren Producte zusammen addiret werden: da dann derselben Summe das gesuchte Product geben wird. Die Theile aber, daraus eine zusammengesetzte Zahl bestehet, sind die verschiedenen Sorten als Unitäten, Decades, Centenarii und so fort, von deren jeder nicht mehr als 9 Stücke vorhanden sein können. Derohalben muss der Multiplicandus erstlich mit so viel Unitäten und dann mit so viel Decaden, ingleichen mit so viel Centenariis, und so weiter, als im Multiplicatore befindlich sind, multipliciret und alle herausgebrachten Producte in eine Summe gebracht werden. Es ist aber im vorhergehenden Satze gewiesen worden, wie eine jegliche Zahl mit einer einfachen Zahl, hinter welcher etliche Nullen stehen, multiplicirt werden soll; und eben dergleichen Zahlen sind alle diese Theile, aus welchen ein zusammengesetzter Multiplicator bestehet, weswegen die Multiplication mit einem solchen zusammengesetzten, oder aus mehr Figuren bestehenden Multiplicator keine Schwierigkeit haben wird. Als wann man 4738 mit 358 multipliciren soll, so sind die Theile des Multiplicatoris erstlich 8, dann 50 und drittens 300. Derowegen multiplicire man erstlich die Zahl 4738 mit 8, welches gibt 37904. Zweitens multiplicire man die Zahl 4738 mit 50, dieses gibt 236900. Drittens multiplicire man die vorgegebene Zahl mit 300, dieses gibt 1421400. Nun diese drei Producta addire man zusammen wie folget:

```
  37904
 236900
1421400
1696204
```

so ist diese Summe das verlangte Product. Damit aber die ganze Operation desto bequemer vollzogen werden könne, so pflegt man diese besonderen Producte gleich so unter einander zu schreiben, dass die Unitäten unter die Unitäten und alle gleichen Sorten unter einander zu stehen kommen, damit man dieselben gleich zusammen addiren könne, als wie folget:

```
   4738   Multiplicandus
    358   Multiplicator
  -----
  37904
 236900
1421400
-------
1696204 Productum.
```

Man schreibt nämlich erstlich den Multiplicator unter den Multiplicandum, und zieht unter dieselben eine Linie. Hierauf multipliciret man den Multiplicandum mit der Anzahl der Unitäten, so im Multiplicatore vorhanden, nämlich mit 8, schreibt das Product unter die Linie, wie oben bei der Multiplication mit einfachen Zahlen ist gelehret worden. Ferner multiplicirt man mit den Decaden des Multiplicators als mit 50, da man dann nach der gegebenen Regel erstlich in die Stelle der Unitäten eine Null setzet, und im übrigen mit 5 multipliciret. Drittens multipliciret man mit den Centenariis oder in diesem Fall mit 300, indem man in die zwei ersten Stellen von der rechten Hand zwei Nullen setzt, und hierauf mit 3 multiplicirt. Wenn man nun die Figuren wohl unter einander schreibt, so kommen auf diese Art in den besonderen Producten alle [gleichen] Sorten unter einander zu stehen, und wird deswegen die Addition um soviel bequemer. Hat man also alle diese besonderen Producte gefunden, so wird darunter eine Linie gezogen und dieselben zusammen addirt, wodurch man das ganze verlangte Product erhält. Man kann auch um der Kürze willen die Nullen, so in den Producten der höheren Sorten gegen der rechten Hand geschrieben werden müssen, auslassen, indem dieselben bei der Addition nichts austragen, wie folget:

```
   4738
    358
  -----
  37904
 23690
14214
-------
1696204
```

Da dann zu merken, dass das Product von einer jeglichen Figur des Multiplicators von der rechten Hand auf eben der Stelle anfange, da die Figur des Multiplicators steht. Nämlich das Product von der ersten Figur gegen der rechten Hand des Multiplicators fängt an auf der ersten Stelle. Das Product von der zweiten Figur fängt an auf der zweiten Stelle, das von der dritten auf der dritten und so fort.

9. *Wenn zwei Zahlen, so gross dieselben auch immer sein mögen, mit einander multipliciret werden sollen, so schreibt man eine, welche man für den Multiplicator annimmt, auf gewöhnliche Art unter die andere, und zieht unter dieselben eine Linie. Hierauf multipliciret man den Multiplicandum mit einer jeglichen Figur des Multiplicalors insbesondere und schreibt diese Producte unter einander unter die Linie.*

Ein jedes aber von diesen Producten muss auf eben derjenigen Stelle von der rechten Hand an zu schreiben angefangen werden, auf welcher die Figur, mit welcher multipliciret wird, steht. Hat man nun auf diese Art alle Producte von allen Figuren des Multiplicalors gefunden, und auf beschriebene Art unter einander gesetzet, wird darunter nochmals eine Linie gezogen, und alle diese besonderen Producte zusammen addiret, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.

Auf diese Weise wird also die Multiplication mit den grössten Zahlen auf Multiplicationen mit einfachen Zahlen, so kleiner sind als 10, reduciret. Und hierinn bestehet hauptsächlich der Vortheil, den die arithmetischen Operationen haben, dass darinn gewiesen wird, wie man Operationen, welche mit den grössten Zahlen sollen verrichtet werden, auf kleine Zahlen bringen könne, mit welchen ein jeder, der auch nicht rechnen gelernet hat, leicht umgehen kann. Also ist es zur Multiplication genug, wenn man nur die einfachen Zahlen mit einander zu multipliciren weisst. Dieses haben wir schon im vorhergehenden genugsam ausgeführet, aus welchem auch der Grund der ganzen Operation, wie wir dieselbe hier beschrieben, deutlich erhellet. Um aber in dieser Operation eine Fertigkeit zu erlangen, so ist das Fürnehmste, dass man sich angewöhne, die Zahlen recht ordentlich zu schreiben, so dass alle, welche zu einer Sorte gehören, schnurgerad in einer Reihe unter einander geschrieben werden, damit man die besonderen Sorten deutlich von einander unterscheiden könne, und keine Konfusion entstehe. Von den zweien vorgegebenen Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, ist es nun gleichgültig, welche man für den Multiplicatorem annehmen und unter die andere schreiben will; es ist aber doch bequemer, die kleinere Zahl, welche aus weniger Figuren besteht, unter die andere zu schreiben, weilen man auf diese Art weniger sonderbare Producte bekommt, so zusammen addiret werden müssen. Man bekommt aber allezeit so viel besondere Producte, und folglich so viel Zahlen zusammen zu addiren, als die Anzahl der Figuren ist, aus welchen der Multiplicator bestehet: ausgenommen, wenn eine oder mehr Figuren desselben Nullen oder nichts sind; wovon wir nachgehends einige Erinnerungen geben werden. Nun wollen wir durch einige Exempel die obbeschriebene Operation erläutern. Als es soll diese Zahl 835047 mit dieser Zahl 67894 multipliciret werden, so schreibt man dieselben wie folget:

$$\begin{array}{rl}
835047 & \text{Multiplicandus} \\
\underline{67894} & \text{Multiplicator} \\
3340188 & \text{Product von 4} \\
7515423 & \text{Product von 9} \\
6680376 & \text{Product von 8} \\
5845329 & \text{Product von 7} \\
\underline{5010282} & \text{Product von 6} \\
56694681018 & \text{Productum.}
\end{array}$$

In diesem Exempel multipliciret man nun erstlich den Multiplicandum mit 4 als der ersten Figur des Multiplicators und schreibt das Product so unter die Linie, dass die erste Figur, nämlich 8, unter das 4 zu stehen komme. Zweitens multipliciret man den Multiplicandum mit der zweiten Figur des Multiplicators, und fängt in Schreibung dieses Products von der zweiten Stelle, nämlich unter dem 9, zu schreiben an Gleichergestalt fangt das Product vom 8 auf der dritten Stelle, nämlich unter dem 8 an, und so fort, wie aus dem Exempel selbst zu ersehen. Endlich addiret man alle diese Producte zusammen, da dann die Summe das gesuchte ganze Product gibt.

Auf gleiche Weise sind auch folgende Exempel ausgerechnet worden:

```
    23578  |   829357
       13  |       38
    70734  |  6634856
   23578   | 2488071
   306514  | 31515566
-----------+-----------
   156274  |   734862
      295  |      567
   781370  |  5144034
 1406466   |  4409172
 312548    | 3674310
 46100830  | 416666754
```

```
          987654321
          123456789
         8888888889
        7901234568
       6913580247
      5925925926
     4938271605
    3950617284
   2962962963
  1975308642
 987654321
 121932631112635269
```

Wann aber in dem Multiplicator irgend eine Figur nichts oder eine Null ist, so würde das ganze Product, so daher entspringt, aus lauter Nullen bestehen und folglich auch nichts sein, dieweil eine jede Zahl mit 0 multipliciret nichts ausmacht. Wann derowegen dieses geschieht, so lässt man der Kürze halber das ganze Product aus, und schreitet gleich zu der Multiplication mit den folgenden Figuren des Multiplicators fort. Da man aber wohl beobachten muss, dass man nichtsdestoweniger ein jegliches Product unter der Zahl des Multiplicators, aus welcher dasselbe entstanden, zu schreiben anfange, als aus folgenden Exempeln zu ersehen:

58346	9348
201	3007
58346	65436
116692	28044
11727546	28109436

24680135
10203005
123400675
74040405
49360270
24680135
251811540805675

Wann aber entweder im Multiplicando oder im Multiplicatore oder in beiden sich zu Ende bei der rechten Hand Nullen befinden, so dienet in solchen Fällen folgende Regel, dadurch man der überflüssigen Nullen überhoben sein kann.

10. *Wann in dem Multiplicatore oder Multiplicando oder in beiden die letzten Figuren nach der rechten Hand Nullen sind, so pflegt man alle diese zu Ende stehenden Nullen abzuschneiden und die Multiplication mit den übrigen Zahlen zu vollziehen. Zu dem auf diese Art gefundenen Product aber müssen nach der rechten Hand so viel Nullen hinzugesetzet werden, als von Anfang sind weggeworfen worden.*

Wann der Multiplicator eine einfache Zahl mit etlichen angehängten Nullen ist, so multipliciret man nur mit der einfachen Zahl, setzt aber zum gefundenen Product so viel Nullen dazu, als hinter der einfachen Zahl im Multiplicator gestanden. Davon haben wir schon oben Nr.7 den Grund angezeiget, welcher so beschaffen, dass daraus auch die Wahrheit dieses Satzes dargethan werden kann. Es besteht nämlich das Fundament davon hierinn, dass, wenn ein Multiplicator ein Factum ist von zwei Factoribus oder aus der Multiplication zweier Zahlen mit einander entsprungen, man das wahre Product erhalte, wenn man den Multiplicandum erstlich mit einem Factore des Multiplicators multiplicire, und was herausgekommen, nochmals mit dem andern Factore multiplicire. Ich nenne allhier aber Factores, wie schon oben erinnert worden, die beiden Zahlen, welche, mit einander multipliciret, eine Zahl hervorgebracht haben.

Nun aber ist eine jede Zahl, an welche von der Rechten Nullen gehängt sind, ein Factum oder Product aus derselbigen Zahl und 1 mit so viel darhinter stehenden Nullen. Als 230 ist das Product von 23 und 10, oder diese beiden Zahlen sind die Factores von 230. Gleichergestalt ist 478 000 so viel als 4 78 mal 1000 oder das Product von diesen Zahlen. Wann man derohalben eine vorgegebene Zahl mit 478000 multipliciren soll, so multiplicire man dieselbe erstlich nur mit 478, und was herauskommt noch mit 1000, welches geschieht, wann man von der rechten Hand drei Nullen dazu setzt. Wann sich demnach im Multiplicatore von der rechten Hand Nullen befinden, so kann man erstlich nur die Nullen weglassen, und nur mit der übrigen Zahl multipliciren; zum gefundenen Product aber muss man so viel Nullen von der rechten Hand hinzuschreiben, als man im Multiplicatore weggelassen hat. Als wann man soll 5339 mit 24600 multipliciren, so multipliciret man nur mit 246, welche man also unter die Zahl 5339 schreibt. Damit man aber die Nullen nicht vergesse, kann man dieselben gleichwohl zum Multiplicatore hinzusetzen; bei der Multiplication aber hat man auf dieselben nicht zu sehen, sondern schreibt dieselben nur zum gefundenen Product, wie aus beistehender Operation zu sehen:

```
     5339
      24600
    -------
    32034
   21356
  10678
  ---------
  131339400
```

Eine gleiche Beschaffenheit hat es, wann im Multiplicando von der rechten Hand eine oder etliche Nullen stehen; weilen der Multiplicandus mit dem Multiplicator verwechselt, und an desselben Stelle gesetzt werden kann. Als wann man soll 1345000 mit 48 multipliciren, so multiplicire man erstlich 48 mit 1345, und was herauskommt noch mit 1000. Weil es aber gleichviel ist, ob man 48 mit 1345 oder 1345 mit 48 multipliciret, so multipliciret man der Kürze halber 1345 mit 48 und zum gefundenen Product schreibt man die drei Nullen. Man kann auch der Deutlichkeit halber die Nullen gegen der rechten Hand vorschiessend zum Multipticando setzen, damit man nach geendigter Operation gleich sehe, wieviel Nullen man zum Product zu setzen habe, wie aus folgender Operation zu sehen:

```
1345000
   48
-------
10760
5380
--------
64560000
```

da die drei Nullen zwar bei dem Multiplicando stehen, aber erst nach geendigter Multiplication an das Product gehänget werden. Wann nun sowohl der Multiplicandus als Multiplicator sich mit Nullen endigen, so kann die Operation aus diesen beiden Fällen angestellet werden. Als wann man 1987 000 mit 3700 multipliciren sollte, so multiplicire man erstlich 1987 000 mit 37, und zum Product schreibe man zwei Nullen. Um aber 1987 000 mit 37 zu multipliciren, so multiplicirt man nach der gegebenen Regel 1987 mit 37 und an das Product hängt man drei Nullen. Derowegen, um die beiden vorgegebenen Zahlen mit einander zu multipliciren, so multiplicirt man nur, nachdem man die Nullen beiderseits zu Ende weggeworfen, 1987 mit 37 und schreibt zum gefundenen Product fünf Nullen, nämlich so viel als man weggeworfen. Die Nullen kann man zwar sowohl bei dem Multiplicando als Multiplicatore stehen lassen, ob man gleich auf dieselben nicht sieht, bis die Multiplication geendigt, damit man gleich sehe, wieviel Nullen man an das gefundene Product anzuhängen habe, als aus der Operation dieses Exempels zu sehen:

```
   1987000
      3700
  --------
 13909
 5961
 ----------
 7351900000
```

Also wann diese Zahl 54032000 mit dieser 2540000 multipliciret werden soll, so findet man das Product auf folgende Art:

```
     54032000
        2540000
  --------------
   216128
  270160
 108064
 ---------------
 137241280000000
```

Wir beschliessen also dieses Capitel mit einigen Exempeln, damit man den Gebrauch der Multiplication in vielerlei vorfallenden Fällen sehen könne.

Exempel der Multiplication

I. Ein grosser Zirkul, so man sich um die Erdkugel herumgezogen vorstellt, pflegt in 360 Grad getheilt zu werden. Man hat aber gefunden, dass 105 Werste einen solchen Grad ausmachen. Derowegen ist die Frage, wieviel Werste der Umkreis der Erde gross sei?

Antw.: Weilen ein Grad 105 Werste hält, der Umkreis der Erde aber 360 Grade, so ist klar, dass der ganze Umkreis der Erde 105 mal 360 Werste enthalte. Diese verlangte Anzahl der Werste wird also durch die Multiplication gefunden, indem man 105 mit 360 multiplicirt; wodurch man also findet 37 800 Werste.

II. Ein gemeines Jahr von 365 Tagen, wieviel hält dasselbe Stunden?

Antw.: Da ein Tag 24 Stunden hält, so machen 24 mal 365 Stunden ein Jahr. Weswegen die verlangte Anzahl Stunden durch die Multiplication gefunden wird, indem man 365 mit 24 multipliciret. Dadurch findet man also 8760 Stunden.

III. Ein Kriegsheer stehet in einer ablangen gevierten Ordnung, da stehen der Länge nach 156 Mann, nach der Breite aber 97 Mann. Nun ist die Frage, aus wieviel Mann das ganze Kriegsheer bestehe?

Antw.: Da in der Breite 97 Mann stehen, so sind der Länge nach 97 Reihen, in deren jeder 156 Mann stehen. Derohalben besteht das ganze Heer aus 97 mal 156 Mann, welches multiplicirt macht 15132 Mann.