CHAPTER 8

ON MULTIPLICATION WITH FRACTIONAL NUMBERS

1. *If a fraction shall be multiplied by a whole number, thus we multiply only the numerator by the given number and leave the denominator unchanged. Likewise, if a whole number together with a fraction may be multiplied by a whole number, thus we multiply the whole number and also the fraction in particular; since then both these products together amount to the product sought. But by the fractions found we can see as well, if the same holds more than a whole number, or also, if the same can be made smaller, as in which cases it is expedient, to express the fraction in the simplest form.*

The basis for this proposition follows from the nature of multiplication, as which is nothing other than an addition of many numbers which thus are equal to each other, as has been demonstrated above in the multiplication by whole numbers. Thus if a fraction shall be multiplied by 2, thus we may set the same fraction down twice and add both fractions together, which, as long as both have the same denominator as well as the same numerator, thus the sum or the product to be a fraction, of which the numerator is twice as great as the numerator of the given fraction, but the denominator is equal to the denominator of the given fractions. Therefore if a fraction shall be multiplied by 2, so we must only multiply the numerator by 2. Thus the product of 2 and $\frac{1}{3}$ or twice $\frac{1}{3}$ will be $\frac{2}{3}$, and 2 times $\frac{4}{7}$ will give $\frac{8}{7}$ or $1\frac{1}{7}$. Similarly, if a fraction shall be multiplied by 3 or 4 or some other number, thus this multiplication comes out, if we put in place the given fraction three or four times or as many times as the multiplier indicates, and these fractions may be added together. Now while these fractions are fully equal to each other, thus we add only the numerators, that is, we multiply the numerators of the given numbers by 3, 4 or some other number so given. Now from this it is apparent, that, if a fraction with a given number shall be multiplied, the product is found, if we multiply only the numerators by the given number, but the denominator is left unchanged. Thus will 3 times $\frac{1}{2}$ make $\frac{3}{2}$, that is $1\frac{1}{2}$; and 4 times $\frac{3}{14}$ will give $\frac{12}{14}$, that is $\frac{6}{7}$; and 15 by $\frac{2}{5}$ gives $\frac{30}{5}$; that is 6 whole. Thus in order that a fraction be multiplied by a given number, we have this rule: we multiply the numerator of the fraction by the given number, and under the product as the numerator we write the denominator of the given fraction, so that we have the sought product.

The following example provides further clarification.

21 times $\frac{5}{28}$ makes $\frac{105}{28}$, that is $3\frac{3}{4}$

144 times $\frac{19}{60}$ makes $\frac{2736}{60}$, that is $45\frac{3}{5}$

250 times $\frac{27}{50}$ makes $\frac{6750}{50}$, that is 135.

But if only this same rule applied here, about multiplying a fraction by a given whole number, thus the same would still be general and contain at the same time the multiplication of a fraction by a fraction, thus we could equally multiply only the numerator of a fraction by another fraction, in order to become the numerator of the product sought, the denominator of which remains the previous denominator. But while commonly in this manner commonly the numerator of the mentioned fraction itself is a fraction, thus we cannot be content with such a product; as if $\frac{2}{3}$ were to be multiplied by $\frac{4}{7}$, this rule for the product still arises for the product, of which the numerator 2 times $\frac{4}{7}$, that is $\frac{8}{7}$, and the denominator is 3, but from which we still have no clear understanding of this product being made. But we show more clearly in the following from just the same foundation, how in such multiplications the product can be expressed through a proper fraction, of which the numerator and denominator are whole numbers. But up to this point we have applied this given rule only to such cases, that a fraction shall be multiplied by a whole number, as in which multiplications this rule has involved little difficulty. While now with the help of this rule we can multiply any fraction by a whole number, so also can a number thus be assembled easily from a whole and a fractional number. Since then in such cases the multiplier is a whole number, but the multiplicand is composed from two parts, of which one likewise is whole, but the other is a fractional number, thus the product will be found, if we multiply each part of the multiplicand in particular with the multiplier and the products to be added together. As if $3\frac{2}{5}$ were multiplied by 2, thus we find $6\frac{4}{5}$; then 2 times $\frac{2}{5}$ makes $\frac{4}{5}$, and 2 times 3 makes 6. Likewise $7\frac{4}{9}$ multiplied by 6 gives $42\frac{24}{9}$, that is $44\frac{2}{3}$; then 6 times $\frac{4}{9}$ gives $\frac{24}{9}$, that is $2\frac{2}{3}$, and 6 times 7 is 42, to which the above 2 put back amounts to 44. But we can even calculate such an example, though with greater difficulty, from the above way also, if we bring a single fraction together from a whole and a fractional number. As so that $3\frac{2}{5}$ to be multiplied by 2, we can write $\frac{17}{5}$ for $3\frac{2}{5}$, which multiplied by 2 gives $\frac{34}{5}$, that is the given $6\frac{4}{5}$, as to be found before. Likewise for the other example $7\frac{4}{9}$ can be changed into $\frac{67}{9}$, which multiplied by 6 becomes $\frac{402}{9}$, that is $44\frac{6}{9}$ or the given $44\frac{2}{3}$, as above. This last method can thus serve as a proof, that shows the correctness of the above calculations.

2. *If a fraction may be multiplied by a whole number which has the same denominator, thus the product will be a whole number, which is the same as the numerator of the fraction. Or if a fraction may be multiplied by its denominator, thus the product which arises is the numerator of the same. But if the whole number, by which a fraction is multiplied, shall be twice as great as the denominator, thus also the product is twice as large as the numerator; and as many times as the same number, by which a fraction is*

multiplied, is greater than the denominator of the fraction, the product also will be just as many times greater than the numerator of the same fraction.

Thus if this fraction $\frac{3}{5}$ is multiplied by 5, that is by its denominator, thus according to this rule the product must be equal to 3, that is the numerator of the given fraction. But this product follows from the above rule, according to which we have learned how to multiply a fraction by a whole number ; then if $\frac{3}{5}$ is multiplied by 5, thus the product is $\frac{15}{5}$, that is the whole number 3. Now from here the reasoning of this rule just given is clear ; then let us multiply any fraction by its denominator according to the given rule, thus the product will be a fraction, of which the numerator is the previous numerator multiplied by the denominator, but the denominator is the previous denominator. In these fractions thus let the numerator be divided by the denominator, and the quotient, which expresses the value of the fraction, will be the numerator of the given fraction. From this it is now clear, that if a fraction may be multiplied by its own denominator, the numerator of the same will indicate the product. If now equally in such cases these same products also will be found from the above rule, so must still thereby a multiplication and a division be used, both of which operations according to this rule are not to be necessary , in that we may only write down the whole numerator for this product. Thus, if this fraction $\frac{17}{28}$ were multiplied by 28, then the product is 17; and $\frac{121}{125}$ multiplied by 125 gives 121. But this rule will serve us chiefly in the following in that we know, what kind of number we must multiply a fraction by in order that the product becomes a whole number. Namely we see from this, that we must multiply a fraction by its denominator, from which the product becomes equal to the numerator of the same fraction. But also there is given the denominator of a fraction how still infinitely many times other numbers, by which, if the same fraction will be multiplied, whole numbers will be found. Then since that product will be equal to the numerator, if the multiplier is the denominator, thus also to be known from the nature of multiplication that, if the multiplier were taken two or three or more time greater than the above, namely the denominator, as then also the product must be just as many times as great, namely as the numerator of the same fraction. Therefore it is clear, that just as many times this number, by which a fraction must be multiplied, is greater than the denominator, as then the product will be just as many times greater than the numerator of the same fraction. Thus if $\frac{7}{12}$ were multiplied by 24 , thus the product is 14; then while here 24 is twice as great as the denominator 12, so must the product, 14, be twice as great as the numerator 7. Likewise, if $\frac{2}{3}$ should be multiplied by 18 , thus we see, that the multiplier 18 is six times greater than the denominator 3; therefore the product will be also six times greater than the numerator 2, and finally to be 12. But if this brings forth endlessly many numbers, which multiplied by a fraction therefore produce whole numbers, yet thus it will be most advantageous, only all the denominators themselves to be used, because in this way the smallest whole number product arises, and will be found without any operation.

3. *If two or more fractions shall be multiplied by each other, so will the product be found in the following form: we multiply the numerators by each other, and what arises from this is the numerator of the product; likewise we also multiply the denominator by each other, and what arises from this is the denominator of the sought product. The product of three or more fractions thus will be a fraction, of which the numerator is the product of the numerators, while the denominator is the product of the denominators.*

According to this rule, thus it is very easy to multiply two or more fractions together, in that this operation consists merely in the multiplication of the numerators and denominators of the given fractions; thus the multiplication of fractions falls far easier than addition and subtraction, as which is required, the fractions formerly to be brought to equal denominators, which for multiplication is not necessary. But the reasoning behind this rule is based on the two previous propositions. Then according to the first a fraction is multiplied by any number, if we multiply only the numerator by the same, but leave the denominator unchanged. But if this same rule is only to be used for the multiplication of fractions by whole numbers, thus the same also is valid from that, if fractions are to be multiplied by fractions, as we have already observed above. But if we still according to this rule multiply the numerator of one fraction by another fraction, But if according to this rule we multiply the numerator of a fraction with another fraction, in order to become the numerator of this product, thus we all into this difficulty, that the numerator of the common product will be a fractional number, and consequently from the value of such products no thorough understanding can be formed. Thus if we should multiply $\frac{7}{12}$ by $\frac{5}{9}$, thus we must still according to this rule multiply the number 7 by the fraction $\frac{5}{9}$, in order that the numerator of the product to be become, which thus will be $\frac{35}{9}$, but the denominator of this product remains 12. Thus the product in this example is a fraction, of which the numerator is $\frac{35}{9}$ and the denominator is 12. But while we until now have not made any mention any other fractions, as of which both the numerator and denominator are whole numbers, thus we must see, if we cannot change such an improper fraction into another, of which the numerator and denominator are whole numbers. But this can be carried out with the aid of the following propositions ; then since a fraction remains unchanged according to its value, if we multiply both the numerator and denominator by some arbitrary number, thus here we must search for such a number, by which, if the numerator and denominator are multiplied, whole numbers arise. Thus if the numerator of the fraction itself is a fractional number, thus we may only multiply both by the denominator of this fractional number. As in the given example the product was a fraction, of which the numerator is $\frac{35}{9}$ and the denominator 12 ; now in order to bring this fraction into a customary form, thus we multiply both the numerator and the denominator by 9; now from this another fraction appears, of which the numerator will be 35 and the denominator will be 108 and which is completely equal to the above. If therefore we wish to multiply $\frac{7}{12}$ by $\frac{5}{9}$, thus the product will be $\frac{35}{108}$, which conforms pretty well with the rule given ; then here 35 is the product of the numerators 7 and 5, and 108 the product of the denominators 12 and 9; from which the foundations of the given rule is already apparent to some extent. But in order to indicate the reasoning fully, thus let us consider two fractions, the first of which is to be multiplied by the second ; now this happens, if we multiply the numerator of the first by the other fraction, but the denominator is left unchanged. Thus the product is a fraction, of which the denominator is equal to the denominator of the first fraction, but the numerator will be a fraction itself, of which the denominator is equal to the denominator of the other given fraction, but the numerator is the product of both the numerators. Thus if this product is brought into the corresponding form, and namely thus the numerator will be multiplied by the denominator of the other fraction, thus the product will be changed into an ordinary fraction, of which the numerator is the product of the numerators, but the denominator is the product of the denominators. This is thus just the rule, which we have indicated in the proposition, in order that two fractions multiply each other; from which now also we have understood the fundamentals thoroughly enough. But for even more understanding it will be necessary, to extend the multiplication with fractions on and among themselves more generally, which is done most suitably by several examples. If a whole number or a fraction were to be multiplied by $\frac{1}{2}$, thus were nothing else sought, so that we must find either half the same number or of the fraction. Then as equally twice or three times of number can be found if the same be multiplied by two or three, thus half of a number finds no other than the same number multiplied by $\frac{1}{2}$. Hence if it is necessary to find the half of $\frac{3}{5}$, thus we must multiply $\frac{3}{5}$ by $\frac{1}{2}$, since then following the given rule $\frac{3}{10}$ arises. Likewise, if we want to know, what $\frac{2}{3}$ of $\frac{9}{10}$ delivers, thus we must multiply these numbers by each other, since then arises $\frac{18}{30}$, that is $\frac{3}{5}$. Several more similar examples follow.

$$\frac{3}{4} \text{ by } \frac{5}{6} \text{ gives } \frac{15}{24}, \text{ that is } \frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{3} \text{ by } \frac{15}{16} \text{ gives } \frac{15}{48}, \text{ that is } \frac{5}{16}$$
$$\frac{7}{12} \text{ by } \frac{12}{7} \text{ gives } \frac{84}{84}, \text{ that is } 1.$$

From this it is apparent, that if we multiply by a fraction, the product will be smaller than the number, which was to be multiplied, which rather appears to extend the nature of multiplication, while the name to multiply indicates still more. This name has been taken from the multiplication of whole numbers alone, and is retained here in the case of fractions, only with regard to the operation. The whole matter is in order as long as we multiply one number by another, thus the same number accordingly is so many times greater, as many times as this number is greater than one ; and if a number is multiplied by 1, so remains the same unchanged. From which likewise it follows, that if a number is multiplied by another number, that is smaller than 1, similarly the fractions are not increased but actually diminished. But this is only for all fractions to be put in place, which are smaller than whole numbers; then if a number is multiplied by a whole number, that is greater than 1, thus the product also will be greater than the same number ; as if we multiply 7 by $\frac{3}{2}$, thus there arises from this $\frac{21}{2}$, that is $10\frac{1}{2}$, and thus greater than 7. Further it is to be observer here also, as by multiplication with whole numbers, that, if two fractions are to be multiplied by each other, it may be seen likewise, whichever is to be multiplied by the other. Thus $\frac{2}{3}$ multplied by $\frac{3}{5}$ is just the same as $\frac{3}{5}$ multplied by $\frac{2}{3}$, then in both cases the product $\frac{6}{15}$ or $\frac{2}{5}$ emerges; according to that $\frac{2}{3}$ of $\frac{3}{5}$ is just the same as $\frac{3}{5}$ of $\frac{2}{3}$. And likewise the half of 6 is just the same as 6 time $\frac{1}{2}$, that is 3.

But from this operation, by which we have been taught how to multiply two fractions together, 3 or more fractions can easily be multiplied by each other. Then initially we multiply two fractions by one another, and then further this product by a third fraction, and what arises with the fourth fraction, and so on further, until we have multiplied by all the given fractions. But from this we see readily, that the last product found arises, when we have multiplied all the numerators by one another, and then all the denominators. Thus if these fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ and $\frac{4}{5}$ were multiplied by each other, thus the product will be $\frac{24}{120}$, of which the numerator 24 of the fraction is the product of all the numerators, but the denominator 120 is the product of all the denominators. This product $\frac{24}{120}$, or which $\frac{1}{5}$ is the same amount, is also found, if we multiply only the two fractions by one another; as $\frac{1}{2}$ multiplied by $\frac{2}{3}$ gives $\frac{2}{6}$, that is $\frac{1}{3}$; further this product $\frac{1}{3}$ multiplied by $\frac{3}{4}$ gives $\frac{3}{12}$, that is $\frac{1}{4}$; and again the product multiplied by $\frac{4}{5}$ gives $\frac{4}{20}$, that is $\frac{1}{5}$ as before ; so that thus $\frac{1}{5}$ is the product, if we multiply all these fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ and $\frac{4}{5}$ by one another.

From this we can now answer the following question: there are four people, the first has 560 rubles, the second had $\frac{3}{4}$ times as much as the first, the third has $\frac{2}{5}$ times as much as the second, and the fourth fortune is $\frac{5}{7}$ of that, which the last three people have.

While the second has $\frac{3}{4}$ times as much as the first, of which the amount is 560 rubles, thus the amount of the second is found, if we multiply 560 by $\frac{3}{4}$, since then $\frac{1680}{4}$ or 420 arises. Thus the second person has 420 rubles; if we now multiply the monetary sum by $\frac{2}{5}$, thus the product is given $\frac{840}{5}$, or 168 rubles the fortune of the third person. This further multiplied by $\frac{5}{7}$ gives $\frac{840}{7}$ or 120 rubles for the sum of the fourth person. But if we only wanted to know the amount the fourth person had, thus would the same be found from this, that the same is $\frac{5}{7}$ of $\frac{2}{5}$ of $\frac{3}{4}$ of 560 rubles. Therefore, in order to find this, we must multiply the fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ by one another and yet by the product 560. But now the given fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ by one another is $\frac{30}{140}$, that is $\frac{3}{14}$, which product multiplied by 560 gives $\frac{1680}{14}$, that is 120 rubles, as above.

Now from this example it is apparent, that often according to the given rule a product will found, that afterwards can be expressed either by a whole number, or by a simpler fraction. This happens namely, if the numerator and denominator found for the product can itself be divided by other numbers. Now in such cases we come unnecessarily, according to the given rule, to large numbers and have still the difficulty afterwards, to shorten the fraction found and bring it into smaller numbers. Therefore, in order to find a solution for these excessively large numbers, thus we will give in the following theorem a rule, with the help of which we can at once express the product in the smallest numbers arising and afterwards has no further need of reduction, if we should only multiply the above numbers by one another, and the smallest numbers produced.

4. *On that account, if two or more fractions are to be multiplied by one another, so that we obtain at once the product sought expressed in the smallest possible numbers, thus we must see if any one numerator has a common divider with a denominator, since then both are to be divided by their greatest common divisor, and the quotient to be put in their place. We proceed in this way with each numerator and denominator, and if we have cancelled all as far as possible against each other, thus we multiply the numerators and denominators by each other according to the above rule, or rather the numbers, which according to the cancellations performed are to be put in the same place, and thus obtain in this manner the product sought, expressed in the smallest possible numbers.*

While according to the above rule two or more fractions can be multiplied by each other, if initially we multiply all the numerators and then all the denominators by each other, thus each numerator is a factor or divisor of the numerator of the product, and likewise each denominator is a factor or divisor of the product of the denominators. Therefore if any one numerator has a common divisor with any one denominator, therefore the numerator and denominator also of the products themselves divide by the same common divisor and consequently can be brought into smaller numbers. Therefore if before multiplication, we divide the same numerator and denominator by any common factor and the quotient put in the same place, thus it is just as much as if, after doing the multiplication the numerator and denominator of the product are divided by the same common divisor. Thus by one such cancellation, since a numerator and denominator are divided by a common devisor, we obtain the product at once expressed in smaller numbers and then have the same with no more reduction necessary. From which it is apparent that, if before the multiplication every numerator be considered against every denominator and the same cancelling each other by their greatest common divisor, as then the product will be found expressed in the smallest possible numbers. Now if two or more fractions given are to be multiplied by each other, we see before all else, if we find a numerator and a denominator, which have a common divider, and the same divided by its greatest common divider and the quotient put in the same place. Herewith we see further, whether there are no more suchlike numerators and denominators still at hand, and preceding with the same in the same manner. Finally if no more numerators and denominators can be cancelled, thus we proceed to the multiplication, since then instead of the crossed out numerators and denominators, the numbers found in the same place are to be multiplied.

But this advantage, by which we can make use of in the multiplication of fractions, can best be demonstrated by example. Let us thus multiply $\frac{5}{9}$ by $\frac{3}{20}$; now here we see, that the numerator 5 lets itself be cancelled against the denominator 20 by 5, since then 1 instead of 5, and 4 instead of 20 comes out. Further let 3 and 9 be diminished by 3, and 3 instead of 9 arises, and 1 instead of 3. This cancellation will now be verified in the following way :

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \text{ by } \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} \text{ gives } \frac{1}{12}.$$

Consequently, as the rule requires, the numerator and denominator, or rather the numbers put in the same place, multiplied by each other, and in this example for that product found to be $\frac{1}{12}$. Just as this product would arise in the following way :

$$\frac{5}{9} \text{ by } \frac{3}{20} \text{ gives } \frac{15}{180} \text{ that is } \frac{1}{12}.$$

But while here the product is to be found in large numbers, namely $\frac{15}{180}$, and from the same the greatest common divisor still must be sought, before we could have come to $\frac{1}{12}$, so the operation shown here is far more advantageous. Further let us multiply the following fractions $\frac{15}{28}$ and $\frac{21}{25}$ with the help of this advantage, hence the operation will be put in place:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{28}}} \text{ by } \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \text{ gives } \frac{9}{20}.$$

Namely 15 and 25 cancel each other by 5, and 21 and 28 cancel each other by 7; since then the same product $\frac{9}{20}$ will be found expressed in the smallest numbers. Further if this fraction $\frac{9}{16}$ shall be multiplied by $\frac{16}{9}$, thus the product 1 is found, as follows :

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{16}}} \text{ by } \frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} \text{ gives } \frac{1}{1}, \text{ that is } 1.$$

From this example it is clear, that if in the given fractions each numerator is equal to the denominator of the other, the product becomes 1. Thus $\frac{2}{3}$ multplied by $\frac{3}{2}$ gives 1, and

$\frac{5}{6}$ multplied by $\frac{6}{5}$ also gives 1, and so on. Should a whole number be multiplied by a fraction, thus the shown advantage similarly finds a place, in that the whole number can be taken as a numerator, of which the denominator is 1; the same as we have noted already above, that for the example $\frac{6}{1}$ can be written for 6 . Therefore if a fraction shall be multiplied by a whole number, thus the whole number in the manner mentioned can be put in the form of a fraction, of which the denominator is 1, and the cancellation can be applied as before. Thus if 15 shall be multiplied by $\frac{4}{9}$, this product will be $\frac{20}{3}$ or $6\frac{2}{3}$ to be found in the following manner :

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{1} \text{ by } \frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}} \text{ gives } \frac{20}{3}\text{, that is } 6\tfrac{2}{3}.$$

Moreover if more than two fractions should be multiplied together, thus this advantage likewise can be applied, as to be seen in the following examples:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}} \text{ by } \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \text{ by } \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{10}}}{21} \text{ gives } \frac{1}{21}.$$

Further

$$\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{35}}} \text{ by } \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{55}}} \text{ by } \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{77}}} \text{ by } \frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{35}{\cancel{105}}} \text{ gives } \frac{12}{1225}.$$

In a like manner:

$$\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \text{ by } \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{11}}}{\cancel{88}}} \text{ by } \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} \text{ gives } \frac{1}{7}.$$

And thus will be the case proceeding in all suchlike examples.

5. *If the numbers, which shall be multiplied together shall not be single fractions, but are composed of whole and fractions taken together, thus we can further bring the same into the form of fractions, as it has been taught above, and as then the multiplication as above can be performed. Or we can also without this reduction multiply any one part of a number by its equal part of the other number, and add all these products together, since then the sum will be the product sought.*

Numbers are to be multiplied by each other in both these ways, these come to be completely equivalent to each other; but they are very different from each other according to the operation and the advantage. Then often we are served with greater advantage by the first, but often by the other, so that often we use the former to greater advantage, but often with the latter, so that neither deserves to be preferred before the other; therefore it is thus necessary to practice both. But in which cases it is more convenient, for one or the other to be used, will be evident from the further usage of each. The first method now to be composed as follows, that we bring together the numbers in the form of individual fractions from the whole numbers and fractions together, and to perform the multiplication together with the advantages, as described in the previous proposition.

But we have shown already in the sixth chapter, that from a whole number and a fraction taken together may be brought into the form of a single fraction, if we multiply the whole number by the denominator of the fraction, and the numerator to be added to the product, as which sum will be the numerator of a single fraction, of which the denominator is equal to the above denominator. By means of this reduction thus the multiplication of such composite numbers be had according to this method without further difficulty, on which account it only remains still, to enlighten the same through an example. Thus if $1\frac{1}{3}$ shall be multiplied by $2\frac{1}{2}$, thus putting $\frac{4}{3}$ in place of $1\frac{1}{3}$, and $\frac{5}{2}$ in place of $2\frac{1}{2}$, and the multiplication, as shown above, to be performed in the following manner:

$$2\tfrac{1}{3} \text{ by } 2\tfrac{1}{2} \text{ or } \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \text{ by } \frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}} \text{ gives } \frac{10}{3}\text{, that is } 3\tfrac{1}{3}.$$

Likewise $3\frac{3}{4}$ to be multiplied by $5\frac{1}{3}$:

$$3\tfrac{3}{4} \text{ by } 5\tfrac{1}{3} \text{ or } \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \text{ by } \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ gives } \frac{20}{1}\text{, that is } 20.$$

If a single fraction shall be multiplied by a compound number, thus it is done in the same manner, in that we need only change the compound number into a single fraction. As if $5\frac{7}{12}$ were to be multiplied by $\frac{21}{25}$, so will $\frac{67}{12}$ be written for $5\frac{7}{12}$, and multiplied as follows:

$$5\tfrac{7}{12} \text{ by } \frac{21}{25} \text{ or } \frac{67}{\underset{4}{\cancel{12}}} \text{ by } \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{25} \text{ gives } \frac{469}{100}\text{, that is } 4\tfrac{69}{100}.$$

If more than 2 compound numbers should be multiplied by each other, thus the operation is done after the reduction to single fractions has been completed, as has been shown in the above proposition. As if $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{5}$ were to be multiplied by each other, thus will the product be found as follows:

$$2\tfrac{1}{2} \text{ by } 3\tfrac{1}{3} \text{ by } 5\tfrac{2}{5} \text{ or } \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \text{ by } \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ by } \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \text{ gives } 45.$$

This method, by which whole and fractional numbers are taken together to be multiplied by each other, in particular has a place, if the whole numbers are not too large, so that the reduction to single fractions can be done easily. But if the whole numbers are very large, thus it is convenient, for the multiplication to be handled by the other way, in which it is not necessary to change the composite numbers in each fraction. Namely by this method we handle the numbers, which are to be multiplied by each other, as composite numbers, and multiply any one part by the single parts of the other; since then all these products added together give the product required. Thus, if a whole number next to a fraction shall be multiplied by a whole number as well as multiplied by a fraction, thus in the first place the whole numbers are multiplied by each other, then each whole number by the fraction of the other, and finally also the fractions by each other, which 4 products to be added together. As if $7\frac{1}{2}$ may be multiplied by $12\frac{2}{3}$, thus initially we multiply 7 by 12, that gives 84; then we multiply 7 by $\frac{2}{3}$, that gives $\frac{14}{3}$. Further we multiply 12 by $\frac{1}{2}$, that gives $\frac{12}{2}$ or 6, and finally $\frac{1}{2}$ by $\frac{2}{3}$ gives $\frac{2}{6}$, that is $\frac{1}{3}$. These products together give 95 for the sought product ; but this operation thus can be put in place:

$7\frac{1}{2}$	
$12\frac{2}{3}$	
84	7 by 12 gives 84
$4\frac{2}{3}$	7 by $\frac{2}{3}$ gives $\frac{14}{3}$, that is $4\frac{2}{3}$
6	12 by $\frac{1}{2}$ gives $\frac{12}{2}$, that is 6
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ by $\frac{2}{3}$ gives $\frac{2}{6}$, that is $\frac{1}{3}$
whole product 95.	

Further if $17\frac{2}{5}$ shall be multiplied by $19\frac{4}{9}$, thus the product will be found by the following operation:

$19\frac{4}{9}$		
$17\frac{2}{5}$		17 by 19 gives 323
323		19 by $\frac{2}{5}$ gives $\frac{88}{5}$, that is $7\frac{3}{5}$
$7\frac{3}{5}$	$\frac{27}{45}$	17 by $\frac{4}{8}$ gives $\frac{68}{9}$, that is $7\frac{5}{9}$
$7\frac{5}{9}$	$\frac{25}{45}$	$\frac{4}{9}$ by $\frac{2}{5}$ gives $\frac{8}{45}$
$\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$	

Product $337\frac{60}{45}$, that is $338\frac{15}{45}$, that is $338\frac{1}{3}$.

From these examples it is now sufficient to understand, how numbers which are formed from whole and fractional numbers taken together, can be multiplied by each other both in the first as well as in the second way, since then by the cases occurring it can easily be seen, which method is more useful; only if we have had enough practice in both ways. This last method is only performed for the multiplication of two numbers ; but the same can also be applied for the multiplication more numbers by each other. Then initially we may only multiply two numbers by each other, and then this product by the third, and further by what arises from the fourth, until we are finished with all the numbers; since then the last product will be that sought.

CAPITEL 8

VON DER MULTIPLICATION MIT GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man nur den Zähler mit der ganzen Zahl und lässt den Nenner unverändert. Gleichergestalt, wann eine ganze Zahl samt einem Bruche durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man dadurch die ganze Zahl und auch den Bruch insbesondere; da dann diese beiden Producte zusammen das gesuchte Product ausmachen. Bei dem gefundenen Bruche hat man aber ferner zu sehen, Ob derselbe mehr als ein Ganzes enthalte, oder auch, ob derselbe verkleinert werden könne, als in welchen Fällen es dienlich ist, den Bruch in der leichtesten Form auszudrücken.*

Der Grund dieses Satzes beruhet auf der Natur der Multiplication, als welche nichts anders ist als eine Addition vieler Zahlen, so einander gleich sind, wie oben bei der Multiplication mit ganzen Zahlen ist dargethan worden. Wann also ein Bruch mit 2 multiplicirt werden soll, so darf man nur denselben Bruch zwei mal setzen und diese beiden Brüche zusammen addiren, welche, weilen sie sowohl gleiche Nenner als gleiche Zähler haben, so wird die Summe oder das Product ein Bruch sein, dessen Zähler zwei mal so gross als der Zähler des gegebenen Bruchs, der Nenner aber dem Nenner des gegebenen Bruchs gleich ist. Wann derowegen ein Bruch mit 2 multiplicirt werden soll, so muss man nur den Zähler mit 2 multipliciren. Also wird das Product von 2 und $\frac{1}{3}$ oder zwei mal $\frac{1}{3}$ sein $\frac{2}{3}$, und 2 mal $\frac{4}{7}$ wird geben $\frac{8}{7}$ oder $1\frac{1}{7}$. Gleichergestalt, wann ein Bruch mit 3 oder 4 oder einer anderen Zahl multiplicirt werden soll, so geschieht diese Multiplication, wann man den gegebenen Bruch drei mal oder vier mal oder so viel mal als der Multiplicator anzeiget, setzt, und diese Brüche zusammen addirt. Weilen nun diese Brüche einander völlig gleich sind, so addirt man nur die Zähler, das ist, man multiplicirt den Zähler des gegebenen Bruchs mit 3, 4 oder einer anderen Zahl, so gegeben ist. Hieraus erhellet nun, dass, wann ein Bruch mit einer gegebenen Zahl multiplicirt werden soll, das Product gefunden werde, wann man nur den Zähler mit der gegebenen Zahl multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Also wird 3 mal $\frac{1}{2}$ machen $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$; und 4 mal $\frac{3}{14}$ wird geben $\frac{12}{14}$, das ist $\frac{6}{7}$; und 15 mal $\frac{2}{5}$ gibt $\frac{30}{5}$; das ist 6 Ganze. Um also einen Bruch mit einer gegebenen Zahl zu multipliciren, hat man diese Regel: man multiplicirt den Zähler des Bruchs mit der gegebenen Zahl, und unter das Product als den Zähler schreibt man den Nenner des gegebenen Bruchs, so hat man das gesuchte Product.

Zu mehrerer Erläuterung können folgende Exempel dienen.

21 mal $\frac{5}{28}$ macht $\frac{105}{28}$, das ist $3\frac{3}{4}$

$$144 \text{ mal } \frac{19}{60} \text{ macht } \frac{2736}{60}, \text{ das ist } 45\frac{3}{5}$$

$$250 \text{ mal } \frac{27}{50} \text{ macht } \frac{6750}{50}, \text{ das ist } 135.$$

Ob aber gleich diese Regel allhier nur dienet, um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so ist dieselbe doch allgemein und enthält zugleich die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruche. Nämlich, wann ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt werden soll, so darf man gleichfalls nur den Zähler des einen Bruchs mit dem anderen Bruche multipliciren, um den Zähler des gesuchten Products zu bekommen, dessen Nenner der vorige Nenner bleibt. Weilen aber auf diese Art gemeiniglich der Zähler des genannten Bruchs selbst ein Bruch wird, so kann man mit einem solchen Product nicht zufrieden sein; als wann $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden sollte, kommt nach dieser Regel für das Product ein Bruch heraus, dessen Zähler 2 mal $\frac{4}{7}$, das ist $\frac{8}{7}$, und der Nenner 3 ist, woraus man sich aber noch keinen deutlichen Begriff von diesem Product machen kann. Wir werden aber im folgenden aus eben diesem Fundament deutlicher zeigen, wie in solchen Multiplicationen das Product durch einen eigentlichen Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, ausgedrückt werden könne. Allhier aber brauchen wir diese gegebene Regel nur zu solchen Fällen, da ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, als in welchen Multiplicationen diese Regel keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Weilen wir nun durch Hülfe dieser Regel einen jeglichen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren können, so kann auch eine Zahl, so aus einer ganzen und gebrochenen Zahl zusammengesetzt ist, leicht mit einer jeglichen ganzen Zahl multiplicirt werden. Dann da in solchen Fällen der Multiplicator eine ganze Zahl ist, der Multiplicandus aber aus zwei Theilen bestehet, davon einer gleichfalls eine ganze, der andere aber eine gebrochene Zahl ist, so wird das Product gefunden, wann man einen jeglichen Theil des Multiplicandi insbesondere mit dem Multiplicator multiplicirt und die Producte zusammen addirt. Als wann $3\frac{2}{5}$ mit 2 multiplicirt werden sollen, so findet man $6\frac{4}{5}$; dann 2 mal $\frac{2}{5}$ macht $\frac{4}{5}$, und 2 mal 3 macht 6. Item $7\frac{4}{9}$ mit 6 multiplicirt geben $42\frac{24}{9}$, das ist $44\frac{2}{3}$; dann 6 mal $\frac{4}{9}$ gibt $\frac{24}{9}$, das ist $2\frac{2}{3}$, und 6 mal 7 ist 42, wozu die vorigen 2 gethan 44 ausmachen. Man kann aber eben dergleichen Exempel auch auf die vorige Art, obgleich mit grösserer Mühe, ausrechnen, wann man die aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl in einen einzelen Bruch bringet. Als um $3\frac{2}{5}$ durch 2 zu multipliciren, kann man $\frac{17}{5}$ für $3\frac{2}{5}$ schreiben, welche mit 2 multiplicirt $\frac{34}{5}$, das ist geben $6\frac{4}{5}$, wie vorher gefunden worden. Gleichergestalt bei dem andern Exempel werden $7\frac{4}{9}$ in $\frac{67}{9}$ verwandelt, welche mit 6 multiplicirt $\frac{402}{9}$, das ist $44\frac{6}{9}$ oder $44\frac{2}{3}$ geben, wie oben. Diese letztere Art kann also zu einem Beweisthum dienen, dass die vorige ihre Richtigkeit hat.

2. *Wann ein Bruch mit einer ganzen Zahl, welche dem Nenner desselben gleich ist, multiplicirt wird, so wird das Product eine ganze Zahl sein, welche dem Zähler desselben Bruchs gleich ist. Oder wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist der Zähler desselben das Product, welches herauskommt. Ist aber die ganze Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, zwei mal so gross als der Nenner, so ist auch das Product zwei mal so gross als der Zähler; und so viel mal dieselbe Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, grösser ist als der Nenner des Bruchs, eben so viel mal wird auch das Product grösser sein als der Zähler desselben Bruchs.*

Wann also dieser Bruch $\frac{3}{5}$ mit 5, das ist mit seinem Nenner, multiplicirt wird, so muss nach dieser Regel das Product 3, das ist dem Zähler des gegebenen Bruchs, gleich sein. Eben dieses Product aber kommt nach der vorigen Regel, nach welcher wir gelehret haben einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren, heraus; dann wann $\frac{3}{5}$ mit 5 multipliciret wird, so ist das Product $\frac{15}{5}$, das ist 3 Ganze. Hieraus erhellet nun der Grund dieser jetztgegebenen Regel; dann lasst uns einen jeglichen Bruch mit seinem Nenner multipliciren nach der vorgegebenen Regel, so wird das Product ein Bruch sein, dessen Zähler ist der vorige Zähler mit dem Nenner multiplicirt, der Nenner aber wird der vorige Nenner sein. In diesem Bruche lässt sich also der Zähler durch den Nenner dividiren, und der Quotus, welcher den *W* erth des Bruchs ausdrückt, wird der Zähler des gegebenen Bruchs sein. Hieraus ist nun klar, dass, wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, der Zähler desselben das Product anzeigen werde. Ob nun gleich in solchen Fällen eben dieses Product auch durch die vorige Regel gefunden wird, so muss doch dabei eine Multiplication und Division gebraucht werden, welche beiden Operationen nach dieser Regel nicht nöthig sind, indem man nur den blossen Zähler für das Product hinschreiben darf. Also, wann dieser Bruch $\frac{17}{28}$ mit 28 multipliciret wird, so ist das Product 17; und $\frac{121}{125}$ mit 125 multiplicirt gibt 121. Diese Regel aber wird uns im folgenden hauptsächlich dazu dienen, dass man wisse, mit was für einer Zahl man einen Bruch multipliciren müsse, damit das Product eine ganze Zahl werde. Nämlich man sieht hieraus, dass man einen Bruch, damit das Product eine ganze Zahl werde, mit seinem Nenner multipliciren müsse, dann da wird das Product dem Zähler desselben Bruchs gleich sein. Es gibt aber ausser dem Nenner eines Bruchs noch unendlich viel andere Zahlen, durch welche, wann derselbe Bruch multipliciret wird, ganze Zahlen gefunden werden. Dann da das Product dem Zähler gleich wird, wann der Multiplicator der Nenner ist, so ist auch aus der Natur der Multiplication bekannt, dass, wann der Multiplicator zwei mal oder drei mal oder mehr mal grösser genommen werde als der vorige, nämlich der Nenner, alsdann auch das Product eben so viel mal grösser sein müsse als vorher, nämlich als der Zähler desselben Bruchs. Derowegen ist klar, dass so viel mal diejenige Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt werden soll, grösser ist als der Nenner, alsdann das Product eben so viel mal grösser sein werde als der Zähler desselben Bruchs. Also wann $\frac{7}{12}$ mit 24 multipliciret wird, so ist das Product 14; dann weilen hier 24 zwei mal so gross ist als als der Nenner 12, so muss das Product, 14, zwei mal so gross sein als der Zähler 7. Gleichergestalt, wann $\frac{2}{3}$ mit 18 multiplicirt werden soll, so sieht man, dass der Multiplicator 18 sechs mal grösser ist als der Nenner 3; deswegen wird das Product auch sechs mal grösser als der Zähler 2, und folglich 12 sein. Ob es aber gleich unendlich viel Zahlen gibt, welche mit einem Bruche multiplicirt ganze Zahlen hervorbringen, so wird dennoch am vorteilhaftesten sein, sich nur allein des Nenners selbst zu bedienen, weilen auf diese Art das kleinste ganze Product herauskommt, und ohne einige Operation gefunden wird.

3. *Wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product folgendergestalt gefunden: man multiplicirt die Zähler mit einander, und was herauskommt ist der Zähler des Products; gleichergestalt multiplicirt man auch die Nenner mit einander, und was herauskommt ist der Nenner des gesuchten Products. Das Product zweier oder mehr Brüche wird also ein Bruch sein, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist.*

Nach dieser Regel ist also sehr leicht, zwei oder mehr Brüche mit einander zu multipliciren, indem diese Operation bloss in der Multiplication der Zähler und Nenner der gegebenen Brüche besteht; weswegen die Multiplication der Brüche weit leichter fällt als die Addition und Subtraction, als zu welchen erfordert wird, die Brüche vorher zu gleichen Nenneren zu bringen, welches bei der Multiplication nicht vonnöthen ist. Der Grund dieser Regel aber beruhet auf den zwei vorhergehenden Sätzen. Dann nach dem ersten wird ein Bruch mit einer jeglichen Zahl multiplicirt, wann man nur den Zähler mit derselben multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Ob aber gleich diese Regel nur zu Multiplication der Brüche mit ganzen Zahlen ist gebraucht worden, so gilt dieselbe dennoch auch, wann Brllche mit Brüchen multiplicirt werden sollen, wie wir schon oben angemerket haben. Wann man aber nach dieser Regel den Zähler eines Bruchs mit einem anderen Bruche multiplicirt, um den Zähler des Products zu bekommen, so fällt man in diese Schwierigkeit, dass der Zähler des Products gemeiniglich eine gebrochene Zahl wird, und folglich von dem Werthe eines solchen Products kein deutlicher Begriff formirt werden kann. Also wann man $\frac{7}{12}$ mit $\frac{5}{9}$ multipliciren soll, so muss man nach dieser Regel den Zähler 7 mit dem Bruche $\frac{5}{9}$ multipliciren, um den Zähler des Products zu bekommen, welcher also $\frac{35}{9}$ sein wird, der Nenner aber des Products bleibt 12. Also ist in diesem Exempel das Product ein Bruch, dessen Zähler $\frac{35}{9}$ und Nenner 12 ist. Weilen wir aber von keinen anderen Brüchen bisher Meldung gethan, als von solchen, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so müssen wir sehen, ob wir einen solchen uneigentlichen Bruch nicht in einen anderen verwandeln können, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Dieses aber kann durch Hülfe des vorigen Satzes bewerkstelliget werden; dann da ein Bruch seinem Werthe nach unverändert bleibt, wann man beides, Zähler und Nenner, durch eine jegliche beliebige Zahl multiplicirt, so müssen wir hier nur eine solche Zahl suchen, mit welcher, wann Zähler und Nenner multiplicirt werden, ganze Zahlen herauskommen. Wann also der Zähler eines Bruchs selbst eine gebrochene Zahl ist, so darf man nur mit dem Nenner dieser gebrochenen Zahl beides, den Zähler und Nenner des vorgelegten Bruchs, multipliciren. Als im gegebenen Exempel war das

Product ein Bruch, dessen Zähler $\frac{35}{9}$ und Nenner 12 ist; um nun diesen Bruch in eine gewöhnliche Form zu bringen, so multiplieire man Zähler und Nenner mit 9; daher wird nun ein anderer Bruch entspringen, dessen Zähler 35 und Nenner 108 sein wird und welcher dem vorigen völlig gleich ist. Wann derohalben $\frac{7}{12}$ mit $\frac{5}{9}$ multipliciret werden soll, so wird das Product $\frac{35}{108}$ sein, welches auch sehr schön mit der gegebenen Regel übereinstimmt; dann hier ist 35 das Product der Zähler 7 und 5, und 108 das Product von den Nennern 12 und 9; woraus der Grund der gegebenen Regel schon einigermassen erhellet. Um aber den Grund vollkommen anzuzeigen, so lasst uns zwei Brüche betrachten, davon der erste durch den anderen multipliciret werden soll; dieses geschieht nun, wann man den Zähler des ersten mit dem anderen Bruche multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Also wird das Product ein Bruch sein, dessen Nenner dem Nenner des ersten Bruchs gleich ist, der Zähler aber wird für sich ein Bruch sein, dessen Nenner dem Nenner des anderen gegebenen Bruchs gleich, der Zähler aber das Product aus beiden Zählern ist. Wann also dieses Product in gehörige Form gebracht, und nämlich sowohl der Zähler als Nenner durch den Nenner des anderen Bruchs multipliciret wird, so wird das Product in einen ordentlichen Bruch verwandelt werden, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist. Dieses ist also eben die Regel, welche wir im Satze angezeiget haben, um zwei Brüche mit einander zu multipliciren; davon wir auch nun das Fundament deutlich genug erkläret haben. Zu mehrerer Erläuterung aber wird erfordert, die Multiplication mit Brüchen an und für sich selbst weitläufiger auszuführen, welches am füglichsten durch etliche Exempel geschehen wird. Wann eine ganze Zahl oder ein Bruch mit $\frac{1}{2}$ multipliciret werden soll, so wird nichts anders gefragt, als dass man die Hälfte derselben Zahl oder desselben Bruchs finden soll. Dann gleich wie das doppelte oder dreifache von einer Zahl finden nichts anders ist, als dieselbe Zahl mit 2 oder mit 3 multipliciren, so ist auch die Hälfte von einer Zahl finden nichts anders, als dieselbe Zahl mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Wann man demnach die Hälfte von $\frac{3}{5}$ fordert, so muss man $\frac{3}{5}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren, da dann nach der gegebenen Regel $\frac{3}{10}$ herauskommt. Gleichergestalt, wann man wissen will, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{9}{10}$ austragen, so muss man diese Brüche mit einander multipliciren, da dann $\frac{18}{30}$, das ist $\frac{3}{5}$, herauskommt. Dergleichen Exempel folgen noch etliche.

$$\frac{3}{4} \text{ mit } \frac{5}{6} \text{ gibt } \frac{15}{24} \text{ das ist } \frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{3} \text{ mit } \frac{15}{16} \text{ gibt } \frac{15}{48}, \text{ das ist } \frac{5}{16}$$
$$\frac{7}{12} \text{ mit } \frac{12}{7} \text{ gibt } \frac{84}{84}, \text{ das ist } 1.$$

Hieraus erhellet, dass, wann man mit einem Bruche multiplicirt, das Product kleiner werde als die Zahl, welche multiplicirt worden, welches einigermassen wider die Natur der Multiplication zu sein scheinet, weilen multipliciren dem Namen nach vermehren bedeutet. Allein dieser Name ist aus der Multiplication mit ganzen Zahlen hergenommen worden und wird allhier, bei den Brüchen, nur in Ansehung der Operation beibehalten. Die ganze Sache verhält sich aber also: wann ich eine Zahl mit einer anderen Zahl multiplicire, so wird dieselbe Zahl um so viel mal grösser, um so viel mal diese Zahl grösser ist als eins; und wann eine Zahl mit 1 multiplicirt wird, so bleibt dieselbe unverändert. Woraus dann von sich selbst folget, dass, wann eine Zahl mit einer Zahl, so kleiner ist als 1, dergleichen die Brüche sind, multipliciret wird, dieselbe nicht nur nicht vermehret, sondern sogar vermindert werden müsse. Dieses ist aber nur allein von Brüchen zu verstehen, welche kleiner sind als ein Ganzes; dann wann eine Zahl mit einem Bruche, der grösser ist als 1, multiplicirt wird, so wird das Product auch grösser als dieselbe Zahl; als wann man 7 mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, so kommt $\frac{21}{2}$ das ist $10\frac{1}{2}$ heraus, und also mehr als 7. Ferner ist hier auch, wie bei der Multiplication mit ganzen Zahlen, zu beobachten, dass, wann zwei Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, es gleichviel sei, welcher mit dem anderen multiplicirt werde. Also $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciren ist eben so viel als $\frac{3}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, dann in beiden Fällen ist das Product $\frac{6}{15}$ oder $\frac{2}{5}$; demnach ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{5}$ eben so viel als $\frac{3}{5}$ von $\frac{2}{3}$. Und gleichergestalt ist die Hälfte von 6 eben so viel als 6 mal $\frac{1}{2}$, das ist 3.

Aus dieser Operation aber, durch welche wir zwei Brüche mit einander multipliciren gelehret, können leicht 3 und auch mehr Brüche mit einander multiplicirt werden. Dann man multiplicirt erstlich zwei Brüche mit einander, und dann ferner dieses Product mit dem dritten Bruch, und was herauskommt mit dem vierten Bruche, und so weiter, bis man mit allen gegebenen Brüchen multiplicirt [hat]. Hieraus sieht man aber leicht, dass das letzt gefundene Product herauskomme, wann man alle Zähler, und dann auch alle Nenner, mit einander multiplicirt. Also wann diese Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product sein $\frac{24}{120}$, dessen Bruchs Zähler 24 das Product aller Zähler, der Nenner 120 aber das Product aller Nenner ist. Dieses Product $\frac{24}{120}$, oder welches gleichviel ist $\frac{1}{5}$, wird auch gefunden, wann man je nur zwei Brüche mit einander multiplicirt; als $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt gibt $\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$; ferner dieses Product $\frac{1}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt gibt $\frac{3}{12}$, das ist $\frac{1}{4}$; und dieses Product noch mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt gibt $\frac{4}{20}$, das ist $\frac{1}{5}$ wie vorher; sodass also $\frac{1}{5}$ das Product ist, wann man alle diese Brüche mit einander multiplicirt: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$.

Hieraus können wir nun diese Frage beantworten: es sind vier Personen, die erste hat 560 Rubel, die zweite hat $\frac{3}{4}$ mal so viel als die erste, die dritte hat $\frac{2}{5}$ mal so viel als die zweite, und der vierten Vermögen ist $\frac{5}{7}$ von demjenigen, was die dritte hat. Nun ist die Frage, wieviel die drei letzteren Personen haben.

Weilen die zweite $\frac{3}{4}$ mal so viel hat als die erste, deren Vermögen ist 560 Rubel, so wird das Vermögen der zweiten gefunden, wann man 560 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, da dann $\frac{1680}{4}$ oder 420 herauskommt. Also hat die zweite Person 420 Rubel; wann man nun die Geld Summe mit $\frac{2}{5}$ multiplicirt, so gibt das Product $\frac{840}{5}$ oder 168 Rubel das Vermögen der dritten Person. Dieses ferner mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt gibt $\frac{840}{7}$ oder 120 Rubel für das Vermögen der vierten Person. Wann man aber nur das Vermögen der vierten Person allein zu wissen verlanget hätte, so würde dasselbe daraus gefunden werden, dass dasselbe ist $\frac{5}{7}$ von $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ von 560 Rubel. Derowegen, um dieses zu finden, muss man diese Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ mit einander multipliciren und mit dem Product noch 560. Nun aber geben diese Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ mit einander multiplicirt $\frac{30}{140}$, das ist $\frac{3}{14}$, welches Product mit 560 multiplicirt gibt $\frac{1680}{14}$, das ist 120 Rubel, wie oben.

Aus diesen Exempeln erhellet nun, dass öfters nach der gegebenen Regel ein Product gefunden werde, welches hernach entweder durch eine ganze Zahl, oder durch einen leichteren Bruch, als gefunden worden, könne ausgedrückt werden. Dieses geschieht nämlich, wann sich des für das Product gefundenen Bruchs Zähler und Nenner durch einerlei Zahlen dividiren lassen. In solchen Fällen kommt man nun, nach der gegebenen Regel, unnöthiger Weise auf grosse Zahlen und hat hernach noch die Mühe, den gefundenen Bruch abzukürzen und in kleinere Zahlen zu bringen. Derowegen, um dieser Weitläufigkeit abzuhelfen, so wollen wir im folgenden Satze eine Regel geben, durch deren Hülfe man gleich das Product in den kleinsten Zahlen ausgedrückt bekommt und hernach keiner weiteren Reduction vonnöthen hat, wann man nur vorher die Brüche, die mit einander multiplicirt werden sollen, auf die kleinsten Zahlen gebracht hat.

4. *Damit man, wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, gleich das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt bekomme, so muss man sehen, ob irgend ein Zähler mit einem Nenner einen gemeinen Theiler habe, und alsdann beide durch ihren grössten gemeinen Theiler dividiren, und die Quotos an derselben Stelle setzen. Auf diese Art verfährt man mit einem jeglichen Zähler und Nenner, und wann man alle so viel als möglich gegen einander aufgehoben, so multiplicirt man nach der vorigen Regel die Zähler und Nenner, oder vielmehr die Zahlen, welche nach geschehener Aufhebung an derselben Stelle gesetzt worden sind, mit einander, und bekommt also auf diese Art das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt.*

Weilen nach der vorigen Regel zwei und auch mehr Brüche mit einander multiplicirt werden, wann man erstlich alle Zähler und dann auch alle Nenner mit einander multiplicirt, so ist ein jeglicher Zähler ein Factor oder Theiler des Zählers des Products, und gleichergestalt ein jeglicher Nenner ein Factor oder Theiler des Nenners des Products. Wann derohalben irgend ein Zähler mit irgend einem Nenner einen gemeinen Theiler hat, so werden sich auch des Products Zähler und Nenner durch eben denselben

Theiler theilen und folglich in kleinere Zahlen bringen lassen. Wann man derohalben noch vor der Multiplication derselben Zähler und Nenner durch ihren gemeinen Theiler theilet und die Quotienten an derselben Stelle setzt, so ist es eben so viel, als wann man nach geschehener Multiplication den Zähler und Nenner des Products durch denselben gemeinen Theiler dividirte. Durch eine solche Aufhebung also, da ein Zähler und Nenner durch einen gemeinen Theiler dividirt werden, erhält man das Product zugleich in kleineren Zahlen ausgedrückt und hat hernach derselben Reduction nicht mehr vonnöthen. Woraus erhellet, dass, wann man vor der Multiplikation einen jeglichen Zähler gegen einen jeglichen Nenner betrachtet und dieselben durch ihren grössten gemeinen Theiler gegen einander aufhebt, alsdann das Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt gefunden werde. Wann nun zwei oder mehr Brüche mit einander zu multipliciren vorgegeben werden, sieht man vor allen Dingen, ob man einen Zähler und Nenner antreffe, welche einen gemeinen Theiler haben, und dividirt dieselben durch ihren grössten gemeinen Theiler und setzt die Quotos an derselben Stelle. Hierauf sieht man ferner, ob nicht noch mehr dergleichen Zähler und Nenner vorhanden sind, und verfährt mit denselben auf gleiche Weise. Wann sich endlich kein Zähler mehr gegen einen Nenner aufheben lässt, so schreitet man zu der Multiplication, da man dann anstatt der ausgestrichenen Zähler und Nenner, die an derselben Stelle gesetzten Zahlen multiplicirt.

Dieser Vortheil aber, dessen man sich in der Multiplication der Brüche bedienen kann, kann am besten durch Exempel dargethan werden. Lasst uns also $\frac{5}{9}$ mit $\frac{3}{20}$ multipliciren; hier sieht man nun, dass sich der Zähler 5 gegen den Nenner 20 durch 5 aufheben lasse, da dann 1 anstatt 5, und 4 anstatt 20 kommt. Ferner lassen sich 3 und 9 durch 3 verkleinern, und kommt 3 anstatt 9, und 1 anstatt 3. Diese Aufhebung wird nun auf folgende Weise verrichtet:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} \text{ gibt } \frac{1}{12}.$$

Hernach werden, wie die Regel erfordert, die Zähler und Nenner, oder vielmehr die an derselben Stelle gesetzten Zahlen, mit einander multiplicirt, und in diesem Exempel $\frac{1}{12}$ für das Product gefunden. Eben dieses Product wäre aber auf die vorige Art herauskommen als:

$$\frac{5}{9} \text{ mit } \frac{3}{20} \text{ gibt } \frac{15}{180} \text{ das ist } \frac{1}{12}.$$

Weilen aber hier das Product in grossen Zahlen, nämlich $\frac{15}{180}$, ist gefunden worden, und von denselben noch der grösste gemeine Theiler müsste gesucht werden, ehe man auf $\frac{1}{12}$ hat kommen können, so ist die hier gewiesene Operation weit vortheilhafter. Lasst uns ferner durch Hülfe dieses Vortheils folgende Brüche $\frac{15}{28}$ und $\frac{21}{25}$ mit einander multipliciren, so wird die Operation also zu stehen kommen:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{28}}} \text{ mit } \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \text{ gibt } \frac{9}{20}.$$

Nämlich 15 und 25 werden gegen einander mit 5, und 21 und 28 gegen einander mit 7 aufgehabt; da dann das Product $\frac{9}{20}$ gleich in den kleinsten Zahlen ausgedrückt gefunden wird. Wann weiter dieser Bruch $\frac{9}{16}$ mit $\frac{16}{9}$ multiplicirt werden soll, so wird das Product 1 gefunden, wie folget:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{16}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} \text{ gibt } \frac{1}{1}, \text{ das ist } 1.$$

Aus diesem Exempel erhellet, dass, wann in den gegebenen Brüchen je eines Zähler dem Nenner des andern gleich ist, das Product 1 werde. Also gibt $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt 1, und $\frac{5}{6}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt auch 1, und so weiter. Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden, so findet der gewiesene Vortheil gleichermassen statt, indem die ganze Zahl als ein Zähler angesehen werden kann, dessen Nenner 1 ist; gleich wie wir schon oben angemerket, dass zum Exempel $\frac{6}{1}$ für 6 geschrieben werden könne. Wann also ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so kann die ganze Zahl auf gemeldete Art in der Form eines Bruchs, dessen Nenner 1, vorgestellet und die Aufhebung wie vor angebracht werden. Also wann 15 mit $\frac{4}{9}$ multiplicirt werden sollen, wird das Product $\frac{20}{3}$ oder $6\frac{2}{3}$ auf folgende Weise gefunden werden:

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{1} \text{ mit } \frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}} \text{ gibt } \frac{20}{3}, \text{ das ist } 6\frac{2}{3}.$$

Sollen aber mehr als 2 Brüche mit einander multiplicirt werden, so wird dieser Vortheil gleichergestalt angebracht, wie aus folgenden Exempeln zu sehen:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \text{ mit } \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{10}}}{21} \text{ gibt } \frac{1}{21}.$$

Ferner

$$\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{35}}} \text{ mit } \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{55}}} \text{ mit } \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{77}}} \text{ mit } \frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{35}{\cancel{105}}} \text{ gibt } \frac{12}{1225}.$$

Gleichergestalt

$$\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{11}}}{\cancel{88}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} \text{ gibt } \frac{1}{7}.$$

Und also wird in allen dergleichen Exempeln verfahren.

5. *Wann die Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden sollten, keine einzelen Brüche, sondern aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, so kann man entweder dieselben in die Form einzeler Brüche bringen, wie oben ist gelehret worden, und alsdann die Multiplication wie vorher vollziehen. Oder man kann auch ohne diese Reduction einen jeglichen Theil einer Zahl mit einem jeglichen Theil der anderen Zahl multipliciren und alle diese besonderen Producte zusammen addiren, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.*

Diese beiden Arten, Zahlen, welche aus Ganzen und Brüchen bestehen, mit einander zu multipliciren, kommen ihrem Grunde nach vollkommen mit einander überein; sie sind aber der Operation und dem Vortheil nach sehr von einander unterschieden. Dann öfter bedient man sich der ersteren mit grösserem Vortheil, öfters aber der anderen, sodass keine der anderen für sich vorgezogen zu werden verdient; weswegen also nöthig ist, sich in beiden zu üben. In welchen Fällen es aber dienlicher ist, sich der einen oder der anderen zu bedienen, wird aus der weiteren Ausführung einer jeglichen erhellen. Die erste Art besteht nun darinn, dass man die aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzten Zahlen in die Form einzeler Brüche bringt, und die Multiplication nebst denen Vortheilen, wie im vorigen Satze gelehret worden, verrichtet.

Wir haben aber schon oben in dem sechsten Capitel gelehret, dass eine aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werde, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und zum Product den Zähler addirt, als welche Summe der Zähler des einzelen Bruchs sein wird, dessen Nenner dem vorigen Nenner gleich ist. Vermittelst dieser Reduction hat also die Multiplication solcher zusammengesetzten Zahlen nach dieser Art keine weitere Schwierigkeit, weswegen nur noch übrig ist, dieselbe durch einige Exempel zu erläuteren. Wann also $1\frac{1}{3}$ mit $2\frac{1}{2}$ multipliciret werden soll, so wird $\frac{4}{3}$ anstatt $1\frac{1}{3}$, und $\frac{5}{2}$ anstatt $2\frac{1}{2}$ gesetzt, und die Multiplication, wie oben gewiesen worden, folgendergestalt verrichtet:

$$2\tfrac{1}{3} \text{ mit } 2\tfrac{1}{2} \text{ oder } \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \text{ mit } \frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}} \text{ gibt } \frac{10}{3}, \text{ das ist } 3\tfrac{1}{3}.$$

Gleichergestalt werden $3\frac{3}{4}$ mit $5\frac{1}{3}$ multiplicirt:

$$3\tfrac{3}{4} \text{ mit } 5\tfrac{1}{3} \text{ oder } \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \text{ mit } \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ gibt } \frac{20}{1}, \text{ das ist } 20.$$

Wann ein einzeler Bruch mit einer zusammengesetzten Zahl multiplicirt werden soll, so geschieht dasselbe auf gleiche Art, indem man nur die zusammengesetzte Zahl nöthig hat, in einen einzelen Bruch zu verwandeln. Als wann $5\frac{7}{12}$ mit $\frac{21}{25}$ multiplicirt werden soll, so wird $\frac{67}{12}$ für $5\frac{7}{12}$ geschrieben, und wie folget, multiplicirt:

$$5\tfrac{7}{12} \text{ mit } \frac{21}{25} \text{ oder } \frac{67}{\underset{4}{\cancel{12}}} \text{ mit } \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{25} \text{ gibt } \frac{469}{100}, \text{ das ist } 4\tfrac{69}{100}.$$

Wann mehr als 2 zusammengesetzte Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, so geschieht die Operation nach geschehener Reduction zu einzelen Brüchen, wie im vorigen Satze gelehret worden. Als es sollen $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{5}$ mit einander multipliciret werden, so wird das Product folgendergestalt gefunden:

$$2\tfrac{1}{2} \text{ mit } 3\tfrac{1}{3} \text{ mit } 5\tfrac{2}{5} \text{ oder } \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \text{ mit } \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ mit } \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \text{ gibt } 45.$$

Diese Art, aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren, hat insonderheit statt, wann die ganzen Zahlen nicht allzugross sind, als da die Reduction zu einzelen Brüchen um so viel leichter geschehen kann. Sind aber die ganzen Zahlen sehr gross, so ist es dienlicher, sich der anderen Art zu multipliciren zu bedienen, in welcher die zusammengesetzte Zahlen nicht nöthig ist, in einzele Brüche zu verwandeln. Nämlich bei dieser Art betrachtet man die Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, als zusammengesetzte Zahlen, und multiplicirt einen jeglichen Theil der einen mit einem jeden Theil der andern; da dann diese Producte zusammen addirt das verlangte Product geben. Also, wann eine ganze Zahl nebst einem Bruche mit einer ganzen Zahl samt einem Bruche multiplicirt werden soll, so werden erstlich die ganzen Zahlen mit einander multiplicirt, hernach eine jede ganze Zahl mit dem Bruche der anderen, und endlich auch die Brüche mit einander, welche 4 Producte zusammen addirt das gesuchte Product ausmachen. Als wann $7\frac{1}{2}$ mit $12\frac{2}{3}$ multiplicirt werden soll, so multiplicirt man erstlich 7 mit 12, das gibt 84; hernach multiplicirt man 7 mit $\frac{2}{3}$, das gibt $\frac{14}{3}$. Ferner multiplicirt man 12 mit $\frac{1}{2}$, das gibt $\frac{12}{2}$ oder 6, und endlich

$\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ gibt $\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$. Diese Producte zusammen geben 95 für das gesuchte Product; diese Operation aber kommt also zu stehen:

$$
\begin{array}{r|l}
7\frac{1}{2} & \\
12\frac{2}{3} & \\
\hline
84 & 7 \text{ mit } 12 \text{ gibt } 84 \\
4\frac{2}{3} & 7 \text{ mit } \frac{2}{3} \text{ gibt } \frac{14}{3}, \text{ das ist } 4\frac{2}{3} \\
6 & 12 \text{ mit } \frac{1}{2} \text{ gibt } \frac{12}{2}, \text{ das ist } 6 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \text{ mit } \frac{2}{3} \text{ gibt } \frac{2}{6}, \text{ das ist } \frac{1}{3} \\
\hline
\text{Product } 95 \text{ Ganze.} &
\end{array}
$$

Wann ferner $17\frac{2}{5}$ mit $19\frac{4}{9}$ multiplicirt werden soll, so wird das Product durch folgende Operation gefunden werden:

$$
\begin{array}{r|l|l}
19\frac{4}{9} & & \\
17\frac{2}{5} & & \\
\hline
323 & & 17 \text{ mal } 19 \text{ gibt } 323 \\
7\frac{3}{5} & \frac{27}{45} & 19 \text{ mal } \frac{2}{5} \text{ gibt } \frac{88}{5}, \text{das ist } 7\frac{3}{5} \\
7\frac{5}{9} & \frac{25}{45} & 17 \text{ mal } \frac{4}{8} \text{ gibt } \frac{68}{9}, \text{das ist } 7\frac{5}{9} \\
\frac{8}{45} & \frac{8}{45} & \frac{4}{9} \text{ mal } \frac{2}{5} \text{ gibt } \frac{8}{45}
\end{array}
$$

$$\text{Product } 337\tfrac{60}{45}, \text{ das ist } 338\tfrac{15}{45}, \text{ das ist } 338\tfrac{1}{3}.$$

Aus diesen Exempeln ist nun genugsam zu ersehen, wie sowohl auf die erste als zweite Art Zahlen, welche aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, mit einander multiplicirt werden, da dann ein jeder bei vorkommenden Fällen leicht wird sehen können, welche Art dienlicher ist; wann man sich nur in beiden Arten genugsam geübet hat. Diese letztere Art ist zwar nur auf die Multiplication zweier Zahlen gerichtet; dieselbe kann aber auch leicht auf mehr Zahlen mit einander zu multipliciren, applicirt werden. Dann man darf erstlich nur zwei Zahlen mit einander multipliciren, und hernach mit diesem Product die dritte, und weiter mit dem was herauskommt die vierte, bis man mit allen Zahlen fertig ist; da dann das letzte Product das gesuchte sein wird.

CHAPTER 9

ON
DIVISION BY FRACTIONAL NUMBERS

1. *If of two fractions, which have the same denominator, one must be divided by the other, thus the quotient is found, if the numerator of the dividend is divided by the numerator of the divisor. Thus the quotient will be a fraction, of which the numerator is the numerator of the dividend, but the denominator is the numerator of the divisor.*

If two fractions have the same denominator, so we see easily at first, which is greater than the other: then that fraction, of which the numerator is greater, is also the greater. But from this it can be seen further, how many times greater this is than the smaller ; then if the numerator of the first is twice as great as the numerator of the other, then also the fraction itself is twice as great as the other fraction; thus $\frac{4}{5}$ is twice as great as $\frac{2}{5}$; then if $\frac{2}{5}$ be multiplied by 2, then $\frac{4}{5}$ comes from this. Likewise, if the first numerator is three or four times greater than the numerator of the other, then also the fraction is three or four times greater than the other.

Thus from this it is apparent, that as many times as the numerator of the first fraction is greater than the numerator of the second, thus just as many times that fraction to be greater than the other, namely if both fractions have the same denominator. While now nothing else is sought in the division, as how many times a number shall be greater than the other, and the number, which indicates by how many times greater the first is greater than the other, is called the quotient : thus also a fraction divided by another fraction is nothing other than to find how much greater the one is greater than the other, which will be indicate by the quotient. Now thus since of two fractions, which have the same denominator, the first is on that account so much greater than the other, as in so many times the numerator of the same is greater than the numerator of that, thus will of two such fractions the one to be divided by the other, if we divide the numerator of the one to be divided by the numerator of the other. From two such numbers the one is the dividend, or it shall be divided by the other, and the other is the divisor, by which the former shall be divided; now if these fractions have the same denominator, thus the division is done, if we divide the numerator of the dividend by the numerator of the divisor, since that indicates the quotient found, how many times the divisor is contained in the dividend. Now this quotient can be either a whole number or a fraction, depending on whether the dividend holds the divisor a few times or not. But this may be changed at will, so that the quotient can always be expressed by a fraction, of which the numerator is the numerator of the dividend, but the denominator is the numerator of the divisor. But then, if this fraction were found, so we can see, whether the same either is obtained from whole numbers or can be expressed through smaller numbers, as which always has to be attended to. Thus if this fraction $\frac{7}{12}$ shall be divided by this $\frac{5}{12}$, so will the quotient be $\frac{7}{5}$ according to this rule, that is $1\frac{2}{5}$ to be found. Likewise $\frac{8}{11}$ divided by $\frac{6}{11}$ give in the quotient $\frac{8}{6}$ or $1\frac{2}{3}$. Further, if we ask how many times $\frac{5}{21}$ shall be contained in $\frac{15}{21}$, thus we find the quotient 3; and so in the following examples :

$\frac{2}{3}$ into $\frac{5}{3}$ is contained $\frac{5}{2}$ or $2\frac{1}{2}$ times;

$\frac{9}{13}$ into $\frac{6}{13}$ is contained $\frac{6}{9}$ or $\frac{2}{3}$ times.

By all these examples, as overall in division, this proof to be indicated, that we can multiply the divisors by the quotient, in order to see, if the dividend is produced, as which is an indication of the correctness of the division.

2. *Thus if the fractions, of which one shall be divided by the other, do not have equal denominators, hence we need only bring the same to have equal denominators, and as then the division can be performed as shown. Now here this rule follows from this: we multiply the numerator of the dividend by the denominator of the divisor; also in the same manner the denominator of the dividend by the numerator of the divisor, thus, so the former product gives the numerator of the quotient, while the latter gives the denominator.*

If two fractions of unequal denominators shall be brought to equal denominators, then we multiply the numerator and denominator of each by the denominator of the other, as has been shown above already. On that account, if by this means two fractions, of which the one shall be divided by the other, to be brought to the same denomination, thus a fraction will arise for the dividend, of which the numerator shall be the above numerator multiplied by the denominator of the divisor. But the divisor will be changed into another fraction, of which the numerator will be the product of the above numerator and the denominator of the dividend. But by reduction the fractions have a common denominator, which shall be the product of both the above denominators. But if thus the previous given fractions be bought to the same denominators, thus the quotient sought, according to the above proposition, to be a fraction, of which the numerator is the numerator of the dividend, but the denominator is the numerator of the divisor. If therefore both these operations, namely the reduction to equal denominators and the division itself, be merged together into one operation, thus this rule will arise. From two given fractions, of which one shall be divided by the other, the quotient will be a fraction, of which the numerator is the product of the numerator of the dividend and the denominator of the divisor, but the denominator is the product of the numerator of the divisor and the denominator of the dividend. Thus if following this rule $\frac{5}{8}$ were to be divided by $\frac{2}{3}$, thus $\frac{5}{8}$ shall be the dividend, and $\frac{2}{3}$ the divisor; therefore 5 multiplied by 3 gives the numerator of the quotient, and 8 multiplied by 2, that is 16 shall be the denominator of the same, so that consequently $\frac{15}{16}$ shall be the quotient. This operation now usually to be presented in the following manner:

Divisor		Dividend		Quotient
$\frac{2}{3}$	$\times$	$\frac{5}{8}$	|	$\frac{15}{16}$.

Namely after having written the divisor before the dividend, thus we draw straight lines from the numerator of the dividend to the denominator of the divisor, and also from the denominator of the divisor to the denominator of the numerator of the divisor, which intersect and make a cross. Then we multiply according to the direction of this cross, 5, by the denominator of the divisor, 3, so giving the product 15 the numerator of the quotient. Next we multiply the denominator of the dividend, 8, by the numerator of the divisor, 2, thus giving the product 16 as the denominator of the quotient, so that consequently the quotient will be $\frac{15}{16}$. But in order to be more certain of this operation, thus we can bring the first previous fractions to equal these denominators, since then we obtain these fractions $\frac{16}{24}$ and $\frac{15}{24}$ instead of $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{8}$; from which this gives $\frac{15}{16}$ for the quotient on dividing each according to the first proposition. We can then also present the whole following form operation. If $\frac{5}{8}$ were to be divided by $\frac{2}{3}$, thus at once the quotient of can be expressed in such a manner $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$. Then this expression is a fraction, of which the numerator is $\frac{5}{8}$, and the denominator $\frac{2}{3}$, and it follows, according to the nature of fractions, that the quotient arises, if we divide $\frac{5}{8}$ by $\frac{2}{3}$. But in order to bring this unusual form of fraction into the usual form and to change it into another form, the denominator and numerator of this shall be whole numbers, thus we multiply both the numerator and denominator by 8; then since this fraction $\frac{5}{\frac{16}{3}}$ arises, as $\frac{5}{8}$ multiplied by 8 gives 5, and $\frac{2}{3}$ multiplied by 8 gives $\frac{16}{3}$. Now here the numerator is already a whole number ; but while the denominator is still a fraction, then we multiply still once more above and below by 3, thus $\frac{15}{16}$ arises, as before. This method of division also now can serve as a proof of the given rule, in that the above rule follows from this operation.

We can also for further certainty conveniently serve as a proof the division by whole numbers . This can be done namely in the first place by multiplication, in that the product from the divisor and the quotient must be equal to the dividend. In the example given thus must $\frac{2}{3}$ by multiplied by $\frac{15}{16}$ to bring out $\frac{5}{8}$, which also occurs by the rules of multiplication, as follows:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ by } \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{8}{\cancel{16}}} \text{ gives } \frac{5}{8}.$$

Further a proof can be established by division itself, if the calculations are correct ; while, if we divide the dividend by the quotient, the divisor must arise. Thus, in the given example, if $\frac{5}{8}$ be divided by $\frac{15}{16}$, $\frac{2}{3}$ must come out, which also happens, as to be seen from the following operation :

Divisor Dividend Quotient

$$\frac{15}{16} \times \frac{5}{8} \;\Big|\; \frac{80}{120}, \text{ that is } \frac{2}{3}.$$

But in order to gain more exercise in this way of dividing, we will set out a few examples which besides are noteworthy.

If this fraction $\frac{7}{10}$ were to be divided by 2 , thus the quotient will be $\frac{7}{20}$, which is clear from the following operation :

Divisor Dividend Quotient

$$\frac{2}{1} \times \frac{7}{10} \;\Big|\; \frac{7}{20}.$$

Namely instead of 2 we write $\frac{2}{1}$, by which we obtain the form of a fraction and may be served by the given rule. Moreover we see from this, that a fraction may be divided by 2, if we multiply its denominator by 2. Just as this is found by all whole numbers, that's to say, each fraction is divided by a whole number, if instead the denominator of the same is multiplied by a whole number. Thus $\frac{5}{6}$ divided by 3 gives $\frac{5}{18}$; and $\frac{7}{4}$ divided by 5 gives $\frac{7}{20}$. But if the numerator actually is allowed to be divided by the whole number, thus we need only divide the numerator, and the denominator is left unchanged, as $\frac{10}{17}$ divided by 2 gives $\frac{5}{17}$; then from the above operation $\frac{10}{34}$ arises, which is just as much as $\frac{5}{17}$, while the numerator and denominator are divisible by 2. Likewise, if $\frac{24}{35}$ should be divided by 8, thus the quotient would be $\frac{3}{35}$. If therefore a fraction shall be divided by a whole number, thus we see initially, if the numerator itself is allowed to be divided by that, in which case we actually divide the numerator by that, but the denominator is left unchanged, and thus the quotient comes out. But if the numerator cannot be divided by a whole number, thus we leave the numerator unchanged, and multiply the denominator by a whole number, so we have the quotient. In such cases this rule is to be noted well, in that we find the required quotient shorter .

If this fraction $\frac{13}{15}$ shall be divided by $\frac{1}{2}$, thus the quotient will be $\frac{26}{15}$, as seen by this operation :

Divisor		Dividend	Quotient
$\frac{1}{2}$	$\times$	$\frac{13}{15}$	$\frac{26}{15}$ or $1\frac{11}{15}$.

Thus any number will be divided by $\frac{1}{2}$, if we multiply the numerator of the same by 2 ; from which it is clear, that to divide by $\frac{1}{2}$ shall be just as much as to multiply by 2. There is a similar explanation for all fractions, of which the numerator is 1 ; then a fraction will be divided by that, if we only multiply the numerator of the same by the denominator of the divisor. Thus $\frac{5}{4}$ divided by $\frac{1}{3}$ gives $\frac{15}{4}$, or $3\frac{3}{4}$; which is just as much as if we had multiplied $\frac{5}{4}$ by 3. If this fraction $\frac{16}{25}$ were divided by $\frac{2}{5}$, thus the quotient will be $\frac{8}{5}$, as the following operation indicates :

Divisor		Dividend	Quotient
$\frac{2}{5}$	$\times$	$\frac{16}{25}$	$\frac{80}{50}$, that is $\frac{8}{5}$.

This example is therefore to be noted, while the numerator of the dividend 16 to be divided by the numerator of the divisor 2, and in the same way also the denominator of the dividend allows the division of the denominator of the divisor. Then from this we see, that the quotient arises, if we divide the numerator of the dividend by the numerator of the divisor, and the divisor of the dividend by the denominator of the divisor. Thus $\frac{8}{9}$ divided by $\frac{2}{3}$ gives $\frac{4}{3}$, and $\frac{24}{35}$ divided by $\frac{6}{7}$ gives $\frac{4}{5}$. The reasoning for this arises best from the proof by multiplication; since then we see clearly, that if we multiply the quotient found by the divisor, the dividend emerges. But in which cases the operation can be shortened, as will be seen from the following proposition.

3. *The division of fractional numbers can be changed into a mere multiplication, if we invert the divisor and then multiply by that. Moreover, a fraction will be inverted if interchange the numerator and the denominator and put one in place of the other. Now if there is such a change of division into multiplication, thus we can bring thereby all those advantages, which have been established in the previous chapter for multiplication, through which equally the operation thus can be shortened, so that the quotient can become in its shortest form at once, and from that no further reduction to be needed.*

A fraction is inverted if put the numerator in place of the denominator, and the denominator in place of the numerator; thus if $\frac{5}{8}$ were inverted, thus we obtain $\frac{8}{5}$. From this inversion of fractions it is to be noted generally that, if a fraction is smaller than a whole number, then the inverted fraction shall be greater than a whole number; and likewise, if the fraction is greater than 1, thus the inverted one is smaller than 1. The reason for this is clear ; that if in a fraction the numerator is smaller than the denominator, thus also the fraction is less than 1; and if the numerator is greater than the denominator, thus the fraction is greater than 1. It is to be noted further, that two such fractions, of which the numerator and denominator are reciprocally equal to each other, if they are multiplied by each other, always a whole number arises; also $\frac{4}{3}$ multiplied by $\frac{3}{4}$ gives 1, 8 by $\frac{1}{8}$, that is $\frac{8}{1}$ multiplied by $\frac{1}{8}$ also gives 1. While now, as we have shown above, a fraction will be divided by another fraction, if we multiply the numerator of the dividend by the denominator of the divisor and likewise also the denominator of the dividend by the numerator of the divisor, and then we put this product for the numerator of the quotient, but that product for the denominator ; thus we see easily, that truly this quotient will arise, if we multiply the inverted divisor and the dividend; as if $\frac{7}{12}$ were divided by $\frac{4}{5}$, thus according to the first rule a quotient of the following kind to be found:

Divisor		Dividend	Quotient
$\frac{4}{5}$	$\times$	$\frac{7}{12}$	$\frac{35}{48}$.

But now according to the given rule just as this quotient thus is found by the multiplication of the dividend with the inverted divisor :

Divisor	Dividend	Quotient
$\left(\frac{4}{5}\right)\ \frac{5}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{35}{48}$.

From this a pretty relationship is apparent between multiplication and division, namely that division by $\frac{4}{5}$ to be just as much as multiplication by $\frac{5}{4}$; and always, that for each fraction to be divided to be just as much as the same to be multiplied by the inverted fraction. Thus it is the case with a half, that to multiply by $\frac{1}{2}$ is nothing other than to divide by 2 ; and to divide by $\frac{1}{2}$ is nothing other than to multiply by 2 . This transformation of a division into a multiplication does not seem really to make the operation any easier to be done, while in both ways a multiplication must be performed ; alone, since we have understood above by multiplication to have brought some advantage, thus the product at once will be brought into its smallest form, thus by division can the same after being changed into a multiplication offer just the same advantage, by which we will be spared the trouble, for the division besides indicates some special advantage to be understood. But these advantages in multiplication are composed therein, that if we wish two fractions to be multiplied by one another, each numerator is cancelled down against a denominator, which is accomplished by a common divider ; where we put the quotient found in place of the numbers themselves. Just as thus we can make use of these advantages for division, according to which the same is to be transformed into a multiplication, as will be more apparent from the following examples.

I. If $\frac{5}{8}$ shall be divided by $\frac{3}{4}$, thus the division is performed in the following manner and the quotient to be found:

$$\begin{array}{cccc} \text{Divisor} & \text{Dividend} & & \text{Quotient} \\ \left(\frac{3}{4}\right)\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{3} & - \frac{5}{\underset{2}{\cancel{8}}} & \Big| & \frac{5}{6}. \end{array}$$

That is, instead of the divisor $\frac{3}{4}$ we put $\frac{4}{3}$, with that we have to multiply $\frac{5}{8}$ by $\frac{4}{3}$. As then we see, that 4 against 8 can be cancelled by 4, and so we put 1 instead of 4 and 2 instead of 8. After that we multiply 1 by 5, and 3 by 2, thus the quotient sought arises from this in the smallest form, namely $\frac{5}{6}$.

II. Should we divide $\frac{32}{45}$ by $\frac{4}{9}$. The quotient thus will be found in the following manner:

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{Quotient} \\ \left(\frac{4}{9}\right)\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} & - \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{\underset{5}{\cancel{45}}} & \Big| & \frac{8}{5}, \text{ that is } 1\frac{3}{5}. \end{array}$$

Here let 9 and 45 be divided by 9, therefore we write 1 instead of 9, and 5 instead of 45. Further 4 and 32 both can be divided by 4, since then 1 arises for 4, and 8 for 32 ; from which the quotient $\frac{8}{5}$ or $1\frac{3}{5}$ will be found. Therefore $\frac{4}{9}$ is contained one time in $\frac{32}{45}$ and still $\frac{3}{5}$ left over, $\frac{32}{45}$ contains $\frac{4}{9}$ once and still three fifths of $\frac{4}{9}$ in itself. If now we want to know, how much $\frac{3}{5}$ would be of $\frac{4}{9}$, thus we must multiply $\frac{4}{9}$ by $\frac{3}{5}$, since then $\frac{4}{15}$ arises. Therefore $\frac{32}{45}$ to be as the sum of $\frac{4}{9}$ and $\frac{4}{15}$, which is also revealed by addition.

III. We want to known thus number, of which the five eights part amounts to 29. This question so proceeds, that a number must be found, which multiplied by $\frac{5}{8}$ produces 29 ; then five eights of a number is nothing other than the number multiplied by $\frac{5}{8}$. This number will now be found, if we divide 29 by $\frac{5}{8}$, then since this is the quotient so obtained, that the same multiplied by $\frac{5}{8}$ gives 29. Therefore, in order to find the number sought, thus let us divide 29 or $\frac{29}{1}$ by $\frac{5}{8}$:

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{Quotient} \\ \left(\frac{5}{8}\right)\frac{8}{5} & - \frac{29}{1} & \Big| & \frac{232}{5}, \text{ that is } 46\frac{2}{5}. \end{array}$$

Thus the number required is $46\frac{2}{5}$. But that this number has the required property, will be shown by the proof, that if we multiply $46\frac{2}{5}$ by $\frac{5}{8}$, in order to see if 29 comes out :

$$\begin{array}{lcr}
46\frac{2}{5} & & \\
\frac{5}{8} & & \\
\hline
\frac{230}{8}, & \text{that is} & 28\frac{3}{4} \\
\frac{10}{40}, & \text{that is} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & & \text{Sum } 29.
\end{array}$$

4. *If a number composed of a whole number and a fraction may be divided by another number, then we can either divide the whole number and the fraction in particular by the divisor and add the quotients together; or we can bring the dividend together into a single fraction, and as then the division will be performed as we have shown above. But if the divisor is a compound number, then the same must be brought into the form of a single fraction.*

If the dividend as well as the divisor are composite numbers and composed from whole and fractional numbers, thus nevertheless the division has no further difficulty ; as it has been shown already above, how such composite numbers may be changed into a single fraction. Thus, if $4\frac{3}{5}$ were to be divided by $2\frac{1}{2}$, thus we bring both numbers, that is the dividend and the divisor, into single fractions, since then $\frac{23}{5}$ shall be divided by $\frac{5}{2}$, and the quotient will be found as follows:

$$\begin{array}{llll|l}
 & & & & \text{Quotient} \\
\left(\frac{5}{2}\right) & \frac{2}{5} & — & \frac{23}{5} & \frac{46}{25}, \quad \text{that is } 1\frac{21}{25}.
\end{array}$$

This is a sure way to perform all such divisions, and thus it was not necessary for such examples to give special rules as well. But often the operation itself can be markedly shortened, if we divide each part of the dividend in particular by the divisor and the quotients found added together, as the sum of these gives the quotient sought. In this way we have thus no need to transform the dividend into a single fraction, if the same is a composite number ; but the divisor must always be brought into the form of a single fraction. Thus we can divide $30\frac{7}{12}$ by $\frac{5}{6}$, without the reduction considered, as follows:

$$\begin{array}{llll|ll}
\left(\frac{5}{6}\right) & \frac{6}{5} & — & \frac{30}{1} & \frac{36}{1}, & \text{that is } 36 \\
 & & & \frac{7}{12} & \frac{7}{10} & \\
\cline{5-6}
 & & \text{the sought quotient} & & 36\frac{7}{10}. &
\end{array}$$

But if $21\frac{5}{12}$ shall be divided by $5\frac{4}{9}$, thus before all else the divisor $5\frac{4}{9}$ to be changed into a single fraction, which will be $\frac{49}{5}$; but the dividend remains unchanged, and the division to be performed in the following manner:

$$
\begin{array}{lcccl|l}
\left(\frac{49}{9}\right) & \frac{9}{\cancel{49}}_{\,7} & — & \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{1} & & \frac{27}{7} \quad \text{or} \quad 3\,\frac{6}{7} \\
 & \frac{\overset{3}{\cancel{8}}}{49} & — & \frac{5}{\cancel{12}}_{\,4} & & \frac{15}{196} \\
\hline
 & & & \text{Quotient} & & 3\,\frac{183}{196}
\end{array}
$$

But if we just wanted to calculate these examples in the above manner and also to bring the dividend into the form of a simple fraction, which will be $\frac{257}{12}$, so will the division thus come to be put in place:

$$
\begin{array}{lccc|l}
 & & & & \text{Quotient} \\
\left(\frac{49}{9}\right) & \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{49} & — & \frac{257}{\cancel{12}}_{\,4} & \frac{771}{196} \quad \text{or} \quad 3\frac{183}{196},
\end{array}
$$

or as in the above manner. By such examples we can make use of either one or the other way as we wish, und it downs not appear to be necessary to indicate in which cases one or the other way has some advantage over the other ; in that these by diligent practice of the same can be better understood.

CAPITEL 9

VON DER DIVISION MIT GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben einer durch den andern dividirt werden soll, so wird der Quotus gefunden, wann man den Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisoris dividirt. Der Quotus wird also ein Bruch sein, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist.*

Wann zwei Brüche gleichenNenner haben, so sieht man erstlich leicht, welcher grösser ist als der andere: dann derjenige Bruch, dessen Zähler grösser ist, der selbe ist auch der grössere. Hieraus ist aber auch ferner zu ersehen, wieviel mal der grössere grösser ist als der kleinere; dann wann der Zähler des einen zwei mal so gross ist als der Zähler des anderen, so ist auch derselbe Bruch zwei mal grösser als der andere; also ist $\frac{4}{5}$ zwei mal so gross als $\frac{2}{5}$; dann wann $\frac{2}{5}$ mit 2 multiplicirt werden, so kommen $\frac{4}{5}$ heraus. Gleichergestalt, wann des einen Zähler drei oder vier mal grösser ist als der Zähler des anderen, so ist auch derselbe Bruch drei oder vier mal grösser als dieser.

Aus diesem erhellet also, dass so viel mal der Zähler eines Bruchs grösser ist als der Zähler des anderen, eben so viel mal jener Bruch grösser sei als dieser, wann nämlich beide Brüche gleiche Nenner haben. Weilen nun in der Division nichts anders gesucht wird, als wieviel mal eine Zahl grösser sei als die andere, und die Zahl, welche anzeiget, wieviel mal die eine grösser ist als die andere, der Quotus genennet wird: so ist auch einen Bruch durch einen anderen dividiren nichts anders, als finden, wieviel mal einer grösser ist als der andere, welches durch den Quotum angezeiget wird. Da nun also von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, der eine um so viel mal grösser ist als der andere, um so viel mal desselben Zähler grösser ist als der Zähler dieses, so wird von zweien solchen Brüchen einer durch den anderen dividirt, wann man den Zähler des einen durch den Zähler des anderen dividirt. Von solchen zweien Brüchen ist einer der Dividendus, oder der durch den anderen dividirt werden soll, und der andere ist der Divisor, durch welchen dividirt werden soll; wann nun diese Brüche gleiche Nenner haben, so geschieht die Division, wann man den Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisoris dividirt, da dann der gefundene Quotus anzeiget, wieviel mal der Divisor im Dividendo enthalten ist. Dieser Quotus kann nun entweder eine ganze Zahl sein oder ein Bruch, je nachdem der Dividendus den Divisorem just etliche mal in sich begreift oder nicht. Dieses mag sich aber verhalten wie es will, so kann der Quotus allzeit durch einen Bruch ausgedrückt werden, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist. Hernach aber, wann dieser Bruch gefunden worden, so kann man sehen, ob derselbe entweder auf ganze Zahlen gebracht oder durch kleinere Zahlen ausgedrückt ·werden könne, als welches allzeit zu beobachten ist. Wann also dieser Bruch $\frac{7}{12}$ durch diesen $\frac{5}{12}$ dividirt werden soll, so wird nach dieser Regel der Quotus $\frac{7}{5}$, das ist $1\frac{2}{5}$ gefunden. Gleichergestalt $\frac{8}{11}$ durch $\frac{6}{11}$ dividirt geben im Quoto $\frac{8}{6}$

oder $1\frac{2}{3}$. Weiter, wann man fragt wieviel mal $\frac{5}{21}$ in $\frac{15}{21}$ enthalten sei, so findet man den Quotum 3; und also in folgenden Exempeln:

$\frac{2}{3}$ in $\frac{5}{3}$ ist enthalten $\frac{5}{2}$ oder $2\frac{1}{2}$ mal;
$\frac{9}{13}$ in $\frac{6}{13}$ ist enthalten $\frac{6}{9}$ oder $\frac{2}{3}$ mal.

Bei allen diesen Exempeln kann, wie überall in der Division, diese Probe angebracht werden, dass man den Divisorem mit dem Quoto multiplicirt, um zu sehen, ob der Dividendus herauskomme, als welches ein Zeichen der Richtigkeit der Division ist.

2. *Wann also die Brüche, davon einer durch den anderen dividirt werden soll, nicht gleiche Nenner haben, so darf man nur dieselben auf gleiche Benennungen bringen, und alsdann die Division wie gelehret worden verrichten. Hieraus folget nun diese Regel: man multiplicirt den Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris; ingleichem auch den Nenner des Dividendi mit dem Zähler des Divisoris, so gibt das erstere Product den Zähler des Quoti, das letztere aber den Nenner.*

Wann zwei Brüche von ungleichen Nennern zu gleichen Benennungen gebracht werden sollen, so multiplicirt man eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern, wie oben schon gelehret worden. Derohalben, wann auf diese Art zwei Brüche, davon einer durch den anderen dividirt werden soll, zu gleichen Benennungen gebracht werden, so wird für den Dividendum ein Bruch herauskommen, dessen Zähler der vorige Zähler mit dem Nenner des Divisoris multiplicirt sein wird. Der Divisor aber wird in einen anderen Bruch verwandelt werden, dessen Zähler das Product aus dem vorigen Zähler und dem Nenner des Dividendi sein wird. Beide reducirten Brüche aber werden einen gemeinen Nenner haben, welcher das Product beider vorigen Nenner sein wird. Wann aber also die vorgegebenen Brüche zu gleichen Benennungen gebracht worden, so wird der gesuchte Quotus, nach dem vorigen Satze, ein Bruch sein, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist. Wann derohalben diese beiden Operationen, nämlich die Reduction zu gleichen Benennungen und die Division selbst, zusammen in eine Operation geschmolzen werden, so wird diese Regel herauskommen. Von zweien gegebenen Brüchen, deren einer durch den anderen dividirt werden soll, wird der Quotus ein Bruch sein, dessen Zähler das Produkt aus dem Zähler des Dividendi und dem Nenner des Divisoris, der Nenner aber das Product aus dem Zähler des Divisoris und dem Nenner des Dividendi ist. Wann also nach dieser Regel $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so ist $\frac{5}{8}$ der Dividendus und $\frac{2}{3}$ der Divisor; demnach gibt 5 mit 3 multiplicirt den Zähler des Quoti, und 8 mit 2 multiplicirt, das ist 16, den Nenner desselben, sodaß folglich der Quotus $\frac{15}{16}$ sein wird. Diese Operation pflegt nun folgendergestalt vorgestellet zu werden:

Divisor	Dividendus	Quotus
$\frac{2}{3}$ $\times$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{16}$.

Nachdem man nämlich den Divisorem vor den Dividendum geschrieben, so zieht man vom Zähler des Dividendi zum Nenner des Divisoris, und auch vom Nenner des Dividendi zum Zähler des Divisoris gerade Linien, welche sich durchschneiden und ein Kreuz vorstellen werden. Hierauf multiplicirt man nach Anleitung dieses Kreuzes den Zähler des Dividendi, 5, mit dem Nenner des Divisoris, 3, so gibt das Product 15 den Zähler des Quoti. Hernach multiplicirt man den Nenner des Dividendi, 8, mit dem Zähler des Divisoris, 2, so gibt das Product 16 den Nenner des Quoti, sodaß folglich der Quotus $\frac{15}{16}$ sein wird. Um aber von dieser Operation desto gewisser zu sein, so kann man die vorgegebenen Brüche erstlich zu gleichen Benennungen bringen, da man dann anstatt $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{8}$ diese Brüche bekommt $\frac{16}{24}$ und $\frac{15}{24}$; davon dieser durch jenen nach dem ersten Satz dividirt $\frac{15}{16}$ für den Quotum gibt. Man kann sich auch die ganze Operation folgendergestalt vorstellen. Wann $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden sollen, so kann sogleich der Quotus auf solche Art $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$ ausgedrückt werden. Dann diese Ausdrückung ist ein Bruch, dessen Zähler $\frac{5}{8}$ ist, und $\frac{2}{3}$ der Nenner, und ist folglich, nach der Natur der Brüche, der Quotus, so herauskommt, wann man $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt. Um aber diese ungewöhnliche Bruchsform in die gewöhnliche Form zu bringen und diesen Bruch in einen anderen zu verwandeln, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so multiplicire man den Zähler und den Nenner beide durch 8; da dann dieser Bruch $\frac{5}{\frac{16}{3}}$ herauskommt, weilen $\frac{5}{8}$ mit 8 multiplicirt 5 gibt, und $\frac{2}{3}$ mit 8 multiplicirt $\frac{16}{3}$. Hier ist nun der Zähler schon eine ganze Zahl; weilen aber der Nenner noch ein Bruch ist, so multiplicire man noch einmal oben und unten mit 3, so wird $\frac{15}{16}$ herauskommen, wie vorher. Diese Art zu dividiren kann nun auch zum Beweisthum der gegebenen Regel dienen, indem aus dieser Operation die obige Regel folget.

Zu fernerer Gewissheit kann man sich auch der bei der Division in ganzen Zahlen angebrachten Probe bedienen. Dieses kann nämlich erstlich durch die Multiplication geschehen, indem das Product aus dem Divisore und Quoto dem Dividendo gleich sein muß. Im gegebenen Exempel muß also $\frac{2}{3}$ mit $\frac{15}{16}$ multiplicirt $\frac{5}{8}$ herausbringen, welches auch durch die Regeln der Multiplication geschieht, wie folget:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ mit } \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{8}{\cancel{16}}} \text{ gibt } \frac{5}{8}.$$

Ferner kann durch die Division selbst eine Probe angestellet werden, ob die Rechnung ihre Richtigkeit habe; weilen, wann man den Dividendum durch den Quotum dividirt, der Divisor herauskommen muß. Also, im gegebenen Exempel, wann $\frac{5}{8}$ durch $\frac{15}{16}$ dividirt werden, muß $\frac{2}{3}$ herauskommen, welches auch geschieht, wie aus folgender Operation zu ersehen:

$$\begin{array}{cc|c} \text{Divisor} & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{15}{16} & \times \; \frac{5}{8} & \frac{80}{120}, \text{ das ist } \frac{2}{3}. \end{array}$$

Damit man aber in dieser Art zu dividiren eine größere Übung erlange, wollen wir noch einige Exempel anführen, bei welchen besondere Anmerkungen stattfinden.

Wann dieser Bruch $\frac{7}{10}$ durch 2 dividirt werden soll, so wird der Quotus $\frac{7}{20}$ sein, wie aus folgender Operation erhellet:

$$\begin{array}{cc|c} \text{Divisor} & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{2}{1} & \times \; \frac{7}{10} & \frac{7}{20}. \end{array}$$

Nämlich anstatt 2 schreibt man $\frac{2}{1}$, damit man eine Bruchsform bekomme und sich der gegebenen Regel bedienen könne. Man sieht aber daraus, dass ein Bruch durch 2 dividirt werde, wann man seinen Nenner durch 2 multiplicirt. Eben dieses aber findet bei allen ganzen Zahlen statt, nämlich ein jeder Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wann der Nenner desselben mit der ganzen Zahl multiplicirt wird. Also $\frac{5}{6}$ durch 3 dividirt gibt $\frac{5}{18}$; und $\frac{7}{4}$ durch 5 dividirt gibt $\frac{7}{20}$. Wann sich aber der Zähler durch die ganze Zahl würklich theilen lässt, so darf man nur den Zähler theilen, und den Nenner unverändert lassen, als $\frac{10}{17}$ durch 2 dividirt gibt $\frac{5}{17}$; dann nach der vorigen Operation kommt $\frac{10}{34}$ heraus, welches eben so viel ist als $\frac{5}{17}$, weilen sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen. Gleichergestalt, wann $\frac{24}{35}$ durch 8 dividirt werden sollen, so wird der Quotus $\frac{3}{35}$ sein. Wann derohalben ein Bruch durch eine ganze Zahl getheilet werden soll, so sieht man erstlich, ob sich der Zähler dadurch theilen lasse, in welchem Fall man den Zähler dadurch wurklich dividirt, den Nenner aber unverändert lässt, und also den Quotum bekommt. Lässt sich aber der Zähler durch die ganze Zahl nicht theilen, so lässt man den Zähler unverändert, und multiplicirt den Nenner mit der ganzen Zahl, so hat man den Quotum. In solchen Fällen ist nun diese Regel wohl zu merken, indem man dadurch kürzer den verlangten Quotum findet.

Wann dieser Bruch $\frac{13}{15}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so wird der Quotus sein $\frac{26}{15}$, wie aus dieser Operation zu sehen:

Divisor	Dividendus	Quotus
$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{26}{15}$ oder $1\frac{11}{15}$.

Ein jeglicher Bruch wird also durch $\frac{1}{2}$ dividirt, wann man den Zähler desselben mit 2 multiplicirt; woraus erhellet, dass durch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel sei als mit 2 multipliciren. Eine gleiche Bewandtnis hat es mit allen Brüchen, deren Zähler 1 ist; dann dadurch wird ein Bruch dividirt, wann man nur den Zähler desselben mit dem Nenner des Divisoris multiplicirt. Also $\frac{5}{4}$ durch $\frac{1}{3}$ dividirt $\frac{15}{4}$ gibt oder $3\frac{3}{4}$; welches eben so viel ist, als wann man $\frac{5}{4}$ mit 3 multiplicirt hätte. Wann dieser Bruch $\frac{16}{25}$ durch $\frac{2}{5}$ dividirt werden soll, so wird der Quotus $\frac{8}{5}$ sein, wie folgende Operation weiset:

Divisor	Dividendus	Quotus
$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{80}{50}$, das ist $\frac{8}{5}$.

Dieses Exempel ist deswegen zu merken, weilen sich der Zähler des Dividendi 16 durch den Zähler des Divisoris 2, und ingleichem auch der Nenner des Dividendi durch den Nenner des Divisoris theilen lässt. Dann hieraus sieht man, dass der Quotus herauskommt, wann man des Dividendi Zähler durch den Zähler des Divisoris, und den Nenner des Dividendi durch den Nenner des Divisoris dividirt. Also $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt gibt $\frac{4}{3}$, und $\frac{24}{35}$ durch $\frac{6}{7}$ dividirt gibt $\frac{4}{5}$. Der Grund hievon ergibt sich am besten aus der Probe durch die Multiplication; dann da sieht man deutlich, dass, wann man den gefundenen Quotum mit dem Divisore multiplicirt, der Dividendus herauskomme. In welchen Fällen aber die Operation abgekürzet werden könne, wird aus folgendem Satze zu ersehen sein.

3. *Die Division der gebrochenen Zahlen kann in eine blosse Multiplication verwandelt werden, wann man den Divisorem umkehrt und damit hernach multipliciret.*
Ein Bruch wird aber umgekehret, wann man den Zähler und Nenner verwechselt und einen an des anderen Stelle setzt. Wann nun Solchergestalt die Division in eine Multiplication ist verwandelt worden, so kann man auch dabei alle diejenigen Vortheile anbringen, welche im vorigen Capitel bei der Multiplication sind gelehret worden, wodurch gleichfalls die Operation so kann abgekürzet werden, dass man gleich den Quotum in seiner kleinsten Form bekommt, und darnach keiner weiteren Reduction mehr bedarf.

Ein Bruch wird umgekehret, wann man den Zähler an des Nenners Stelle, und den Nenner an des Zählers Stelle setzet; also wann $\frac{5}{8}$ umgekehret werden, so bekommt man $\frac{8}{5}$. Von dieser Umkehrung der Brüche ist überhaupt anzumerken, dass, wann ein Bruch kleiner ist als ein Ganzes, alsdann der umgekehrte Bruch grösser sei als ein Ganzes; und hinwiederum, wann der Bruch grösser ist als 1, so ist der umgekehrte kleiner als 1. Der Grund davon ist klar; dann wann in einem Bruche der Zähler kleiner ist als der Nenner, so ist auch der Bruch kleiner als 1; und wann der Zähler grösser ist als der Nenner, so ist der Bruch grösser als 1. Ferner ist auch zu merken, dass zwei solche Brüche, deren Zähler und Nenner wechselsweise einander gleich sind, wann sie mit einander multiplicirt werden, allezeit ein Ganzes herausbringen; also $\frac{4}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt gibt 1, und 8 mit $\frac{1}{8}$, das ist $\frac{8}{1}$ mit $\frac{1}{8}$ multiplicirt gibt auch 1. Weilen nun, wie oben gelehret, ein Bruch durch einen anderen Bruch dividirt wird, wann man den Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris, ingleichen auch den Nenner des Dividendi mit dem Zähler des Divisoris multiplicirt, und dann jenes Product für den Zähler des Quoti, dieses aber für den Nenner setzt; so sieht man leicht, dass eben dieser Quotus herauskommen werde, wann man den Divisorem umkehret und damit den Dividendum multiplicirt; als wann $\frac{7}{12}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt werden soll, so wird nach der ersteren Regel der Quotus folgendergestalt gefunden:

$$\begin{array}{ccc|c} \text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{4}{5} & \times & \frac{7}{12} & \frac{35}{48}. \end{array}$$

Nach der jetzo gegebenen Regel aber wird eben dieser Quotus durch die Multiplication des Dividendi mit dem umgekehrten Divisore also gefunden:

$$\begin{array}{cc|c} \text{Divisor} & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \left(\frac{4}{5}\right)\ \frac{5}{4} & \text{mit } \frac{7}{12} & \frac{35}{48}. \end{array}$$

Hieraus erhellet nun eine schöne Verwandtschaft zwischen der Division und Multiplication, nämlich dass durch $\frac{4}{5}$ dividiren eben so viel sei als mit $\frac{5}{4}$ multipliciren; und allezeit, dass durch einen jeglichen Bruch dividiren eben so viel sei als mit demselben umgekehrten Bruche multipliciren. Also ist mit einem Halben, das ist mit $\frac{1}{2}$ multipliciren nichts anders als durch 2 dividiren; und durch $\frac{1}{2}$ dividiren ist nichts anders als mit 2 multipliciren. Diese Verwandlung der Division in eine Multiplication scheinet zwar die Operation nicht leichter zu machen, weilen auf beide Arten einerlei Multiplicationen verrichtet werden müssen; allein, da wir oben bei der Multiplication einige Vortheile anzubringen gelehret, dadurch das Product gleich in seiner kleinsten Form herausgebracht wird, so können bei der Division, nachdem dieselbe in eine Multiplication ist verwandelt worden, eben dieselben Vortheile angebracht werden, wodurch man der Mühe überhoben wird, für die Division besondere Vortheile sow·ohl anzuzeigen als zu erlernen. Diese Vortheile bei der Multiplication bestehen aber darinn, dass man von zwei Brüchen, welche mit einander multiplicirt werden sollen, je einen Zähler gegen einem Nenner aufhebt, welches durch einen gemeinen Theiler geschieht; da man an die Stelle derselben Zahlen die gefundenen Quotos setzet. Eben dieses Vortheils kann man sich also bei der Division bedienen, nachdem dieselbe in eine Multiplication ist verwandelt worden, wie aus folgenden Exempeln mit mehrerem erhellen wird.

I. Wann $\frac{5}{8}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden sollen, so wird die Division folgendergestalt verrichtet und der Quotus gefunden werden:

Divisor Dividendus Quotus

$$\left(\frac{3}{4}\right)\ \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{3} - \frac{5}{\underset{2}{\cancel{8}}} \quad\Big|\quad \frac{5}{6}.$$

Nämlich anstatt des Divisoris $\frac{3}{4}$ setzt man $\frac{4}{3}$, damit man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{4}{3}$ zu multipliciren habe. Alsdann sieht man, dass 4 gegen 8 durch 4 können aufgehoben werden, und setzt man also 1 anstatt 4 und 2 anstatt 8. Hernach multiplicirt man 1 mit 5, und 3 mit 2, so kommt der gesuchte Quotus in seiner kleinsten Form, nämlich $\frac{5}{6}$, heraus.

II. Sollen $\frac{32}{45}$ durch $\frac{4}{9}$ dividirt werden. Der Quotus wird also folgendergestalt gefunden:

Quotus

$$\left(\frac{4}{9}\right)\ \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} - \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{\underset{5}{\cancel{45}}} \quad\Big|\quad \frac{8}{5}\text{, das ist } 1\frac{3}{5}.$$

Hier lassen sich 9 und 45 durch 9 theilen, deswegen schreibt man 1 anstatt 9, und 5 anstatt 45. Ferner 4 und 32 lassen sich beide durch 4 theilen, da dann 1 für 4, und 8 für 32 zu stehen kommen; woraus der Quotus $\frac{8}{5}$ oder $1\frac{3}{5}$ gefunden wird. Derowegen ist $\frac{4}{9}$ in $\frac{32}{45}$ ein mal und noch $\frac{3}{5}$ mal enthalten, das ist, $\frac{32}{45}$ enthält $\frac{4}{9}$ ein mal und noch drei Fünftel von $\frac{4}{9}$ in sich. Wann man nun wissen wollte, wieviel $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$ wären, so muss man $\frac{4}{9}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciren, da dann $\frac{4}{15}$ herauskommt. Derowegen muss $\frac{32}{45}$ so viel sein als $\frac{4}{9}$ und $\frac{4}{15}$ zusammen, welches auch die Addition ausweiset.

III. Man verlanget diejenige Zahl zu wissen, davon fünf achte Theil 29 ausmachen. Diese Frage läuft da hinaus, dass eine Zahl gefunden werden soll, welche mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt 29 herausbringet; dann fünf Achtel einer Zahl ist nichts anders als dieselbe Zahl mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt. Diese Zahl wird nun gefunden, wann man 29 durch $\frac{5}{8}$ dividirt, dann da ist der Quotus so beschaffen, dass derselbe mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt 29 gibt. Derowegen, um die gesuchte Zahl zu finden, so lasst uns 29 oder $\frac{29}{1}$ durch $\frac{5}{8}$ dividiren:

$$\begin{array}{cccc|l} & & & & \text{Quotus} \\ \left(\frac{5}{8}\right) & \frac{8}{5} & - & \frac{29}{1} & \frac{232}{5}, \text{ das ist } 46\frac{2}{5}. \end{array}$$

Die verlangte Zahl ist also $46\frac{2}{5}$. Dass diese Zahl aber die verlangte Eigenschaft habe, wird die Probe ausweisen, wann man $46\frac{2}{5}$ mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt, um zu sehen, ob 29 herauskommt:

$$\begin{array}{lll} 46\frac{2}{5} & & \\ \frac{5}{8} & & \\ \hline \frac{230}{8}, & \text{das ist} & 28\frac{3}{4} \\ \frac{10}{40}, & \text{das ist} & \frac{1}{4} \\ \hline & \text{Summe } 29. & \end{array}$$

4. *Wann eine aus Ganzen und einem Bruche zusammengesetzte Zahl durch einen Bruch dividirt werden soll, so kann man entweder die ganze Zahl und den Bruch insbesondere durch den Divisorem dividiren und die Quotos zusammen addiren; oder man kann den zusammengesetzten Dividendum in einen einzelen Bruch bringen, und sodann die Division wie oben gelehret verrichten. Ist aber der Divisor eine zusammengesetzte Zahl, so muss derselbe unumgänglich in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werden.*

Wann sowohl der Dividendus als der Divisor zusammengesetzte Zahlen sind und aus ganzen und gebrochenen Zahlen bestehen, so hat dennoch die Division keine weitere Schwierigkeit; weilen schon oben gelehret worden, wie solche zusammengesetzte Zahlen in einzele Brüche verwandelt werden. Also, wann $4\frac{3}{5}$ durch $2\frac{1}{2}$ dividirt werden sollten, so bringet man beide Zahlen, nämlich den Dividendum und den Divisorem, in einzele Brüche, da dann $\frac{23}{5}$ durch $\frac{5}{2}$ dividirt werden soll, und der Quotus wie folget gefunden wird:

$$\begin{array}{cccc|l} & & & & \text{Quotus} \\ \left(\frac{5}{2}\right) & \frac{2}{5} & - & \frac{23}{5} & \frac{46}{25}, \text{ das ist } 1\frac{21}{25}. \end{array}$$

Dieses ist nun ein sicherer Weg, alle dergleichen Divisionen zu verrichten, und wäre also nicht nöthig, für solche Exempel besondere Regeln zu geben. Allein öfters kann die Operation merklich abgekürzet werden, wann man einen jeden Theil des Dividendi insbesondere durch den Divisorem dividirt und die gefundenen Quotos zusammen addirt, als deren Summe den verlangten Quotum gibt. Auf diese Art hat man also nicht nöthig, den Dividendum, wann derselbe eine zusammengesetzte Zahl ist, in einen einzelen Bruch zu verwandeln; der Divisor aber muss allezeit in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werden. Also kann man $30\frac{7}{12}$ durch $\frac{5}{6}$ dividiren, ohne gedachte Reduction, wie folget:

$$\begin{array}{llcl|l}
\left(\frac{5}{6}\right) & \frac{6}{5} & — & \frac{30}{1} & \frac{36}{1}, \text{ das ist } 36 \\
 & & & \frac{7}{12} & \frac{7}{10} \\
\hline
 & \text{der gesuchte Quotus} & & & 36\frac{7}{10}.
\end{array}$$

Wann aber $21\frac{5}{12}$ durch $5\frac{4}{9}$ dividirt werden soll, so muss vor allen Dingen der Divisor $5\frac{4}{9}$ in einen einzelen Bruch, welcher $\frac{49}{5}$ sein wird, verwandelt werden; der Dividendus aber kann unverändert bleiben, und die Division folgendergestalt verrichtet werden:

$$\begin{array}{llcl|l}
\left(\frac{49}{9}\right) & \frac{9}{\cancel{49}_{\,7}} & — & \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{1} & \frac{27}{7} \text{ oder } 3\frac{6}{7} \\
 & \frac{\overset{3}{\cancel{8}}}{49} & — & \frac{5}{\cancel{12}_{\,4}} & \frac{15}{196} \\
\hline
 & & & \text{der Quotus} & 3\frac{183}{196}
\end{array}$$

Wollte man aber eben dieses Exempel auf die vorige Art ausrechnen und auch den Dividendum in die Form eines simpeln Bruchs bringen, welcher $\frac{257}{12}$ sein wird, so wird die Division also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{llcl|l}
 & & & & \text{Quotus} \\
\left(\frac{49}{9}\right) & \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{49} & — & \frac{257}{\cancel{12}_{\,4}} & \frac{771}{196} \text{ oder } 3\frac{183}{196},
\end{array}$$

oder wie auf obige Art. Bei dergleichen Exempeln kann man sich nach Belieben entweder dieser oder jener Art bedienen, und scheinet nicht nöthig zu sein anzuzeigen, in welchen Fällen eine vor der anderen einigen Vorzug haben möchte; indem sich dieses durch eine fleissige Übung von selbsten viel besser weiset.